

Evaluación de la distancia Hausdorff en un sistema automático de reconocimiento de huellas dactilares

Henry Argüello Fuentes*

Fecha de Recibido: 13/12/2007 Fecha de Aprobación: 15/04/2008

Resumen

En esta investigación se presenta una nueva técnica para el reconocimiento de huellas dactilares usando como medida de discriminación la distancia Hausdorff. Se realiza la descripción de la etapa de preprocesamiento de la huella dactilar, su posterior almacenamiento, ubicación de la zona de referencia y finalmente el proceso de comparación. Además, se ilustran las características de la utilización de la distancia Hausdorff para medir el grado de similitud entre dos imágenes. Se realiza la descripción de los detalles de implementación de esta técnica de reconocimiento en un sistema de computo de propósito general y por último se muestran diversas medidas de desempeño del sistema usando una base de datos de huellas dactilares internacionalmente reconocida.

Palabras clave: *Hausdorff, Huella Dactilar, Identificación, Reconocimiento, Núcleo.*

Abstract

In this investigation is presented a new technique for fingerprint recognition; Hausdorff distance is used to measure the difference between two fingerprints. Description of fingerprint preprocessing, storing, kernel locating and comparing is realized. Furthermore, details about to using Hausdorff distance to compare two images is presented. It is realized description of implementation details of this recognition technique in a computer system of general purpose and at the end it is showed several system performance measurements using a international database.

Keywords: *Hausdorff, fingerprint, Identification, recognition, kernel.*

*Profesor tiempo completo, Universidad Industrial de Santander, Colombia,
henarfu@uis.edu.co

1 Introducción

En la actualidad los sistemas de autenticación basados en huellas dactilares son utilizados ampliamente en diversas aplicaciones, tales como control de accesos, verificación de identidad, sistemas de identificación, sistemas de seguridad entre otras [5], [13], [24], [25][‡]. La amplia utilización de estos sistemas se debe principalmente a la facilidad de su implementación, bajo costo comparado con otros sistemas de identificación y altas tasas de confiabilidad. Estos sistemas en condiciones normales pueden alcanzar tasas de reconocimiento del orden del 97% según [23], y tasas de hasta el 91% si se le exige al sistema que no permita ningún falso positivo. Como puede observarse aunque las tasas de reconocimiento son altas aun son necesarias nuevas técnicas para aumentar la eficiencia de estos sistemas [5]. La dificultad para lograr tasas mas altas de reconocimiento está principalmente en los siguientes problemas: existen huellas con un alto grado de rotación con respecto al patrón de referencia, se presentan grandes translaciones de las huellas que hace que no aparezcan las mismas zonas en una toma distinta de la huella dactilar del mismo individuo, existen grandes diferencias entre dos huellas del mismo individuo tomadas en instantes distintos de tiempo, se presenta ruido en la etapa de adquisición de la huella dactilar, entre otras [9][14][23]. Además de necesitar tasas altas de reconocimiento actualmente también resulta importante la velocidad de comparación, la cantidad de memoria usada para realizar los cálculos, el espacio que ocupa cada patrón de referencia en la base de datos, la capacidad de los sistemas para reducir al mínimo los falsos positivos entre otras [13][23][24]. Las investigaciones continúan en esta área ya que nuevas estrategias de comparación son siempre útiles debido a que nuevos dispositivos de computo aparecen continuamente y otras formas de sensar huellas digitales están también disponibles[5][14][22][24]. La distancia Hausdorff es una de estas técnicas, mediante ella se puede tomar la decisión final sobre la autenticidad de una huella dactilar. Diversos trabajos han sido escritos alrededor del uso de esta medida para comparar dos imágenes y ya ha sido utilizada junto con las redes neuronales artificiales para procesar huellas digitales [1-4][8][10][15][19][21][27].

Según [23] la forma de comparación de huellas dactilares se pueden clasificar en 3 grandes grupos: basados en correlación, basados en

[‡] Se concede autorización para copiar gratis parte o todo el material publicado en la Revista Colombiana de Computación siempre y cuando las copias no sean usadas para fines comerciales, y que se especifique que la copia se realiza con el consentimiento de la Revista Colombiana de Computación.

minutas y basados en el patrón de las crestas de la huella digital. En esta última categoría se explotan características tales como la geometría del patrón de la huella digital. En este trabajo de investigación se desarrolla una técnica para comparar dos huellas digitales basada en la distancia Hausdorff, que pertenece a esta tercera categoría de comparación de los sistemas de reconocimiento. En una primera parte de este artículo se realiza una descripción teórica de la distancia Hausdorff y de las etapas involucradas en el proceso de reconocimiento. Luego se describe el funcionamiento del sistema completo y se realiza un análisis del desempeño del sistema mediante una base de datos internacional. Por último se indican las conclusiones.

2 Estimación del campo direccional

En la figura 1 se puede observar una huella digital tomada mediante un sensor capacitivo. En esta figura pueden observarse algunas características generales de las huellas digitales que serán utilizadas a través de este artículo. Tres porciones de la huella digital son ampliadas para mostrar los valles y las crestas, la zona nuclear y el delta de la huella. Una de las tareas más importantes de este trabajo es localizar la zona nuclear para tener un punto de partida para realizar la comparación. El campo direccional de una huella se define como la dirección de las crestas de la huella tomadas con respecto al eje x y al eje y . Existen diversos trabajos que han planteado diferentes técnicas para calcular el campo direccional [7][9][12][20][25]. En este trabajo se utiliza la técnica de obtener el campo direccional calculando primero su gradiente y realizando un promediado sobre el mismo en las vecindades de cada punto [12]. Este método es uno de los que tiene mayor aceptación ya que origina resultados con un alto grado de coherencia. Si se denota $I(x,y)$ como la imagen en escala de grises de la huella dactilar entonces su campo direccional se calcula mediante el siguiente procedimiento:

a. Se divide la Imagen en $w \times w$ bloques que no se traslapen unos a otros.

b. Se calculan los gradientes verticales y horizontales usando por ejemplo un operado Sobel:

$$G_x(x,y) = \frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \quad (1)$$

$$G_y(x,y) = \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \quad (2)$$

c. Se estima la orientación del centro de cada bloque (x, y) promediando los gradientes cuadrados previamente calculados:

$$A(x, y) = \sum_{k=-w/2}^{w/2} \sum_{l=-w/2}^{w/2} G_x^2(k, l) h(x-k, y-l) \quad (3)$$

$$B(x, y) = \sum_{k=-w/2}^{w/2} \sum_{l=-w/2}^{w/2} G_y^2(k, l) h(x-k, y-l) \quad (4)$$

$$C(x, y) = \sum_{k=-w/2}^{w/2} \sum_{l=-w/2}^{w/2} G_x(k, l) G_y(k, l) h(x-k, y-l) \quad (5)$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2C(x, y)}{A(x, y) - B(x, y)} \right) \quad (6)$$

Donde h es un filtro gaussiano de ancho w expresado mediante la siguiente ecuación:

$$h(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} w} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{w^2} + \frac{v^2}{w^2} \right)} \quad (7)$$

