

Fortalecimiento de los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación en  
estudiantes de 5° grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de  
Morales (Bolívar)



Presentado por:

Maura Alejandra Quintero Campo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA FACULTAD DE CIENCIAS**

**SOCIALES HUMANIDADES Y ARTES**

**MAESTRÍA EN EDUCACIÓN**

**BUCARAMANGA - COLOMBIA 2020**

Fortalecimiento de los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación en  
estudiantes de 5° grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de  
Morales (Bolívar)



Presentado por:

Maura Alejandra Quintero Campo

Para optar al título de Magíster en Educación

Asesor:

Dr. Élgar Gualdrón Pinto

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA FACULTAD DE CIENCIAS**

**SOCIALES HUMANIDADES Y ARTES**

**MAESTRÍA EN EDUCACIÓN**

**BUCARAMANGA - COLOMBIA 2020**

**DEDICATORIA**

*A mis padres Leuder y Torcoroma, quienes me han guiado con su amor por el mejor camino y enseñado a ser una mujer de bien.*

*A mis hermanos Leuder Antonio y Luis Gerardo.*

*A la memoria de mi hermanito José Guillermo.*

*A la persona que día a día me dio su apoyo, su comprensión y paciencia e hizo que esto fuera posible.*

**AGRADECIMIENTOS**

*Primeramente a Dios por permitirme dar la oportunidad de lograr una meta más en mi vida.*

*A mi familia quienes me apoyaron para que esto fuera posible con su amor y siempre pensando que se puede ser capaz y lograr todo lo que uno se propone en esta vida.*

*Al Dr. Élgar Gualdrón Pinto quien me guio con cada uno de sus aportes, dedicación y su esfuerzo para que esto fuera posible, siempre con palabras de motivación permitiendo no desistir en esta investigación y así fortalecerme como persona y maestra.*

*A los estudiantes y a los directivos de la IETAVH por permitirme el espacio para el desarrollo de esta tesis.*

## Tabla de contenido

	Pág.
Introducción .....	1
CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN .....	4
1.1 Descripción del problema de investigación .....	4
1.2 Limitaciones y delimitaciones .....	12
1.3 Objetivos de la investigación .....	14
1.3.1 Objetivo general .....	14
1.3.2 Objetivos específicos .....	14
1.4 Supuestos cualitativos .....	15
1.5 Justificación de la investigación .....	15
CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA .....	18
2.1 Contextualización de la institución .....	18
2.2 Antecedentes de la investigación .....	20
2.2.1 Referentes investigativos internacionales .....	20
2.2.2 Referentes investigativos nacionales .....	22
2.2.3 Referentes investigativos regionales .....	25
2.3 Marco teórico .....	27
2.3.1 El Modelo Teórico de Van Hiele .....	27
2.3.2 Procesos matemáticos de pensamiento: <i>definición y clasificación</i> .....	34
2.3.3 El Modelo de Vinner & Hershkowitz: formación de conceptos geométricos .....	38
2.4 Marco conceptual .....	41
2.5 Marco legal .....	45
CAPITULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO .....	51

3.1 Tipo de investigación .....	51
3.2 Población y muestra .....	53
3.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información .....	54
3.3.1.Descripción de la unidad didáctica .....	58
3.4 Metodología de la intervención .....	60
3.5 Categorías de análisis .....	61
3.6 Validación de instrumentos .....	65
3.7 Metodología de análisis de la información: triangulación .....	65
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS .....	67
4.1 Análisis de la prueba diagnóstica .....	68
4.2 Análisis de la unidad didáctica .....	76
4.2.1 Actividad n° 0 .....	76
4.2.2 Actividad n° 1 .....	82
4.2.3 Actividad n° 2 .....	93
4.2.4 Actividad n° 3 .....	101
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENTACIONES .....	111
5.1 Conclusiones .....	111
5.1.1 Respuesta a la pregunta de investigación .....	111
5.1.2 Consecución de los objetivos planteados .....	112
5.1.3 Aportes a la didáctica de las matemáticas .....	115
5.1.4 Futuros temas de investigación.....	116
5.2 Recomendaciones .....	116
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	117

**LISTA DE TABLAS**

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Análisis de resultados de comparación de porcentajes según niveles de desempeño por año en matemáticas del grado quinto de la IETAVH año 2016 y 2017.....	7
Tabla 2. Análisis resultados Pruebas Saber 5, competencias matemáticas en los elementos geométricos que están implicados en este estudio del IETAVH del año 2016.....	8
Tabla 3. Análisis resultados Pruebas Saber 5, competencias matemáticas en los elementos geométricos que están implicados en este estudio del IETAVH del año 2017.....	10
Tabla 4. Características de los procesos matemáticos de pensamiento de los niveles 1 y 2 de Van-Hiele. ....	37
Tabla 5. Resumen de tareas y temas tratados en la prueba diagnóstica .....	68

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
Figura 1. Mapa conceptual de polígonos . .....	44
Figura 2. Mapa de temas y subtemas del concepto polígono.....	57
Figura 3. Producción de Alejandra en la tarea n° 1 del diagnóstico. ....	69
Figura 4. Producción de Beatriz en la tarea n° 1 del diagnóstico.....	69
Figura 5. Producción de Claudia en la tarea n° 2 del diagnóstico.....	70
Figura 6. Producción de Diego en la tarea n° 2 del diagnóstico. ....	70
Figura 7. Producción de Cristian en la tarea n° 3 del diagnóstico. ....	71
Figura 8. Producción de Yesid en la tarea n° 4 del diagnóstico.....	72
Figura 9. Producción de Claudia en la tarea n° 4 del diagnóstico.....	72
Figura 10. Producción de María en la tarea n° 5 del diagnóstico.....	73
Figura 11. Producción de Carlos en la tarea n° 6 del diagnóstico.....	74
Figura 12. Producción de Yésica en la tarea n° 7 del diagnóstico. ....	75
Figura 13. Producción de José en la tarea n° 8 del diagnóstico. ....	75
Figura 14. Producción de Amparo en la tarea n° 9 del diagnóstico.....	76
Figura 15. Producción de Sebastián en la tarea n° 1(a) de la actividad (0).....	77
Figura 16. Producción de Alejandra en la tarea n° 1(b) de la actividad (0).....	77
Figura 17. Producción de Yésica en la tarea n° 1(c) de la actividad (0). ....	78
Figura 18. Producción de Germán en la tarea n° 2(a) de la actividad (0). ....	78
Figura 19. Producción de Germán en la tarea n° 2(b) de la actividad (0).....	79
Figura 20. Producción de Germán en la tarea n° 2(c) de la actividad (0). ....	79
Figura 21. Producción de Claudia en la tarea n° 2(c) de la actividad (0).....	80



Figura 22. Producción de María y Johana en la tarea n° 2(e) de la actividad (0). .....	80
Figura 23. Producción de David en la tarea n° 3(a) de la actividad (0). .....	81
Figura 24. Producción de Isabela en la tarea n° 1 de la actividad (1). .....	82
Figura 25. Producción de Alejandra, Andrés y Amparo en la tarea n° 2 de la actividad (1). .....	83
Figura 26. Producción de Marta y José en la tarea n° 3(a) de la actividad (1). .....	83
Figura 27. Producción de Brayan en la tarea n° 4(a, b, g y h) de la actividad (1). .....	84
Figura 28. Producción de Karen en la tarea n° 5 de la actividad (1). .....	84
Figura 29. Producción de Diana en la tarea n° 7 de la actividad (1). .....	85
Figura 30. Producción de Edna en la tarea n° 8 de la actividad (1). .....	86
Figura 31. Producción de Zamir en la tarea n° 9 de la actividad (1). .....	87
Figura 32. Producción de Fabiola en la tarea n° 10(a) de la actividad (1). .....	88
Figura 33. Producción de Fabiola en la tarea n° 11 de la actividad (1). .....	89
Figura 34. Producción de Brayan en la tarea n° 12 de la actividad (1). .....	90
Figura 35. Producción de Karen en la tarea n° 13 de la actividad (1). .....	91
Figura 36. Producción de Zamir, German y Paula en la tarea n° 14(a, b, d y e) de la actividad (1). .....	92
Figura 37. Producción de Fabiola en la tarea n° 1(a) de la actividad (2). .....	93
Figura 38. Producción de Fabiola en la tarea n° 2 de la actividad (2). .....	94
Figura 39. Producción de Carlos y Johana en la tarea n° 3 de la actividad (2). .....	95
Figura 40. Producción de Zamir en la tarea n° 4(a, b y c) de la actividad (2). .....	96
Figura 41. Producción de Brayan en la tarea n° 5 de la actividad (2). .....	97
Figura 42. Producción de David en la tarea n° 6 de la actividad (2). .....	97
Figura 43. Producción de Claudia en la tarea n° 9 de la actividad (2). .....	98
Figura 44. Producción de Brayan en la tarea n° 10 (a) y 11 de la actividad (2). .....	99

Figura 45. Producción de Diana y Ximena en la tarea n° 13 y 14 de la actividad (2). .....	100
Figura 46. Producción de Fabiola en la tarea n° 1(a) y 2 de la actividad (3). .....	102
Figura 47. Producción de Brayan en la tarea n° 3 de la actividad (3). .....	102
Figura 48. Producción de Edna en la tarea n° 4 de la actividad (3). .....	103
Figura 49. Producción de José en la tarea n° 5 de la actividad (3). .....	104
Figura 50. Producción de Ximena en la tarea n° 6 de la actividad (3). .....	105
Figura 51. Producción de Paula en la tarea n° 7 de la actividad (3). .....	105
Figura 52. Producción de David en la tarea n° 8 de la actividad (3). .....	106
Figura 53. Producción de Xamir en la tarea n° 9 y 9(a) de la actividad (3). .....	107
Figura 54. Producción de Paula en la tarea n° 9(a) y 9(b) de la actividad (3). .....	107
Figura 55. Producción de Ximena en la tarea n° 10 de la actividad (3). .....	108
Figura 56. Producción de Cristian en la tarea n° 12 de la actividad (3). .....	109

**LISTA DE ANEXOS**

	<b>Pág.</b>
Anexo 1. Diagnóstico inicial.....	125
Anexo 2. Diario de campo.....	130
Anexo 3. Unidad didáctica .....	138
Anexo 4. Autorización para la realización del proyecto en la Institución educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza .....	173
Anexo 5. Consentimiento informado de padres de familia .....	174
Anexo 6. Cartas de validación por expertos.....	179
Anexo 7. Evidencias: fotos.....	181

## RESUMEN

Se presenta un trabajo de investigación que tiene como objetivo el fortalecimiento de los procesos matemáticos de pensamiento: definir y clasificar usando como pretexto la enseñanza de los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero. La muestra consiste de 28 estudiantes del grado quinto (en edades de 10 a 12 años) de una institución pública del departamento de Bolívar (Colombia). La metodología de investigación tiene que ver con el enfoque cualitativo de tipo descriptivo, usando como técnica la observación participante. El estudio contempló tres etapas: un diagnóstico inicial que permitió identificar el nivel de presaberes en conceptos relacionados a los temas de estudio; una intervención con una unidad didáctica diseñada bajo los preceptos de Van Hiele (1957, 1986, 1999), de Vinner & Hershkowitz (1983), y los procesos matemáticos de pensamiento definidos por Gutiérrez & Jaime (1998). La unidad didáctica se ajusta de acuerdo con el plan de área institucional. Los datos recolectados los conforma el diagnóstico inicial, las producciones de los estudiantes, los diarios de campo y notas de la investigadora. El análisis de los datos sugiere que es posible el desarrollo de procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación usando la enseñanza de los conceptos de polígono, de triángulo y de cuadrilátero.

**Palabras clave:** razonamiento geométrico, definición, clasificación, polígono, geoplano.

## ABSTRACT

This is a research work that aims to strengthen the mathematical processes of thinking: define and classify, using as a pretext the teaching of the concepts of polygon, triangle and quadrilateral. The sample consists of 28 students (ages 10 to 12) of fifth grade from a public institution in the department of Bolivar (Colombia). The research methodology is based on the descriptive qualitative approach, using participant observation as a technique. The study included three stages: an initial diagnosis that allowed identifying the level of prior knowledge in concepts related to the study subjects; an intervention with a didactic unit designed under the precepts of Van Hiele (1957, 1986, 1999), by Vinner & Hershkowitz (1983), and the mathematical thought processes defined by Gutiérrez & Jaime (1998). The teaching unit is adjusted according to the institutional area plan. The data collected is made up of the initial diagnosis, the students' productions, the field diaries and the researcher's notes. Analysis of the data suggests that the development of mathematical thinking processes is possible: define and classify using the teaching of the concepts of polygon, triangle and quadrilateral.

**Key words:** geometric reasoning, definition, classification, polygon, geoplano.

## INTRODUCCIÓN

El interés por el estudio del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, y en específico de la geometría, surge al observar, a lo largo de la experiencia como docente, las dificultades que presentan los estudiantes, en el nivel educativo de primaria, en el desarrollo de potentes razonamientos y el aprendizaje de conceptos; todo esto ligado a la falta de desarrollos plausibles de procesos matemáticos de pensamiento.

Una probable causa de lo mencionado anteriormente es la transmisión de contenidos en geometría, por parte de los docentes, sin profundizar, ni estimular el razonamiento a través de la exploración y un descubrimiento guiado (Gamboa & Ballester, 2010). De acuerdo con lo anterior, la incomprensión de los conceptos produce dificultades en el desempeño académico, pues si no se utilizan los métodos y estrategias adecuadas, los estudiantes no podrán dar definiciones ni clasificaciones de objetos geométricos de una manera amplia y clara, es decir sus argumentos serán incompletos sin tener sentido alguno (Gualdrón, 2011); por lo tanto, el estudiante no tiene la habilidad de conectar los temas vistos en la escuela con la realidad de su vida cotidiana. En este sentido, algunos de dichos temas son el polígono, el triángulo y el cuadrilátero, los cuales si no se enseñan de manera adecuada, dificultan el desarrollo de otros conceptos geométricos que hacen parte del currículo escolar.

Entre otras cosas, es por esto que surge la necesidad de dar respuesta, por lo menos en parte, a las dificultades presentadas por los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza (IETAVH) y que se plasma mediante la pregunta problematizadora ¿Es posible fortalecer los procesos matemáticos de pensamiento: definición y

clasificación en estudiantes de 5° grado de la IETAVH usando como pretexto la enseñanza de los conceptos de polígono, de triángulo y de cuadrilátero?

Esta investigación pretende fortalecer los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación, teniendo como objeto de estudio el polígono, el triángulo y el cuadrilátero, los cuales son parte fundamental de la geometría. Se planeó, con el fin de alcanzar dicho fortalecimiento, una intervención pedagógica mediante una unidad didáctica diseñada bajo los preceptos de los modelos de Van Hiele (1957, 1986, 1999), de Vinner & Hershkowitz (1983), y los preceptos de Gutiérrez & Jaime (1998). La intervención se realizó con los estudiantes de quinto grado de la IETAVH quienes componen la muestra seleccionada.

El trabajo de investigación desarrollado permite contribuir a la tarea de clarificar las maneras de llevar a cabo el fortalecimiento de la definición y la clasificación como procesos matemáticos de pensamiento; además, permite contribuir al proceso de enseñanza y de aprendizaje de conceptos como el polígono, el triángulo y el cuadrilátero en estudiantes de la IETAVH.

Para concluir, se dará una breve mirada a la composición de esta investigación. En el capítulo N°1 se encuentra la justificación de este proceso (se dan a conocer las razones por las cuales plantear la misma), se presenta los objetivos de la investigación (como pilares importantes del estudio), se observa el planteamiento del problema (el cual consta de la formulación de la pregunta de investigación y la descripción del problema de investigación). En el capítulo N° 2 se encuentra el marco referencial (el cual consta de estudios realizados con el trabajo de investigación a nivel internacional, nacional y regional) y también en este capítulo se visualiza el marco teórico (es la base de toda la investigación). El capítulo N° 3 se enfoca en todo lo concerniente a la metodología utilizada para llevar a cabo la investigación. En el capítulo N° 4 se realiza el análisis de las producciones de los estudiantes (mostrando diversos ejemplos

paradigmáticos que clarifican los resultados y las conclusiones a las que se ha llegado). En el capítulo N° 5 se presenta las conclusiones globales encontradas en el campo del razonamiento geométrico de los estudiantes, es decir la trayectoria de aprendizaje de los mismos, en torno a la respuesta de la pregunta de investigación, a la consecución de los objetivos, a los aportes la didáctica de las matemáticas, a los futuros temas de investigación y, por último, las recomendaciones para nuevos proyectos.

Este documento culmina con los anexos tales como el diagnóstico, los diarios de campo, la unidad didáctica, consentimientos informados para el desarrollo del estudio y las cartas de validación por expertos.



## **CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

Este capítulo aborda aspectos importantes que posibilitan el desarrollo de la presente investigación como lo son: los antecedentes donde aparece una detallada revisión documental, la descripción de la problemática identificada en el contexto de estudio, las limitaciones y delimitaciones, los objetivos que especifican lo que se pretende alcanzar a lo largo de la investigación, la justificación que expone las razones importantes de la investigación y, por último, los supuestos cualitativos.

### **1.1 Descripción del problema de investigación**

La geometría es uno de los componentes matemáticos de la Educación Básica (MEN, 2006); a través del estudio de la geometría “los alumnos aprenderán sobre las formas y estructuras geométricas y cómo analizar sus características y relaciones” (NCTM, 2000). En este sentido, Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner (1987) plantean que “el conocimiento de conceptos, propiedades y estrategias básicos de geometría es fundamental para que los estudiantes interactúen efectivamente con su propio entorno y también para que puedan empezar a estudiar la geometría de una manera más abstracta y formal”<sup>1</sup> (p. 223).

La enseñanza de la geometría es indispensable en los niveles iniciales puesto que, si se estimula desde el momento adecuado, se logra un razonamiento geométrico que accede a un conocimiento claro, amplio y creativo acerca del mismo. El desarrollo del razonamiento geométrico permite crear ideas, conceptos y situaciones para actuar de forma segura en la realidad; es por ello que el aprendizaje de la geometría aporta aspectos necesarios para su uso en la vida cotidiana (Sherard, 1981; Goldenberg, Cuoco & Mark, 1998). La geometría forma parte

---

<sup>1</sup> El entrecomillado corresponde con la traducción al castellano realizada por la investigadora.

de nuestro lenguaje cotidiano, contribuyendo a la adquisición de vocabulario específico y claro para el desempeño en el entorno en que se vive (Sherard, 1981); por ejemplo, si queremos comunicarle a una persona la forma o el tamaño de un objeto e incluso la ubicación es necesario dar uso a dicha terminología.

Dentro de esta rama de las matemáticas, un tema transcendental son los polígonos, considerando estos como una figura plana formada por una línea poligonal cerrada en la cual se distinguen: lados, vértices y ángulos (O'Daffer & Clemens, 1992, p. 36-37). De acuerdo a lo anterior, y siguiendo a Gualdrón, Quintero & Flórez (2016), la enseñanza de polígonos es un tema fundamental para alcanzar el razonamiento geométrico de los niños.

Para Gutiérrez & Jaime (1998) es imperativo desarrollar procesos matemáticos de pensamiento, tales como identificación, definición, clasificación y demostración, enmarcados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría; estos autores sugieren que dichos procesos permiten a los aprendices una genuina conceptualización de los objetos geométricos de estudio a nivel escolar.

Uno de los problemas identificados en la IETAVH, manifestados año a año por los docentes de primaria, es la dificultad que presentan los estudiantes del grado 5° de primaria en el desarrollo de procesos matemáticos de pensamiento, además de las dificultades en la comprensión del polígono, el triángulo y el cuadrilátero; además de la dificultad de los estudiantes en la manera que relacionan esta información en su estructura cognitiva. De acuerdo con lo manifestado por los docentes de la institución, en geometría, los estudiantes aprenden de manera memorística y sin reflexionar sobre los tópicos desarrollados. En general, los docentes manifiestan que a los estudiantes se les dificulta: argumentar y comprender las características matemáticas que definen y clasifican a los polígonos (incluyendo los triángulos y los

cuadriláteros). Otro aspecto son los resultados obtenidos en pruebas internas y pruebas saber, dónde se evalúa el nivel de conocimientos en las competencias de razonamiento, comunicación y resolución de problemas en el área de las matemáticas, en las cuales se evidencia la falencia que presentan los estudiantes en los procesos de pensamiento.

Al confrontar lo manifestado por los docentes de la institución con los resultados de las Pruebas Saber 5° en los años 2016 y 2017, se puede notar que existe concordancia; es decir, las dificultades manifiestas por los docentes se ven reflejadas en los resultados en matemáticas de dichas pruebas, particularmente, en las diferentes competencias evaluadas. En la tabla 1, se observa los resultados comparados, por niveles de desempeño, de las pruebas de 5° grado en matemáticas en los años 2016 y 2017. Los niveles de desempeño consisten en una descripción cualitativa sobre lo que el estudiante es capaz de hacer cuando se enfrenta a preguntas de distintos rangos de dificultad, en una situación de contexto específica (ICFES, 2017a). Las descripciones explican lo que saben y saben hacer los estudiantes en cada nivel de desempeño: insuficiente (rojo), mínimo (naranja), satisfactorio (amarillo) y avanzado (verde) (ICFES, 2017a).

Los estudiantes de 5° grado mostraron un mejor desempeño en el año 2017, comparado con el año 2016, en la medida que menos estudiantes se encuentran en el nivel insuficiente<sup>2</sup> y más en el nivel mínimo<sup>3</sup>. Los resultados son desalentadores a pesar de haber logrado un mejor desempeño en el año 2017; es decir, para el año 2017 aún se siguen ubicando el 85% de estudiantes en los niveles más bajos: insuficiente y mínimo.

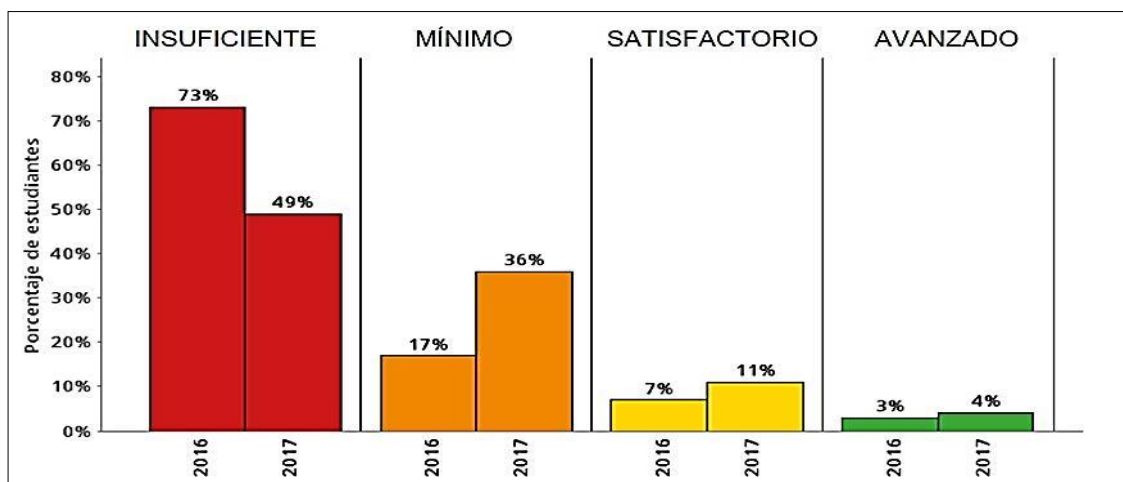
---

<sup>2</sup> En este nivel se encuentran los estudiantes que no superan las preguntas de menor complejidad de la prueba.

<sup>3</sup> En este nivel se ubican los estudiantes que apenas superan las preguntas de menor complejidad de la prueba.

Tabla 1

*Análisis de resultados de comparación de porcentajes según niveles de desempeño por año en matemáticas del grado quinto de la IETAVH año 2016 y 2017.*



Fuente: ICFES (2017b)

En la tabla 2, se presenta el porcentaje de estudiantes que no alcanza las características de cada una de las componentes evaluadas (Comunicación, Razonamiento y Resolución de Problemas) en el componente geométrico en el año 2016. De los tres componentes, el de resultados más desfavorables es Resolución de Problemas (63%), seguido del componente Razonamiento (56.3% en promedio).

Los estudiantes de 5° grado de la IETAVH exhiben dificultades tanto en los presaberes relacionados a los polígonos (incluidos los triángulos y cuadriláteros), tal es el caso, por ejemplo, de la perpendicularidad y paralelismo, como en el dominio del mismo concepto. En general, las competencias de Razonamiento y Resolución de Problemas son una debilidad en los estudiantes de la institución; estas competencias están relacionadas, justamente, con diferentes procesos matemáticos de pensamiento, los cuales hacen parte de la actividad matemática escolar que deben desarrollar los docentes.

Tabla 2

*Análisis resultados Pruebas Saber 5, competencias matemáticas en los elementos geométricos que están implicados en este estudio del IETAVH del año 2016.*

<b>COMPETENCIA</b>	<b>PORCENTAJE</b>	<b>ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>
Comunicación	45%	No establece relaciones entre atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes.
Razonamiento	73%	No conjetura ni verifica los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano.
	71%	No describe ni argumenta acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas cuando una de las magnitudes se fija.
	68%	No compara ni clasifica objetos tridimensionales o figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes y propiedades.
	57%	No relaciona objetos tridimensionales ni sus propiedades con sus respectivos desarrollos planos.

	50%	No reconocen nociones de paralelismos y perpendiculares en distintos contextos ni los usa para construir y clasificar figuras planas y sólidos.
	39%	No construye ni descompone figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas.
	36%	No justifica relaciones de semejanza y congruencia entre figuras.
Resolución	63%	No utilizan propiedades geométricas ni establecen relaciones entre ellas para solucionar problemas.

Fuente: *ICFES (2017b)*

De similar manera, la tabla 3 muestra el porcentaje de estudiantes que no alcanza las características de cada una de las componentes evaluadas (Comunicación, Razonamiento y Resolución de Problemas) en el componente geométrico en el año 2017. Comparativamente, en el año 2016 y en el año 2017, los resultados son similares. Los estudiantes, en un alto porcentaje, siguen mostrando dificultad en las competencias Razonamiento y Resolución de Problemas, adicionándole en este periodo, una gran dificultad en la competencia Comunicación. Como se dijo antes, estas son competencias que intrínsecamente desarrollan los procesos matemáticos de pensamiento durante la actividad matemática escolar.

Tabla 3

*Análisis resultados Pruebas Saber 5, competencias matemáticas en los elementos geométricos que están implicados en este estudio del IETAVH del año 2017.*

<b>COMPETENCIA</b>	<b>PORCENTAJE</b>	<b>ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>
Comunicación	79%	No establece relaciones entre atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes.
	51%	No utiliza sistemas de coordenadas para ubicar figuras planas u objetos ni describe su localización.
Razonamiento	77%	No relaciona objetos tridimensionales ni sus propiedades con sus respectivos desarrollos planos.
	68%	No compara ni clasifica objetos tridimensionales o figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes y propiedades.
	58%	No reconoce nociones de paralelismos y perpendiculares en distintos contextos ni las usa para construir y clasificar figuras planas y sólidos.

---

	47%	No describe ni argumenta acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas cuando una de las magnitudes se fija.
	42%	No construye ni descompone figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas.
	40%	No conjetura ni verifica los resultados al aplicar transformaciones a figuras en el plano.
<hr/>		
Resolución	55%	No usa representaciones geométricas ni establece relaciones entre ellas para solucionar problemas.

---

Fuente: *ICFES (2017b)*

Con todo lo anterior, es posible decir que existe un problema, el cual requiere de intervención, con el fin de mejorar, particularmente, los procesos matemáticos de pensamiento en los estudiantes, estimulando el razonar, el argumentar, pero principalmente el definir y el clasificar los conceptos (particularmente el polígono, el triángulo y el cuadrilátero) propios de la geometría. Es así como surge la presente propuesta de investigación, la cual busca contribuir al mejoramiento en la comprensión de algunos de los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación sugeridos por Gutiérrez & Jaime (1998). En esta investigación que se propone, se usa como objeto de estudio a los polígonos (incluyendo triángulos y cuadriláteros) como uno de los temas centrales de la geometría escolar (Gualdrón, 2011), en los estudiantes de quinto grado de educación Básica Primaria de la IETAVH.



La investigación en mención es pertinente ya que propone una alternativa educativa que pretende contribuir al desarrollo de objetos matemáticos de estudio (como lo es el polígono, el triángulo y el cuadrilátero) y al desarrollo de procesos matemáticos de pensamiento (definir y clasificar). La propuesta educativa incluye al Geoplano como mediador instrumental de aprendizaje, el cual permite abordar la geometría de manera que los estudiantes interactúen dinámicamente y les ayuda a visualizar contenidos geométricos que son más complicados de abordar desde un dibujo estático. El Geoplano es una herramienta mediadora que complementa la enseñanza de la geometría y permite a los aprendices comprender y generar conocimiento (Borba & Villarreal, 2005).

Teniendo en cuenta lo anterior, surge la siguiente pregunta:

¿Es posible fortalecer los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación en estudiantes de 5° grado de la IETAVH usando como pretexto la enseñanza de los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero?

## **1.2 Limitaciones y delimitaciones**

En este apartado se presentan las limitaciones que interfieren en el desarrollo de la investigación, las dificultades que limitan el trabajo y que están fuera de alcance para el investigador; al mismo tiempo, las delimitaciones que son pertinentes comentar para contextualizar el estudio.

### **Limitaciones:**

- No es pertinente el uso de ningún software educativo debido a que la institución no cuenta con un aula adecuada para la implementación de estos.

- El desinterés de los estudiantes del grado 5° por las clases de matemáticas y particularmente por las de geometría.
- El bajo nivel de escolaridad de los padres de familia de los estudiantes, ya que viven en zona rural y se dedican a labores agrícolas y no poseen el tiempo ni los conocimientos pertinentes para asesorar a sus hijos en las actividades escolares.
- Una situación inmanejable en las investigaciones donde participan personas es, en el caso particular, el manejo voluble de los estados de ánimo, las altas temperaturas propias de la región, el área física reducida de las aulas de la IETAVH.

### **Delimitaciones:**

Desde la investigación que se desea realizar se pone de manifiesto una serie de delimitaciones que fue necesario contemplar para el alcance óptimo de los objetivos, contemplando el tiempo de que se dispone en esta maestría:

- El espacio físico: el aula del grado 5° A de la IETAVH, que se encuentra dentro de la institución con una buena iluminación natural y cuenta con 28 estudiantes, en edades entre 10 y 12 años, 10 hombres y 18 mujeres.
- El tiempo: la implementación de la unidad didáctica se realizó en el período comprendido entre los meses de agosto y noviembre de 2019. Se desarrolla la implementación, con dos encuentros semanales de 120 minutos cada uno, durante 10 semanas.
- El trabajo de investigación apunta a fortalecer el desarrollo de procesos matemáticos de pensamiento que le permita a los estudiantes, definir y clasificar en el concepto de polígono, de triángulo y de cuadrilátero, basándose con el Modelo Van Hiele (Van Hiele, 1957, 1986, 1999) el Modelo de Vinner & Hershkowitz (Vinner & Hershkowitz, 1983) y el Geoplano (Gattegno, 1964).

- A pesar que la unidad didáctica se construye basada en los diferentes procesos matemáticos de pensamiento: reconocimiento, definición, clasificación y demostración (Gutiérrez & Jaime, 1998), en este estudio sólo se dará cuenta de la definición y la clasificación en los niveles 1 y 2 de Van Hiele, es decir, en los análisis, resultados y conclusiones. Esta decisión de toma con base a la propuesta de Gualdrón (2011) quien sugiere que en la escolaridad los estudiantes alcanzan principalmente estos niveles.

### **1.3 Objetivos de la investigación**

A continuación se presenta el objetivo general y los objetivos específicos del proyecto bajo estudio.

#### **1.3.1 Objetivo general**

Fortalecer los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación en los estudiantes de 5° grado de la IETAVH, mediante una unidad didáctica de los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

**OE1:** Caracterizar los presaberes de los estudiantes para el concepto polígono (en general) en los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación mediante un test diseñado para tal fin.

**OE2:** Diseñar una unidad didáctica basada en el modelo de Van Hiele, el modelo de Vinner & Hershkowitz, y el Geoplano para los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero en los procesos matemáticos de pensamiento: definir y clasificar.

**OE3:** Implementar la unidad didáctica diseñada en los estudiantes de la muestra.

**OE4:** Caracterizar la trayectoria de aprendizaje<sup>4</sup> de los estudiantes participantes en el estudio, particularmente, en relación a la adquisición de los procesos matemáticos de pensamiento: definir y clasificar en los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero.

#### **1.4 Supuestos cualitativos**

Los supuestos cualitativos que rigen el presente estudio son:

- El proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero es un excelente escenario para el desarrollo de los procesos matemáticos de pensamiento definir y clasificar.
- El modelo de razonamiento de Van Hiele ratifica ser una estrategia importante en el diseño de unidades didácticas en geometría y, particularmente, en el desarrollo de procesos matemáticos de pensamiento definir y clasificar.
- La caracterización de la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes muestra un avance significativo en el desarrollo de procesos matemáticos de pensamiento y en la adquisición de los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero.

#### **1.5 Justificación de la investigación**

Al culminar un trabajo de investigación, una de las cuestiones que el investigador se plantea es ¿de qué manera puede seguir ampliando y profundizando en el tema estudiado? En el caso particular, se pretende hacer con un trabajo de investigación que se inició en el programa de Licenciatura en Pedagogía Infantil de la Universidad de Pamplona (Quintero, Flórez & Villarreal, 2015). Uno de los aspectos que se resaltó del trabajo fue el haber logrado caracterizar los razonamientos de los estudiantes de tercer grado de la Básica Primaria cuando abordaban

---

<sup>4</sup> En el apartado 2.4 (marco conceptual) se describe la definición del concepto trayectoria de aprendizaje.

tareas sobre el concepto de polígono, desde la perspectiva del modelo de razonamiento de Van Hiele. Una de las limitaciones que tuvo el trabajo fue el hecho de que la unidad didáctica diseñada no contemplara un número mayor de actividades para cada uno de tópicos relacionados con el concepto y que no contemplara el desarrollo en los estudiantes de un mayor número de tópicos relacionados con el mismo, ni algún proceso matemático de pensamiento. A pesar de esto, con la unidad didáctica elaborada, se logró alcanzar el objetivo de la investigación.

El análisis de este trabajo previo permite elaborar una nueva unidad didáctica experimental para estudiantes de quinto grado de la IETAVH en el concepto de polígono, basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele, el modelo de Vinner & Hershkowitz y la utilización del Geoplano; dicha unidad contiene nuevos tópicos relacionados y, en general, suficientes actividades, de tal manera que se pueda fortalecer los procesos matemáticos de pensamiento: definir (uso y formulación) y clasificar desde el concepto de polígono, de triángulo, y de cuadrilátero; procesos, entre otros, considerados como de suma importancia en la actividad geométrica (De Villiers, 1987; Hoffer, 1981; Gutiérrez & Jaime, 1998).

Expuesto lo anterior, y a manera de sustentar la importancia del presente estudio, se encuentra que la NCTM<sup>5</sup> (2000) sugiere que, a través del estudio de la geometría, los estudiantes comprenden las formas y las estructuras geométricas que les otorgan maneras genuinas de razonar sobre sus características y sus relaciones. Por otra parte, es preciso resaltar que el estudio de la geometría debería iniciar desde el conocimiento del entorno, para luego ir desarrollando los conceptos y propiedades desde los primeros niveles de razonamiento hasta los más abstractos (Gualdrón, 2014). En el presente trabajo se aborda el estudio de las formas (polígono, triángulo y cuadrilátero) sus características y relaciones matemáticas; así como también se tiene en cuenta el

---

<sup>5</sup> Sigla en inglés de National Council of Teacher of Mathematics y traducido al castellano para este estudio como Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

modelo de Van Hiele para el desarrollo de razonamientos geométricos de manera progresiva según los estímulos que se generan con los diseños instruccionales planteados por el docente.

Para la NCTM (2000), los Principios sugieren algunos rasgos que particularizan una didáctica matemática con criterios de alta calidad. En lo que refiere al currículo, la geometría es fundamental, pero predominantemente el desarrollo de procesos matemáticos de pensamiento. Ahora bien, para la NCTM el aprendizaje de la geometría no debe basarse sólo en definiciones, debería pasar al establecimiento de relaciones, al desarrollo de potentes razonamientos en torno a diferentes procesos matemáticos. Claramente, también están en sintonía con el argumento de edificar conocimiento geométrico a través de los niveles de Van Hiele, el modelo de Vinner & Hershkowitz, llevando a los estudiantes desde lo más informal a lo más formal de la matemática escolar.

En conclusión, el capítulo 1 recopila la información necesaria y suficiente que permite consolidar este trabajo de grado y que seguramente, con la información presentada en los posteriores capítulos, conduce a dar respuesta a la pregunta problematizadora y a los objetivos propuestos.

## CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan las contribuciones, desde diferentes perspectivas, que estructuran el estudio, principalmente en lo referente al contexto de la institución, los antecedentes, el marco teórico, el marco conceptual, y el marco legal.

### 2.1 Contextualización de la institución

Según el Proyecto Educativo Institucional, PEI (2017), la IETAVH es de carácter público, creada en el año 1970. El sacerdote Vicente Hondarza y los señores María Luisa Solano, Palmira Morales, Ligia Cabrales, Luís Anaya, Eurípides Badillo, Jorge Yúnez, Alcides Hernández y Elvira Morales, acordando crear una cooperativa de educación para fundar un colegio de secundaria con modalidad agropecuaria. Años más tarde, con el Decreto 143 de 1° de abril de 2003, acoge la Institución como Establecimiento Educativo Estatal del Departamento de Bolívar.

Por Resolución N° 0014 de marzo 10 de 2004 y de acuerdo a la Ordenanza 20 de noviembre de 2002 y al Decreto 143 de 2003 se reorganizó el Establecimiento Colegio Departamental Vicente Hondarza integrando las sedes: Jornada de educación para adulto nocturno y sabatina, Sede Rural Mulita (0°-5°), Sede Rural Samaria (0°-9°), Sede Rural La Aurora (Inactiva), Sede Rural Punta de la Cruz (0°-5°), Sede Rural Río Simití (0°-5°), Sede Rural Villa Noris(0°-5°), Sede Rural Brasil (0°-5°), Sede Rural Quebrada de Ororia (0°-5°), Sede Rural Paredes de Ororia (0°-11°), Sede urbana Principal (0°-11), dando origen a la IETAVH con código DANE 313473000251.

La IETAVH se encuentra ubicada en el municipio de Morales, al sudeste del departamento de Bolívar, en la subregión del sur, en los límites del Departamento del Cesar. Su distancia a la capital del departamento (Cartagena) es de 464 Km aproximadamente. Su posición geográfica es de 8° 17 ' de latitud norte y 73° 52' de longitud oeste; tiene una altura sobre el nivel del mar de 74 metros. Sus principales actividades económicas están sustentadas en la agricultura, la ganadería y la pesca.

Las familias que conforman la comunidad educativa de la institución pertenecen a los estratos 1 y 2, por lo que la fuente de ingresos de sus familias es producto de trabajo en fincas agrícolas, la pesca, albañilería, entre otras; es por esto que la mayoría de los miembros de la familia son personas de origen humilde, donde los niños y jóvenes, en algunas ocasiones, se les evidencia una sana convivencia y el respeto en valores. Se aprecia un cúmulo de necesidades económicas, psicológicas y familiares que directivos y docentes, con la ayuda de algunas instituciones, tratan de solventar.

En cuanto al contexto curricular, la institución educativa tiene como visión: “la Institución Educativa se concibe en la primera década del siglo XXI como una institución de carácter público y departamental con énfasis en el sector agropecuario, dotada de los recursos científico-técnico, humanos y financiero con una estructura acorde con los procesos de generación de tecnologías apropiadas, diversificadas e integrada a los rubros agropecuarios y con alternativas tecnológicas que le hagan en un alto porcentaje autosuficiente, a partir de un grupo de docentes y administrativos altamente calificados y de la acreditación de sus programas, proyectada a ser institución regional piloto en asesoría e investigación para los pequeños, medianos y grandes agricultores, pescadores y ganaderos” (PEI, 2017, p. 17).



Además, tiene como misión que: “la Institución Educativa es una Institución de Educación preescolar a la media de carácter público, del orden departamental, comprometida con el desarrollo agropecuario de la región, articulada con el Sena Agroindustrial y Minero, Sena Náutico del departamento de Bolívar, sin perder de vista la libertad de pensamiento, pluralismo ideológico, de la libertad de enseñanza, de la investigación y de cátedra” (PEI, 2017, p. 18). Esta misión, según el PEI institucional, contribuye al desarrollo humano desde el preescolar a la media, en el municipio de Morales, en el Departamento de Bolívar y en la nación.

## **2.2 Antecedentes de la investigación**

Se presentan diversos estudios que dan cuenta de elementos relacionados con este trabajo de grado y que dan luces sobre el estado del arte y el aporte a su desarrollo. En este sentido, los estudios están enfocados desde las perspectivas: del modelo de Van Hiele, de los procesos matemáticos de pensamiento, del Geoplano y mediadores instrumentales de aprendizaje, de los polígonos (incluidos triángulos y cuadriláteros). La presentación se hace, primero los referentes internacionales, luego los nacionales y, por último, los regionales.

### **2.2.1 Referentes investigativos internacionales**

El trabajo de tesis doctoral de Jaime (1993), en la Universidad de Valencia (España), titulada “Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento”, tiene como objetivo el analizar algunos componentes del Modelo de Van Hiele, aportando varias sugerencias, tanto metodológicas como de aplicación, que ayudan a conocer mejor dicho modelo y a utilizar todo su potencial de manera más eficaz para mejorar la enseñanza de la geometría. El estudio es de enfoque es cualitativo. La investigación concluye, entre otras cosas, que el estudio “aporta ideas originales que pueden afectar positivamente a la comprensión del Modelo de Van Hiele y a su

aplicación, las cuales suponen un paso hacia adelante en las herramientas de que se disponen como material para mejorar la educación matemática” (p. 297).

Es importante resaltar este trabajo, a pesar de que su publicación supera las dos décadas, debido a que la autora pertenece al grupo de investigación que más aportes teóricos a nivel mundial ha hecho al modelo de razonamiento de Van Hiele. Entre otras cosas, esta tesis es pertinente ya que permite identificar porqué el modelo de Van Hiele es de vital importancia al momento de diseñar unidades didácticas, teniendo en cuenta los niveles y las fases de aprendizaje.

Por su parte, Gualdrón (2011), en la Universidad de Valencia (España), elaboró la tesis doctoral titulada “Análisis y características de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas”. En su tesis logró caracterizar la enseñanza (profesor) y el aprendizaje (estudiantes) en situaciones escolares de semejanza de polígonos. La investigación es de enfoque cualitativo y del tipo estudio de casos múltiples; usa como técnicas a las entrevistas semiestructuradas e instrumentos como el diario de campo, las notas del investigador, diversos diagnósticos y una unidad didáctica diseñada para el estudio. Entre otras conclusiones, el autor plantea que el diseño de la unidad didáctica y su experimentación lograron mejorar las formas de razonamiento de los estudiantes en el tópico matemático de estudio; lo anterior sugiere que es posible el diseño de materiales para la instrucción, con enfoques diferentes a los que ofrecen los libros de texto, teniendo en cuenta el modelo de razonamiento de Van Hiele.

La importancia de esta tesis, en el estudio que se está abordando, radica en la robusta estructura que presenta para la organización de la enseñanza de objetos geométricos, principalmente teniendo en cuenta el Modelo de Van Hiele.

Para finalizar el análisis de los referentes internacionales, se encuentra a Ruiz (2016), que en la Universidad de la Rioja (España), presentó la tesis de maestría titulada “El Geoplano como herramienta de integración educativa”. El estudio tiene como objetivo el diseño de una unidad didáctica usando el Geoplano como herramienta de integración educativa. El estudio es de enfoque cualitativo, del tipo investigación acción, usando como técnica el dialogo informal, el análisis documental y grupos de discusión; los instrumentos utilizados son las guías de análisis documental y la unidad didáctica. El investigador, entre otras, concluye que el uso de herramientas como el Geoplano en la enseñanza es muy importante por la necesidad de los profesores de introducir contenidos de forma innovadora en el aula, estimulando la creatividad de los estudiantes, para que pasen a ser constructores de su propio conocimiento, más imaginativo y dinámico con herramientas manipulables.

Se considera de relevancia esta tesis en el presente estudio, dado que permite tener como referencia el diseño de actividades con el Geoplano, las cuales se convierten en una herramienta innovadora y dinámica que potencia en los estudiantes el ser creativos y tener la posibilidad de mejorar sus formas de razonamiento al momento de construir su conocimiento.

### **2.2.2 Referentes investigativos nacionales**

Dentro de las tesis de grado a nivel nacional se encuentra a Santa (2016) que, en la Universidad de Antioquia (Medellín), desarrolla su tesis de doctorado titulada “Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel”. Su trabajo se centra en el objetivo de analizar cómo se produce conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel; el estudio es de enfoque cualitativo de tipo inductivo, donde se parte de las interacciones particulares, hasta llegar a perspectivas teóricas

más generales. Las técnicas e instrumentos utilizados se tienen los colectivos de docentes, interacción y dialogo entre preguntas, diario de campo, entre otros. La autora presenta, entre otras conclusiones de la investigación, la efectividad del medio utilizado como lo fue el doblado de papel en los procesos geométricos para la comprensión de conceptos y procedimientos de la geometría en el colectivo de docentes de la muestra seleccionada.

Es importante resaltar este trabajo de investigación, en el presente estudio, ya que permite evidenciar una detallada exposición del referente teórico “Seres humanos con medios” de Borba & Villareal (2005), relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Este referente permite justificar la introducción del Geoplano en el aula de clase de geometría; es decir, el Geoplano como un mediador instrumental de aprendizaje.

Por otra parte, Ruiz (2016) desarrolla una tesis de maestría en la Universidad Nacional de Colombia (Bogotá) titulada “Enseñanza de polígonos a través del reconocimiento de invariantes usando el modelo de Van Hiele en el grado octavo de la Institución Educativa Finca la Mesa”. Esta tesis tiene como objetivo el “diseñar una propuesta metodológica que contribuya a la enseñanza de los polígonos a partir del reconocimiento de invariantes aplicando el modelo Van Hiele para los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Finca la Mesa”. El estudio se basó en el método cualitativo y el tipo de investigación acción, utilizando como técnicas e instrumentos el dialogo y diagnósticos para evidenciar las dificultades que presentan los estudiantes en la asimilación de los polígonos en la geometría. Dentro de los resultados se resalta la ruptura de paradigmas, superando las bondades de la enseñanza tradicional de la geometría, con el tipo de intervenciones donde se privilegia el reconocimiento de invariantes y se recurre al modelo de Van Hiele para el desarrollo de procesos y apropiaciones conceptuales en el pensamiento geométrico.

Es importante resaltar este trabajo debido a que permite evidenciar una relación entre el objeto matemático polígono y el modelo de razonamiento de Van Hiele. Aunque es un trabajo que tiene relación con el que se está desarrollando, existen diferencias, como por ejemplo: el estudio actual busca desarrollar dos importantes procesos matemáticos de pensamiento, mientras que Ruiz (2016) está interesado en desarrollar el objeto polígono con el modelo de Van Hiele.

Para finalizar los referentes nacionales, Morales & Maje (2011) desarrollan una tesis de maestría para la Universidad de la Amazonia (Florencia) titulada “Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros”. Tiene como uno de sus objetivos el analizar el “proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en las aulas escolares y determinar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado 7° sobre el objeto matemático cuadriláteros”. El estudio es de enfoque cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo, utilizando como técnicas e instrumentos el dialogo y diagnósticos con los actores implicados. Entre las conclusiones muestran los errores y dificultades que presentan los estudiantes en relación con el fenómeno de los estereotipos y las concepciones, las dificultades en las clasificaciones inclusivas desarrolladas, teniendo en cuenta el objeto matemático cuadrilátero. Lo anterior permitió consolidar el diseño de una propuesta didáctica.

Esta tesis es de resaltar en el presente estudio porque permite identificar en los estudiantes errores y dificultades al desarrollar tareas relacionadas con el objeto matemático cuadriláteros, los cuales también son tenidos en cuenta en el desarrollo de este trabajo de grado.

### 2.2.3 Referentes investigativos regionales

La tesis de maestría de Acosta (2017), para la Universidad Autónoma de Bucaramanga (Bucaramanga), titulada “Fortalecimiento del proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios”, se desarrolla con el objetivo de analizar el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele empleando el software Geogebra en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios. Usa el método cualitativo y el tipo investigación – acción; usa como técnicas e instrumentos los diarios pedagógicos, la observación directa, videos, pre-test y pos-test. Entre otras conclusiones se plantea que los niveles de razonamiento de Van Hiele y el software Geogebra fueron adecuados para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en el estudio de la función cuadrática.

Es importante tener en cuenta esta investigación por lo que permite ratificar la importancia que tiene el uso del modelo de Van Hiele en la organización de la enseñanza y el aprendizaje de diversos objetos matemáticos, principalmente usando un mediador instrumental, como lo es el Geogebra.

Por su parte, García & Fuentes (2017), en la Universidad Autónoma de Bucaramanga (Bucaramanga), desarrollaron la tesis de maestría titulada “Los cuadriláteros en el marco del modelo Van Hiele (niveles 1 y 2), para el fortalecimiento del pensamiento espacial y geométrico de los estudiantes del grado sexto del Instituto Técnico Agrícola de Convención, Norte de Santander”. El estudio busca implementar una estrategia de aprendizaje de los cuadriláteros en los estudiantes del grado sexto, del Instituto Técnico Agrícola de Convención, Norte de Santander, para el fortalecimiento del pensamiento espacial en el marco del modelo Van Hiele (niveles 1 y 2). El método usado es cualitativo y del tipo investigación – acción; los instrumentos

y técnicas usados son la observación directa, los registros abiertos y los diagnósticos. Dentro de los resultados se muestra que los estudiantes alcanzaron los aprendizajes esperados en los niveles de pensamiento con la implementación del modelo de Van Hiele específicamente en los cuadriláteros.

Este trabajo se resalta porque permite evidenciar la implementación de una estrategia pedagógica fundamentada en el modelo de Van Hiele teniendo en cuenta a los cuadriláteros, en los niveles 1-2. El estudio de García & Fuentes (2017) aborda el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico, que es diferente a los procesos definir y clasificar que se abordan en el actual estudio. Estos procesos que se abordan hacen parte de los componentes que estructuran el pensamiento geométrico (Gualdrón, 2011).

Para finalizar los referentes regionales, Algarín (2013), para la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga), desarrolla la tesis de maestría titulada “Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas”. La tesis tuvo como propósito el “caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el tema de las razones trigonométricas”. Esta investigación es de enfoque cualitativo, utilizando como instrumentos y técnicas las video-grabaciones, las hojas de trabajo de los estudiantes y el registro de notas del investigador. Dentro de los resultados se evidencia que las formas de razonar de los estudiantes muestran una dependencia con las actividades propuestas y que los procesos matemáticos de descripción, definición y demostración están presentes en sus actuaciones y en los trabajos elaborados para el aprendizaje de las razones trigonométricas.

La importancia de este trabajo radica en que permite observar una relación directa entre los procesos matemáticos de pensamiento y el modelo de Van Hiele como precursores del desarrollo de objetos geométricos de estudio. El trabajo de Algarín (2013) se diferencia del actual en la medida que trabaja tres procesos matemáticos (sólo coincide en uno con el actual) usando como objeto matemático las funciones trigonométricas; el actual, los polígonos.

## **2.3 Marco teórico**

En este apartado se presenta y examinan los fundamentos teóricos que permiten estructurar y consolidar los constructos que conducen el diseño de la unidad didáctica, la construcción de las categorías de análisis y, en general, los elementos que permiten dar respuesta a la pregunta de investigación, mediante las conclusiones que se logren obtener.

### **2.3.1 El Modelo Teórico de Van Hiele**

El propósito de este apartado es dar a conocer, con relativa profundidad, el modelo teórico de Van Hiele, mediante la reseña de algunos autores, para así tomar como referencia todo lo concerniente con este. Esta descripción se centra en los dos momentos de la enseñanza de la geometría dentro de este modelo, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.

En Holanda, los profesores de matemáticas Pierre Marie y Dina Van Hiele-Geldof, presentaron sus tesis doctorales, que se complementan, sobre un modelo de enseñanza y aprendizaje para la geometría. La estructura de este modelo se fundamenta bajo los preceptos de que: en el proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los estudiantes evoluciona gradualmente mediante unos niveles secuenciados y ordenados sin que se salte ninguno (Van Hiele, 1986). De acuerdo a los Van Hiele, en cada nivel, la interpretación y utilización de conceptos se puede percibir de una manera distinta, lo que sugiere una manera diferente de



reconocer, definir, clasificar, y demostrar. Según los Van Hiele, las fases de aprendizaje permiten organizar la instrucción mediante actividades que orientan a los estudiantes en el desarrollo de conceptos y a la vez van alcanzando de manera ordenada los niveles de razonamiento geométrico (Gualdrón, 2011).

El modelo de Van Hiele lo constituyen dos elementos fundamentales: los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. Los niveles son la manifestación de los razonamientos geométricos de los estudiantes desde que se inicia el aprendizaje en un concepto específico hasta que logran su máximo desarrollo intelectual. Las fases de aprendizaje son los momentos que se sugieren para diseñar y gestionar las clases, de tal forma que los estudiantes puedan avanzar en sus razonamientos.

### **Los niveles de razonamiento**

La formulación de los niveles han pasado por un proceso de evolución desde que fueron planteados (Pegg & Davey, 2007) puesto que las ideas del propio Van Hiele evolucionaron, desde su propia experiencia y la de otros investigadores y los resultados obtenidos acerca de los niveles. Dicho lo anterior, entre otras cosas, se puede decir que los niveles en un principio se enumeraron desde el nivel 0 al 4 y, posteriormente, una totalmente diferente, desde el nivel 1 al 5; de acuerdo con lo consultado, se trata solamente de una cuestión de etiqueta, es decir, las características de los niveles no cambiaron. Con estas indicaciones, y para mayor comodidad, se ha decidido tomar los niveles de 1 a 5, al mismo tiempo que se ha prescindido para este estudio de los tres últimos niveles, puesto que los estudiantes de la Educación Básica, en la mayoría de los casos, sólo alcanzan los niveles de razonamiento 1 y 2 (Jaime, 1993).

De manera concreta, se dará a conocer los descriptores de nivel de razonamiento de Van Hiele específicos para los polígonos, para los niveles 1 y 2, siguiendo a Burger & Shaughnessy (1986):

### ***Nivel 1: Visualización***

Los descriptores de este nivel son:

1. Uso de propiedades imprecisas (cualidades) para comparar dibujos e identificar, caracterizar y clasificar figuras.
2. Referencias a prototipos visuales para caracterizar figuras.
3. Inclusión de atributos irrelevantes al identificar y describir figuras, tales como la orientación de la figura en la hoja.
4. Incapacidad para concebir una variedad infinita de tipos de figuras.
5. Clasificaciones inconsistentes; es decir, clasificaciones por propiedades que no poseen todas las figuras seleccionadas.
6. Incapacidad para usar propiedades como condiciones necesarias para determinar una figura; por ejemplo, adivinar la figura en la actividad de la figura misteriosa después de pocas pistas, como si las pistas provocaran una imagen visual (p. 9).

### ***Nivel 2: Análisis***

Los descriptores de este nivel son:

1. Comparar figuras explícitamente por medio de propiedades de sus componentes.
2. Prohibir inclusiones de clases entre los tipos generales de figuras, tales como cuadriláteros.
3. Clasificar por atributos simples, tales como propiedades de los lados, mientras descuidan ángulos, simetrías, etc.
4. Aplicar una letanía de propiedades necesarias en lugar de determinar propiedades suficientes cuando identifican figuras, explican identificaciones y se deciden por una figura misteriosa.

5. Descripciones de tipos de figuras mediante uso explícito de sus propiedades más que por los nombres de los tipos, incluso si los conocen. Por ejemplo, en lugar de rectángulo, se puede mencionar la figura como cuadrilátero con todos los ángulos rectos.
6. Rechazo explícito de las definiciones de figuras de los libros de texto en favor de la caracterización personal.
7. Tratamiento de la geometría como física cuando se comprueba la validez de una proposición; por ejemplo, contando con una variedad de dibujos y haciendo observaciones sobre ellos.
8. Carencia explícita de comprensión de la prueba matemática (p. 9).

Los descriptores de nivel de razonamiento de Van Hiele específicos para los polígonos, planteados por Burger & Shaughnessy (1986), se convirtieron en soporte, junto con los contenidos matemáticos inmersos en la unidad didáctica experimental, para proyectar las categorías de análisis de las producciones de los estudiantes y así poder realizar la caracterización de la trayectoria de aprendizaje de los mismos. Las categorías de análisis se presentan en el capítulo 3.

### **Las fases de aprendizaje**

Las fases se asocian a cada nivel de razonamiento y el diseño de la enseñanza se realiza teniendo en cuenta dichas fases. Se pueden alcanzar niveles más altos si se consiguen las experiencias didácticas correctas (Van Hiele, 1986).

A continuación, se dará a conocer, de manera sucinta, las fases de aprendizaje de Van Hiele (Van Hiele, 1986), pero bajo estudios actuales de Gualdrón (2011) quien ha matizado las mismas y son pertinentes para el actual estudio:

***Fase 1: Información***

El profesor en esta fase dialoga con los estudiantes y les informa del tema que van a desarrollar, los objetivos de estudio y las actividades que planea desarrollar. También, el profesor tendrá la oportunidad de enterarse de los conocimientos previos que tienen los estudiantes que son pertinentes para el desarrollo del nuevo, además los estudiantes conocerán la futura dirección a la cual el nuevo tema los conducirá.