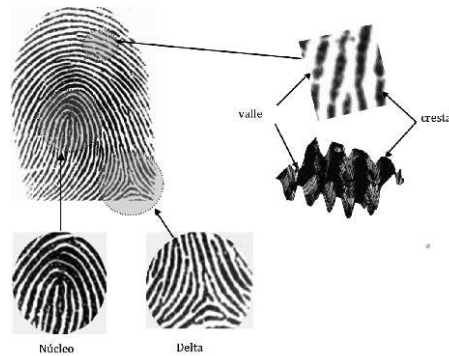


Fig. 1 Elementos de una huella

Las huellas digitales a las que se encuentran sometidos los sistemas de reconocimiento presentan ruido, rotaciones y distorsiones, por este motivo se hace necesario realizar una operación de suavizado sobre el

campo direccional $\theta(x, y)$ Este suavizado se realiza mediante el siguiente procedimiento:

a. Se obtiene una versión continua del campo direccional mediante las siguientes expresiones:

$$\varphi_x(x, y) = \cos(2\theta(x, y)) \quad (8)$$

$$\varphi_y(x, y) = \sin(2\theta(x, y)) \quad (9)$$

Donde φ_x y φ_y representan las componentes en x y y de este campo continuo.

b. El suavizado del campo direccional se realiza mediante una operación de filtrado usando la respuesta al impulso de la ecuación 7 con un ancho w_2

$$\varphi'(x, y) = \sum_{k=-w_2/2}^{w_2/2} \sum_{l=-w_2/2}^{w_2/2} \varphi_x(k, l) h(x - wk, y - wl) \quad (10)$$

Donde w es el ancho de cada bloque y w_2 es el número de bloques usados para realizar el suavizado.

c. Se calcula el campo direccional suavizado mediante la siguiente expresión:

$$\theta'(x, y) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\varphi_y(x, y)}{\varphi_x(x, y)} \right) \quad (11)$$

d. Además se calcula la coherencia del campo direccional mediante (12), que es un número $0 \leq r(x, y) \leq 1$ que proporciona una estimación del grado de confiabilidad de que la medida proporcionada por la ecuación 11 tenga un valor acertado. Si el valor de $r(x, y)$ es cercano a 1 entonces es más confiable la medida que proporciona la ecuación 11 acerca de $\theta'(x, y)$ [26]:

$$r(x, y) = \frac{\sqrt{(A(x, y) - B(x, y))^2 + 4C(x, y)^2}}{A(x, y) + B(x, y)} \quad (12)$$

En la figura 2a se puede observar un ejemplo del campo direccional calculado con la ecuación 11 para la huella de la figura 1. Por motivos de visualización solo se muestra el campo en algunos puntos, sin

embargo este campo se calcula en cada uno de los píxeles de la imagen. En la figura 2b se muestra la coherencia del campo direccional de la figura 2a; calculada mediante la ecuación 12; las zonas blancas indican que el campo direccional en esa zona es más probable que tenga un valor correcto. Las zonas negras indican que esa zona posiblemente está contaminada de ruido o que esa zona no hace parte de la huella dactilar. Por otra parte estas zonas negras pueden también indicar la presencia de la zona nuclear o la presencia de un delta.

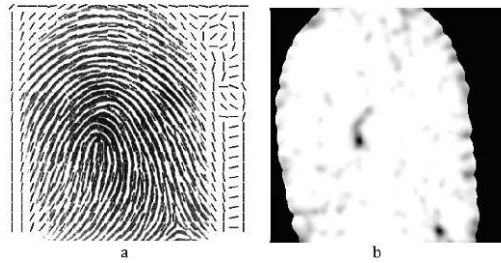


Fig. 2.a Campo direccional, 2b. Coherencia del campo direccional

3 Detección del núcleo de una huella dactilar

Los puntos singulares de una huella dactilar se definen como aquellas zonas en la que el campo direccional presenta las mayores variaciones, tal como se muestra en la figura 3 [13]. Diversas técnicas han sido desarrolladas para determinar la localización de estos puntos singulares, sin embargo la más utilizada es el método de Poincaré propuesto originalmente por Kawagoe y Tojo en 1984. El cálculo de este índice puede ser resumido de la siguiente manera:

- a. Se selecciona una curva C de un tamaño determinado, esta curva está formada por una sucesión de puntos del campo direccional de la huella dactilar. Además se supone que el punto $[i, j]$ está dentro de la curva delimitada por C .
- b. El índice de Poincaré del punto $[i, j]$ denotado por $P[i, j]$ se calcula como la suma de las diferencias entre los puntos adyacentes descritos por la curva C . Para calcular este índice debe aleatoriamente asignársele una dirección al primer elemento de la curva C y asumir que la dirección de los elementos adyacentes es la misma dirección.
- c. Después de calcular los valores de $P[i, j]$ se pueden presentar cuatro posibilidades:

$$P[i,j]= \left. \begin{cases} 0, & \text{si } [i,j] \text{ no pertenece a ningún punto singular} \\ 2\pi, & \text{si } [i,j] \text{ pertenece a una región singular tipo circular} \\ \pi & \text{si } [i,j] \text{ pertenece a una región singular tipo bucle} \\ -\pi & \text{si } [i,j] \text{ pertenece a una región singular tipo delta} \end{cases} \right\} (13)$$

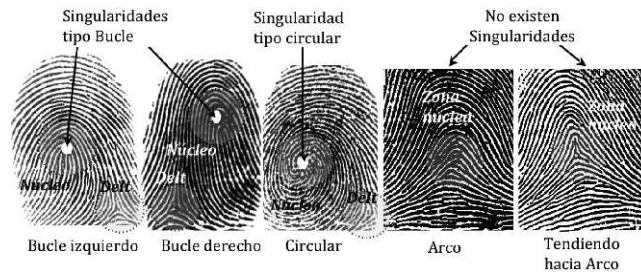


Fig. 3 Tipos de huellas y singularidades.

En la figura 3 se pueden observar los diferentes tipos de singularidades y las respectivas clases de huellas dactilares clasificadas según la forma de su núcleo. Estadísticamente se ha encontrado que en promedio existe el 65.5% de probabilidad de que un individuo posea un huella tipo bucle derecho o izquierdo, un 27.9% de que sea tipo circular y solo un 6.6% de que sea arco o tendiente hacia arco. En las huellas tipo bucle o en la tipo circular el método propuesto funciona correctamente, sin embargo, en las huellas tipo arco y tendiente hacia arco el método propuesto tiende a fallar por la no existencia de singularidades [12][13][26], sin embargo, como se puede observar este último tipo de huellas tiene una baja probabilidad de presentarse en situaciones reales. En la figura 4 se indican los resultados de aplicar el método de Poincare a la base de datos de huellas dactilares que se utilizará en este trabajo de investigación.

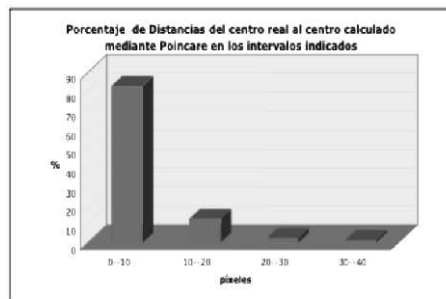


Fig. 4. Error cometido por el método de Poincare

Para obtener la figura 4, se obtienen de forma manual los centros de la base de datos, luego se calculan los mismos centros mediante el método

de Poincare. Se calcula la distancia entre el centro calculado manualmente y los del método de Poincare. Por último se calcula el porcentaje de estas distancias que se encuentran en los intervalos que se indican en la figura 4. Como puede observarse el método propuesto tiene una diferencia entre el centro obtenido manualmente y el calculado mediante el método de Poincare de solo 10 píxeles en el 82.5% de las huellas. Una diferencia de 20 píxeles se encuentra en el 95% y una de 30 píxeles para el 97.5% de las huellas de la base de datos. Como se puede observar los resultados son satisfactorios y de esta forma se puede continuar con las siguientes etapas del sistema de reconocimiento de huellas dactilares partiendo de la base de que se tiene información de la localización del núcleo de las huellas dactilares.

De esta forma se puede definir para una imagen $I(x, y)$ la zona nuclear mediante la siguiente expresión:

$$N(x,y) = I(x,y) \forall \left(i - \frac{M}{2} \leq x \leq i + \frac{M}{2} \right), \forall \left(i - \frac{M}{2} \leq y \leq i + \frac{M}{2} \right) \quad (14)$$

Donde

$[i, j]$ Son las coordenadas del núcleo halladas mediante el método de Poincare.

M Es el ancho de la zona nuclear, que debe ser previamente seleccionado

Este ancho M será materia de estudio más adelante ya que el valor que se escoja para esta variable influye considerablemente en el desempeño del sistema de reconocimiento.

4 Preprocesamiento de la huella dactilar

Las huellas dactilares antes de ser sometidas al proceso de comparación deben ser preprocesadas para disminuir componentes tales como el ruido, las imperfecciones o las variaciones de iluminación de la imagen de la huella dactilar [14][24]. En la figura 5 se pueden observar las principales etapas usadas en este trabajo:

La imagen de entrada es recortada de forma tal que solo la zona de interés es seleccionada. Luego una etapa de normalización es realizada tal que la iluminación sea uniforme a través de toda la imagen de la huella dactilar. A esta última imagen se le calcula el campo direccional

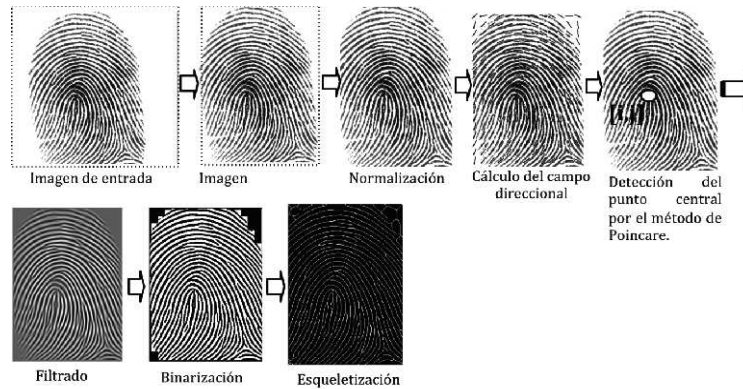


Fig. 5. Preprocesamiento de la imagen de la huella dactilar

como se mencionó en la sección 2 y el punto central es detectado usando el método de Poincare. Para mejorar la calidad de las crestas de la huella dactilar un proceso de filtrado es realizado. Este filtro se implementa teniendo en cuenta la dirección de las crestas en bloques de la huella dactilar. Una vez que las crestas han sido enfatizadas, se realiza la operación de binarización que consiste en obtener una imagen con solo dos valores posibles blanco 1 y negro 0. Por último se realiza la operación de esqueletización para obtener la imagen con la cual se realizará el proceso de reconocimiento.

5 Distancia Hausdorff

En la mayoría de las aplicaciones de reconocimiento de patrones existe la necesidad de calcular una medida que estime el grado de igualdad entre dos conjuntos de valores. Los conjuntos de valores por ejemplo podrían representar una imagen, un sonido, la voz de una persona, la señal proveniente de un sensor electrónico etc [6][10][15][16][17][27]. En algunos casos los conjuntos de valores se comparan directamente[8], sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones se extraen características que representan estos valores[18]. De esta forma la imagen de un rostro, de una huella dactilar, del iris de un ojo puede ser representado por un vector unidimensional a cuyas componentes se les llama características. En otras ocasiones se utilizan directamente las imágenes de los objetos que se desean comparar. Cada una de estas alternativas tiene sus ventajas y desventajas, especialmente a la hora de implementar tales sistemas en un sistema hardware o en el desempeño de los sistemas de reconocimiento. La distancia Hausdorff es una medida que puede ser utilizada para realizar

esta comparación ya sea de las imágenes de los objetos directamente, o la distancia entre los vectores de características que representan estos objetos [8]. Sin embargo, la mayor utilidad de la distancia Hausdorff está en la comparación de objetos a partir de sus imágenes directamente. Esta distancia puede ser solo utilizada en imágenes binarias es decir aquellas que tienen solo dos valores posibles 0 o 1, en otras palabras son aquellas imágenes que tienen únicamente dos colores blanco y negro. Por este motivo para poder utilizar la distancia Hausdorff las imágenes de los objetos que se desean comparar deben ser preprocesadas con el objetivo de convertirlas en imágenes binarias [8].

5.1 Distancia Hausdorff Directa

La distancia Hausdorff directa entre dos secuencias o vectores unidimensionales A y B se calcula mediante la siguiente expresión [1][2][8]:

$$h(A, B) = \max_{b \in B} \left(\min_{a \in A} d(A, B) \right) \quad (15)$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} \quad (16)$$

Donde $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ y $d(A, B)$ es una medida de distancia que generalmente es la distancia euclidiana dada por la ecuación 16, $\max(x)$ y $\min(x)$ son funciones que calculan los valores máximos y mínimos respectivamente. Además, cada punto a_i o b_i puede estar formado por varias componentes de forma tal que $a_i = (a_{ix}, a_{iy}, \dots, a_{iz})$, $b_i = (b_{ix}, b_{iy}, \dots, b_{iz})$.

La ecuación 15 se calcula de la siguiente manera: Supóngase que el vector A tiene K elementos y que el vector B tiene P elementos. De esta forma $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ y $B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$. Se toma a_1 y se calcula la distancia euclidiana a cada uno de los elementos del vector B. De esta forma se obtienen P distancias entre a_1 y cada uno de los elementos del vector B. De estas P distancias se selecciona la menor de ellas. Este proceso se repite para a_2, \dots, a_k de forma tal que se obtiene K distancias. De estas últimas se selecciona la mayor distancia la cual es llamada la distancia Hausdorff directa [8].

5.2 Distancia Hausdorff inversa y total

Es importante resaltar que la distancia $h(A, B) \neq Ah(B,)$. Comúnmente el conjunto A es un patrón que se desea encontrar dentro del objeto B, por este motivo a la distancia $Ah(B,)$ se le llama la distancia Hausdorff inversa. Debido a que estas dos distancias son distintas de forma general la distancia de Hausdorff se calcula de la siguiente forma:

$$H(A, B) = \max(h(A, B), h(B, A)) \quad (17)$$

$$H(A, B) = \max\left(\max_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\|, \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|\right) \quad (18)$$

Donde nuevamente $\|a - b\|$ es la distancia euclidiana entre los puntos del objeto A y el B. Si se definen las siguientes cantidades:

$$d(x) = \min_{a \in A} \|a - x\| \quad (19)$$

$$r(x) = \min_{b \in B} \|x - b\| \quad (20)$$

Las expresiones de las ecuaciones 19 y 20 son funciones de la variable x y el punto más cercano a , o b , del conjunto de puntos del objeto A o B respectivamente. Entonces la distancia Hausdorff se calcula mediante la siguiente expresión,

$$H(A, B) = \max\left(\max_{b \in B} (d(b)), \max_{a \in A} (r(a))\right) \quad (21)$$

Los términos $d(x)$, $r(x)$ llamados superficies de Voronoi. De esta forma la distancia Hausdorff se obtiene calculando previamente la distancia $d(b)$ para todo $b \in B$ y $r(a)$ para todo $a \in A$.