***Fase 2: Orientación dirigida***

En esta fase el profesor presenta gradualmente el material -compuesto de tareas cortas que generen respuestas específicas- que ha preparado cuidadosamente para que los estudiantes exploren el nuevo tema de estudio. Dicha exploración incluye que los estudiantes descubran y aprendan las posibles relaciones o componentes básicos que deben formar.

***Fase 3: Explicitación***

Es en esta fase donde se realiza un afianzamiento del tópico que se está estudiando, el cual incluye el manejo adecuado del lenguaje técnico, características, propiedades, relaciones que se han observado y analizado. El profesor debe propiciar la discusión entre él y los estudiantes y entre los mismos estudiantes. Esta fase no debe entenderse como una más cronológicamente hablando, sino más bien una fase que complementa a las otras.

***Fase 4: Orientación libre***

Es una fase en la cual el profesor debe preparar tareas que sean novedosas, diferentes a las que ha propuesto antes (con muchos pasos e incluso más complejas), que tengan diferentes vías de resolución, que le permitan a los estudiantes establecer relaciones entre

los objetos que están estudiando. La intervención del profesor en esta fase debe ser mínima, de tal forma que los estudiantes intenten por sí solos buscar la solución.

### ***Fase 5: Integración***

En esta fase los estudiantes, con ayuda del profesor, realizan un resumen de todo lo aprendido, lo que les permitirá tener una visión global de los objetos y relaciones en relación al tema de estudio. Es una fase en la cual no se realiza el desarrollo de temas nuevos, sólo la recopilación y organización de los ya adquiridos (p. 42-43).

En resumen, y en relación al estudio que se está abordando, estamos de acuerdo con Gualdrón (2011), quien plantea que, luego de haber realizado una toma de contacto con los estudiantes de la muestra y de haberles realizado una prueba diagnóstica para conocer el estado de sus presaberes en el concepto abordado, no es necesario diseñar en la unidad didáctica la fase de información puesto que ya se tuvo en cuenta al haber realizado la toma de contacto y el diagnóstico inicial. De manera similar, siguiendo a Gualdrón (2011), en el diseño de la unidad didáctica no se tendrá en cuenta manifiestamente la fase de explicitación, dado que esta se desarrolla constantemente durante el desarrollo de las actividades, al momento del trabajo en equipo que realizan los estudiantes en cada una de las sesiones de clase planeadas.

### **Las propiedades del Modelo de Van Hiele**

Estas propiedades son descritas en Van Hiele (1986), a continuación se dan a conocer:

***Recursividad:*** cuando un estudiante asciende de nivel, los razonamientos en el nivel anterior no se pierden, evolucionan.

***Jerarquía y secuencia de los niveles:*** cuando un estudiante adquiere un nuevo nivel, se supone que ya había adquirido el anterior o anteriores. La adquisición de los niveles se realiza de forma organizada.

***Relación entre el lenguaje y los niveles de razonamiento:*** los niveles incluyen el manejo por parte de los estudiantes de un lenguaje apropiado, es decir, en la medida que avanza en el logro de niveles su lenguaje evoluciona, se hace más matemático y menos coloquial. Esto sugiere el por qué algunos estudiantes no comprenden lo que el profesor explica; justamente porque usa un lenguaje que el estudiante no ha adquirido.

***Localidad de los niveles de razonamiento:*** cuando los estudiantes han adquirido un determinado nivel de razonamiento en un objeto geométrico específico y en otros, uno diferente. Es decir, por ejemplo, un estudiante puede estar en nivel 2 en polígonos y estar en nivel 1 en congruencia de triángulos.

***Continuidad de los niveles:*** a pesar de que para Van Hiele el paso de un nivel a otro se manifestaba de un momento para otro, la propia evolución de sus ideas manifiestan que no sucede así, es decir, es un proceso lento. Un estudiante puede haber adquirido completamente un nivel e ir transitando lentamente hacia el siguiente.

***La importancia de la instrucción en el modelo:*** el alcance por parte de los estudiantes de cada nivel va a depender de un óptimo diseño y gestión de la clase por parte del profesor.

Dicho lo anterior, se puede concluir que el rol de expositor del profesor debe cambiar y adquirir un papel de coordinador de las actividades propicias para alcanzar los objetivos educativos trazados; actividades necesarias para proporcionarle al estudiante un contexto adecuado para el desarrollo de su razonamiento y su paso por los diversos niveles. El rol del

estudiante se ve transformado, de un receptor pasivo a un investigador activo de la información. Estos cambios de roles involucran la necesidad de que el docente manipule y reconozca el material para trabajarlo sin obstáculos, apoyando al estudiante en la exploración y elaboración de su propio conocimiento (Cabanne & Ribaya, 2009).

### **2.3.2 Procesos matemáticos de pensamiento: *definición y clasificación***

En el subapartado anterior se describió el modelo de Van Hiele, entre otras cosas, los descriptores de nivel. Según Gutiérrez & Jaime (1998) dichos descriptores conducen tácitamente a la idea de que cada nivel de razonamiento debe concebirse como la suma de un conjunto de procesos. Además agregan que el logro por los estudiantes de un determinado nivel de razonamiento se debe considerar sólo hasta cuando los estudiantes muestren dominio en los procesos que constituyen tal nivel. En este sentido, es legítimo pensar que para el diseño de una unidad didáctica se deberían tener en cuenta tales procesos que componen cada nivel de razonamiento.

Los procesos matemáticos de pensamiento son para Gutiérrez & Jaime (1998) de elevada importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría; sus estudios a este respecto parten de las ideas de Hoffer (1981) y De Villiers (1987), las cuales son analizadas y asumidas, junto con otros, para la constitución de un referente en cuanto a este respecto, es decir, un listado de procesos matemáticos de pensamiento involucrados en los niveles de Van Hiele. La propuesta es la siguiente:

1. **Reconocimiento** de tipos y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras.

2. **Definición** de un concepto geométrico. Este proceso puede verse en dos formas: a medida que los estudiantes *formulan* definiciones del concepto que están aprendiendo, y cuando los estudiantes *usan* una definición dada leída en un libro de texto, o escuchada del profesor u otro alumno.

3. **Clasificación** de figuras geométricas o conceptos en diferentes familias o clases

4. **Demostración** de propiedades o declaraciones, es decir, para explicar de manera convincente la forma en que dicha propiedad o declaración es verdadera (Gutiérrez & Jaime, 1998, p. 29).

En lo mencionado, “cada proceso es un componente de dos o más niveles de razonamiento” (Gutiérrez & Jaime, 1998, p. 29); y “la manera como un estudiante considera y usa los procesos es un indicador del nivel de su razonamiento” (Gutiérrez & Jaime, 1998, p. 29-30).

En lo que sigue, se hace referencia a las características que cumplen los procesos en cada nivel de razonamiento, particularmente en los niveles 1 y 2, tomadas de Gutiérrez & Jaime (1998):

1. El reconocimiento de los estudiantes en el nivel 1 se limita a los atributos físicos y globales de figuras. A veces usan vocabulario geométrico (no tan común en la básica primaria), pero dichos términos tienen un significado visual más que uno matemático. Por ejemplo, al describir un rectángulo, algunos estudiantes usan el término “alargado”, para así diferenciarlo del cuadrado. En otros casos, son capaces de notar correctamente algunas propiedades matemáticas de las figuras, pero estas son propiedades simples, como el número de lados.

Sin embargo, los estudiantes de nivel 2 o superior pueden usar y reconocer propiedades matemáticas de conceptos geométricos. Es importante notar que la habilidad de reconocimiento no discrimina entre estudiantes en los niveles de Van Hiele 2, 3 o 4.



2. Los estudiantes en el nivel 1 no pueden usar definiciones matemáticas dadas. Las definiciones solo las pueden formular y consisten en descripciones de atributos físicos de la figura que están observando, como “redondo” o “más largo que más ancho” y quizás alguna propiedad matemática básica.

Cuando los estudiantes en el nivel 2 reciben una definición matemática, y conocen todas las propiedades contenidas en la definición, pueden usarla. Estos estudiantes, sin embargo, pueden experimentar dificultades al usar algunas expresiones lógicas, como “y”, “o” o “al menos”. Los estudiantes en el nivel 2 no entienden el estructura lógica de las definiciones (es decir, conjuntos de propiedades necesarias y suficientes del concepto definido), entonces cuando se les pide una definición que no ha sido aprendida de memoria, a menudo proporcionan una larga lista de propiedades del concepto, sin darse cuenta de redundancias.

3. Los estudiantes en el nivel 1 pueden entender clasificaciones exclusivas<sup>6</sup>, ya que no aceptan ni reconocen ningún tipo de relación lógica entre clases ni, muchas veces, entre dos elementos de la misma clase que tienen bastante diferencia en la apariencia física. En el presente estudio se acepta la posición de Gutiérrez & Jaime (1998), pero dada la circunstancia particular de los estudiantes de la muestra, que nunca han visto de manera detallada y amplia a los polígonos, a los triángulos y a los cuadriláteros, se decidió trabajar sólo clasificaciones inclusivas<sup>7</sup>, las que tuvimos en cuenta también en el desarrollo del nivel 2 de razonamiento.

4. Los estudiantes en el nivel 1 no pueden entender el concepto de demostración. Para estudiantes en nivel 2, una demostración típica consiste en una verificación experimental de la

---

<sup>6</sup> En el apartado 2.4 (marco conceptual) se describe la definición de clasificación exclusiva.

<sup>7</sup> En el apartado 2.4 (marco conceptual) se describe la definición de clasificación inclusiva.

verdad de la propiedad en uno o pocos casos. Dependiendo del grado de adquisición de los estudiantes de esta habilidad, pueden estar convencidos con solo un ejemplo especial, o pueden necesitar un conjunto de ejemplos más elaborado. Por otra parte, para este estudio, se considera a la demostración, en el nivel 2, como la argumentación mediante propiedades matemáticas que el estudiante hace para justificar una respuesta.

La tabla N° 4 resume las características de los procesos matemáticos de pensamiento para los niveles 1 y 2 de Van Hiele que se tendrán en cuenta en el presente estudio y que tuvieron como fundamento a Gutiérrez & Jaime (1998).

Tabla 4

*Características de los procesos matemáticos de pensamiento de los niveles 1 y 2 de Van- Hiele.*

<b>Procesos</b>	<b>Nivel 1</b>	<b>Nivel 2</b>
<i>Reconocimiento y Descripción</i>	Atributos físicos (posición, forma, tamaño)	Propiedades matemáticas
<i>Uso de definiciones</i>	-----	Definiciones con estructuras simples
<i>Formulación de Definiciones</i>	Listado de propiedades físicas	Listado de propiedades matemáticas
<i>Clasificación</i>	Inclusiva basada en atributos físicos	Inclusiva basada en atributos matemáticos
<i>Demostración</i>	-----	Verificación con ejemplos

Fuente: elaboración propia adaptada de Gutiérrez & Jaime (1998).

En conclusión, como ya se dijo, en el diseño de la unidad didáctica se usó, además de los descriptores de nivel de razonamiento y las fases de aprendizaje, las características de los procesos matemáticos de pensamiento en cada uno de los niveles 1 y 2 de razonamiento; además del modelo de Vinner & Hershkowitz. También, recordar que este trabajo de grado sólo se enfoca en los procesos definición (uso y formulación) y clasificación.

### **2.3.3 El Modelo de Vinner & Hershkowitz: formación de conceptos geométricos**

Con frecuencia, tanto profesores como libros de texto exponen el concepto de polígono, triángulo y cuadrilátero mediante la definición matemática, el planteamiento de ejemplos gráficos que los representan, y terminan proponiendo unos cuantos dibujos de figuras para que los estudiantes decidan el tipo de polígono. En algunos casos, se plantean ejercicios de memorización de la definición. Sea en el caso de los profesores o en libros de texto, se suele manifestar el énfasis en las definiciones, más que en los mismos ejemplos. Esta tendencia va en contravía de lo que sería deseable; de acuerdo a Vinner (1983, 1991), los ejemplos impactan en mayor medida los aprendizajes ya que tienen un mayor efecto en la construcción del concepto.

Según el mismo Vinner, cuando un estudiante escucha o lee el nombre de un concepto, al que ya ha tenido acercamiento, se evoca de manera casi inmediata, más que la definición, la representación gráfica o la imagen mental<sup>8</sup> del mismo. Es en este punto donde Vinner adopta el nombre de imagen del concepto. En el caso de los polígonos, triángulos y cuadriláteros la imagen del concepto es la que crean mentalmente los estudiantes y está formada por diversas imágenes, dibujos o representaciones para ser recordadas como ejemplos de dichos conceptos.

---

<sup>8</sup> En Freudenthal (1983) aparece el término imagen mental equivalente a la “fotografía mental” del concepto. Por otra parte, el mismo Freudenthal sugiere que para la enseñanza de un concepto debe primar la enseñanza de la imagen mental y después la definición, esto con el fin de constituir mejores aprendizajes conceptuales.

En términos de Vinner, la imagen de un concepto es adecuada si le permite al estudiante discernir sin equivocaciones todos los ejemplos de ese concepto. En el caso concreto del presente estudio, por ejemplo, la imagen del concepto de triángulo, principalmente en la educación básica primaria, está conformada por una pequeña variedad triángulos, con lados casi de igual medida, y ubicados en posición estándar (uno de sus lados visto de forma horizontal a la hoja, a la que generalmente le llaman base).

De otra parte, siguiendo con la forma como se enseña el concepto de polígono, la definición del mismo es aprendida por los estudiantes a manera de letanía, donde poco o nada comprende de la misma; la situación se agudiza cuando, a pesar de saber memorísticamente la definición, no la saben usar en situaciones matemáticas concretas. En este sentido, Vinner & Hershkowitz (1983) sugieren el nombre de *definición del concepto* a esta circunstancia, es decir a la definición que memorizaron los estudiantes que, en la mayoría de casos, está desligada de la *imagen del concepto*, lo que les impide abordar efectivamente las tareas matemáticas que se les pueda plantear. Por ejemplo, cuando se les pide la definición de cuadrado, algunos reproducen la que memorizaron diciendo “es un polígono de cuatro lados iguales y cuatros ángulos rectos”; en este grupo de estudiantes están los que logran usarla correctamente identificando cuadrados de una batería de ejemplos dada, pero también hay otro grupo que no, es el caso de los que no eligen a los cuadrados que están inclinados (por ejemplo 45 grados) por que los consideran rombos. La discrepancia expuesta pone de manifiesto le desvinculación que en muchos casos se presenta entre la imagen y la definición del concepto y, como consecuencia, el mal uso que se le pueda dar en ambos casos en el desarrollo de las tareas matemáticas formuladas por el profesor o el mismo libro de texto.

La experiencia personal y los ejemplos a los que ha tenido acceso un estudiante, tanto en la escuela como fuera de ella, marcan la calidad de la imagen de un concepto. En muchos casos, sobre todo los ejemplos, son escasos y presentados de tal forma que se puedan generar estereotipos, es decir una imagen correcta del concepto puede que no encaje en el estereotipo formado (Hershkowitz, 1990). Por ejemplo, cuando las únicas imágenes que se presentan de rectángulo son aquellas que se muestran con un par de lados más alargados que el otro par y siempre en posición estándar (sobre todo el lado más largo dibujado en la horizontal). Esto sugiere que en la enseñanza de un concepto, y particularmente su imagen, se presenten la mayor cantidad de ejemplos, tratando de evitar la generación de estereotipos, que permitan una imagen adecuada y completa.

En conclusión, las ideas sugeridas por Vinner & Hershkowitz (1983), por Vinner (1983, 1991) y por Hershkowitz (1990), han permitido clarificar la manera cómo se consolida la construcción de un concepto (imagen y definición), particularmente en geometría, en el contexto escolar. En el estudio que se está abordando, se tuvo en cuenta en el diseño de la unidad didáctica, con la apuesta a formar imágenes conceptuales sólidas (de polígono, triángulo y cuadrilátero), no solamente con las actividades y tareas propuestas, sino que también a través el uso del Geoplano (como mediador instrumental en tales construcciones). Estas ideas van en armonía con lo que plantea el modelo de Van Hiele, principalmente, no únicamente, en el primer nivel de razonamiento (visualización), donde se construye, mediante ejemplos y no ejemplos adecuados, la imagen del objeto geométrico de estudio.

## 2.4 Marco conceptual

A continuación se presenta la definición de los principales conceptos tenidos en cuenta en el desarrollo de este trabajo de grado, no sin antes mencionar que los conceptos poseen los matices propios de cada autor y fueron los que se usaron en la construcción de la estructura del presente trabajo.

- **Razonamiento:** “Cualquier proceso que permita sacar nueva información de información dada se considera un razonamiento. Está referido a los procesos discursivos internos y externos para nombrar, discurrir o argumentar y a la organización deductiva de proposiciones [*descubrir una o más consecuencia desconocida, a partir de información conocida*], definiciones, etc., a partir de una teoría” (Duval, 1998, p. 45-46).

- **Unidad didáctica:** La planificación educativa del proceso de enseñanza y de aprendizaje involucra tomar decisiones en diversos escenarios, lo que culmina con un registro de los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas que serán asunto de trabajo en clase, en un período corto de tiempo (en este estudio 10 semanas de 2 encuentros por semana).

“La unidad didáctica es la línea de choque de la planificación educativa con la práctica docente. Por ello, debe contener los instrumentos de planificación en su grado más concreto y los indicadores para detectar cómo se va produciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje para facilitar la retroalimentación al profesor y al alumno y el previsible cambio en el diseño de tareas o el uso de recursos” (Marín, 2000, p. 198).

- **Procesos matemáticos de pensamiento:** En la expresión procesos matemáticos se incluye el reconocer, el definir, el clasificar y el demostrar, los cuales son componentes de la actividad matemática, sin que esto implique que no existan más procesos (Puig, 1996). En otras palabras,

aprender matemáticas es, principalmente, aprender una variedad de procesos matemáticos (entre otros los que se han expuesto en este trabajo de grado).

- **Trayectoria de aprendizaje:** La definición de trayectoria de aprendizaje, para este estudio, es una elaboración realizada a partir de las ideas de Wenger (2001) y complementadas con las de Clements (2002), Gravemeijer (1999) y Simon (1995). Se entiende como la construcción mental (razonamientos y aprendizajes) que realiza el estudiante cuando el docente lo acerca a prácticas significativas, proporcionándole acceso a recursos que refuercen su participación, reflexión y construcción de aprendizajes geométricos.

- **Clasificación inclusiva:** “Una clasificación de cualquier conjunto de conceptos no es independiente del proceso de definición” (De Villiers, 1994; citado en Espinosa, 2008, p. 22). Una definición incluyente es aquella que permite que haya otros conceptos que la compartan. En este sentido una clasificación incluyente (inclusiva) se da, por ejemplo, si se pretende *incluir* al cuadrado en los rectángulos, entonces la definición de rectángulo debe ser la siguiente: cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y ángulos rectos; sin aumentar ninguna otra característica al rectángulo (De Villiers, 1994; citado en Espinosa, 2008).

- **Clasificación exclusiva:** Una definición excluyente es aquella que no permite que haya otros conceptos que la compartan. En este sentido una clasificación excluyente (exclusiva) se da, por ejemplo, si se pretende *excluir* al cuadrado de los rectángulos, entonces la definición de rectángulo debe ser la siguiente: cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos de diferentes tamaños y ángulos rectos (De Villiers, 1994; citado en Espinosa, 2008).

- **Polígono<sup>9</sup>:** Sean  $P_1, P_2, \dots, P_n$  un conjunto distinto de puntos en un plano, donde  $n > 2$ . La unión de los segmentos  $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_n, P_1$  es un polígono siempre que los segmentos se

---

<sup>9</sup> En el apartado 1.1 se presentó una definición equivalente, aunque menos elaborada matemáticamente y, en este sentido, más al alcance de los estudiantes de la educación básica primaria.

intercepten en los extremos, sin importar que dichos segmentos se encuentren (O'Daffer & Clemens, 1992). En la figura 1 se puede ver el mapa conceptual de polígono y todas las derivaciones que se tendrán en cuenta en el diseño de la unidad didáctica.

De acuerdo con la figura 1, en principio, los polígonos se desarrollan de manera general y, posteriormente, se desarrollan los triángulos y cuadriláteros de manera particular. Los triángulos se desarrollan mediante las clasificaciones según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos; además, se estudian las relaciones inclusivas se pueden establecer entre dichas clasificaciones.

Por otra parte, en los cuadriláteros se enfatiza la clasificación cóncavo-convexo y, dentro de los convexos, las clasificaciones como paralelogramos y trapecios. Los paralelogramos que se desarrollan son los rectángulos, los cuadrados y los rombos; junto con las posibles clasificaciones inclusivas que se presentan en estos cuadriláteros. Dentro de los trapecios, se desarrollan según la clasificación por pares de lados paralelos: isósceles, escalenos y rectángulos.



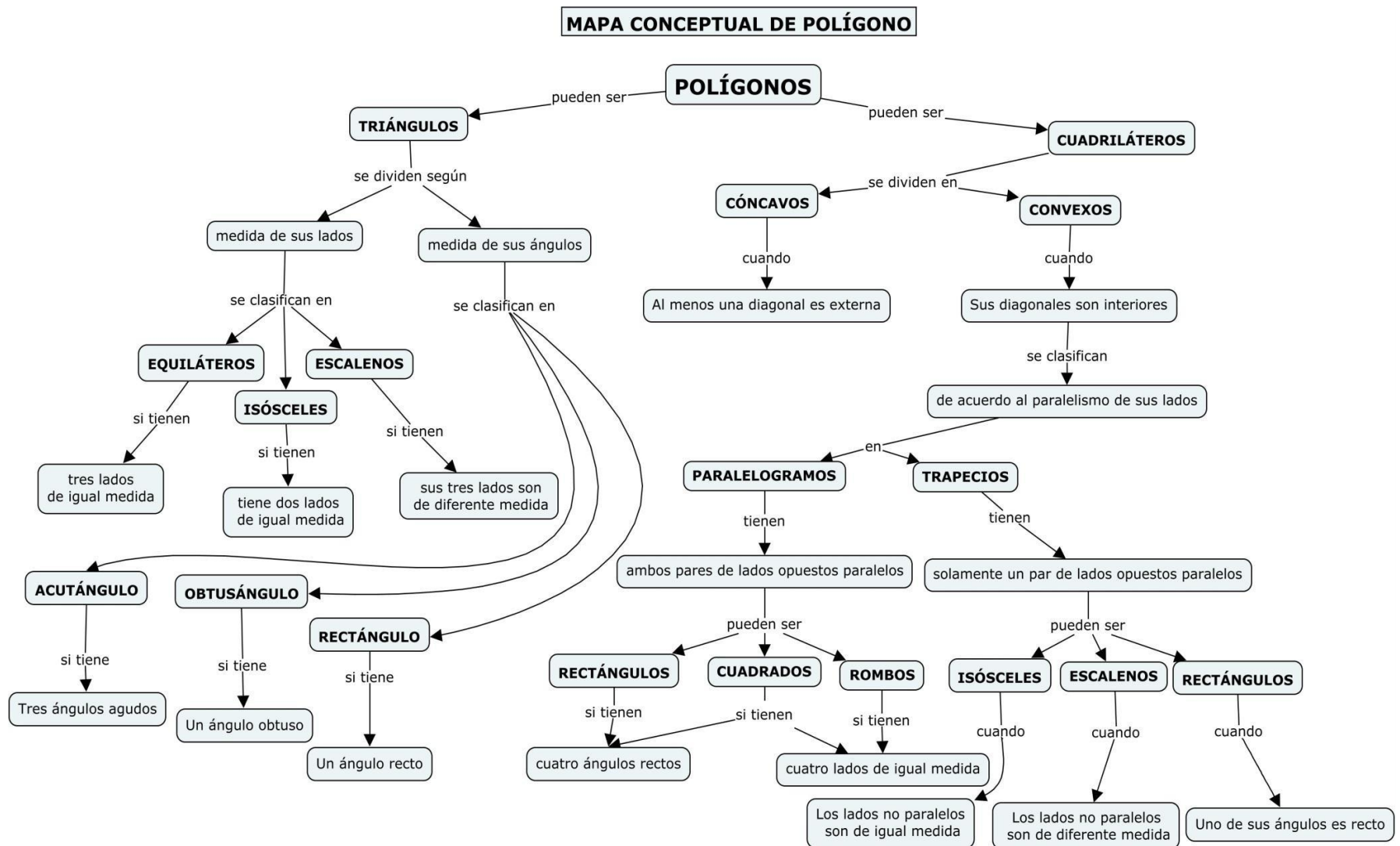


Figura 1. Mapa conceptual de polígonos. Fuente: elaboración propia.

- **Geoplano:** De acuerdo con Gattegno (1964; citado en Verdugo, Vásquez, Briseño & Palmas, 2000), “el Geoplano es un material didáctico de múltiples usos que permite tomar conciencia de las relaciones geométricas” (p. 2-3). Sugiere que “con los Geoplanos se puede mostrar teoremas de la geometría plana, con algunas ventajas sobre el tablero convencional, dado que las figuras obtenidas son claras y no dependen de la habilidad del profesor” (p. 2-3). Otra ventaja es que, “al ser pequeños, manipulables, se pueden girar para mostrar que las propiedades de los conceptos tratados no dependen de la posición” (Serrazina & Matos, 1968, p. 20). Además, al contrario de la hoja de papel, es un mediador que dinamiza el diseño y el deshacer fácil, además de posibilitar la realización rápida de hipótesis.

Existen tres tipos de Geoplano: el cuadrado, el isométrico y el circular. Para este estudio se usó el Geoplano cuadrado que es el ideal para describir conceptos tales como segmento, línea poligonal abierta y cerrada (polígono), entre otros.

## **2.5 Marco legal**

El presente apartado tiene en cuenta las políticas públicas colombianas como fundamento para el presente trabajo de investigación. Son los siguientes:

### **Constitución Política de Colombia de 1991**

En el Artículo 67° dice que “la educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura. La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente” (Corte Constitucional de Colombia, 2015, p.23-24).

## **Ley General de Educación (LGE) (Ley 115 de 1994)**

De la LGE se tendrá en cuenta los siguientes artículos y numerales considerados pertinentes para el desarrollo del presente estudio.

El Artículo 1° define que “la educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes” (MEN, 1994a, p. 1).

El Artículo 5°, particularmente los siguientes numerales:

5. “La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber” (MEN, 1994a, p. 1).

7. “El acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones” (MEN, 1994a, p. 1).

9. “El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país” (MEN, 1994a, p. 1).

11. “La formación en la práctica del trabajo, mediante los conocimientos técnicos y habilidades, así como en la valoración del mismo como fundamento del desarrollo individual y social” (MEN, 1994a, p. 2).

El Artículo 21° contiene los objetivos específicos de la Educación Básica Primaria, particularmente el literal e, que expresa “el desarrollo de los conocimientos matemáticos

necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos” (MEN, 1994a, p. 7).

El Artículo 23° expresa que:

Para el logro de los objetivos de la educación básica se establecen áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y de la formación que necesariamente se tendrán que ofrecer de acuerdo con el currículo y el Proyecto Educativo Institucional.

1. Ciencias naturales y educación ambiental.
2. Ciencias sociales, historia, geografía, constitución política y democracia.
3. Educación artística.
4. Educación ética y en valores humanos.
5. Educación física, recreación y deportes.
6. Educación religiosa.
7. Humanidades, lengua castellana e idiomas extranjeros.
8. Matemáticas.
9. Tecnología e informática (MEN, 1994a, p. 8).

### **Decreto 1860 (03 agosto 1994)**

Reglamenta la LGE en los aspectos pedagógicos y organizativos generales. Cuyo objetivo es fortalecer el sistema educativo y dar cumplimiento a los fines de la educación. El propósito del estado es brindar educación de calidad a todos por igual.

Artículos 2 y 3. “En el cual se designa como responsables de la educación de los menores, al estado, la sociedad y la familia, en este orden de ideas las instituciones educativas cumplen un

papel importante, pues son las directas responsables de permitir el ingreso de los niños al sistema escolar y a su vez brindar una educación de calidad” (MEN, 1994b, p. 1).

### **Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas (LCM)**

Se constituye en un documento que estructura el área de matemáticas y estipula qué enseñar y qué aprender en la escuela. Se convierte en un facilitador del proceso, ya que brinda las herramientas suficientes para que el docente organice sus prácticas atendiendo los criterios estipulados en el mismo.

El enfoque de este lineamiento está conceptualizado por los estudiantes, para la comprensión de competencias que le permitan enfrentar retos de la vida y del entorno sociocultural que los rodea para convivir sanamente en la sociedad (MEN, 1998).

Permite a la orientación, pero no reemplaza a los docentes al momento de organizar los contenidos, estrategia y metodologías en el desarrollo de los programas en el currículo (MEN, 1998).

### **Los Estándares Básicos de Matemáticas (EBM)**

“Guía que promueve y orienta los procesos curriculares, en aspectos esenciales de la reflexión matemática como son la naturaleza de la disciplina y sus implicaciones pedagógicas, el plan de estudios, los proyectos escolares e incluso el trabajo de enseñanza de las matemáticas en el aula, por mencionar algunos aspectos” (MEN, 2006, p. 50).

Es así como se tiene en cuenta el “formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas” (MEN, 2006, p. 51); el “utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas” (MEN, 2006, p. 51); que

permitan “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración” (MEN, 2006, p. 51) y el saber “Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz” (MEN, 2006, p. 51); han permitido organizar la actividad matemática en “cinco procesos generales: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos” (MEN, 2006, p. 51).

Sobre lo expuesto anteriormente, los EBM clasifica en cinco pensamientos, los procesos matemáticos a realizar por los estudiantes: el “pensamiento numérico y los sistemas numéricos; el pensamiento espacial y los sistemas geométricos; el pensamiento métrico o los sistemas métricos o de medidas; el pensamiento aleatorio o sistemas de datos; y, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos” (MEN, 2016, p. 30).

Así mismo, la relación conceptual entre estos pensamientos permite diseñar situaciones de aprendizaje, fundamentadas en: el estudio de las propiedades de los números y sus operaciones, en relación con la geometría, los sistemas de medidas y de sus transformaciones; la estimación y aproximación de procesos en los pensamientos numérico y métrico aleatorio; la relación entre magnitudes; y las situaciones relacionadas con fenómenos y el pensamiento variacional (MEN, 2006).

### **Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA):**

El Gobierno Nacional, en busca de mejoras en el sistema educativo, ha venido desarrollando diferentes herramientas para fortalecer las prácticas escolares, como su nombre lo indica se constituyen en un derecho para los estudiantes, por consiguiente el plan de estudios de la institución debe contenerlos. El MEN los define así:

Los DBA son un conjunto de saberes fundamentales dirigidos a la comunidad educativa que al incorporarse en los procesos de enseñanza promueven condiciones de igualdad educativa a todos los niños, niñas y jóvenes del país. Los DBA se plantean para cada año escolar de grado primero a grado once, en las áreas de lenguaje y matemáticas y se han estructurado en concordancia con los LCM y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). En ese sentido, plantean una posible ruta de aprendizajes para que los estudiantes alcancen lo planteado en los EBC para cada grupo de grados. Los DBA por sí solos no constituyen una propuesta curricular puesto que estos son complementados por los enfoques, metodologías, estrategias y contextos que se tienen en los establecimientos educativos, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales y se concretan en los planes de área (MEN, 2016, p. 6).

En conclusión, el capítulo 2 recopila suficiente información concerniente al marco referencial que soporta este trabajo de grado, principalmente, no únicamente, en relación a los antecedentes, a los referentes teóricos y conceptuales.

## CAPÍTULO 3. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta el enfoque metodológico que se tendrá en cuenta para realizar la investigación, los instrumentos y técnicas que se establecen para la recolección e interpretación de la información pertinente para dar respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos planteados.

### 3.1 Tipo de investigación

El proceso de investigación se desarrolla incorporando el enfoque propio de la *investigación cualitativa*, puesto que es propia del contexto educativo. Esta permite observar, explorar, analizar y describir un fenómeno en específico a partir de la interacción directa y de las diferentes situaciones que rodean al aula de clases, teniendo en cuenta los individuos estudiados y el rol del maestro, proporcionando una gran cantidad de información valiosa, con el fin de dar solución a las dificultades encontradas en el contexto.

Según Sandín (2003), la investigación cualitativa es “una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento” (p. 36). En pocas palabras, el enfoque cualitativo busca la recolección de la información sin ninguna medición numérica, hacia el afianzamiento de las respuestas a las preguntas de investigación. En este caso, se describe y comprende el razonamiento geométrico de los estudiantes (trayectoria de aprendizaje), basándose en palabras y hechos desarrollados por la población en mención más adelante.



Taylor & Bogdan (2000) consideran la investigación cualitativa como “la investigación que produce y analiza los datos descriptivos, como las palabras escritas o dichas, y el conocimiento observable de las personas” (p. 7), lo cual es deseable en el presente estudio. Estos autores amplían su conocimiento sobre el tema cuando afirman que “la investigación cualitativa no busca la generalización, sino que es ideográfica y se caracteriza por estudiar en profundidad una situación concreta” (p. 7); en el presente estudio los resultados y conclusiones son muy locales, están dando cuenta de la población estudiada.

Así mismo, Hernández, Fernández & Baptista (2014) afirman que la investigación cualitativa se direcciona a “comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto” (p. 364). Además, estos autores sostienen que “La investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente)” (p. 364). En síntesis, para el presente estudio, los participantes son objeto de observación, análisis e interpretación, en su ambiente natural, al hacerlos partícipes de la intervención diseñada para alcanzar los objetivos.

Teniendo en cuenta el paradigma de investigación, el grado de profundidad y el alcance de investigación, se opta por el *nivel descriptivo*, donde se tiene en cuenta la caracterización de fenómenos individuales o grupales en un momento temporal; con el fin de establecer su estructura o comportamiento (Arias, 2006).

Por su parte, Méndez (1988) afirma que “el estudio descriptivo identifica características del universo de investigación, señala formas de conducta y actitudes, establece comportamientos concretos descubre, comprueba y analiza las variables de investigación” (p. 19).

En síntesis, el presente estudio pretende organizar los datos obtenidos de todas las fuentes de información, para lograr un análisis preciso, claro y verídico, teniendo en cuenta la estructura teórica y conceptual establecida.

### **3.2 Población y muestra**

El proceso metodológico incluye identificar la población y la muestra que se desea examinar, para así poder diseñar las estrategias y las actividades que permitan los progresos en los aprendizajes de los estudiantes en el contexto del aula.

#### **Población**

Arias (2006) afirma que una población es “como el conjunto finito o infinito de elementos con características comunes para los cuales serán extensivas las conclusiones de la investigación” (p. 34). La población seleccionada para esta investigación es la IETAVH, de carácter público, del municipio de Morales Bolívar, en el segundo semestre académico del año 2019.

#### **Muestra**

Hurtado (2000) considera la muestra como “una porción de la población que se toma para realizar el estudio, la cual se considera representativa de la población” (p. 17). En el presente estudio, la muestra seleccionada es el grado 5A de la IETAVH. El curso seleccionado está constituido por 28 estudiantes, que oscilan entre 10 y 12 años de edad, 18 mujeres y 10 hombres. La elección de la muestra fue estratégica (por conveniencia) dado que fue el profesor de quinto grado que más se interesó por el proyecto de investigación y permitió realizar las intervenciones planeadas.

### **3.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información**

Las técnicas e instrumentos que se tienen en cuenta en esta investigación son el diagnóstico, la observación participante, los diarios de campo y la unidad didáctica, los cuales permitirán profundizar la interpretación y los análisis de la situación problemática presentada en el contexto y así lograr los objetivos propuestos y resultados esperados para la investigación.

De acuerdo con Sandín (2003), el diseño metodológico de la investigación se lleva a cabo en cuatro etapas, a saber:

#### **Diagnóstico**

A pesar que el actual estudio se centra en los procesos matemáticos de pensamiento, usando los polígonos como vehículo para su desarrollo, se hace necesario indagar el estado en el que se encuentran los aprendizajes sobre polígono (presaberes) en los estudiantes de 5°A. En este sentido, se diseñó una prueba de nueve preguntas relacionadas con los presaberes del concepto de polígono y sobre polígono. La prueba puede verse en el anexo N° 1.

#### **Observación participante**

Se asume los lineamientos de Marín (2018): “el observador o investigador asume el papel de miembro del grupo, comunidad o institución que investiga y, como tal, participa de su funcionamiento cotidiano” (p. 221). Esta asunción concuerda con el paradigma cualitativo elegido, donde la investigadora hace parte del proceso a través de la interacción con los estudiantes, permitiendo tener un conocimiento claro y preciso de las características que expresan lo observado en cada momento de la investigación, tomando lo más relevante para cumplir con el objetivo propuesto. En concreto, para este estudio se ha usado la expresión “notas

del investigador”, que le permiten complementar el proceso de análisis, principalmente, del desarrollo de la unidad didáctica.

### **Diario de campo**

Porlán & Martín (1991) definen el diario de campo como un “instrumento de análisis del pensamiento reflexivo de profesores tanto en formación como en ejercicio” (p. 21). Se entiende al diario de campo como la descripción detallada y objetiva la información significativa de las actividades realizadas por los estudiantes después de cada una de las sesiones. Los diarios de campo elaborados en los diferentes momentos de la intervención se pueden ver en el anexo N° 2.

### **Unidad de didáctica**

Según Arias (2006), los instrumentos son “los medios materiales que se emplean para recoger y almacenar la información” (p. 18). Para la recolección de la información relevante se ha diseñado una unidad didáctica teniendo en cuenta los modelos teóricos de Van Hiele (niveles 1 y 2) y de Vinner & Hershkowitz, los procesos matemáticos de pensamiento y el Geoplano.

Durante este apartado se hace énfasis específicamente en qué consiste la estructura de las actividades que conforman la unidad didáctica, teniendo en cuenta los niveles de razonamiento del 1 al 2 de Van Hiele y las fases de aprendizaje respectivas como organizadoras de la enseñanza que se encuentran en el referente teórico planteado, sin dejar de lado que esta unidad es el instrumento indispensable para la recolección de la información. Por otra parte, la unidad didáctica también tuvo en cuenta la estructura del plan de área para los estudiantes de 5° grado de la IETAVH.

La unidad didáctica está formada por una primera actividad (denominada actividad “0”) que contiene las nociones preliminares al concepto de polígono, donde solo se tiene en cuenta el

nivel 1, dado que son nociones que se abordaron en otros grados y únicamente se abordan en la fase de información, por que como ya se dijo en el marco teórico, entre otras cosas en esta fase se revisan y se aclaran dichas nociones. Luego se diseñan tres actividades denominadas construcción y uso de la definición de polígono (denominada actividad “1”), triángulos (denominada actividad “2”), y cuadriláteros (denominada actividad “3”), donde cada una de estas contiene tareas para desarrollar los niveles 1 y 2. Cada uno de estos niveles contiene tres tareas en la fase de orientación dirigida, dos tareas en la fase de orientación libre y dos tareas en la fase de integración. Es importante recordar, como se dijo en el marco teórico, que para este estudio solo se tendrán en cuenta estas fases.

En general, un aspecto importante tenido en cuenta en el diseño de las actividades es el hecho de que la representación gráfica de los polígonos, en las diferentes actividades, se presenta en posiciones estándar y no estándar (Vinner & Hershkowitz, 1983), con el fin de no generar estereotipos en el aprendizaje de los estudiantes.

Para resumir lo anteriormente dicho, en la figura 2 se detalla el contenido matemático de la unidad didáctica junto con los temas a desarrollar. La actividad 0 contiene las tareas que permiten desarrollar las nociones que resultaron de mal desempeño por los estudiantes en el diagnóstico inicial. La actividad 1 pretende la construcción y el uso de la definición de polígono mediante tareas especialmente diseñadas para el logro del objetivo. En la actividad 2, se pretende desarrollar el concepto de triángulo y las clasificaciones mencionadas antes. Por último, la actividad 3 contiene las tareas que permiten el desarrollo del concepto de cuadrilátero y las clasificaciones ya dichas. De forma similar, en el anexo N° 3 se presenta la unidad didáctica completa.

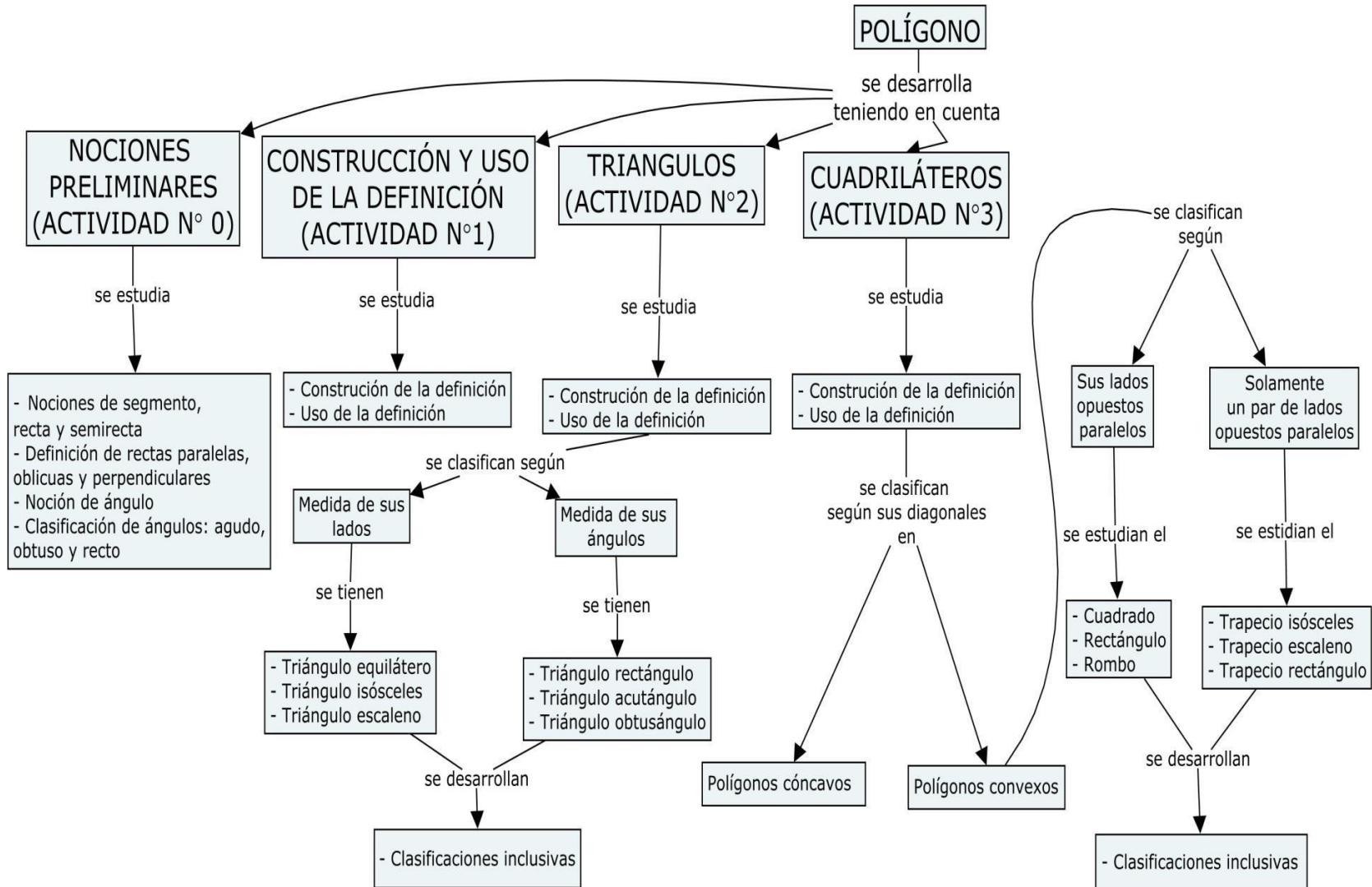


Figura 2. Mapa de temas y subtemas del concepto polígono. Fuente: elaboración propia.

### 3.3.1. Descripción de la Unidad Didáctica

Brevemente se presenta una descripción de la estructura de diseño de cada una de las actividades. Dicha descripción incluye los elementos teóricos que la soportan: los modelos teóricos de Van Hiele y de Vinner & Hershkowitz, y los procesos matemáticos de pensamiento.

- **Descripción de la actividad N° 0**

En esta actividad es importante resaltar que solo se utilizó la *fase de información* debido a que en ésta se conocen los objetos de estudio y los conocimientos previos requeridos para poder transitar a un nuevo conocimiento.

Además, en el diseño de la actividad se establecieron tres tareas que contienen las nociones preliminares del concepto de polígono como:

- Nociones de segmentos, recta y semirrecta.
- Definición de rectas paralelas, oblicuas y perpendiculares.
- Noción de ángulo.
- Clasificación de ángulos: agudo, obtuso y recto.

El diseño de estas tareas, dentro de la actividad, consideró como temáticas las que resultaron después de analizar el diagnóstico inicial, es decir, en las que los estudiantes tuvieron mayor dificultad. El objetivo de la actividad es fortalecer los preconceptos necesarios para acceder al nuevo concepto de estudio, los polígonos.

- **Descripción de la actividad N° 1**

La actividad fue diseñada teniendo en cuenta los niveles 1 y 2 de razonamiento y las fases de aprendizaje para la organización de la enseñanza de los estudiantes. Esta consta de 14 tareas que

se distribuyen en 7 tareas para el nivel 1 y 7 tareas para el nivel 2; en las cuales se tuvieron en cuenta las *fases de orientación dirigida, orientación libre e integración*. En un primer momento, para el diseño de las tareas en el nivel 1, se implementó la construcción y uso de la definición del concepto de polígono, donde se espera que los estudiantes puedan visualizar atributos físicos en los polígonos mediante un reconocimiento global y, para finalizar, en el nivel 2, se diseñaron tareas donde se espera que los estudiantes consoliden los elementos de estudio con propiedades matemáticas y establezcan relaciones entre los objetos estudiados. Con esto se pretende estimular en los estudiantes la adquisición del concepto de polígono (imagen y definición) y así generar mayor grado de motivación en las tareas propuestas en el resto de la unidad.

- **Descripción de la actividad N° 2**

La actividad fue diseñada teniendo en cuenta los niveles 1 y 2 de razonamiento y las fases de aprendizaje para la organización de la enseñanza de los estudiantes. Esta consta de 14 tareas que se distribuyen en 7 tareas para el nivel 1 y 7 tareas para el nivel 2; en las cuales se tuvieron en cuenta las *fases de orientación dirigida, orientación libre e integración*. Para el desarrollo de cada una de las tareas propuestas en el nivel 1, se implementó la construcción y uso de la definición en el concepto de triángulo, según sus clasificaciones: según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos; lo anterior, con el fin que los estudiantes perciban los elementos a estudiar, descubran y aprendan relaciones o componentes de los mismos y dar uso de lo aprendido para generar organización cognitiva en los conocimientos adquiridos. Por último, en el nivel 2, se diseñaron tareas donde los estudiantes deben tener en cuenta las propiedades matemáticas de cada uno de los objetos que se está estudiando. En el diseño de las tareas para estos niveles se tuvo en cuenta las clasificaciones inclusivas.



- **Descripción de la actividad N° 3**

Esta actividad fue diseñada teniendo en cuenta los niveles 1 y 2 de razonamiento y las fases de aprendizaje para la organización de la enseñanza de los estudiantes. Esta consta de 14 tareas que se distribuyen en 7 tareas para el nivel 1 y 7 tareas para el nivel 2; en las cuales se tuvieron en cuenta las *fases de orientación dirigida, orientación libre e integración*. Las tareas diseñadas incluyen la construcción y uso de la definición del concepto de cuadrilátero, donde se tuvo en cuenta las clasificaciones según sus diagonales (cóncavos, convexos), y según si sus pares de lados opuestos son paralelos, y si solo un par de lados opuestos es paralelo. En estas tareas los estudiantes deben descubrir y aprender las relaciones o componentes básicos del tema en estudio, usar lo aprendido y, por último, permitir la adquisición del conocimiento sobre clasificaciones inclusivas para formar propiedades matemáticas de los objetos matemáticos estudiados.

### **3.4 Metodología de la intervención**

Después de haber socializado el proyecto de investigación con las autoridades académicas de la IETAVH, y teniendo el respectivo aval para su desarrollo en la institución (ver anexo N° 4), se procedió a seleccionar el grupo de quinto grado donde se llevaría a cabo la implementación de los instrumentos diagnóstico inicial y unidad didáctica. De los tres grados quintos (A, B, C), fue el docente titular del grupo 5A quien recibió la propuesta con mayor agrado y se interesó por que su grupo fuera intervenido. El profesor titular del curso le permitió a la profesora investigadora estar en el grupo y él se apartó del proceso, sólo fue un apoyo administrativo dentro de la institución. Posteriormente, se le comunicó a los padres de familia de los estudiantes del grupo 5A, mediante una carta, que sus hijos participarían en el desarrollo del proyecto de investigación y que, por lo tanto, se les solicitaba, aquí mismo, dieran el consentimiento de su participación (ver anexo N° 5).

Luego de aplicado y analizado el diagnóstico inicial, el diseño de la unidad didáctica se ajustó para que en la actividad “0” se incluyeran los temas de mayor incomprensión por parte de los estudiantes.

El medio escolar en el que se desarrolló la intervención fue la propia aula de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo individual y en pequeños grupos (de tres participantes). Las actividades que componen la unidad didáctica fueron desarrolladas en su totalidad dentro de la jornada escolar, en los horarios correspondientes a la clase de matemáticas.

Las tareas inmersas en cada actividad de la unidad didáctica fueron planeadas ordenadamente; las hojas que las contienen les fueron entregadas a los estudiantes en la medida que las iban terminando. Cada participante tenía a su disposición algunos instrumentos: un Geoplano, que fue diseñado por ellos mismos en la clase de educación artística, dos escuadras, una regla y un transportador de medidas angulares; dichos instrumentos los podían usar cuando cada estudiante los considerara.

Si al finalizar una sesión de clase, la actividad no se había terminado de desarrollar, la profesora las recogía y en la siguiente sesión las devolvía para continuar su desarrollo. Culminada completamente una actividad la profesora las recogía para su posterior análisis.

### **3.5 Categorías de análisis**

En el capítulo 2 se ha presentado una reseña de los niveles de razonamiento y de las fases de aprendizaje que conforman el modelo de Van Hiele. Como se ha dicho, ambos componentes del modelo se han usado en el diseño de la unidad didáctica, la cual es, junto con su experimentación, uno de los pilares de este estudio.

La intención ahora es presentar los descriptores de nivel de razonamiento que se plantean con base en los descriptores específicos para los polígonos (Burger & Shaughnessy, 1986) y los conceptos matemáticos que hacen parte de la unidad didáctica.

Los descriptores de nivel, de los que se habló antes, son tomados como categorías de análisis, los cuales se perfeccionan y completan a medida que se analiza las producciones de los estudiantes, después de haber desarrollado las diferentes actividades que componen la unidad didáctica.

Dado que, como lo plantean diversos estudios, los estudiantes de la Básica Primaria, en su gran mayoría sólo alcanzan el nivel 2 y, en muy pocos casos, estudiantes transitan hacia el nivel 3, para este estudio se elaboró un listado de categorías para los niveles 1 y 2.

### ***Nivel 1 (Reconocimiento)***

En este nivel, los estudiantes distinguen las figuras geométricas de modo integral, lo que sugiere las siguientes características:

**1.1.** Reconocen figuras geométricas apoyándose en aspectos físicos utilizando únicamente estrategias de tipo visual. Puede darse el caso en que no identifiquen una figura determinada sólo por el hecho que no aparezca en una posición estándar.

**1.2.** Distinguen las figuras geométricas en su globalidad y pueden describir su parecido o no entre ellas usando términos como “más grande”, “más pequeño”, “estirado”, “ampliado”. Por ejemplo, cuando un estudiante esté decidiendo sobre si un determinado cuadrilátero es un rectángulo, podría decir “esta figura no es un rectángulo porque es muy estirado o muy ampliado”.

**1.3.** Comienzan a reconocer algunas características matemáticas de los polígonos, aunque puede que no sean conscientes de ello. Por ejemplo, algunos estudiantes podrían tomar medidas de los ángulos en un cuadrilátero y decidir que es un cuadrado, aunque no comprendan que esta es una parte de su definición (de cuadrado).

**1.4.** Logran reconocer y declarar, utilizando argumentos de tipo visual, la diferencia entre cuadriláteros cóncavos y convexos.

**1.5.** Logran reconocer y declarar, utilizando argumentos de tipo visual, la diferencia entre cuadriláteros cóncavos y cuadriláteros convexos.

**1.6.** Pueden reconocer y declarar, utilizando argumentos de tipo visual, polígonos o sus partes en mosaicos.

**1.7.** Construyen o dibujan polígonos sin considerar características matemáticas como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados.

**1.8.** Formulan definiciones realizando un listado de propiedades físicas. Por ejemplo, definir un polígono como una figura que tiene lados, puntas, etc.

**1.9.** Usan la definición de polígono, triángulo o cuadrilátero para dibujar o seleccionar diversos ejemplos de los mismos.

**1.10.** Realizan clasificaciones de polígonos basándose únicamente en atributos físicos. Por ejemplo, decir que los rectángulos se caracterizan por ser alargados y que los cuadrados se caracterizan por no ser alargados.

## ***Nivel 2 (Análisis)***

En este nivel, los estudiantes pasan a ser conocedores de la importancia que tiene el abandonar las decisiones tomadas únicamente desde lo que visualizan, sino que además deben

comprender que existen condiciones matemáticas que los polígonos deben cumplir. Según lo anterior, se consideran características del nivel 2 las siguientes:

**2.1.** Construir o dibujar polígonos teniendo en cuenta características matemáticas como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados.

**2.2.** Reconocer aspectos matemáticos específicos de los polígonos, tales como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados, el paralelismo y la perpendicularidad entre sus lados.

**2.3.** Descubrir o usar que la posición de un determinado polígono es intrascendente, es decir, que no es necesario que se encuentre en posición estándar.

**2.4.** Comparar y diferenciar polígonos concretamente mediante sus características matemáticas.

**2.5.** Formular definiciones de polígonos teniendo en cuenta propiedades matemáticas.

**2.6.** Usar la definición de diversos polígonos para determinar una clasificación de los mismos.

**2.7.** Usar la definición de polígonos cóncavos y convexos para determinar una clasificación o identificación de los mismos.

**2.8.** Usar la definición de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos para determinar una clasificación de los mismos.

**2.9.** Usar la definición de triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos para determinar una clasificación de los mismos.

**2.10.** Clasificar diferentes polígonos usando propiedades matemáticas.

**2.11.** Realizar clasificaciones inclusivas.

**2.12.** Deducir y demostrar propiedades matemáticas de polígonos únicamente realizando verificación mediante ejemplos.

**2.13.** Deducir y demostrar propiedades matemáticas de polígonos únicamente realizando una justificación clara de lo realizado.

### **3.6 Validación de instrumentos**

La validación por expertos de la unidad didáctica la realizaron, además de la revisión hecha por el director de este trabajo, los profesores investigadores Dr. Arnaldo De La Barrera y Dr. Wilson Alberto Contreras (ver anexo N° 6), ambos pertenecientes al Grupo de Investigación EDUMATEST, perteneciente a la Universidad de Pamplona y clasificado por COLCIENCIAS. Los investigadores realizaron sus aportes al diseño, que en su mayoría fueron coincidentes. Dichos aportes fueron tenidos en cuenta, bajo la supervisión del director del trabajo, en la estructura global de la unidad didáctica, para así tener una versión definitiva.

### **3.7 Metodología de análisis de la información: triangulación**

Una vez recolectada la información en cada una de las etapas del trabajo de investigación, se realiza el proceso de triangulación que permite profundizar en el análisis y la comprensión de los datos obtenidos, teniendo en cuenta las categorías de análisis. Al mismo tiempo, se verifican las fuentes de información como son: las observaciones realizadas (diario de campo), el nivel de desempeño alcanzado por los estudiantes durante la prueba diagnóstica, y el avance durante el desarrollo de las diferentes actividades que conforman la unidad didáctica.

En este sentido, para Hernández et al. (2014), el análisis de los datos cualitativos permite al investigador otorgarles una estructura propia, la cual proviene de observaciones y narraciones del investigador y de los participantes, y que se fundamenta en evidencias visuales, auditivas, textos escritos, expresiones verbales y no verbales.

Teniendo en cuenta lo anterior, durante la realización del trabajo de investigación se genera una teoría fundamentada, en base a los datos recolectados durante las diferentes etapas del proceso de investigación y que apunta a dar solución al problema de investigación.

En conclusión, el capítulo 3 presenta todos los aspectos metodológicos necesarios para el desarrollo y comprensión de este trabajo de grado.

## CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

A continuación, se presenta un tránsito por las tareas que conforman la prueba diagnóstica, revelando lo identificado en las respuestas de los estudiantes de la muestra. Así como también, un tránsito por las actividades de la unidad didáctica revelando las diferentes maneras de responder y sus respectivos análisis desde la perspectiva de las categorías planteadas para tal fin y, como se dijo antes, triangulando la información con la obtenida en los diarios de campo y notas adicionales del investigador. En ambos casos, en la prueba diagnóstica y en la unidad didáctica, se muestran los ejemplos más representativos de casos en que la mayoría de estudiantes respondieron inadecuadamente (sin avances en sus trayectorias de aprendizaje) o adecuadamente (avanzando favorablemente en sus trayectorias de aprendizaje).

Con el fin de hacer más ágil la comprensión de este capítulo, se recuerda que cada actividad coincide con cada uno de los conceptos abordados (polígono, triángulo y cuadrilátero); además, que la actividad “0” contiene actividades que pretenden fortalecer los preconceptos requeridos para desarrollar las posteriores (la “1”, la “2” y la “3”). No hemos incluido respuestas de cada tarea (composición de cada actividad), ya que algunas son similares a otras de la misma actividad.