5.3 Distancia Hausdorff entre imágenes

Como se puede apreciar la ecuación 17 es utilizada para calcular la distancia Hausdorff de dos secuencias de puntos A y B, para calcular la distancia Hausdorff de dos imágenes algunos cambios en estas ecuaciones deben ser considerados [1],[2],[8].

En primer lugar las imágenes que serán analizadas son imágenes binarias es decir aquellas cuyos únicos valores posibles son 0 o 1. Estas imágenes resultan normalmente de operaciones de procesamiento de imágenes tales como detectores de bordes, umbralización y operaciones de filtrado [8]. La imagen A se denotará por $A[x, y]$ y la imagen B por $B[x, y]$, de esta manera la distancia Hausdorff directa para imágenes es:

$$h(A, B) = \max_{x, y \in A=1} \left(\min_{x, y \in B=1} (|A[x, y] - B[x, y]|) \right) \quad (22)$$

$$h(B, A) = \max_{x, y \in B=1} \left(\min_{x, y \in A=1} (|A[x, y] - B[x, y]|) \right) \quad (23)$$

Las ecuaciones 22 y 23 son semejantes a sus contrapartes unidimensionales (ecuación 17). Debe observarse que en este caso se calcula la distancia entre cada una de las posiciones (x, y) donde $A[x, y]=1$ y cada uno de los puntos (x, y) donde $B[x, y]=1$. En primer lugar se toman las distancias mínimas, como se explicó anteriormente y por último de estas distancias se toma la mayor. De esta forma se obtiene la distancia Hausdorff directa.

Nuevamente las superficies de Voronoi pueden ser calculadas para el caso bidimensional: $D[x, y]$ y $R[x, y]$:

$$D[x, y] = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \quad (24)$$

Donde (x_c, y_c) son las coordenadas del píxel más cercano de valor no nulo a la posición $(x, y) \in A$.

$$R[x, y] = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \quad (25)$$

Donde (x_c, y_c) son las coordenadas del píxel más cercano de valor no nulo a la posición $(x, y) \in B$. Ahora la distancia Hausdorff puede ser calculada como:

$$h(A, B) = \max_{x, y \in B=1} (D[x, y]) \quad (26)$$

$$h(B, A) = \max_{x, y \in A=1} (R[x, y]) \quad (27)$$

Debido a que las imágenes A y B son binarias, las ecuaciones 26 y 27 pueden ser re-escritas de la siguiente forma:

$$h(A,B)=\max(B[x,y]D[x,y]) \quad (28)$$

$$h(B,A)=\max(A[x,y]R[x,y]) \quad (29)$$

Por último la distancia Hausdorff puede ser calculada mediante:

$$H(A,B)=\max(h(A[x,y],B[x,y]), h(B[x,y],A[x,y])) \quad (30)$$

Las ecuaciones 28 y 29 indican una forma práctica de calcular la distancia Hausdorff directa: se multiplica la imagen B por la superficie de Voronoi de la imagen A y de esta multiplicación se toma el valor máximo.

5.4 Ejemplo de aplicación 1

A continuación se mostrará el cálculo de la distancia Hausdorff entre dos imágenes. En este caso las imágenes son dos triángulos que serán representados mediante sus vértices tal y como se muestra en la figura 6. Las imágenes tienen 64 píxeles de alto por 64 píxeles de ancho. Las superficies de Voronoi $D[x,y]$ y $R[x,y]$ de $A[x,y]$ y $B[x,y]$ respectivamente se muestran en la figura 7.

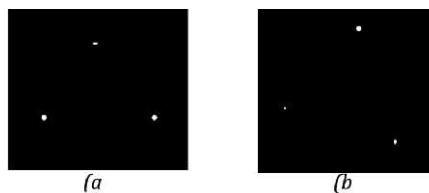


Fig. 6. (a) $A[x,y]$. (b) $B[x,y]$

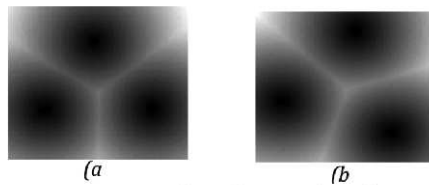


Fig. 7. (a) $D[x,y]$. (b) $R[x,y]$

Las superficies de Voronoi de la figura 7 se pueden interpretar de la siguiente manera: las zonas más claras corresponden a valores o distancias grandes y las zonas oscuras corresponden a valores o distancias más pequeñas. Si se observa las figuras 6 y 7 simultáneamente se puede observar que las zonas negras de la figura 7 (distancias

pequeñas) se encuentran alrededor de los vértices de los triángulos de la figura 6. Las zonas claras o blancas de la figura 7 se encuentran en zonas lejanas de cualquiera de las posiciones en las que se encuentran los vértices de la figura 6. En general las superficies de Voronoi $D[x, y]$ y $R[x, y]$ presentan valores bajos (zonas oscuras) en posiciones (x, y) donde hay píxeles no nulos cercanos en las respectivas imágenes $A[x, y]$ y $B[x, y]$. Los valores altos (zonas claras) se presentan cuando no existen píxeles no nulos cercanos alrededor de las coordenadas (x, y) en las imágenes $A[x, y]$ y $B[x, y]$. En otras palabras si en la posición (x, y) de una superficie de Voronoi se presentan valores bajos quiere decir que existen píxeles no nulos cercanos en la imagen a la cual se le calcula la superficie de Voronoi.

Para terminar el cálculo de la distancia Hausdorff directa se multiplica la figura 6b por la figura 7a. En la figura 8a se muestran estas dos gráficas superpuestas.

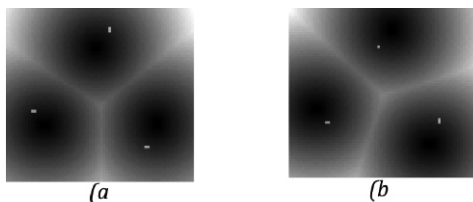


Fig. 8. (a) $B[x, y]D[x, y]$ (b) $A[x, y]R[x, y]$

De la gráfica 8.a se debe tomar la intensidad en la posición (x, y) de uno de los tres puntos blancos que se encuentre en la zona mas clara y este valor constituye la distancia Hausdorff directa $h(A[x, y], B[x, y])$. La intensidad en la posición (x, y) indicada por la posición de uno de los 3 puntos blancos que se encuentre en la zona mas clara de la figura 8b es igual a la distancia Hausdorff inversa $h(B[x, y], A[x, y])$. Por último la distancia Hausdorff es la mayor de las dos anteriores distancias $H(A[x, y], B[x, y])$

5.5 Ejemplo de aplicación 2

Para mostrar la potencialidad de la Distancia Hausdorff para discriminar entre dos imágenes binarias supóngase que nuevamente se desea realizar la comparación entre el triángulo de la figura 6a, pero en esta ocasión con otra imagen un poco distinta a la de la figura 6b tal y como lo muestran las figuras 9a y 9b. La figura 9b a diferencia de la figura 6b ya no representa un triángulo, en este caso los puntos podrían

representar un rectángulo. Como puede observarse en la figura 10b la superficie de Voronoi nuevamente presenta cuatro zonas oscuras correspondientes a las posiciones de los cuatro puntos blancos de la figura 9.b.