El análisis de las respuestas en la unidad didáctica se llevó a cabo, en un primer momento, en la modalidad triple ciego; es decir, la investigadora, el director y un investigador experto (miembro del grupo de investigador EDUMATEST, Dr. Arnaldo De La Barrera), todos por separado. En un segundo momento, se realizó un encuentro de los tres participantes con el fin de poner en escena los resultados obtenidos por cada uno y verificar los puntos de encuentro y desencuentro en el análisis realizado. Lo anterior, permitió consolidar un análisis más fidedigno.



#### 4.1. Análisis de la prueba diagnóstica

Es preciso recordar que esta prueba está conformada por nueve tareas que tienen como objetivo evaluar el estado de aprendizajes en los preconceptos necesarios para abordar las temáticas de la unidad didáctica experimental, diseñada especialmente para este estudio. La tabla 5, a continuación, resume las tareas y el tema de cada una.

Tabla 5

*Resumen de tareas y temas tratados en la prueba diagnóstica*

<b>Tarea N°</b>	<b>Tema de la tarea</b>
<b>1</b>	Identificación de polígonos
<b>2</b>	Identificación de triángulos y cuadriláteros
<b>3</b>	Definición de: polígono, triángulo y cuadrilátero
<b>4</b>	Construcción de definiciones de polígono
<b>5</b>	Clasificaciones inclusivas entre cuadriláteros
<b>6</b>	Perpendicularidad
<b>7</b>	Paralelismo
<b>8</b>	Ángulos y sus medidas
<b>9</b>	Clases de ángulos

Fuente: elaboración propia

#### **TAREA N°1:**

De un conjunto de imágenes se les pide ubicar los que son polígonos. Se presenta el caso de Alejandra, quien ubica como polígonos, justamente aquellos que son más “raros” para ella,

eligiendo correcta e incorrectamente; es decir no ubicó al cuadrado, a los trapecios, o aquellos que parecen rectángulos, quizá porque estos tienen su propio nombre.

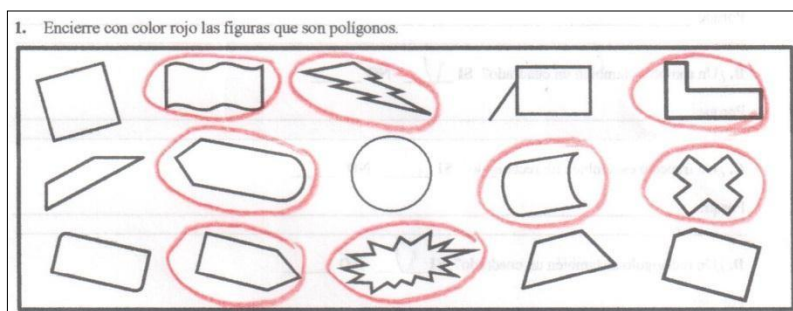


Figura 3. Producción de Alejandra en la tarea n° 1 del diagnóstico.

De manera similar, el caso de Beatriz, quien ubica polígonos que son “extraños” para ella; aunque su respuesta es correcta, es incompleta. Esto sugiere que tiene una idea similar al caso de Alejandra que no ubicó al cuadrado o a los trapecios o a los que parecen rectángulos, porque justamente tienen su propio nombre.

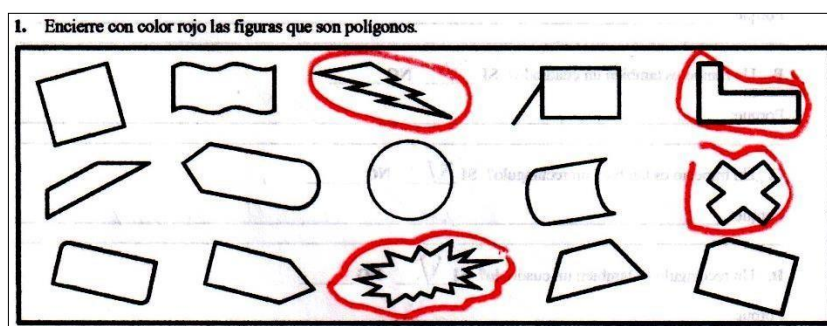


Figura 4. Producción de Beatriz en la tarea n° 1 del diagnóstico.

En ambos casos, se puede observar que las estudiantes no han adquirido la imagen del concepto de una manera completa.

## TAREA N°2:

A partir de un conjunto de imágenes se desea conocer si identifican los nombres y si pueden identificar clasificaciones inclusivas. Se muestra el caso de Claudia que incluye en los triángulos

a los rombos y su respuesta se fundamenta en que los rombos tienen “puntas alargadas” como los triángulos. Se observa también que no marcó como cuadrado al que está dibujado en posición no estándar, y como no conoce los rombos, por eso no lo marcó como rombo. Además, solo reconoció al rectángulo que está dibujado en posición estándar, el otro no, seguramente, por estar en posición estándar.

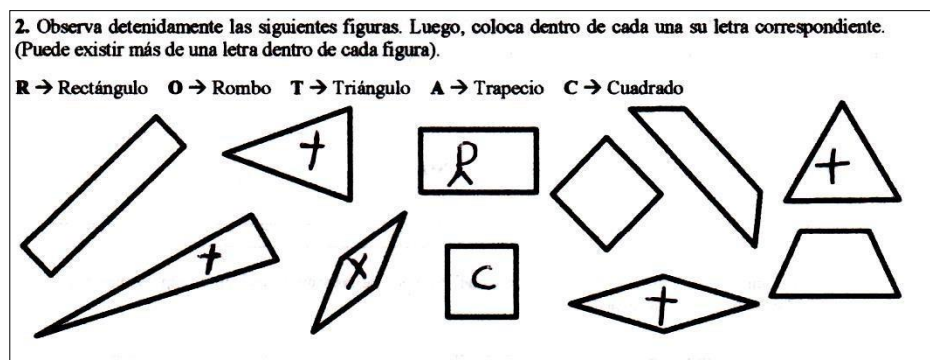


Figura 5. Producción de Claudia en la tarea n° 2 del diagnóstico.

Otro caso en esta tarea es el de Diego, quien reconoce sólo las figuras que están dibujadas en posición estándar, excepto al trapecio (que estando en posición estándar) no lo reconoció.

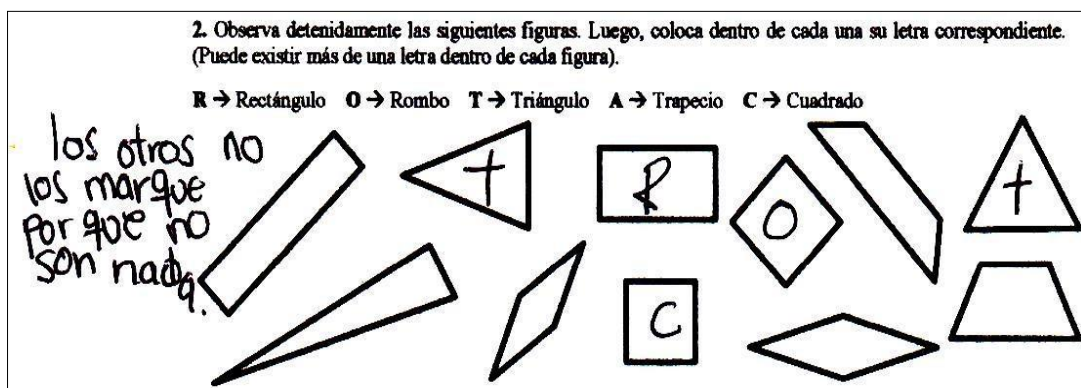


Figura 6. Producción de Diego en la tarea n° 2 del diagnóstico.

En los dos casos presentados se puede deducir la escasa formación de la imagen del concepto, al no identificar las figuras así estén en posiciones no estándar; es decir, que el nombre de una figura no depende de la posición en que esté dibujada.

**TAREA N°3:**

Esta tarea busca evaluar si los estudiantes conocen las características que definen los conceptos de triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo y trapecio. Se encuentra el caso de Cristian quien escasamente responde a una de las preguntas y de manera incorrecta. La respuesta sugiere que identifica a los cuadrados sólo porque tienen cuatro lados (sin importar su medida), más no, porque adicionalmente tienen cuatro ángulos rectos.

3. Coloca una F, si es falso, o una V, si es verdadero. Justifica las respuestas falsas.	
A. <input checked="" type="checkbox"/> V	Existen cuadrados que tienen tres lados de 3 cm. y uno de 2 cm. <i>Porque el cuadrado tiene cuatro lados.</i>
B. <input type="checkbox"/>	El triángulo es un polígono que tiene solo un par de lados paralelos.
C. <input type="checkbox"/>	El rectángulo tienen cuatro ángulos de 90° y todos sus lados son de la misma longitud.
D. <input type="checkbox"/>	El trapecio está formado por cinco lados de la misma medida.
E. <input type="checkbox"/>	El rombo es un polígono conformado por cuatro lados iguales.

Figura 7. Producción de Cristian en la tarea n° 3 del diagnóstico.

En conclusión, el análisis de esta tarea sugiere que los estudiantes no conocen los atributos que identifican a un triángulo, rectángulo, trapecio y rombo. No conocen la definición de estos polígonos.

**TAREA N°4:**

Tarea que pretende conocer si los estudiantes pueden definir un concepto a través de las imágenes del concepto (ejemplos y no ejemplos). El caso de Yesid muestra una definición incompleta, sólo tuvo en cuenta las figuras que conforman al triángulo: triángulo y una figura de

cinco lados (de la cual no sabe su nombre); faltó identificar que las figuras se interceptan en un vértice.

4. Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras en las columnas de la izquierda y de la derecha, luego escribe la definición de TRIANPEN

TRIANPEN	
Ejemplos de Trianpen	No ejemplos de Trianpen
Trianpen es: <u>un triángulo de 3 lados y una figura 5 lados</u>	

Figura 8. Producción de Yesid en la tarea n° 4 del diagnóstico.

Otro ejemplo de respuesta, nuevamente Claudia, muestra que para ella sólo tienen nombre las figuras que ha visto en su proceso escolar (triángulo, cuadrado, rectángulo).

4. Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras en las columnas de la izquierda y de la derecha, luego escribe la definición de TRIANPEN

TRIANPEN	
Ejemplos de Trianpen	No ejemplos de Trianpen
Trianpen es: <u>Triángulo</u>	

Figura 9. Producción de Claudia en la tarea n° 4 del diagnóstico.

En conclusión, el desarrollo de esta tarea sugiere que los estudiantes no saben definir un concepto a partir de sus imágenes (del concepto).

**TAREA N°5:**

Es una tarea que tienen como objeto identificar si los estudiantes identifican posibles clasificaciones inclusivas que se presentan en los polígonos. La producción de María en esta tarea permite sugerir que no conocen las diversas clasificaciones inclusivas que se pueden dar en los ejemplos presentados en la tarea. Se puede observar que las respuestas asignadas fueron hechas al azar, sin ningún análisis; además no pudo justificar dichas respuestas.

<p>5. Responde la pregunta dada, luego justifica tu respuesta.</p> <p>A. ¿Un cuadrado es también un rombo? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p>Porque: _____</p> <p>B. ¿Un rombo es también un cuadrado? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p>Porque: _____</p> <p>C. ¿Un trapecio es también un rectángulo? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p>Porque: _____</p> <p>D. ¿Un rectángulo es también un cuadrado? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p>Porque: _____</p> <p>E. ¿Un cuadrado es también un rectángulo? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p>Porque: _____</p> <p>F. ¿Un rombo es también un rectángulo? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/></p> <p>Porque: _____</p>
---

Figura 10. Producción de María en la tarea n° 5 del diagnóstico.

En conclusión, los estudiantes no conocen, ni identifican las posibles clasificaciones inclusivas que se presentan en diferentes polígonos.

**TAREA N°6:**

Esta tarea pretende identificar el conocimiento del concepto de perpendicularidad entre líneas rectas (representadas en la imagen como segmentos). A continuación el caso de Carlos, el que permite evidenciar que no ha adquirido el concepto (perpendicularidad). Carlos tan solo

identifica la perpendicularidad por la intersección de las líneas rectas, sin tener en cuenta que entre ellas deben formarse ángulos de 90 grados.

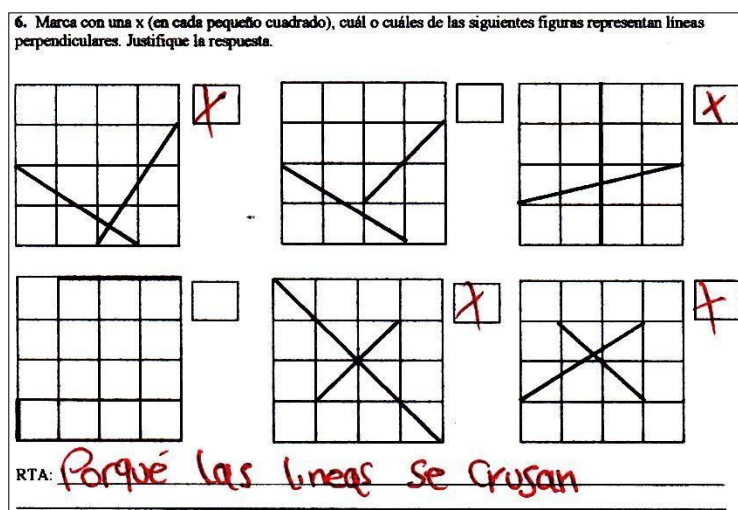


Figura 11. Producción de Carlos en la tarea n° 6 del diagnóstico.

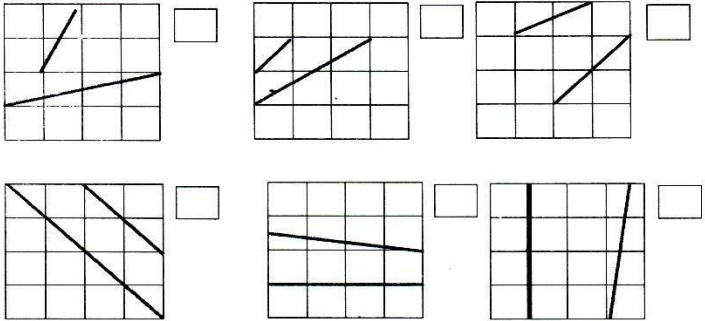
En conclusión, los estudiantes no tienen suficiente conocimiento del concepto de perpendicularidad que, como se ha dicho antes, es un concepto necesario para abordar a los polígonos.

#### TAREA N°7:

La tarea propuesta se diseñó con el objetivo de verificar si los estudiantes conocen el concepto de paralelismo. Se presenta la respuesta de Yésica, que permite identificar que posee parcialmente el concepto, pero dicha respuesta sugiere que ha adquirido una imagen del concepto muy pobre; la justificación a la respuesta sugiere que sólo adquirió una imagen prototípica, sólo el paralelismo en líneas rectas que se dibujan horizontalmente a la hoja de trabajo.

En conclusión, los estudiantes no conocen completamente el concepto de paralelismo.

7. Marca con una x cual o cuales de las siguientes figuras representan líneas paralelas justifique la respuesta.



RTA: Ninguna de las líneas son paralelas por qué son así                     

Figura 12. Producción de Yésica en la tarea n° 7 del diagnóstico.

### TAREA N°8:

Es una tarea que busca identificar si el estudiante conoce la manera de clasificar los ángulos según su medida y, aunque menos importante, identificar el mayor y menor ángulo. Un ejemplo de respuesta representativa es la de José. No conoce la clasificación de los ángulos según su medida y sólo puede identificar cuál de ellos es menor, seguramente porque conoce la relación de orden entre los números naturales.

En conclusión, los estudiantes no conocen la clasificación de los ángulos según su medida.

8. Observa las medidas de cada ángulo y escribe el nombre correspondiente. Luego encierra con color verde el ángulo de menor medida y de color rojo al de mayor medida.

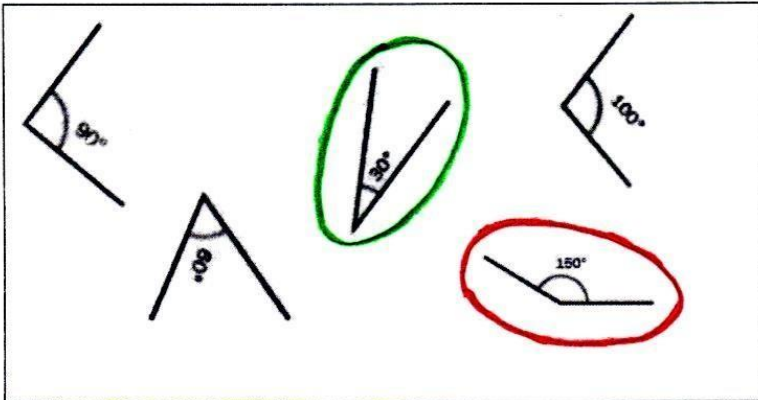


Figura 13. Producción de José en la tarea n° 8 del diagnóstico.



### TAREA N° 9:

Se diseñó con el objetivo de identificar si visualmente un estudiante puede seleccionar ángulos desde su clasificación según su medida. El caso de Amparo muestra la imposibilidad de realizar dicha selección. Esta tarea confirma la conclusión presentada en la tarea N° 8, no conocen dicha clasificación, ni usando la definición ni usando herramientas visuales.

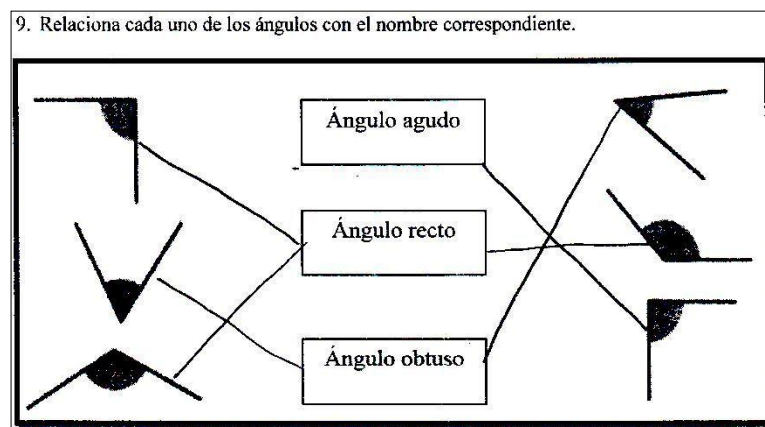


Figura 14. Producción de Amparo en la tarea n° 9 del diagnóstico.

## 4.2 Análisis de la unidad didáctica

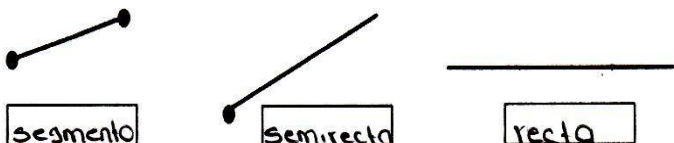
Como se ha comentado, la unidad didáctica está conformada por cuatro actividades (desde la N° 0, hasta la N° 3) y cada una de ellas conformada por tareas. Además, la N° 0, está constituida por tareas que tienen como objetivo consolidar preconceptos necesarios para abordar los conceptos centrales de este estudio; es por esto que, en el análisis de esta actividad, no se tienen en cuenta las categorías planteadas para el análisis de las producciones de los estudiantes.

### 4.1.1. Actividad N° 0

En la tarea N° 1(a), la producción de Sebastián refleja que, dados los ejemplos (en el papel) y los no ejemplos mostrados por la investigadora en el aula de clase, logra definir, aunque solo

usando características físicas, los conceptos de segmento, semirrecta y recta. En este momento de la experimentación han iniciado el conocimiento de los conceptos mencionados.

**Tarea 1. a)** Escribe dentro del recuadro el nombre del objeto geométrico observado.



segmento      semirecta      recta

Ahora con tus palabras define lo siguiente:

- Segmento: Tiene un punto de inicio y tiene un punto final
- Semirecta: Tiene un punto de inicio y no tiene punto final
- Recta: NO tiene punto de inicio y final

Figura 15. Producción de Sebastián en la tarea n° 1(a) de la actividad (0).

En la tarea N° 1(b), Alejandra responde acertadamente a la tarea propuesta, donde logra usar correctamente las definiciones de recta, semirrecta y segmento. Además logra establecer la cantidad de eventos (conceptos) en las condiciones que presenta la tarea.

**b)** Dibuja cada figura con un color diferente.

- Una recta que pase por el número 1.  
¿De cuántas formas diferentes lo puedes hacer? → muchísimas
- Una semirecta que inicie en el número 2.  
¿De cuántas formas diferentes lo puedes hacer? → muchísimas
- Un segmento cuyos extremos sean 3 y 4.  
¿De cuántas formas diferentes lo puedes hacer? → uno solamente

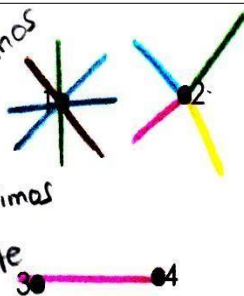


Figura 16. Producción de Alejandra en la tarea n° 1(b) de la actividad (0).

De manera similar, en la tarea N° 1(c), Yésica puede establecer los diferentes segmentos y semirrectas que se encuentran en la figura dada. Es de resaltar que, además de la consolidación de los conceptos, usa una interesante estrategia (numeración) para buscar la cantidad de los mismos.

c) Analiza la figura y repasa con color diferente los segmentos y semirrectas, luego contesta:

- ¿Cuántos segmentos hay? 6
- ¿Cuántas semirrectas hay? 13

Figura 17. Producción de Yésica en la tarea n° 1(c) de la actividad (0).

a) Marca con una X (en cada pequeño cuadrado), cuál o cuáles de las siguientes figuras representan líneas perpendiculares. Justifique la respuesta.

Son perpendiculares si son oblicuas y forman al menos un ángulo recto.

Figura 18. Producción de Germán en la tarea n° 2(a) de la actividad (0).

En el desarrollo de la tarea N°2, en la que se les presenta la definición y ejemplos de rectas paralelas, rectas perpendiculares y rectas oblicuas, los estudiantes muestran avances en el uso de dichas definiciones en situaciones concretas. Por ejemplo, en la tarea N° 2(a), Germán realiza una correcta elección en cuanto a la perpendicularidad se refiere, presentando una justificación acorde a la definición presentada en la tarea.

De manera similar, Germán, en la tarea N° 2 (b), realiza una correcta elección de las rectas paralelas presentando una justificación acorde con las características mínimas de la definición.

b) Marca con una X cuál o cuáles de las siguientes figuras representan líneas paralelas. Justifica tu respuesta.

-  -   
 -  -

*nevera se cortan ni se interceptan*

Figura 19. Producción de Germán en la tarea n° 2(b) de la actividad (0).

Nuevamente, Germán muestra claridad conceptual en la solución de la tarea N° 2(c).

Correctamente selecciona las líneas rectas que son paralelas, perpendiculares y oblicuas. Es una tarea que se destaca de las dos anteriores, en la medida que no son tan evidentes las elecciones posibles.

c) Encuentra y escribe en la figura los pares de líneas perpendiculares, paralelas y oblicuas.

Lineas oblicuas son  
 - a con b  
 - a con d  
 - d con b

Lineas Paralelas son  
 - f con c  
 - c con e  
 - f con c y e

lineas perpendiculares son  
 - a con f  
 - a con c  
 - a con e

Figura 20. Producción de Germán en la tarea n° 2(c) de la actividad (0).

En esta misma tarea N° 2(c), se muestra una foto (de Claudia) que evidencia las estrategias usadas por muchos de los estudiantes de la muestra. El uso de instrumentos como soporte y justificación de las respuestas que presentan ante la tarea dada.

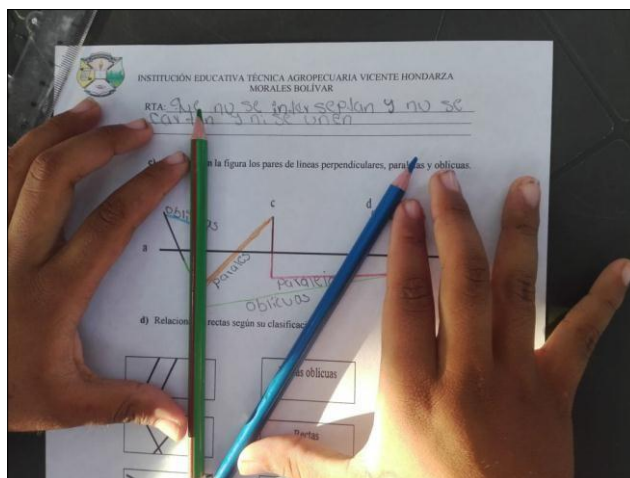


Figura 21. Producción de Claudia en la tarea n° 2(c) de la actividad (0).

En la tarea N° 2(e) se pedía construir (usando el Geoplano) letras mayúsculas que tuvieran en su formación rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. Se muestran las fotos de María y Johana que produjeron correctamente letras acordes a lo solicitado.

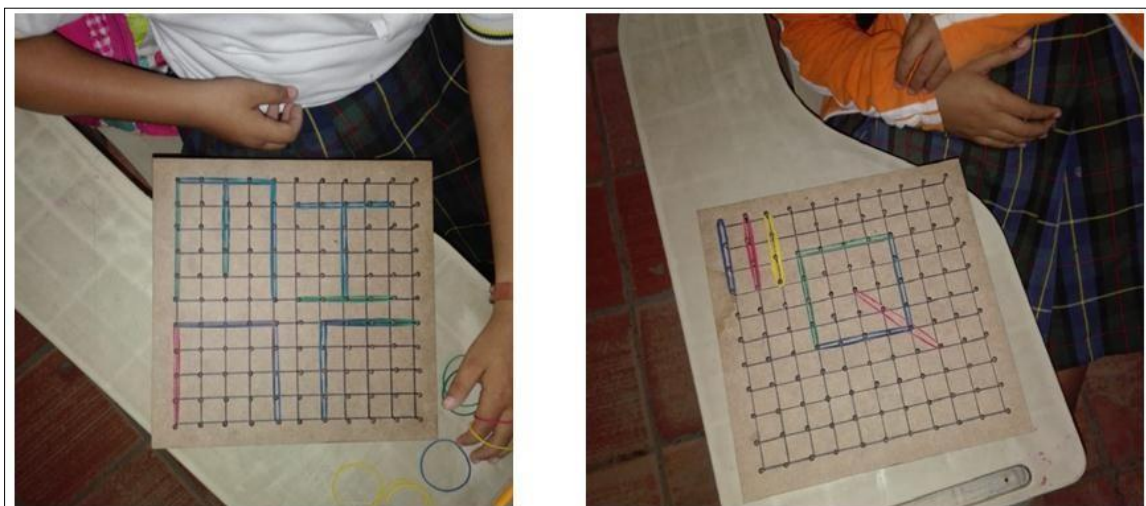


Figura 22. Producción de María y Johana en la tarea n° 2(e) de la actividad (0).

En la tarea N° 3 se les presenta la definición y ejemplos representativos de la imagen de los conceptos de ángulo recto, ángulo agudo y ángulo obtuso. Se muestra la producción de David en la tarea N° 3(a), que realiza una correcta selección de los diferentes conceptos enseñados.

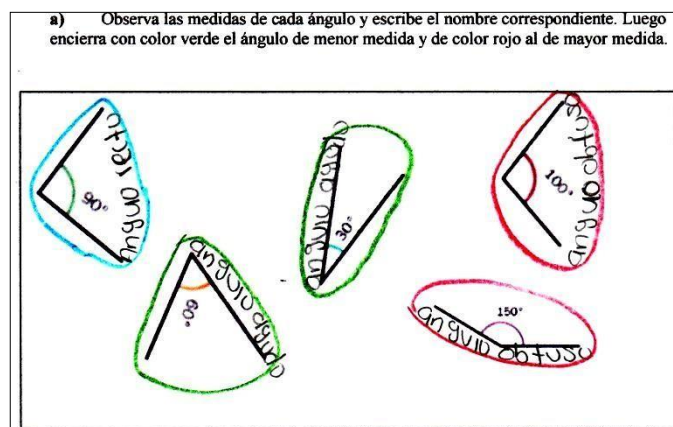


Figura 23. Producción de David en la tarea n° 3(a) de la actividad (0).

En conclusión, al analizar las producciones de todos los estudiantes participantes en la intervención, se puede destacar que lograron el objetivo propuesto; es decir fortalecieron (los estudiantes que sabían de los temas) y adquirieron (los estudiantes que no sabían de los temas) los conceptos de recta, semirrecta, segmento, líneas paralelas, líneas perpendiculares, líneas oblicuas. Por otra parte, en relación a los resultados del diagnóstico, se logra evidenciar que los estudiantes adquieren la imagen de los conceptos y, posteriormente, la definición de los mismos, tal como lo sugieren Vinner & Hershkowitz (1983). Posterior a este momento de la experimentación puede suceder que los estudiantes no recuerden con claridad las definiciones de los conceptos desarrollados hasta el momento, pero como lo sugiere Vinner (1983), la imagen del concepto, en principio, es lo que les permite resolver muchas de las tareas que les plantea el profesor.