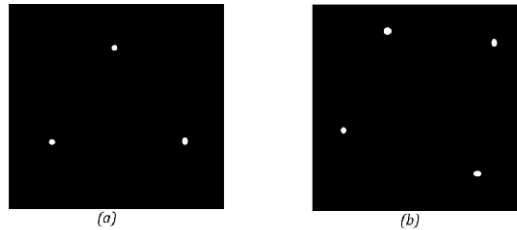
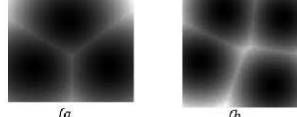
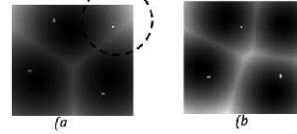


Fig. 9. (a) $A[x,y]$. (b) $B[x,y]$

En la figura 11 se muestran los productos $B[x,y]D[x,y]$ y $A[x,y]R[x,y]$ que permiten estimar las distancias Hausdorff directa e inversa. Es importante observar como en la figura 11a uno de los cuatro puntos de la figura 9b cae en una zona bastante clara lo que hace que la distancia Hausdorff directa de las imágenes de la figura 9 sea mayor que la de las imágenes de la figura 6, esta situación es sobresaltada en la figura 11a por un círculo punteado. Si se observa con detenimiento los puntos en la figura 11b caen en zonas mas claras que las de la figura 8b, por este motivo es de esperar que la distancia Hausdorff inversa de las imágenes de la figura 9 sea nuevamente mayor que la obtenida de las imágenes de la figura 6.

5.6 Sensibilidad al ruido de la distancia Hausdorff

De los ejemplos de aplicación de la sección 4.4 y 4.5 se puede deducir fácilmente que pequeñas rotaciones de una de las imágenes que se desean comparar variarán en gran medida los resultados. Esta es una de las deficiencias de la distancia Hausdorff ya que presenta sensibilidad a la rotación de los patrones que se desean comparar [8][11][19][21]. Por otro lado la translación de una de las imágenes que se desean comparar nuevamente variará el valor de la distancia Hausdorff. Esta es otra de las debilidades de utilizar la distancia Hausdorff ya que pequeños desplazamientos de uno de los patrones que se desean comparar variarán en gran medida los resultados [27]. Estos dos inconvenientes de la distancia Hausdorff origina que si se desean comparar de forma exacta dos imágenes debe analizarse todas las translaciones y rotaciones posibles de uno de los patrones [8].

Fig. 10. (a) $D[x,y]$, (b) $R[x,y]$ Fig. 11. (a) $B[x,y]D[x,y]$ (b) $A[x,y]R[x,y]$

Por otro lado cuando se comparan dos imágenes se desea que la medida utilizada para realizar la comparación presente inmunidad a la ausencia o presencia de píxeles adicionales que comúnmente son llamados ruido. La distancia Hausdorff tal y como ha sido expuesta hasta este momento, no presenta este tipo de inmunidad ya que la presencia de píxeles adicionales o la ausencia de algunos de ellos varía en gran medida esta distancia. Para ilustrar esta situación la distancia Hausdorff entre las imágenes de la figura 12 debería ser cercana a cero ya que tiene el mismo objeto solo que la gráfica de la figura 12b tiene un porcentaje de ruido.

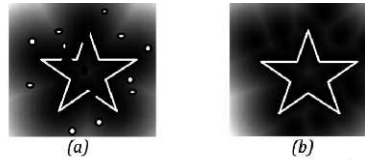
Fig. 12. Dos imágenes (a) $A[x,y]$, (b) $B[x,y]$, cuya distancia Hausdorff debería ser pequeña.

En la figura 13.a puede observarse como varios puntos de la figura 12.b caen en regiones blancas por lo cual la distancia Hausdorff directa tendrá un valor alto. Esta situación puede ser solucionada redefiniendo la ecuación 28, 29 y 30 de la siguiente forma:

$$h(A,B) = \text{quantile}_x(B[x,y]D[x,y]) \quad (31)$$

$$h(B,A) = \text{quantile}_x(A[x,y]R[x,y]) \quad (32)$$

$$H(A,B) = \max(h(A,B), h(B,A)) \quad (33)$$

Fig. 13. Superficies Voronoi de los objetos de la figura 12. (a) $D[x,y]B[x,y]$ (b) $R[x,y]A[x,y]$

Donde, $quantile_x(\)$ es una función que puede ser aproximada de la siguiente forma: Sea $A=(a_0, a_1, a_2, \dots, a_N)$, $x=(0,1]$ y $\vec{A}=(\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N)$ es un vector con las mismas componentes del vector $\vec{a}_0 \leq \vec{a}_1 \leq \vec{a}_2 \dots \leq \vec{a}_N$

$$quantile_x(A) = \vec{A}_{xN} \quad (34)$$

En resumen esta función selecciona el valor de una componente de A tal que xN términos de A son menores que $quantile_x(A)$, es decir $\vec{a}_0 \leq \vec{a}_1 \leq \vec{a}_2 \dots \leq \vec{a}_{xN} \leq quantile_x(A)$. Si $x = 1$ entonces $quantile_x(A) = \max(A)$, si $x = 0.5$ $quantile_x(A) = \text{mediana}(A)$, si $x = 0$ $quantile_x(A) = \min(A)$.

La selección del valor de x es una decisión que depende de la aplicación específica en la que se esté trabajando. Para mostrar el impacto de la selección del valor de x en la figura 14 se ha calculado el valor de la distancia Hausdorff $H(A, B)$ para los objetos de la figura 12 para diferentes valores de la variable x .

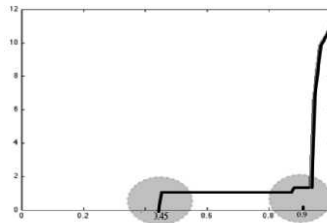


Fig. 14. $H(A, B)$ vs x

En la figura 14 puede observarse como para $x < 0.45$ la distancia Hausdorff es 0. Esto puede interpretarse como que aproximadamente el 45% de los píxeles no nulos de las imágenes de las figuras 12a y 12b están en las mismas posiciones. También puede observarse como más del 90% de los píxeles no nulos de estas dos imágenes están a menos de 2 píxeles de distancia. De esta gráfica puede observarse como tomar $x = 1$ es decir tomar el valor máximo en las ecuaciones 31-33, resulta en un valor que no refleja la realidad ya que la distancia Hausdorff entre los objetos de la figura 12 resultaría en un valor de alrededor de 12 píxeles. Este valor es demasiado alto y tiene el significado que las dos imágenes de la figura 12 no tienen ningún parecido, sin embargo, como puede observarse visualmente estas figuras si tienen un alto grado de similitud.

Del anterior análisis puede concluirse como la selección del valor de x es de vital importancia, ya que un valor muy alto puede conducir a que

la distancia sea muy sensible a pequeños píxeles de ruido presentes en las imágenes que se desean comparar. Por otro lado un valor muy bajo de esta variable puede conducir a que dos objetos que no se parecen tengan un valor bajo de la distancia Hausdorff. Esta última situación es más grave que la primera ya que conduce a que los sistemas de reconocimiento de patrones aumenten sus falsos positivos, es decir, aumenten el número de veces en que estos sistemas aceptan como verdaderas identidades de patrones que no lo son. En la sección 6.1 se mostrará la influencia de la selección de este valor de x en el desempeño del sistema de reconocimiento de huellas dactilares.

6 Sistema de reconocimiento de huellas dactilares

En los sistemas de reconocimiento existen dos fases distintas, en la primera una huella es almacenada o registrada en una base de datos, en la segunda un individuo presenta su huella digital para ser comparada o verificada con alguna previamente almacenada en la base de datos. La primera etapa de almacenamiento se muestra en la figura 15, una huella digital es preprocesada con lo cual se obtiene tanto su imagen binaria como su punto central mediante el método de Poincare, este centro es utilizado para calcular el núcleo de la huella. Pensando en una fase posterior de verificación se calculan versiones rotadas del núcleo de la huella dactilar, además se calculan las superficies de Voronoi del núcleo y de sus versiones rotadas. Toda esta información es almacenada en una base de datos para calcular posteriormente la distancia Hausdorff. Las versiones rotadas y las superficies de Voronoi ocupan en promedio un tamaño de 2MB que es una cantidad internacionalmente aceptada como tamaño de la información para el patrón de referencia.

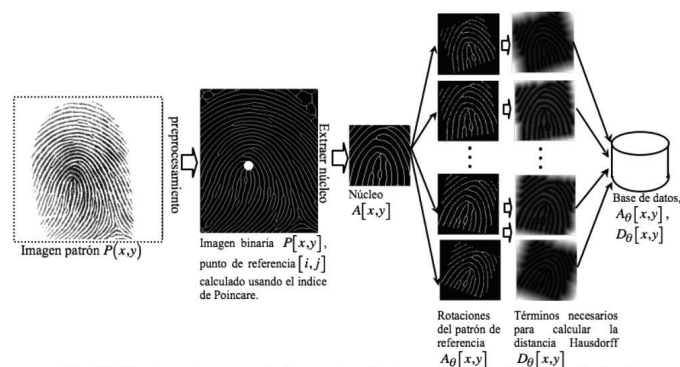


Fig. 15. Sistema de reconocimiento, etapa de almacenamiento de una huella dactilar

La segunda fase es la de verificación que consiste en comparar una huella dactilar con un patrón de referencia previamente almacenado en una base de datos.

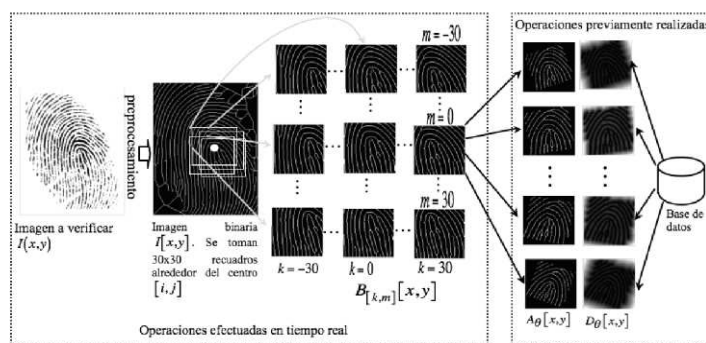


Fig. 16 Sistema de reconocimiento, proceso de verificación de una huella dactilar

En la figura 16 se encuentra resumido el proceso de reconocimiento de una huella dactilar, en una primera fase se realiza la captura de la imagen de la huella dactilar $I(x,y)$ luego se realiza su preprocesamiento explicado en la sección 3 para así obtener la huella binarizada $I(x,y)$ y las coordenadas del núcleo $[i, j]$. Como se explicó en la sección 2, el valor de $[i, j]$ puede tener un error de hasta 30 píxeles, por tanto debe realizarse la búsqueda del núcleo en 30 píxeles alrededor de $[i, j]$. $B_{[k,m]}[x,y]$ son imágenes formadas de desplazar k y m píxeles el núcleo calculado mediante (14). Cada uno de los 30×30 recuadros $B_{[k,m]}[x,y]$ deben ser comparados con cada una de las versiones rotadas del patrón de referencia $A_\theta[x, y]$. Mediante la siguiente ecuación se calcula la distancia Hausdorff para cada uno de los valores k, m y θ .

$$H_{[k,m,\theta]}(A,B) = \max \left(\text{quantile}_x \left(B_{[k,m]}[x,y], D_\theta[x,y] \right), \text{quantile}_x \left(A_\theta[x,y], R_{[k,m]}[x,y] \right) \right) \quad (35)$$

Donde,

$$k = -30 \dots 30 \quad \theta = -30 \dots 30 \quad m = -30 \dots 30 \quad x = 0 \dots 1$$

$R_{[k,m]}[x,y]$ es la superficie de Voronoi de $B_{[k,m]}[x,y]$

Al calcular todos los valores posibles de $H_{[k,m,\theta]}(A, B)$ se debe determinar su valor mínimo que será la que determinará el grado de diferencia entre el patrón de referencia $P(x,y)$ y la imagen de entrada $I(x,y)$. Este valor mínimo se calcula mediante la siguiente expresión:

$$H_{\min}(A,B) = \min_{k \in [-30,30]} \left(\min_{m \in [-30,30]} \left(\min_{\theta \in [-30,30]} H_{[k,m,\theta]}(A,B) \right) \right) \quad (36)$$

Es importante resaltar que para encontrar el mínimo $H_{min}(A, B)$ es necesario calcular la distancia Hausdorff $H_{min}(A, B) 31 \times 31 \times (2 \times 30 + 1) = 58.624$ veces. También es importante resaltar que para calcular esta distancia es necesario determinar el valor de la variable x que mas se ajusta al proceso de comparación de las huellas dactilares.

7 Pruebas y resultados

Para verificar el desempeño del sistema desarrollado se verificó el sistema de reconocimiento mediante una base de datos de huellas dactilares internacionalmente utilizada. Esta base de datos consiste de 10 individuos con 8 tomas distintas de la huella dactilar de cada uno de ellos. La base de datos contiene huellas de los diferentes tipos explicados anteriormente [23].

7.1 Influencia del valor del cuantile de x

La primera prueba que se realizó fue verificar la influencia del *quantile*, utilizado para calcular la distancia Hausdorff (Sección 4.6). Para tal efecto se tomo de cada uno de los 10 individuos de la base de datos una huella dactilar y se contrastó con el resto de individuos y de huellas. Los resultados de esta prueba se muestran en la figura 17. Los porcentajes de aceptación se refieren al porcentaje de huellas distintas del mismo individuo que efectivamente fueron reconocidas por el sistema de reconocimiento como del mismo individuo. Los porcentajes de rechazo se refieren al porcentaje de huellas de otros individuos que efectivamente fueron rechazados por el sistema.