Este resultado sugiere que el diseño de la actividad, acorde con la definición del concepto y la imagen del concepto, fueron efectivas en el fortalecimiento de los temas tratados que son fundamentales en la adquisición de los conceptos que son eje central de este estudio.

#### 4.1.2. Actividad N° 1

En la tarea N°1 se presenta 18 ejemplos y 18 no ejemplos de polígono, con el objetivo de que los estudiantes formulen la definición del concepto.

Se presenta la producción de Isabela quien, luego de observar y analizar los ejemplos y no ejemplos dados, logra definir acertadamente al polígono. Este tipo de producción se corresponde con la *categoría 1.8* [Formulan definiciones realizando un listado de propiedades físicas].

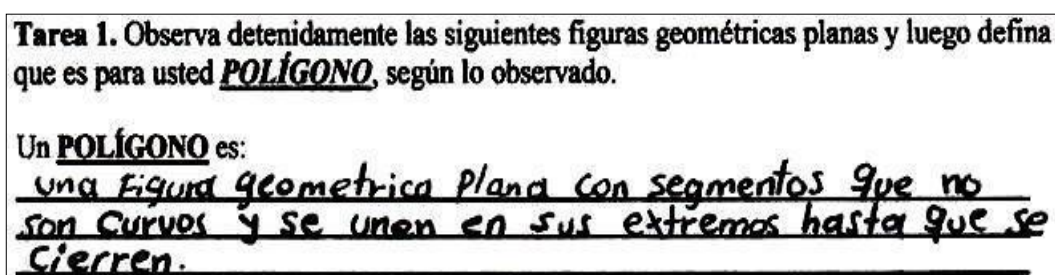


Figura 24. Producción de Isabela en la tarea n° 1 de la actividad (1).

La tarea N° 2 tiene como objetivo que el estudiante use la definición de polígono en la construcción de polígonos y no polígonos, usando el Geoplano.

La producción de Alejandra, Andrés y Amparo, en sus respectivos Geoplanos, muestra la claridad que tienen sobre su conocimiento de polígonos y no polígonos, no solamente en la definición del concepto, sino que también en la imagen del concepto. A la producción de estos tres estudiantes se le ha asignado la *categoría 1.7* [Construyen o dibujan polígonos sin considerar características matemáticas como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados]

**Tarea 2.** Según su definición de **POLIGONO**, dibuja tres polígonos y tres no polígonos (Diferentes a los de la tarea 1), utilizando el Geoplano.



Figura 25. Producción de Alejandra, Andrés y Amparo en la tarea n° 2 de la actividad (1).

En la tarea 3 (a), los estudiantes debían construir polígonos en el Geoplano según cada indicación presentada. El objetivo de la tarea es que los estudiantes construyan diferentes tipos de polígonos, dado que ya conocen su definición.

La producción de Marta y José evidencia el logro del objetivo planteado. Nuevamente a estas producciones se les asigna la **categoría 1.7** [Construyen o dibujan polígonos sin considerar características matemáticas como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados].

**Tarea 3. a).** Según las indicaciones dadas, realiza la representación gráfica del polígono en el Geoplano.

INDICACIÓN
Se llama pentágono
Tiene 3 lados
Se llama hexágono
Tiene 8 lados
Se llama cuadrilátero

Figura 26. Producción de Marta y José en la tarea n° 3(a) de la actividad (1).



El diseño de la tarea N° 4 contempla como objetivo que los estudiantes consoliden la relación concepto y representación gráfica de los diferentes polígonos estudiados.

La producción de Brayan en los literales a-b-g y h muestra una elección y justificación correcta de la relación concepto /imagen del concepto. Su producción pertenece a la *categoría 1.1* [Reconocen figuras geométricas apoyándose en aspectos físicos utilizando únicamente estrategias de tipo visual].

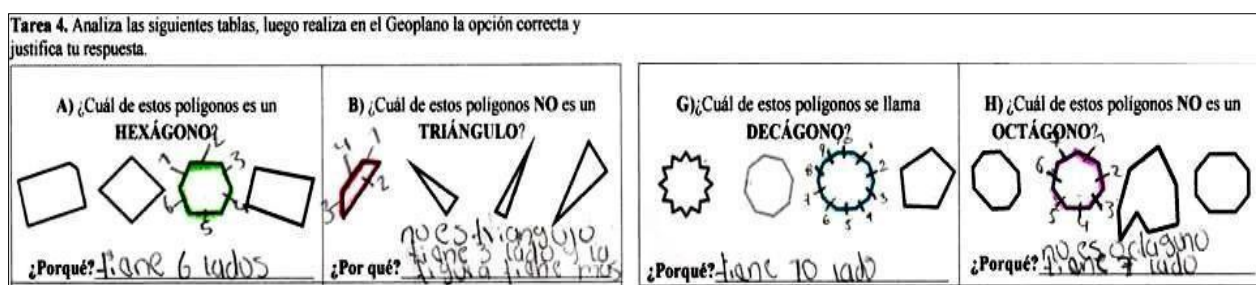


Figura 27. Producción de Brayan en la tarea n° 4(a, b, g y h) de la actividad (1).

La tarea N° 5, diseñada con el objetivo de consolidar la relación concepto/ imagen del concepto, generó la producción de Karen quien usa la estrategia de conteo consecutivo de los diferentes polígonos, además logró construirlo en el Geoplano y confirmar la respuesta dada en el papel. A esta producción se le asignó la *categoría 1.6* [Pueden reconocer y declarar, utilizando argumentos de tipo visual, polígonos o sus partes en mosaicos].

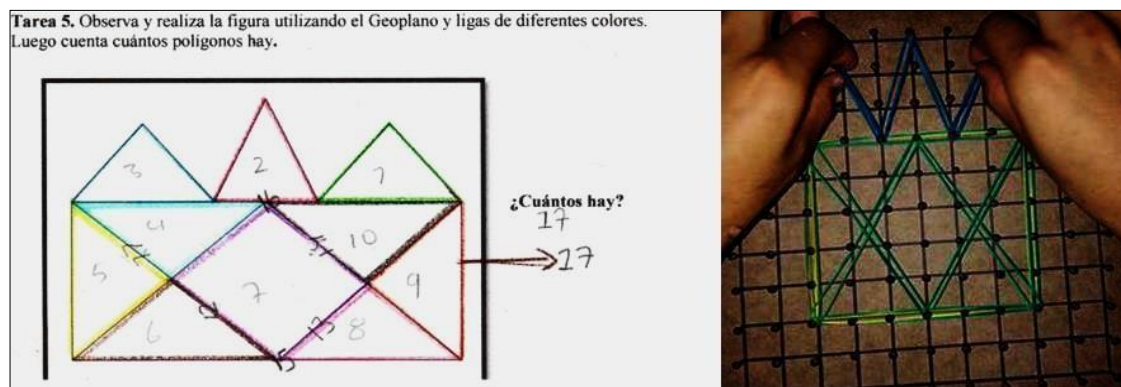


Figura 28. Producción de Karen en la tarea n° 5 de la actividad (1).

La tarea N° 7 se diseñó con el fin de que los estudiantes identifiquen el polígono y seguidamente identifiquen en cada uno su número de lados, su número de vértices, y su número de ángulos.

La producción de Diana muestra su comprensión la tarea planteada; logra nombrar cada uno de los polígonos e identificar las partes básicas (lados, vértices y ángulos) de cada uno. A los razonamientos de Diana se le han asignado la *categoría 1.1* [Reconocen figuras geométricas apoyándose en aspectos físicos utilizando únicamente estrategias de tipo visual] y la *categoría 1.3* [Comienzan a reconocer algunas características matemáticas de los polígonos, aunque puede que no sean conscientes de ello].

Tarea 7. Observa las figuras y completa la siguiente tabla.

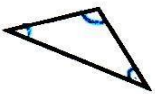



Figura plana	Número de lados	Número de vértices	Número de ángulos	Nombre
	3	3	3	TRIANGULO
	4	4	4	TRAPECIO
	8	8	8	OCTAGONO
	3	3	3	TRIANGULO

Figura 29. Producción de Diana en la tarea n° 7 de la actividad (1).

La tarea N° 8 tiene como finalidad la presentación de las definiciones del trapecio, cuadrado, rombo, triángulo y rectángulo; así como también, su uso en la determinación de ejemplos

gráficos de cada uno de dichos polígonos. Además, la tarea permite que el estudiante identifique posibles clasificaciones inclusivas entre los polígonos expuestos.

La producción de Edna es representativa en la asignación de varias categorías, a saber: **categoría 2.6** [Usar la definición de diversos polígonos para determinar una clasificación de los mismos], **categoría 2.10** [Clasificar diferentes polígonos usando propiedades matemáticas], **categoría 2.11** [Realizar clasificaciones inclusivas]. En la 2.6, realiza un correcto uso de la definición para elegir la representación gráfica correspondiente; en la 2.10, realiza eficazmente la clasificación usando las propiedades matemáticas de las figuras (esta categoría se diferencia de la 1.10, porque la clasificación se hace únicamente mediante atributos físicos-visuales), en razón a que la estudiante toma medidas de lados y ángulos para confirmar lo que está observando.

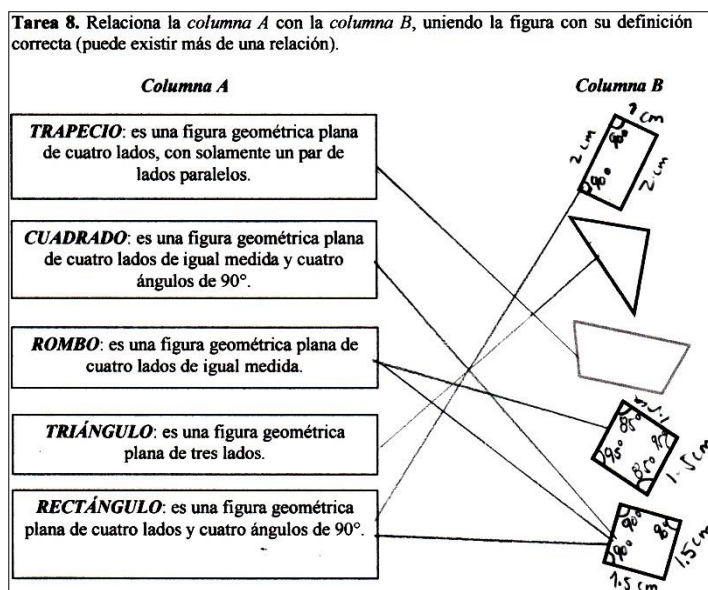


Figura 30. Producción de Edna en la tarea n° 8 de la actividad (1).

La tarea N° 9 se diseñó con la finalidad que los estudiantes puedan dibujar un determinado polígono usando características matemáticas de los mismos.

La producción de Zamir representa concretamente a la **categoría 2.1** [Construir o dibujar polígonos teniendo en cuenta características matemáticas como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados]. Zamir dibuja los polígonos teniendo en cuenta las características matemáticas dadas en cada caso.

**Tarea 9. Con las indicaciones dadas construye y nombra el polígono correspondiente utilizando el Geoplano.**


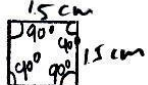
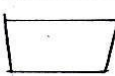
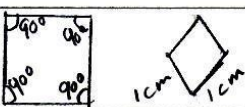
<b>INDICACIONES</b>	<b>NOMBRE DEL POLÍGONO</b>
Tiene: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 ángulos.</li> <li>• 3 vértices.</li> </ul>	
Tiene: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 lados de igual medida.</li> <li>• 4 ángulos rectos.</li> </ul>	
Tiene: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 lados.</li> <li>• Un solo par de lados paralelos.</li> </ul>	
Tiene: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 lados de igual medida.</li> </ul>	

Figura 31. Producción de Zamir en la tarea n° 9 de la actividad (1).

La tarea N° 10 (a) tiene como objetivo desarrollar una diferenciación exhaustiva de cada uno de los polígonos en el contenido programático de la asignatura.

El razonamiento usado por Fabiola muestra una comparación y diferenciación de los polígonos presentados mediante las características matemáticas del polígono deseado. Esta producción se corresponde con la **categoría 2.4** [Comparar y diferenciar polígonos concretamente mediante sus características matemáticas].

**Tarea 10.** Selecciona la respuesta correcta, encerrando la letra correspondiente, y luego justifica tu respuesta correcta.

A. Juan hizo un cuadrilátero utilizando el Geoplano con todos sus ángulos rectos, dos lados cortos y dos lados largos. ¿Qué polígono dibujó?

A. Un rombo  
 B. Un cuadrado  
 C. Un triángulo  
 D. Un rectángulo  
 E. Un trapecio

Justifica tu respuesta:  
 Porque es un Polígono de 4 lados y 4 ángulos de  $90^\circ$

Figura 32. Producción de Fabiola en la tarea n° 10(a) de la actividad (1).

En la tarea N° 11 se busca que los estudiantes identifiquen triángulos y cuadriláteros dentro de una miscelánea de polígonos y, además, que den su definición.

La producción de Fabiola exhibe una correcta elección de triángulos y cuadriláteros, además de definirlos mediante las propiedades matemáticas mínimas correspondientes. Dicha producción la fue asignada la  *categoría 1.9* [Usan la definición de polígono, triángulo o cuadrilátero para dibujar o seleccionar diversos ejemplos de los mismos] y la  *categoría 2.6* [Usar la definición de diversos polígonos para determinar una clasificación de los mismos]. La diferencia entre las categorías 1.9 y 2.6 radica en que están en diferente nivel de razonamiento y la 1.9 es para dibujar o seleccionar ejemplos y la 2.6 es para clasificar dichos ejemplos.

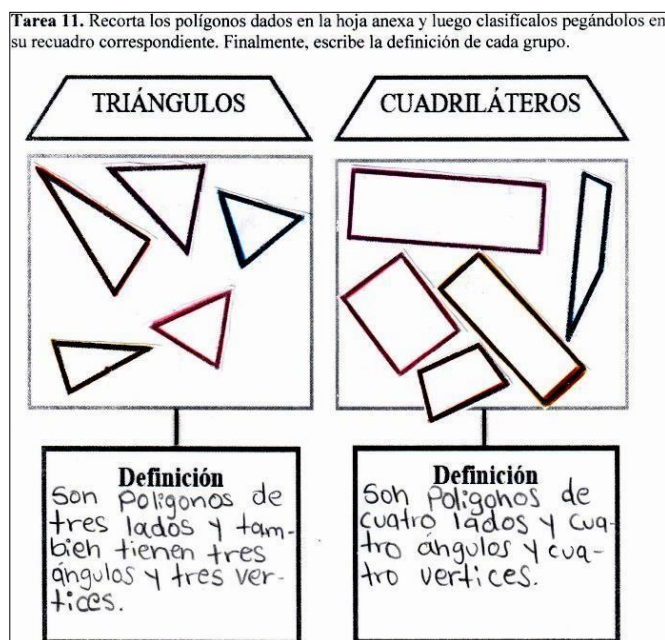


Figura 33. Producción de Fabiola en la tarea n° 11 de la actividad (1).

El diseño de la tarea N° 12 tuvo en cuenta la propuesta de completar un mapa conceptual sobre el polígono y sus dos clasificaciones (triángulos y cuadriláteros) desarrolladas hasta el momento. El objetivo es realizar una compilación de los aspectos anteriores de la unidad didáctica. La producción de Brayan evidencia varios logros en su trayectoria de aprendizaje. Por ejemplo, dibuja polígonos (*categoría 2.1* [Construir o dibujar polígonos teniendo en cuenta características matemáticas como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados]), usa la irrelevancia de la posición de las figuras (*categoría 2.3* [Descubrir o usar que la posición de un determinado polígono es intrascendente, es decir, que no es necesario que se encuentre en posición estándar]), formula definiciones de polígonos (*categoría 2.5* [Formular definiciones de polígonos teniendo en cuenta propiedades matemáticas]), y usa definiciones para determinar clasificaciones de polígonos (*categoría 2.6* [Usar la definición de diversos polígonos para determinar una clasificación de los mismos]).

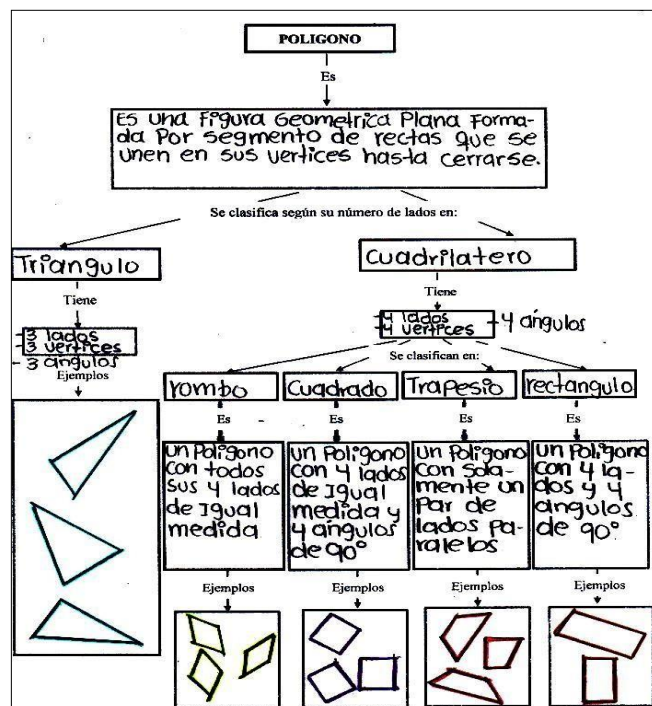


Figura 34. Producción de Brayan en la tarea n° 12 de la actividad (1).

La tarea N° 13 se diseñó teniendo en cuenta que se debe formular una definición a partir de ejemplos representativos de un determinado polígono (desconocido por los participantes).

La producción de Karen muestra su capacidad para efectuar la tarea planteada, logra definir el polígono a partir de las imágenes del concepto; siendo así, se le asignó la categoría 2.5 [Formular definiciones de polígonos teniendo en cuenta propiedades matemáticas]. La diferencia entre las categorías 1.8 y 2.5 radica en que están en diferente nivel de razonamiento, además, la 1.8 no tiene en cuenta propiedades matemáticas, en cambio la 2.6 si las tiene en cuenta (en el caso de Karen al momento de tomar medidas de lados y ángulos para cerciorarse de la definición correcta).

**Tarea 13. Observa detenidamente y luego en el Geoplano construye un triancuad. A continuación, defínelo.**

**TRIANCUAD**

Son Triancuad	No son Triancuad

Un Triancuad es: son polígonos como un cuadrado y un triángulo, que se une en uno de los sus vértice

Figura 35. Producción de Karen en la tarea n° 13 de la actividad (1).

La tarea N° 14 se diseñó teniendo en cuenta que se deben realizar clasificaciones inclusivas entre los polígonos desarrollados hasta el momento en la unidad didáctica.

Las producciones de Zamir (14a), German (14b) y Paula (14d-14e) evidencian su avance en la trayectoria de aprendizaje en lo referente a las clasificaciones inclusivas, es por esto que a sus razonamientos se les asignó la **categoría 2.11** [Realizar clasificaciones inclusivas].



**Tarea 14. Responde la pregunta dada, luego justifica tu respuesta.**

A. ¿Un cuadrado es también un rombo? SI  NO

Porque: porque tiene los cuatro lados de igual medida

B. ¿Un rombo es también un cuadrado? SI  NO

Porque: el cuadrado tiene cuatro ángulo de 90° y el rombo no los tiene

D. ¿Un rectángulo es también un cuadrado? SI  NO

Porque: el cuadrado tiene 4 lados de igual medida y el rectángulo nunca no

E. ¿Un cuadrado es también un rectángulo? SI  NO

Porque: el cuadrado tiene 4 ángulos de 90° y el rectángulo también los tiene

Figura 36. Producción de Zamir, German y Paula en la tarea n°14(a, b, d y e) de la actividad (1).

En conclusión, al analizar las producciones de todos los estudiantes participantes en la intervención, se puede destacar que en mayor medida lograron el objetivo propuesto; es decir fortalecieron y adquirieron el concepto de polígono y las diferentes clasificaciones que se desarrollan en este nivel escolar. El uso de la estrategia de los ejemplos y los no ejemplos en el desarrollo del concepto de polígono fue altamente efectivo como lo sugiere Vinner (1983, 1991). De forma similar, el desarrollo de clasificaciones inclusivas entre diversos polígonos se desarrolló adecuadamente tal y como lo plantea De Villiers (1994).

En general, los resultados permiten afirmar que el diseño de la actividad, acorde con los preceptos de Van Hiele (1957, 1986), Vinner & Hershkowitz (1983) y Gutiérrez & Jaime (1998), evidenció un acertado tratamiento de los temas involucrados. En definitiva, se aprecia un avance positivo en las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes.

### 4.1.3 Actividad N° 2

El diseño de la tarea N° 1(a) contempla la presentación de la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos. En ambos casos se presenta la definición de cada concepto (triángulos equiláteros, isósceles, escalenos, acutángulos, obtusángulos y rectángulos) y las imágenes conceptuales de cada uno.

La producción de Fabiola exhibe la adquisición de la imagen conceptual de los elementos que constituyen la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados. A los razonamientos de Fabiola se han asignado la *categoría 1.9* [Usan la definición de polígono, triángulo o cuadriláteros para dibujar o seleccionar diversos ejemplos de los mismos].

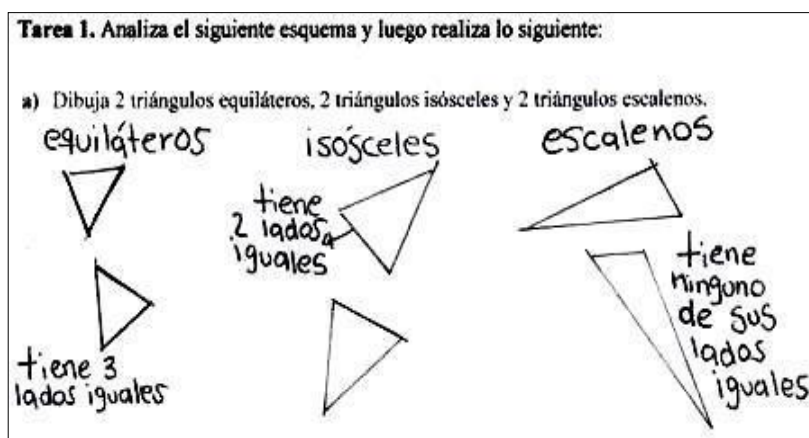


Figura 37. Producción de Fabiola en la tarea n° 1(a) de la actividad (2).

La tarea N° 2 se diseñó con el fin de que los estudiantes muestren la adquisición de la imagen conceptual de los elementos que constituyen la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos.

Nuevamente Fabiola exhibe en su producción la adquisición del objetivo planteado en la tarea. A diferencia de la tarea N°1, la estudiante toma medidas de los ángulos para cerciorarse que los triángulos son los solicitados; esto muestra una evolución en su razonamiento al tener en cuenta propiedades matemáticas (que no las tuvo en el desarrollo de la tarea N° 1); es decir, este razonamiento se ubica en el nivel 2 de razonamiento, al cual se le asignó la  *categoría 2.1* [Construir o dibujar polígonos teniendo en cuenta características matemáticas como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados].

En la tareas N°1 y N° 2 Fabiola dibujó polígonos en posición no estándar, lo que permite inferir su comprensión de que los polígonos no dependen de la posición en que se encuentren o se dibujen. La producción en este sentido se ubica en la  *categoría 2.3* [Descubrir o usar que la posición de un determinado polígono es intrascendente, es decir, que no es necesario que se encuentre en posición estándar].

Los ejemplos presentados de Fabiola son la muestra de lo que está sucediendo en este momento en el desarrollo de la unidad didáctica en la mayoría de los estudiantes; están consolidando el nivel 1 e inicia también el transito al nivel 2 de razonamiento.

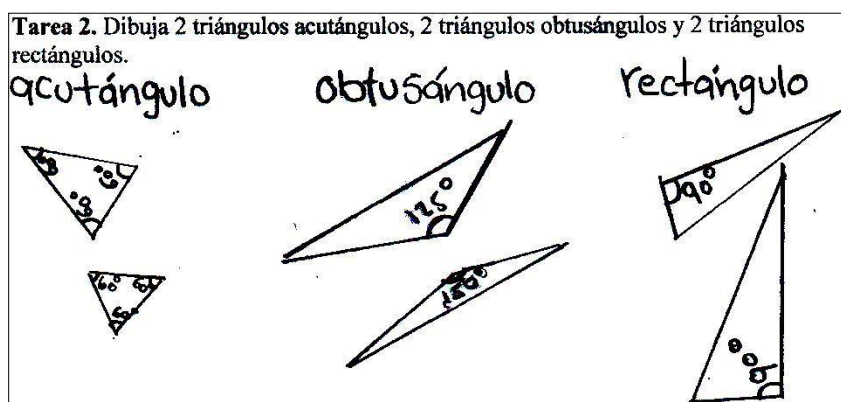


Figura 38. Producción de Fabiola en la tarea n° 2 de la actividad (2).

El diseño de la tarea N° 3 contempla el objetivo de identificar partes constitutivas de los polígonos, particularmente, las diferentes clases de ángulos.

Los estudiantes participantes realizaron en el Geoplano la figura dada y allí plasmaron sus razonamientos. Se presenta las imágenes de las producciones de Carlos y Johana, que identificaron correctamente ángulos rectos y ángulos obtusos. A este razonamiento se le asignó la *categoría 1.6* [Pueden reconocer y declarar, utilizando argumentos de tipo visual, polígonos o sus partes en mosaicos].

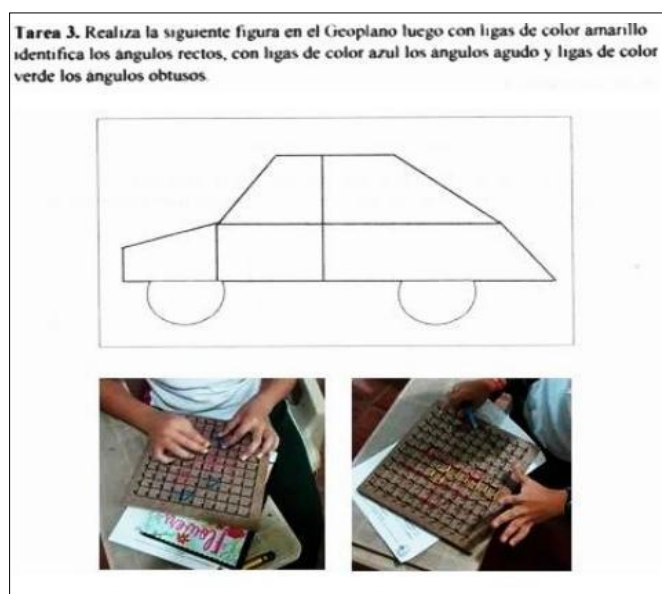


Figura 39. Producción de Carlos y Johana en la tarea n° 3 de la actividad (2).


El diseño de la tarea N° 4(a, b y c) tiene como finalidad realizar clasificaciones inclusivas entre distintas clases de triángulos, según la medida de sus ángulos.

El desarrollo que realiza Zamir en esta tarea muestra su avance en los razonamientos de este tipo. No solamente dibuja los posibles triángulos objeto de la tarea, sino que también justifica los dibujos presentados. Zamir muestra en su producción que puede realizar clasificaciones entre diferentes clases de triángulos; es por esto que se le ha asignado la *categoría 2.8* [Usar la

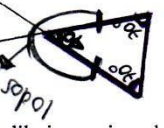
definición de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos para determinar una clasificación de los mismos]. La categoría 2.8 se diferencia de la categoría 1.10 por que la 2.8 tiene en cuenta la definición (que incluye características matemáticas) y, la 1.10, únicamente atributos físicos.

**Tarea 4.** ¿Es posible construir un triángulo isósceles que a su vez sea:

A) Triángulo rectángulo? Sí  No ; en caso de responder Sí, dibuja un ejemplo.  
 tiene un ángulo de  $90^\circ$  y por eso es triángulo rectángulo y también tiene 2 lados de igual medida y por eso es isósceles.



B) Triángulo acutángulo? Sí  No ; en caso de responder Sí, dibuja un ejemplo.  
 tiene todos sus ángulos menos de  $90^\circ$  por eso es triángulo acutángulo y también tiene 2 lados de igual medida y por eso también es triángulo isósceles.



C) Triángulo obtusángulo? Sí  No ; en caso de responder Sí, dibuja un ejemplo.  
 tiene un ángulo más de  $90^\circ$  y por eso es triángulo obtusángulo y tiene 2 lados de igual medida y por eso también es triángulo isósceles.

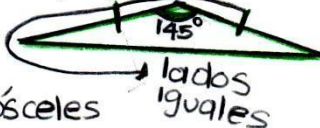


Figura 40. Producción de Zamir en la tarea n° 4(a, b y c) de la actividad (2).

El objetivo de las tareas N° 5, N° 6 y N° 9 es consolidar las diferentes clasificaciones de los triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos.

La producción de Brayan (tarea N°5) muestra algunos de los ejemplos que desarrolló en el Geoplano de manera correcta, las producciones de David (tarea N° 6) y de Claudia (tarea N° 9) muestran el manejo que han adquirido de las clasificaciones de los triángulos. A este tipo de razonamientos (de Brayan, de David y de Claudia) se les asignó la **categoría 2.8** [Usar la definición de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos para determinar una clasificación de los mismos] y la **categoría 2.9** [Usar la definición de triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos para determinar una clasificación de los mismos].

**Tarea 5.** Construye la siguiente figura en el Geoplano, luego identifica con ligas de diferentes colores las clases de triángulos según sus lados o ángulos.

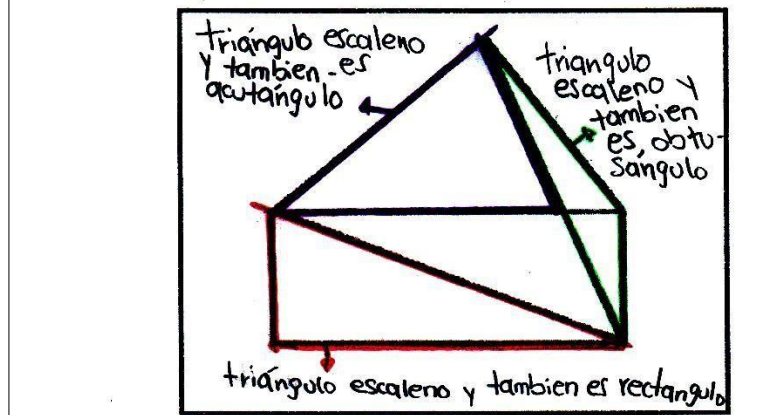


Figura 41. Producción de Brayan en la tarea n° 5 de la actividad (2).

**Tarea 6.** Completa la siguiente tabla de triángulos según sus lados y ángulos.

figura	según sus lados	según sus ángulos
	escaleno por que ninguno de sus lados son iguales	acutángulo por que tiene tres ángulos agudos
	Equilátero	acutángulo por que tiene un ángulo agudo
	escaleno ninguno de sus lados tiene igual medida	Obtuso
	Escaleno	obtusángulo
	equilátero por que tiene 3 lados de igual medida	acutángulo

Figura 42. Producción de David en la tarea n° 6 de la actividad (2).

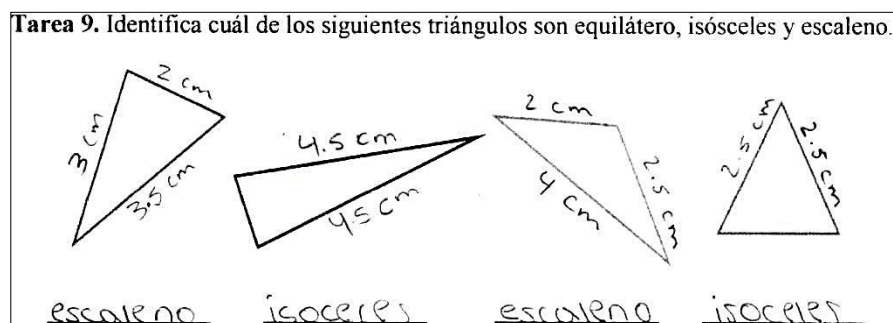


Figura 43. Producción de Claudia en la tarea n° 9 de la actividad (2).

La tarea N° 10 se diseñó con el fin que los estudiantes justifiquen si la propiedad de los triángulos, sobre la suma de 180 grados en sus ángulos interiores, es verdad o falsedad. Y, la tarea N° 11 que se diseñó para aplicar la propiedad que acaban de conocer.

La producción de Brayan, en la tarea N° 10(a), muestra una forma interesante de “demostración”, que realmente es una mostración; además de la producción en la tarea N° 11 sobre la aplicación de la propiedad en mención. Al razonamiento en la tarea N° 10 se ha asignado *categoría 2.12* [Deducir y demostrar propiedades matemáticas de polígonos únicamente realizando verificación mediante ejemplos] y, al razonamiento en la tarea N° 11, se ha asignado la *categoría 2.2* [Reconocer aspectos matemáticos específicos de los polígonos, tales como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados, el paralelismo y la perpendicularidad entre sus lados].

**Tarea 10.** Dados los siguientes triángulos, diga si cada frase es verdadera o falsa según corresponda. Justifica cada respuesta.

**Tarea 11.** Halla el valor de " ? " en la figura.

En todo triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a  $180^\circ$ . Verdadero.  
 En todos los triángulos la medidas internas son  $180^\circ$ .

lados de igual medida.  
 Cuando uno de los ángulos mide  $90^\circ$  siempre mide los otros dos.

Figura 44. Producción de Brayan en la tarea n° 10 (a) y 11 de la actividad (2).

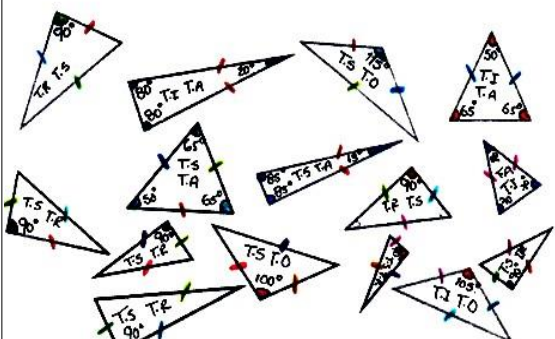
Las tareas N° 12, 13 y 14 se diseñaron para consolidar la relación entre las diferentes clasificaciones de los triángulos (según la medida de sus ángulos y según la medida de sus lados).

Las producciones de Diana (tarea N° 13) y de Ximena (tarea N° 14) muestran una acertada respuesta en la relación que se puede establecer entre las clasificaciones de triángulos. Se evidencia la estrecha relación que existe entre las clasificaciones de los triángulos que son dominadas por Diana y Ximena. Los razonamientos de las estudiantes recibieron la **categoría 2.4** [Comparar y diferenciar polígonos concretamente mediante sus características matemáticas], la **categoría 2.8** [Usar la definición de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos para determinar una clasificación de los mismos], y la **categoría 2.9** [Usar la definición de triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos para determinar una clasificación de los mismos].



**Tarea 13.** Observa detenidamente los siguientes triángulos. Luego coloca dentro de cada uno su letra correspondiente. Puede existir más de una letra dentro de cada triángulo.

T.E → Triángulo Equilátero T.I → Triángulo Isósceles T.S → Triángulo Escaleno  
T.R → Triángulo Rectángulo T.A → Triángulo Acutángulo T.O → Triángulo Obtusángulo



**Tarea 14.** Coloca una F, si es falso, o una V, si es verdadero. Justifica las respuestas falsas.

A.  V. Existen triángulos que pueden tener tres ángulos de igual medida.  
Sería un triángulo equilátero

B.  V. Existen rectángulos que tienen cuatro ángulos de  $90^\circ$  y todos sus lados de la misma medida.  
El cuadrado también puede ser un rectángulo

C.  V. Existen triángulos que pueden ser triángulos rectángulos y a su vez triángulos escalenos.  
Este triángulo tiene un ángulo de  $90^\circ$  y sus lados de diferente medida.

D.  V. Existen triángulos que pueden tener todos sus ángulos de medidas diferentes.  
Un triángulo obtusángulo como este sirve.

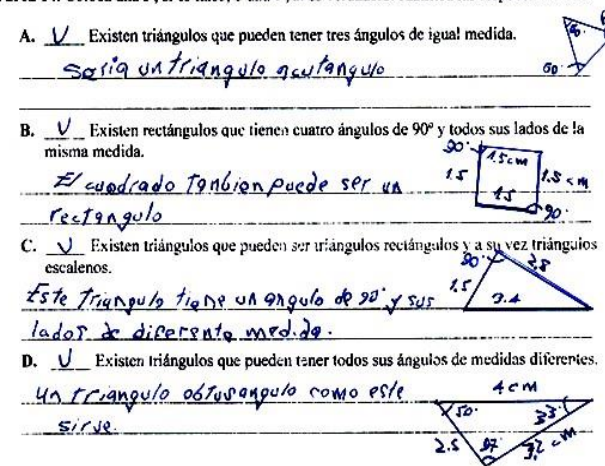


Figura 45. Producción de Diana y Ximena en la tarea n° 13 y 14 de la actividad (2).

En conclusión, al analizar las producciones de todos los estudiantes participantes en la intervención, se puede destacar que lograron el objetivo propuesto; es decir fortalecieron y adquirieron el concepto de triángulo y las diferentes clasificaciones según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos. En cuanto a los niveles de razonamiento de Van Hiele, se aprecia que los estudiantes han migrado completamente al nivel 2, y usan el nivel 1 de razonamiento sólo como un apoyo a los razonamientos usados en la resolución de las tareas; esto se corresponde con lo plantado por Van Hiele (1999), donde sugiere que, en la medida que el diseño de las actividades para desarrollar un objeto geométrico sean adecuadas, los estudiantes logran esta migración.

Este resultado sugiere que el diseño de la actividad, acorde con la definición del concepto, la imagen del concepto, los niveles y fases del modelo de Van Hiele fue efectivo para el fortalecimiento de los temas tratados. En definitiva, en este momento de la experimentación, se observa que las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes evolucionan como lo es deseable.

### 4.1.3. Actividad N° 3

La tarea N°1 introduce la clasificación de los cuadriláteros según la posición de sus diagonales (cóncavos y convexos) y la clasificación de los mismos según el paralelismo de sus lados opuestos: cuadrado, rectángulo, rombo y trapecio (incluyendo la definición del concepto y ejemplos de las imágenes del concepto); a su vez, la clasificación de los trapecios según un ángulo y según la medida de los lados no paralelos. El objetivo de esta tarea es que los estudiantes se familiaricen con los conceptos descritos desde su definición y de sus imágenes del concepto. Concretamente, la tarea N°1 (a) y la tarea N°2 contempla que el estudiante dibuje ejemplos de diferentes conceptos introducidos en la tarea N°1.

La producción de Fabiola en ambas tareas muestra su comprensión de los conceptos desde la imagen de los conceptos. Al razonamiento exhibido en las dos tareas se le asignó la *categoria* **1.9** [Usan la definición de polígono, triángulo o cuadrilátero para dibujar o seleccionar diversos ejemplos de los mismos]. Este razonamiento es de nivel 1 dado que la estudiante no usa aspectos matemáticos (propiedades) para desarrollar la tarea; si esto hubiera sido, la categoría asignada sería la 2.1, que corresponde al nivel 2. Por otra parte, el análisis de las dos tareas también permite inferir que realizó dibujos de cuadriláteros en posición no estándar, lo que permite asignarle la *categoria* **2.3** [Descubrir o usar que la posición de un determinado polígono es irrelevante, es decir, que no es necesario que se encuentre en posición estándar].

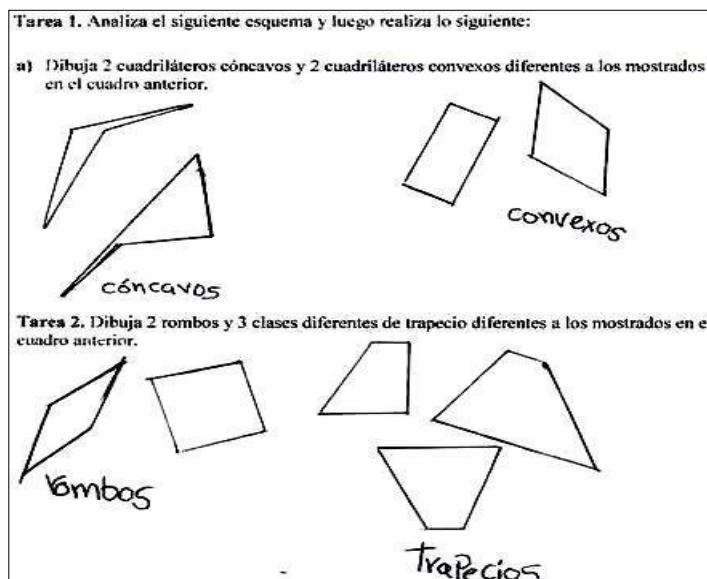


Figura 46. Producción de Fabiola en la tarea n° 1(a) y 2 de la actividad (3).

La tarea N° 3 tiene como objetivo la identificación de figuras, correspondientes a los conceptos desarrollados en la actividad (N°3), dentro de un mosaico.

La producción de Brayan muestra que ha logrado el objetivo, es decir ha identificado los cuadriláteros en el mosaico. En esta producción se ha asignado la *categoria 1.6* [Pueden reconocer y declarar, utilizando argumentos de tipo visual, polígonos o sus partes en mosaicos].

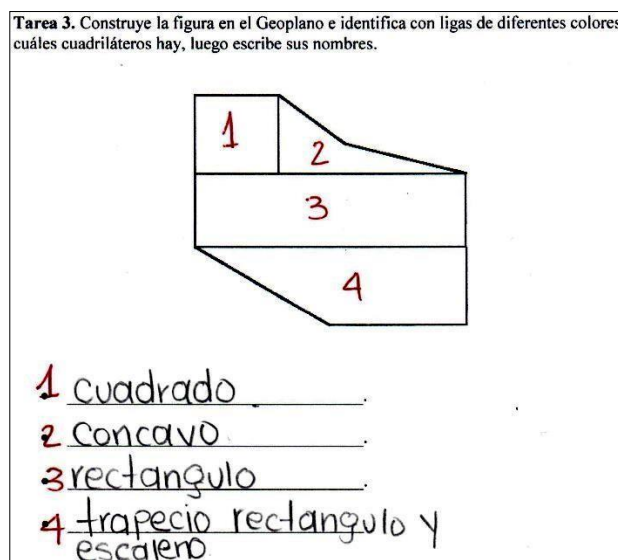


Figura 47. Producción de Brayan en la tarea n° 3 de la actividad (3).

La tarea N°4 se diseñó con el objetivo de identificar cuadriláteros de una serie de los mismos; dicha identificación incluye que expongan el nombre de los mismos (de los desarrollados en esta actividad N° 3).

La producción de Edna sugiere que ha hecho una identificación basándose en atributos físicos, a pesar que en la primera figura tomó medida de un ángulo; el razonamiento usado por Edna permite asignarle la **categoría 1.10** [Realizan clasificaciones de polígonos basándose únicamente en atributos físicos]. Si hubiera continuado con las demás figuras (tomando medidas de ángulos y de lados) la categoría asignada fuera la 2.10.

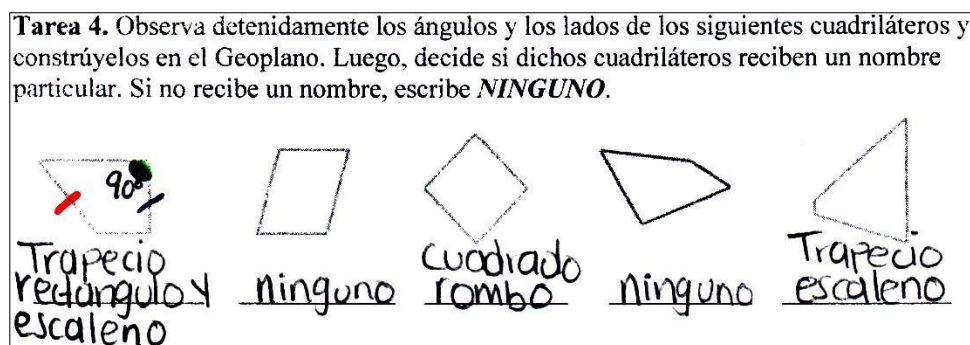


Figura 48. Producción de Edna en la tarea n° 4 de la actividad (3).

El diseño de la actividad N° 5 incluye como objetivo la selección (clasificación) de cuadriláteros partiendo de la definición de los mismos. El diseño de la tarea incluye la posibilidad que se realicen clasificaciones inclusivas si los participantes las identifican.

La producción de José muestra una clasificación general de los cuadriláteros y una clasificación inclusiva acertada (por ejemplo, incluye al cuadrado como rombo, incluye al trapezio rectángulo como trapezio escaleno). Al razonamiento usado por José se le han asignado la **categoría 2.6** [Usar la definición de diversos polígonos para determinar una clasificación de los mismos] y la **categoría 2.11** [Realizar clasificaciones inclusivas].

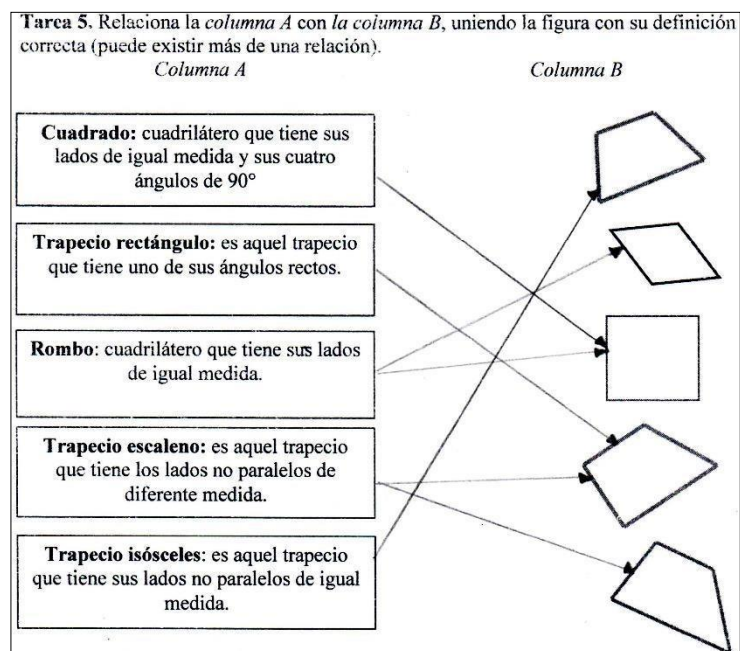


Figura 49. Producción de José en la tarea n° 5 de la actividad (3).

La tarea N° 6 tiene como objetivo la diferenciación de las propiedades matemáticas de múltiples cuadriláteros.

Los razonamientos correctos usados por Ximena, donde argumenta matemáticamente la veracidad o falsedad del enunciado, la ubican en la  **categoría 2.4** [Comparar y diferenciar polígonos concretamente mediante sus características matemáticas].

**Tarea 6.** Escribe *V* si es verdadero o *F* si es falso, luego justifica las respuestas falsas.

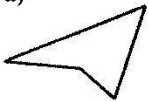
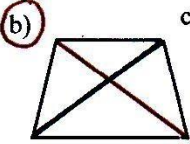
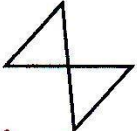

- El trapecio isósceles tiene los lados no paralelos de diferente medida. (F)  
Porque: *Si los tiene de igual medida*
- El cuadrado tiene todos sus lados de igual medida y sus ángulos no tienen  $90^\circ$ . (F)  
Porque: *Si los tiene de  $90^\circ$*
- El trapecio escaleno tiene sus lados no paralelos de diferente medida. (V)  
Porque: *es verdad*
- El rectángulo tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos de  $90^\circ$ . (V)  
Porque: *el rectángulo puede tener los lados iguales*

Figura 50. Producción de Ximena en la tarea n° 6 de la actividad (3).

En la tarea N° 7 se tiene en cuenta el objetivo de identificar cuadriláteros cóncavos o cuadriláteros convexos, esperando que usen argumentos matemáticos en dicha identificación.

La producción de Paula refleja una correcta identificación de los cuadriláteros y, además, argumentos matemáticos acordes con la exigencia de la tarea. Los razonamientos usados pertenecen a la *categoría 2.7* [Usar la definición de polígonos cóncavos y convexos para determinar una clasificación o identificación de los mismos].

**Tarea 7.** Cuáles de los siguientes cuadriláteros no son cóncavos. Justifica tu respuesta.

a)  b)  c)  d) 

RTA: *El cuadrilátero b) que también es un trapecio isósceles es el único que tiene las diagonales interiores*

Figura 51. Producción de Paula en la tarea n° 7 de la actividad (3).

La tarea N° 8 se diseñó con el objetivo que se determinen características matemáticas, particularmente, paralelismo en polígonos.

Los razonamientos de David exhiben una estrategia que genera interés, al prolongar los lados de dichos polígonos, con el fin de checar el paralelismo; de manera similar, las argumentaciones expuestas muestran un avance positivo en su trayectoria de aprendizaje. Esta producción pertenece a la *categoría 2.2* [Reconocer aspectos matemáticos específicos de los polígonos, tales como la longitud de sus lados, la medida de sus ángulos, el paralelismo y la perpendicularidad entre sus lados].

**Tarea 8.** Marca con una **X** la opción correcta en relación a los polígonos presentados y justifica tu respuesta.

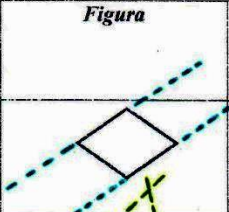
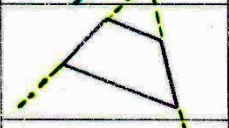
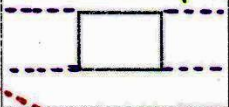
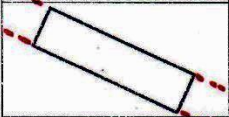
Figura	Ambos lados opuestos paralelos	Un solo par de lados opuestos paralelos	¿Por qué?
	X		en ninguno de sus ambos lados opuestos se interceptan.
		X	en un lado opuesto paralelo se crusan.
	X		en ninguno de sus ambos lados opuestos se interceptan o se crusan.
	X		en ninguno de sus ambos lados opuestos se cortan o se crusan.

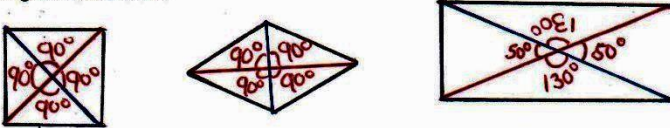
Figura 52. Producción de David en la tarea n° 8 de la actividad (3).

La tarea N° 9 propone la deducción de un par de propiedades matemáticas de los cuadriláteros; por un lado, que “las diagonales en el cuadrado y en el rectángulo se interceptan en sus puntos medios” y, por otro, que “las diagonales en el cuadrado y el rombo se interceptan en sus puntos medios de forma perpendicular”.

Las producciones de Zamir (primera parte *literal a*) y Paula (segunda parte *literal a* y *literal b*) muestran los razonamientos matemáticos tendientes a plantear las propiedades respecto a relaciones entre las diagonales de los cuadriláteros. De manera similar, Paula (*literal b*) muestra

una aplicación de las propiedades concretamente en las tres clases de trapecios. A las producciones de Zamir y Paula se les asignó la *categoría 2.12* [Deducir y demostrar propiedades matemáticas de polígonos únicamente realizando verificación mediante ejemplos].

**Tarea 9.** Construye un cuadrado, un rombo y un rectángulo, luego traza las diagonales de los polígonos construidos.



a) Teniendo en cuenta los polígonos construidos, responde lo siguiente:

¿Qué relación encuentras entre las diagonales?

RTA: el rectángulo sus diagonales son rectas oblicuas a diferencia de el cuadrado y el rombo tienen sus diagonales en rectas Perpendiculares.

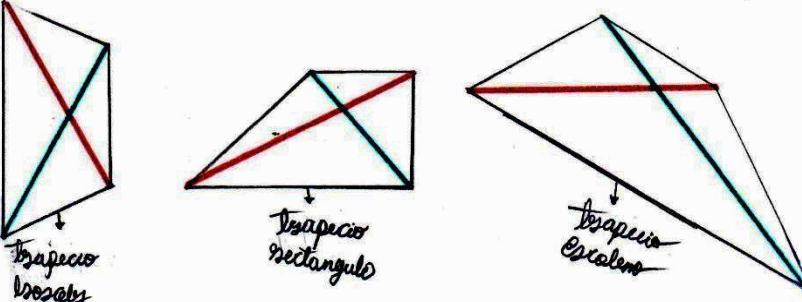
Figura 53. Producción de Xamir en la tarea n° 9 y 9(a) de la actividad (3).

- ¿Qué relación encuentras teniendo en cuenta las distancias entre la intercepción de las diagonales y sus vértices?

RTA: El cuadrado y el rectángulo la distancia entre la intersección de las diagonales son iguales a distancia del rombo que si es distinta

b) Construye tres tipos diferentes de trapecios (isósceles, rectángulo y escaleno), luego verifica si las propiedades obtenidas en el literal a) se cumplen para cada uno de estos trapecios.

RTA: en los tres trapecios se cumple que tienen las diagonales rectas oblicuas



Isosceles Trapezoid

Rectangular Trapezoid

Scalene Trapezoid

Figura 54. Producción de Paula en la tarea n° 9(a) y 9(b) de la actividad (3).



El diseño de la tarea N° 10 contempla el objetivo de dibujar diferentes cuadriláteros teniendo en cuenta las propiedades matemáticas (desarrolladas en la tarea N° 9) y elementos matemáticas de las definiciones de los mismos.

La producción de Ximena muestra un desarrollo preciso de la tarea. Logra integrar las propiedades matemáticas a los dibujos realizados; también refleja una completa comprensión de los diferentes cuadriláteros y establece una relación adecuada de la definición del concepto y la imagen conceptual. Los razonamientos incluyen la idea que los polígonos pueden estar en cualquier posición (no solamente polígonos en posición estándar). A los avances positivos en la trayectoria de aprendizaje de Ximena se les ha asignado la  *categoría 2.1* [Construir o dibujar polígonos teniendo en cuenta características matemáticas como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados] y la  *categoría 2.3* [Descubrir o usar que la posición de un determinado polígono es intrascendente, es decir, que no es necesario que se encuentre en posición estándar].

**Tarea 10.** Llena el tablero con las siguientes instrucciones:

- Un cuadrilátero que tenga sus ángulos rectos y sus dos pares de lados paralelos iguales.
- Un cuadrilátero convexo.
- Un cuadrilátero cuyas diagonales sean perpendiculares.
- Un cuadrilátero que tenga la misma distancia entre la intercepción de las diagonales y sus vértices opuestos.
- Un trapecio isósceles.
- Un cuadrilátero cóncavo.
- Un cuadrilátero que tenga sus diagonales perpendiculares y además que las distancias entre su punto de intercepción y los vértices opuestos sean iguales.
- Un trapecio cuyas diagonales no sean perpendiculares. ¿En cuáles trapecios se cumple esta propiedad?

Figura 55. Producción de Ximena en la tarea n° 10 de la actividad (3).

El diseño de tarea N° 12 contempla dos objetivos concretos, uno que se reconozcan aspectos matemáticos de los polígonos presentados y, otro que se realicen clasificaciones de dichos polígonos.

El desarrollo presentado por Cristian muestra los avances en los objetivos planteados en la tarea; por ejemplo reconoce elementos como el paralelismo, la concavidad, la convexidad y las clases de ángulos, lo que sugiere la asignación de la **categoria 2.2** [Reconocer aspectos matemáticos específicos de los polígonos, tales como la amplitud de sus ángulos o la medida de sus lados, el paralelismo y la perpendicularidad entre sus lados]. Además, al hacer la elección de los polígonos, está clasificándolos según la concavidad o no concavidad, según el paralelismo de sus lados opuestos; estos razonamientos usados por Cristina sugieren la asignación de la **categoria 2.10** [Clasificar diferentes polígonos usando propiedades matemáticas].

**Tarea 12.** En una exposición de obras de Arte se planeó mostrar distintos polígonos. Tu tarea es ayudar a clasificar los tipos de obras que se presentarán, colocando etiquetas sobre ellas.

Debes ubicar el nombre sobre las obras elegidas teniendo en cuenta lo siguiente:

- Los polígonos de la obra de Arte deben ser identificados con una etiqueta en forma de cuadrilátero que debe tener dos pares de lados paralelos.  
RTA: 1 - 2 - 3 - 6
- La etiqueta colocada sobre la obra es un polígono no convexo.  
RTA: 5 - 9
- Las obras deben tener una etiqueta de 4 lados, al menos un par de lados paralelos y dos ángulos obtusos.  
RTA: 2 - 3 - 6 - 8

Figura 56. Producción de Cristian en la tarea n° 12 de la actividad (3).

En resumen, la actividad 3 se plantea con el fin desarrollar los cuadriláteros, desde el punto de vista de lo cóncavo y lo convexo. Dentro de lo convexo, se desarrollan los cuadrados, los rectángulos, los rombos y los trapecios. En todo el contenido de la actividad se tiene en cuenta el desarrollo de las definiciones y las clasificaciones inclusivas.

A modo de cierre, analizadas las producciones de todos los estudiantes participantes en la intervención, se puede destacar el logro del objetivo propuesto. Los estudiantes fortalecieron y adquirieron el concepto de cuadrilátero y las diferentes clasificaciones según la concavidad o la conexidad y según el paralelismo de sus lados opuestos. El fortalecimiento de las clasificaciones, en particular, inclusivas se alcanza en la medida que las definiciones de los diferentes objetos geométricos se adquieren adecuadamente (De Villiers (1994); en particular, cuando las definiciones de los cuadriláteros lo han sido.