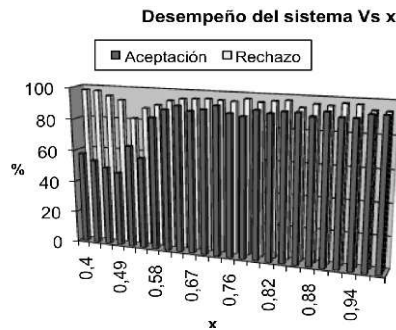


Fig. 17. Desempeño del sistema de reconocimiento Vs el valor de x explicado en la sección 4.6

Como puede observarse en la figura 17 los porcentajes de aceptación y de rechazo son superiores al 90% alcanzando unos valores máximos de 93.25% y 97.25% respectivamente. El valor de x se selecciona tal que los porcentajes de aceptación y rechazo sean lo mayor posibles. Es importante recordar que el porcentaje de rechazo en lo posible debe ser

mayor que el porcentaje de aceptación y su valor debe ser cercano al 100%. Por estos motivos se puede concluir que un valor de x superior a 0.8 es una buena selección. Para este trabajo se seleccionó 0.9 ya que fue el valor de x que proporcionó el mayor porcentaje de reconocimiento (93.25% aceptación, 95.4% rechazo).

7.2 Influencia del tamaño de la zona nuclear

Como se indica en (14) el tamaño M de la zona nuclear debe ser seleccionado. La influencia de este parámetro es importante ya que si se toma un valor muy pequeño es posible que la información contenida en la zona nuclear no sea suficiente para diferenciar las dos huellas digitales. Si el tamaño de la zona nuclear se selecciona muy grande, los procesos matemáticos pueden tardar mucho tiempo y es posible que un porcentaje muy alto de la zona nuclear de una huella no se encuentre presente en la otra, lo que hace más compleja la comparación. Por este motivo se realizó la variación del tamaño de la zona nuclear y se observó los porcentajes de reconocimiento. En la figura 18, se pueden observar los resultados de este experimento:

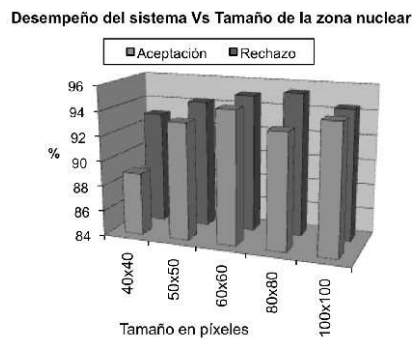


Fig. 18. Desempeño del sistema de reconocimiento Vs el tamaño de la zona nuclear

Como puede observarse en la figura 18 los porcentajes de reconocimiento están por encima del 89% para todos los tamaños de la zona nuclear. Tamaños muy pequeños de la zona nuclear como el que se muestra de 40x40 píxeles originan un porcentaje bajo de reconocimiento tal y como se esperaba. Valores más grandes de la zona nuclear originan porcentajes más altos de reconocimiento por ejemplo para un tamaño de 100x100 píxeles se obtiene un porcentaje de aceptación y rechazo del 94.3% y 94.4% respectivamente. Sin embargo este último tamaño de la zona nuclear tiene la desventaja de que no todas las huellas se pueden comparar ya que la zona nuclear de este tamaño no aparece en todas las huellas. Para tener una idea de esta problemática obsérvese la figura 19, donde se encuentre graficado el

porcentaje de huellas de la base de datos que no puede ser comparadas para cada uno de los tamaños de la zona nuclear. Por ejemplo para un tamaño de 100x100 píxeles el 8.75% de la base de datos no puede ser comparada ya que este porcentaje de huellas no contiene una zona nuclear de ese tamaño.

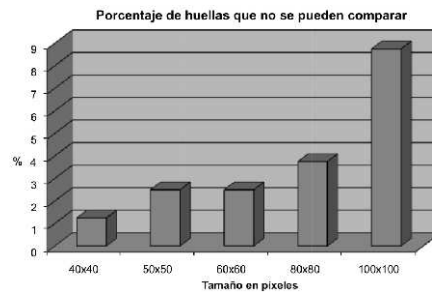


Fig. 19. Porcentaje de huellas de la base de datos que no se puede comparar.

La no existencia de una zona nuclear grande en las huellas digitales, no es el principal problema de seleccionar zonas nucleares grandes. En realidad el principal inconveniente está en que los tiempos de calculo para realizar la comparación de las huellas digitales se incrementa considerablemente con el aumento del tamaño de la zona nuclear. En la figura 20, se puede observar los tiempos promedios que se necesitan para realizar la comparación de dos huellas digitales para varios tamaños de la zona nuclear, el experimento fue realizado en un sistema de computo con un procesador Intel de 2.16 GHz, 1 GB de RAM, 4 MB de memoria cache y un bus de 667 MHz. Los resultados muestran como para un tamaño de 100x100 píxeles de la zona nuclear se necesitan en promedio 12.39 segundos para efectuar la comparación, en contraste para un tamaño de 40x40 píxeles se necesitan tan solo 3.6 segundos, es decir un incremento del 350% en el tiempo de computo. Por tanto seleccionar tamaños grandes de la zona nuclear no resulta atractivo ya que los tiempos de computo se alejan de los tiempos de trabajos similares internacionales [23].

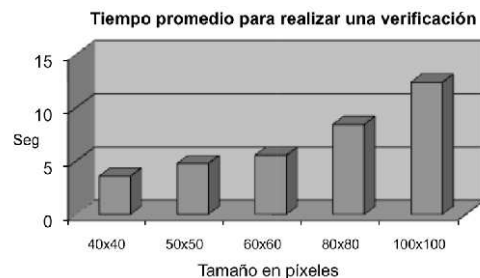


Fig. 20. Tiempo promedio de verificación de dos huellas digitales

De los resultados anteriores se puede deducir que la selección más apropiada para el sistema de reconocimiento es un tamaño de 60x60 píxeles con un tiempo promedio de comparación de 5.55 segundos en el esquema de computo antes mencionado. Para esta configuración el 97.5% de la base de datos posee zona nuclear del tamaño seleccionado. Además, se obtiene un porcentaje de aceptación y de rechazo del 94,6% y 95% respectivamente. Si las huellas que no tienen zona nuclear del tamaño mencionado se toman como errores de reconocimiento del sistema entonces los porcentajes de aceptación y de rechazo serían de 93.4% y 93.8% respectivamente, valores que aun siguen siendo satisfactorios para un sistema de reconocimiento a través de las huellas dactilares.

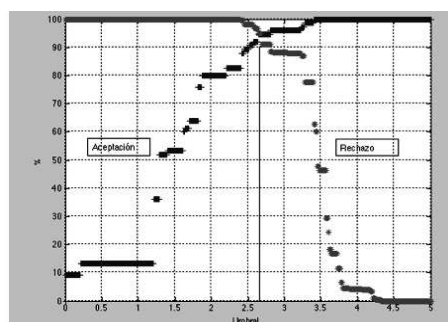


Fig. 21. Selección del umbral de decisión para el sistema de reconocimiento

7.3 Umbral de decisión

Todos los resultados indicados hasta este momento se basan en la existencia de un umbral, que es un número de píxeles que debe tener la distancia Hausdorff entre dos huellas para ser consideradas que pertenecen o no al mismo individuo. Es decir si la distancia Hausdorff calculada mediante la ecuación 36 es menor que el umbral, las dos huellas son consideradas del mismo individuo de otro modo se considera que las huellas son de individuos diferentes. En la figura 21, se encuentran graficados los porcentajes de aceptación y de rechazo para diferentes umbrales. Por ejemplo se pueden observar los casos extremos, si se selecciona el umbral como 0, zona de la izquierda de la figura, se puede observar que todas las huellas serán rechazadas y por lo tanto el porcentaje de aceptación será de 0%, si el umbral es establecido cercano a 5 píxeles, zona de la derecha de la figura, entonces todas las huellas serán aceptadas. El umbral óptimo puede establecerse como aquel valor ante el cual el mayor porcentaje de aceptación es menor que el porcentaje de rechazo. Esta estrategia garantiza que el porcentaje de rechazo se mantenga alto, que es lo normalmente deseado en estos sistemas de reconocimiento. Mediante esta técnica de la figura 21, puede observarse que un valor de 2,65 píxeles es el valor óptimo para

este umbral. Los resultados de esta gráfica fueron calculados para un tamaño de la zona de referencia de 60x60 píxeles que fue el tamaño que mostró los mejores resultados de desempeño.

8 Conclusiones

En este trabajo de investigación se implementó un sistema de reconocimiento basado en la huella dactilar. El sistema alcanzó un porcentaje de falsos positivos de tan solo 3.4% y uno de falso rechazo del 5%. Los resultados obtenidos tienen niveles de eficiencia similares a otros sistemas internacionales de reconocimiento. El proceso de verificación tarda en promedio 5.5 segundos en un sistema de cómputo Intel con procesador de 2.16 GHz y 1GB en RAM. Se verificó que la distancia Hausdorff puede ser utilizada para discriminar entre dos huellas digitales y se determinaron las características de su utilización como medida de discriminación en un sistema de reconocimiento. Se determinó que un tamaño de 60x60 píxeles para la zona nuclear de la huella digital, permitía obtener los mejores resultados en el menor tiempo posible. Por último, se encontró que se puede obtener un umbral de decisión de 2.65 píxeles para determinar si una huella es aceptada o rechazada como perteneciente a un individuo determinado.

Referencias

- [1] A fast binary-image comparison method with local-dissimilarity quantification. Etienne Baudrier Gilles Millon Fr'ed'eric Nicolier Su Ruan. Pattern Recognition, 2006. ICPR 2006. 18th International Conference on.
- [2] A Fast Strategy for Image Matching Using Hausdorff Distance Zhang Zhijia, Huang Shabai and Shi Zelin. Proceedings of the 2003 IEEE. Changsha, China - October 2003. International Conference on Robotics, Intelligent Systems and Signal Processing.
- [3] A Multi-Resolution Technique for Comparing Images Using the Hausdorff Distance, Daniel P. Huttenlocher William J. Rucklidge. 1993 IEEE.
- [4] A new similarity measure using hausdorff distance map. Etienne Baudrier, Gilles Millon, Fr'ed'eric Nicolier, Su Ruan. 2004 International Conference on Image Processing (ICIP).
- [5] A Real Time Fingerprint Recognition System Based On Novel Fingerprint Matching Strategy. Wang Yuan, Yao Lixiu, Zhou Fuqiang. IEEE 2007. The Eighth International Conference on Electronic Measurement and Instruments. ICEMI'2007.

- [6] A Similarity Measure Based on Hausdorff Distance for Human Face Recognition. Yuankui Hu, Zengfu Wang. The 18th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'06). 2006 IEEE.
- [7] An Improved Method of Fingerprint Singular Points Detection. Xiaoqi Peng, Gengxin Wu, Zhangping Peng, and Yuxiao Li ThAP-2. 2007 IEEE International Conference on Control and Automation Guangzhou, CHINA - May 30 to June 1, 2007.
- [8] Comparing Images Using the Hausdorff Distance, Daniel P. Huttenlocher, Gregory A. Klanderman, and William J. Rucklidge. 1993 IEEE.
- [9] Directional Filter Bank-Based Fingerprint Feature Extraction and Matching. Chul-Hyun Park, Joon-Jae Lee, Mark J. T. Smith, Fellow, IEEE, Sang-il Park, and Kil-Houm Park. IEEE transactions on circuits and systems for video technology, vol. 14, no. 1, january 2004.
- [10] Distance-based shape statistics. Guillaume Charpiat Olivier Faugeras Renaud Keriven Pierre Maurel. 2006 IEEE.
- [11] Efficiently comparing face images using a modified Hausdorff distance. Y. Gao. 2003 IEEE.
- [12] Filterbank-Based Fingerprint Matching. Anil K. Jain, Salil Prabhakar, Lin Hong, and Sharath Pankanti. IEEE transactions on image processing, vol. 9, no. 5, may 2000.
- [13] Fingerprint Classification Based on Extraction and Analysis of Singularities and Pseudoridges. Qinzhi Zhang, Kai Huang and Hong Yan. Pan-Sydney Area Workshop on Visual Information Processing (2001), Sydney, Australia.
- [14] Fingerprint Reference-Point Detection. Manhua Liu, Xudong Jiang, Alex Chichung Kot. EURASIP Journal on Applied Signal Processing 2005:4, 498–509. 2005 Hindawi Publishing Corporation.
- [15] Genetic Model Optimization for Hausdorff Distance-Based Face Localization. Klaus J. Kirchberg, Oliver Jesorsky, and Robert W. Frischholz. In Proc. International ECCV 2002 Workshop on Biometric Authentication, Springer, Lecture Notes in Computer Science, Copenhagen, Denmark, June 2002.
- [16] Hausdorff Distance for Target Detection. Paolo Gastaldo, Rodolfo Zunino. 2002 IEEE.

- [17] Human face recognition using a spatially weighted modified Hausdorff distance. Kwan-Ho Lin, Baofeng Guo, Kin-Man Lam and Wan-Chi Si. Proceedings of 2001 International Symposium on Intelligent Multimedia, Video and Speech Processing May 2-4 2001 Hong Kong.
- [18] Learning Models for Object Recognition. Pedro F. Felzenszwalb. 2001 IEEE.
- [19] Locating Objects Using the Hausdorff Distance. William J. Rucklidge Xerox Palo Alto Research Center. 1995 IEEE.
- [20] Model-based Orientation Field Estimation for Fingerprint Recognition. Jinwei Gu and Jie Zhou'. IEEE 2003.
- [21] Object Matching Algorithms Using Robust Hausdorff Distance Measures. Dong-Gyu Sim, Oh-Kyu Kwon, and Rae-Hong Park. 1999 IEEE.
- [22] Palmprint identification using Hausdorff Distance. Fang Li, Maylor K.H. Leung, Xiaozhou Yu. 2004 IEEE International Workshop on Biomedical Circuits & Systems.
- [23] Performance Evaluation of Fingerprint Verification Systems. Raffael e Cappel, Dari o Mai o, Davi de Mal toni, James L. Wayman, and Anil K. Jain. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. 28, no. 1, january 2006.
- [24] Recognizable-Image Selection for Fingerprint Recognition With a Mobile-Device Camera. Dongjae Lee, Kyoungtaek Choi, Heeseung Choi, and Jaihe Kim. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics—part b: cybernetics, vol. 38, no. 1, february 2008 233.
- [25] Singular point detection by shape analysis of directional fields in fingerprints Chul-Hyun Parka, Joon-Jae Leeb, Mark J.T. Smitha, Kil-Houm Parkc. The Journal of the Pattern Recognition 2006.
- [26] Systematic Methods for the Computation of the Directional Fields and Singular Points of Fingerprints. Asker M. Bazen and Sabih H. Gerez. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. 24, no. 7, july 2002 905.
- [27] Two-Dimensional Object Alignment Based on the Robust Oriented Hausdorff Similarity Measure. Dong-Gyu Sim and Rae-Hong Park. 2001 IEEE.