Además, las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes, en relación a los temas tratados, evolucionaron efectivamente teniendo en cuenta el avance de los estudiantes en los niveles de razonamiento de Van Hiele y en el desarrollo de procesos matemáticos: definición y clasificación.

## **CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENTACIONES**

En este capítulo se presentan las principales conclusiones del estudio abordado, fruto de los análisis y resultados realizados en el capítulo 4. En primer lugar, se dará respuesta a la pregunta de investigación; posteriormente, se hace mención a la consecución de los objetivos específicos; posteriormente, se explicitan los aportes de la investigación a la Didáctica de la Matemática y los posibles temas de investigación que a futuro podrían abordarse. Finalmente, se presentan recomendaciones que podrían dar inicio a procesos de mejora en la enseñanza y aprendizaje de los polígonos, triángulos y cuadriláteros.

### **5.1 Conclusiones**

#### **5.1.1 Respuesta a la pregunta de investigación**

Los análisis y resultados realizados en el capítulo anterior muestran un avance significativo en las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes, particularmente en el desarrollo de los procesos matemáticos de pensamiento: definir (formulación y uso) y clasificar. Esta idea se apoya en las diferentes categorías de análisis que fueron surgiendo en las producciones de los estudiantes conforme se avanzaba en el desarrollo de la unidad didáctica experimental. Además, esto se corresponde con la adquisición que alcanzaron los estudiantes de los niveles de razonamiento de Van Hiele 1 y 2; así como también del desarrollo y uso de la definición de los conceptos y las imágenes conceptuales de los mismos.

En definitiva, es posible afirmar que “es posible fortalecer los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación en estudiantes de 5° grado de la IETAVH usando como pretexto la enseñanza de los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero”.

### 5.1.2 Consecución de los objetivos planteados

*Respecto al OE1: “Caracterizar los presaberes de los estudiantes para el concepto polígono (en general) en los procesos matemáticos de pensamiento: definición y clasificación mediante un test diseñado para tal fin”.*

- Los estudiantes solo reconocen polígonos que son típicamente desarrollados en los diferentes grados de la básica primaria: triángulos, cuadrados y rectángulos. En otras palabras, no reconocen como polígonos a aquellos diferentes a los triángulos, a los cuadrados y a los rectángulos. Estos resultados sugieren que la imagen conceptual de polígono es escasamente desarrollada por los profesores de grados anteriores o que los instrumentos, como el libro de texto, no lo privilegia.
- Los estudiantes sólo reconocen los triángulos, cuadrados y rectángulos en posición estándar (uno de los lados dibujado de manera horizontal a la hoja de trabajo).
- Los estudiantes no reconocen aspectos matemáticos de los polígonos, de los triángulos, ni de los cuadriláteros. Es decir, aspectos como los ángulos, los lados, los vértices, el paralelismo y perpendicularidad de los lados.
- Los estudiantes no logran formular la definición de polígono mediante ejemplos y no ejemplos del mismo. Es decir, no identifican ni físicamente ni matemáticamente las características que lo definen. Estos resultados sugieren que, a pesar que en grados anteriores se les ha enseñado la definición del concepto, no la recuerdan o no la saben.
- Los estudiantes no reconocen clasificaciones inclusivas entre diferentes polígonos.

**Respecto al OE2:** *“Diseñar una unidad didáctica basada en el modelo de Van Hiele, el modelo de Vinner & Hershkowitz, y el Geoplano para los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero en los procesos matemáticos de pensamiento: definir y clasificar”.*

- El Geoplano resultó ser un excelente complemento para el diseño y posterior desarrollo de la unidad didáctica. En esta vía, el uso del Geoplano como mediador instrumental del aprendizaje de los temas tratados evidenció el compromiso de los estudiantes por verificar o postular conjeturas en las diversas tareas planteadas en la unidad didáctica.

- La unidad didáctica diseñada e implementada se convierte en un importante referente para posteriores estudios que incluyan los conceptos de polígono, de triángulo y de cuadrilátero. El diseño se estructuró en base a dos teorías que, por separado, han mostrado ser excelentes estructuras en los diseños instruccionales; en el caso del modelo de Van Hiele, por ejemplo se encuentran el trabajo de Aravena, Gutiérrez & Jaime (2016) y el de Yi, Flores & Wang (2020); y en el caso del modelo de Vinner y Hershkowitz, por ejemplo se encuentra el trabajo de Zaslavsky (2019).

- El diseño de la unidad didáctica es una tarea dispendiosa y compleja que requiere de un mayor compromiso por parte de los profesores si se desea gestionar las clases de matemáticas de una manera diferente a la tradicional.

**Respecto al OE3:** *“Implementar la unidad didáctica diseñada en los estudiantes de la muestra”.*

- La observación dirigida durante la implementación de la unidad didáctica evidencia un alto grado de motivación por parte de los estudiantes.

- La implementación de la actividad N° 0 “nociones preliminares” resultó ser un importante apoyo para el desarrollo de las actividades posteriores.

- Los resultados de la implementación de la unidad didáctica diseñada, incluyendo además de los polígonos a los triángulos y los cuadriláteros, sugieren que la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes se fortaleció en mayor medida, si los comparamos con resultados de otros estudios que sólo tienen en cuenta uno o dos de estos conceptos.

**Respecto al OEA:** *“Caracterizar la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes participantes en el estudio, particularmente, en relación a la adquisición de los procesos matemáticos de pensamiento: definir y clasificar en los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero”.*

- Los estudiantes comprendieron la relación definición del concepto y la imagen del concepto en los polígonos, los triángulos y los cuadriláteros.

- Los estudiantes lograron, no solamente visualmente sino que además matemáticamente, percibir los polígonos, triángulos y cuadriláteros.

- Los estudiantes comprendieron la importancia y utilidad de formular y usar las definiciones de los conceptos.

- Los estudiantes comprendieron y asumieron las diversas clasificaciones que se presentan en los polígonos, triángulos y cuadriláteros.

- Los estudiantes comprendieron y asumieron las clasificaciones inclusivas que se presentan en los triángulos y cuadriláteros.

- Los estudiantes lograron deducir y demostrar (“mostrar”) propiedades matemáticas de los cuadriláteros.

- Los estudiantes lograron adquirir un lenguaje matemático acorde a las temáticas desarrolladas, lo cual se hizo evidente al momento de intercambiar ideas entre ellos mismos y con el profesor.
- Los estudiantes lograron un mayor control de las imágenes de los conceptos de polígono, triángulo y cuadrilátero superando la influencia limitada que tenían con la figuras prototípicas.
- Los estudiantes exhibieron un total y rápido logro de nivel 1 de Van Hiele (en los conceptos desarrollados), como se puede evidenciar en la poca asignación de categorías de análisis en este nivel. Por otra parte, los estudiantes en su totalidad alcanzaron el nivel 2 de Van Hiele (en los conceptos desarrollados), aunque de una manera más lenta si se compara con el logro del nivel 1.

### **5.1.3 Aportes a la Didáctica de las Matemáticas**

Uno de los aspectos más importantes a resaltar como resultado de esta investigación, y que con seguridad, es uno de los principales aportes a esta disciplina, es la unidad didáctica diseñada. Los factores estructurantes de la misma, como lo son los modelos de Van Hiele y de Vinner & Hershkowitz (la definición del concepto versus imagen del concepto), el Geoplano (como mediador instrumental del aprendizaje), y los procesos matemáticos de pensamiento (definición y clasificación) se constituyen en un ejemplo digno de ser replicado en unidades didácticas de otros objetos matemáticos.

Otro aporte, no menos importante, es el amplio listado de categorías de análisis que se planteó y se logró consolidar con las ejecuciones de los estudiantes en cada una de las tareas de las actividades de la unidad didáctica.



Los resultados de este estudio confirman la complementariedad de la imagen y la definición de los conceptos geométricos para el desarrollo de procesos matemáticos de pensamiento.

#### **5.1.4 Futuros temas de investigación**

- Diseñar unidades didácticas, con la misma estructura de la actual, para el desarrollo y fortalecimiento de otros conceptos geométricos.
- Diseñar una estrategia de capacitación docente (*desarrollo profesional docente*) en matemáticas que incluya los conceptos desarrollados en este estudio.

#### **5.2 Recomendaciones**

- Seguir implementado la unidad didáctica diseñada en futuros cursos de quinto grado de la IETAVH para el desarrollo de los temas que se tuvieron en cuenta en esta investigación.
- Tener en cuenta, en cualquier clase de matemáticas, realizar un seguimiento constante a los avances de los estudiantes, con el fin de verificar los ajustes que se deben realizar a los diseños instruccionales diseñados para la enseñanza.
- Tener en cuenta en el plan de área del grado quinto la organización de las temáticas, desde lo geométrico, de tal forma que se puedan diseñar unidades didácticas de temas relacionados.
- Tener en cuenta que la enseñanza de los conceptos geométricos debe hacerse de manera opuesta como se hace tradicionalmente (primero la definición y luego el o los ejemplos gráficos), es decir, debería enseñarse primero la imagen del concepto y luego la definición del concepto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, D. (2017). *Fortalecimiento del proceso del aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de van hiele utilizando geogebra en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios* (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, Colombia.
- Algarín, D. (2013). *Caracterización de los niveles de razonamiento de van hiele específico a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas* (tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Aravena, M., Gutiérrez, A. & Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1): 107-128.
- Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación: introducción a la metodología científica*. Caracas, Venezuela: Episteme.
- Borba, M. & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking. Information and communication technologies, modelling, experimentation and visualization*. NY, USA: Springer.
- Burger, W.F. & Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1): 31-48. [Traducción por M<sup>a</sup> Luisa Luna (E.U. de Magisterio. Universidad de Cádiz); revisada por Ángel Gutiérrez (Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia)].

- Cabanne, N. & Ribaya, M. (2009). *Didáctica de la Matemática en el nivel inicial*. Buenos Aires, Argentina: Bonum.
- Clements, D.H. (2002). Linking research and curriculum development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.559-630). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Corte Constitucional de Colombia. (2015). *Constitución Política de Colombia*. Recuperado de: <http://www.corteconstitucional.gov.co/inicio/Constitucion%20politica%20de%20Colombia%20-%202015.pdf>
- De Villiers, M.D. (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele theory: Some critical comments*. Stellenbosch, Sudáfrica: Rumeus.
- De Villiers, M.D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1): 11-18.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Ed.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21<sup>st</sup> century* (pp. 37-52). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Espinosa, S.D. (2008). *Jerarquías inclusiva y exclusiva para la clasificación de cuadriláteros: el caso de algunos maestros de primaria* (tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, México DF, México.
- Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (textos seleccionados)*. (Traducción parcial al español de L. Puig). México, D.F.: Departamento de Matemática Educativa-CINVESTAV (2001).

- Gamboa, R. & Ballesteros, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria: la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 14(2): 125-142.
- García, L. & Fuentes, B. (2017). *Los cuadriláteros en el marco del modelo van hiele (nivel 1 y 2)* (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga, Colombia.
- Gattegno, C. (1964). La percepción y la acción como bases del pensamiento matemático. En C. Gattegno y otros (Eds.), *El material para la enseñanza de las matemáticas* (pp. 3-12). Madrid, España: Aguilar.
- Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A. & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 2-44). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gravemeijer, K. P. E. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1: 155-177.
- Gualdrón, É. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza figuras planas* (tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.
- Gualdrón, E. (2014). Descriptores específicos de los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos. *Revista Científica*, 3(20): 26-36.
- Gualdrón, E., Quintero M.A. & Flórez, T. (2016). Comprensión de los polígonos mediante el modelo de Van Hiele. En *Actas de la XXX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México.

- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2-3): 27-46.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and cognition*. NY, USA: Cambridge University Press.
- Hershkowitz, R., Bruckheimer, M. & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In NCTM. (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 222-235). Reston, VA, USA: NCTM.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher*, 74(1): 11-18.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Recuperado de: <http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf>.
- Hurtado, J. (2000). *Metodología de la investigación holística*. Caracas, Venezuela: Fundación Sypal.
- ICFES. (2017a). *GUÍAS: Descripción de los niveles de desempeño*. Recuperado de: [portal.icfes.s3.amazonaws.com/datos/guiasCognitivo/Definicion%20Niveles%20de%20Desempe%C3%B1o.pdf](http://portal.icfes.s3.amazonaws.com/datos/guiasCognitivo/Definicion%20Niveles%20de%20Desempe%C3%B1o.pdf)
- ICFES. (2017b). *Publicación de resultados Saber 3°, 5° y 9°. I.E.T.A. VICENTE HONDARZA – Morales: histórico*. Recuperado de: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/historico/reporteHistoricoComparativo.jsp>

- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.
- Marín, A. (2000). Programación de unidades didácticas. En L. Rico. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (12, pp. 195-228). Barcelona, España: Horsori.
- Marín, J. D. (2018). *Investigar en educación y pedagogía: sus fundamentos epistemológicos y metodológicos*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- Morales, C. & Majé, R. (2011). *Competencias matemáticas y desarrollo del pensamiento espacial* (tesis de maestría). Universidad de la Amazonia, Florencia, Colombia.
- Méndez, C. (1988). *Metodología, guía para elaborar diseños de Investigación en ciencias económicas, contables y administrativas*. Bogotá, Colombia: Mac Graw-Hill Latinoamericana.
- MEN. (1994a). *Ley General de Educación 115 de febrero 8 de 1994*. Recuperado de: [https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-85906\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf)
- MEN. (1994b). *Decreto 1860 de Agosto 3 de 1994*. Recuperado de: [https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-86240\\_archivo\\_pdf.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-86240_archivo_pdf.pdf)
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2016). *Derechos básicos del aprendizaje V2*. Recuperado de:

[http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA\\_Matem%C3%A1ticas.pdf](http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf)

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

O'Daffer, P. G., & Clemens, S. R. (1992). *Geometry: An investigative approach* (2nd Ed.). Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

Pegg, J. & Davey, G. (1998). Interpreting student understanding in geometry: A synthesis of two models. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 109-135). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

PEI. (2017). *Proyecto educativo institucional: Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza*. Documento sin publicar.

Porlán, R. & Martín, J. (1991). *El Diario del Profesor*. Sevilla, España: Diada. Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

Quintero, M. A., Flórez, T. & Villarreal, Y. (2015). *Análisis de la comprensión de polígonos basado en el modelo teórico de Van Hiele* (tesis pregrado). Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia.

Ruiz, O. (2016). *El Geoplano como herramienta de integración educativa* (tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

- Ruiz, M. (2016). *Enseñanza de polígonos a través del reconocimiento de invariante usando el modelo de van hiele en el grado octavo de la Institución Educativa Finca la Mesa* (tesis de maestría). Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.
- Santa, Z. (2016). *Producción de conocimiento geométrico escolar en un colectivo de profesores-con-doblado-de-papel* (tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones*. Madrid, España: McGraw-Hill.
- Serrazina, L. & Matos, J. (1968). *O Geoplano na sala de aula*. Associação de Professores de Matemática. Lisboa, Portugal: Grua.
- Sherard, W. (1981). Why is geometry a basic skill? *Mathematics Teacher*, 74 (1): 19-21.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26: 114-145.
- Taylor, S. J. & Bogdan, R. (2000). *Introducción a los métodos cualitativos*. Barcelona, España: Paidós.
- Verdugo, J., Vázquez, R., Briseño, L. & Palmas, O. (2000). *Área de figuras en el Geoplano*. México D.F.: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias /UNAM. Recuperado de: [https://nanopdf.com/download/area-de-figuras-en-el-geoplano-departamento-de-matematica\\_pdf](https://nanopdf.com/download/area-de-figuras-en-el-geoplano-departamento-de-matematica_pdf).
- Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* (tesis doctoral). Utrecht, Holanda: Universidad



de Utrecht. Recuperado de:

<http://www.uv.es/angel.gutierrez/aprenggeom/archivos2/VanHiele57.pdf>

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. NY, USA: Academic Press.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6): 310–316.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14: 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall. (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 83 (1): 20-25.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona, España: Paidós.

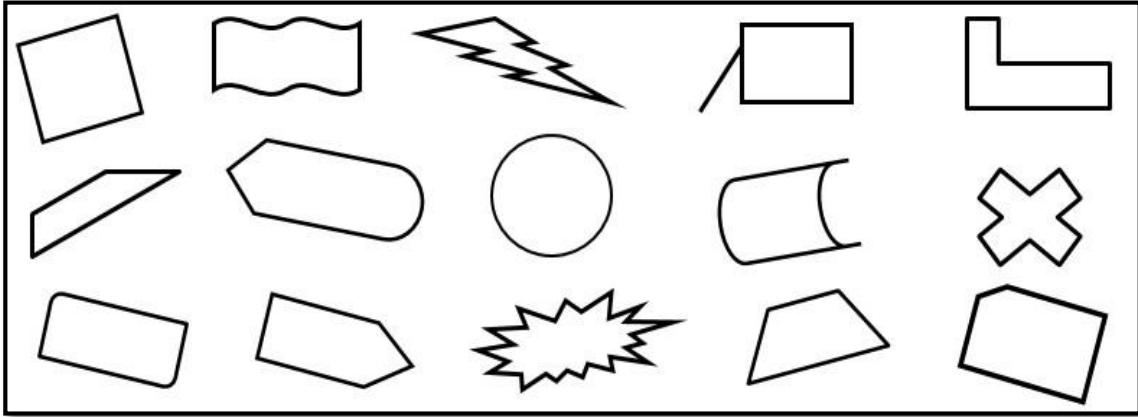
Yi, M., Flores, R. & Wang, J. (2020). Examining the influence of van Hiele theory-based instructional activities on elementary preservice teachers' geometry knowledge for teaching 2-D shapes. *Teaching and Teacher Education* (91): 1-12.

Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *Journal of Mathematical Behavior*, (53): 245–255.

## Anexo 1. Diagnóstico inicial

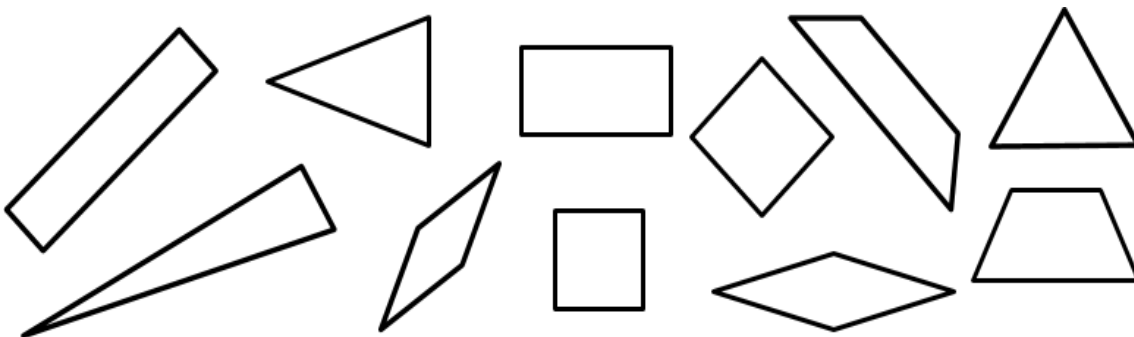
**PRUEBA  
DIAGNÓSTICA**

1. Encierre con color rojo las figuras que son polígonos.



2. Observa detenidamente las siguientes figuras. Luego, coloca dentro de cada una su letra correspondiente. (Puede existir más de una letra dentro de cada figura).

**R** = Rectángulo    **O** = Rombo    **T** = Triángulo    **A** = Trapecio    **C** = Cuadrado



3. Coloca una **F**, si es falso, o una **V**, si es verdadero. Justifica las respuestas falsas.

A. \_\_\_\_ Existen cuadrados que tienen: tres lados de 3 cm. y uno de 2 cm.

---



---



---

B. \_\_\_\_ El triángulo es un polígono que tiene solo un par de lados paralelos.

---



---



---

C. \_\_\_\_ El rectángulo tienen cuatro ángulos de  $90^\circ$  y todos sus lados son de la misma longitud.

---



---



---

D. \_\_\_\_ El trapecio está formado por cinco lados de la misma medida.

---



---



---

E. \_\_\_\_ El rombo es un polígono conformado por cuatro lados iguales.

---



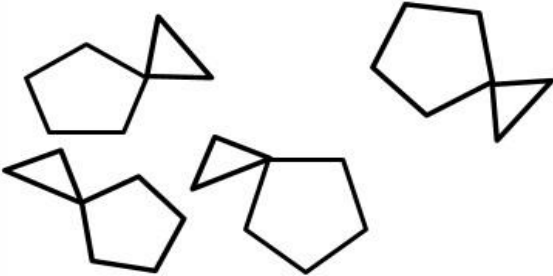
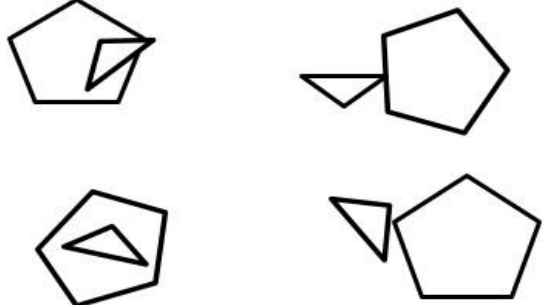
---



---

4. Observa detenidamente cada una de las siguientes figuras en las columnas de la izquierda y de la derecha, luego escriba la definición de TRIANPEN

### TRIANPEN

Ejemplos de Trianpen	No ejemplos de Trianpen
	

**Trianpen es:**

---



---

5. Responde la pregunta dada, luego justifica tu respuesta.

A. ¿Un cuadrado es también un rombo? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**B.** ¿Un rombo es también un cuadrado? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**C.** ¿Un trapecio es también un rectángulo? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**D.** ¿Un rectángulo es también un cuadrado? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**E.** ¿Un cuadrado es también un rectángulo? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

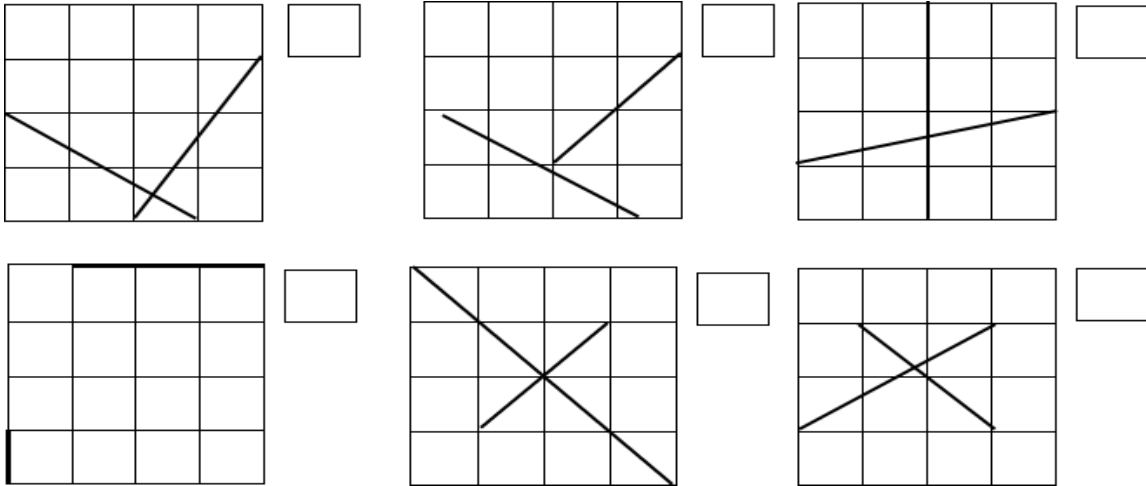
**F.** ¿Un rombo es también un rectángulo? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

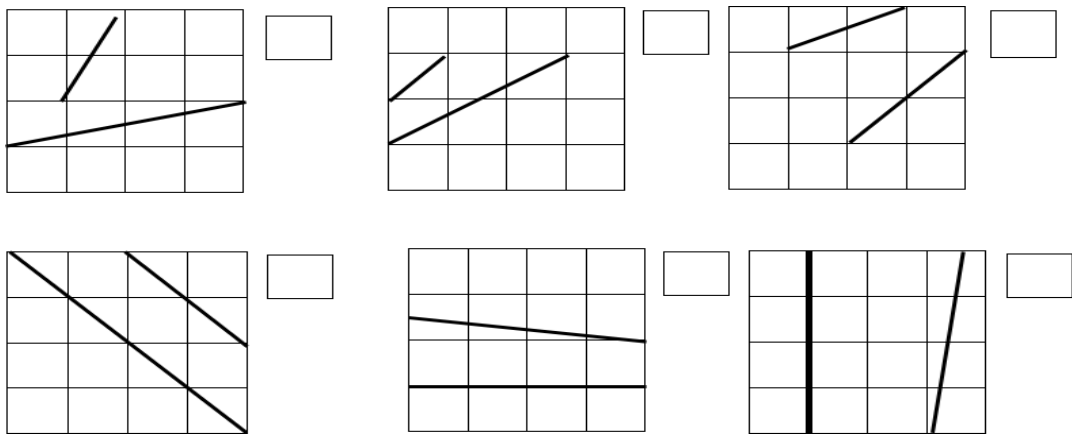
\_\_\_\_\_

- 6.** Marca con una X (en cada pequeño cuadrado), cuál o cuáles de las siguientes figuras representan líneas perpendiculares. Justifique la respuesta.



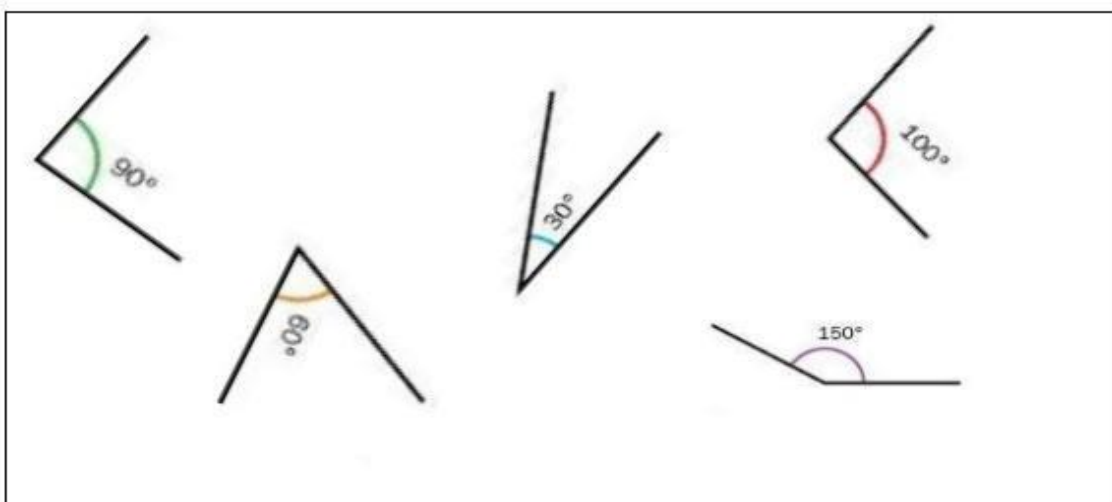
RTA: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

7. Marca con una x cual o cuales de las siguientes figuras representan líneas paralelas justifique la respuesta.

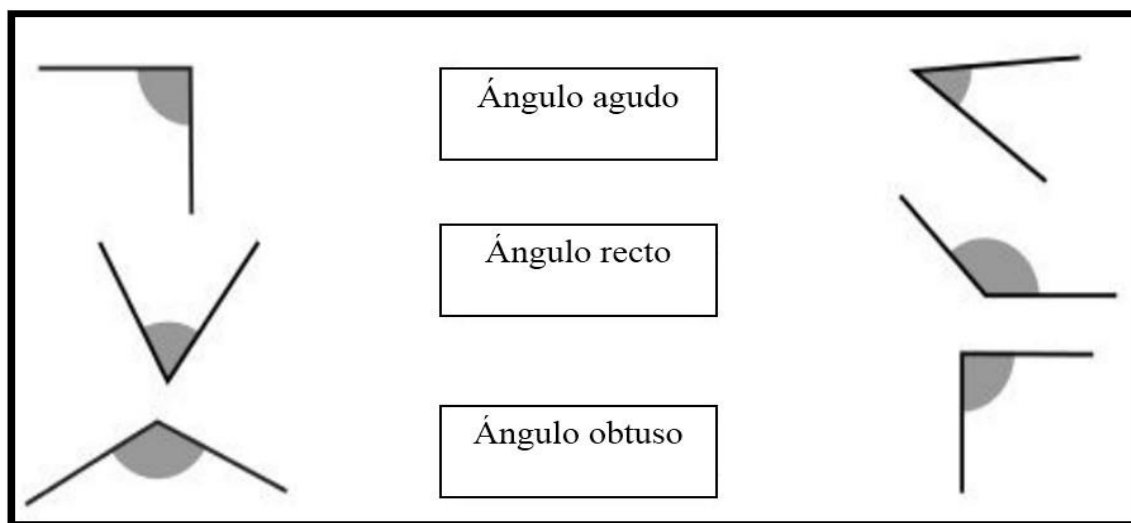


RTA: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

8. Observa las medidas de cada ángulo y escribe el nombre correspondiente. Luego encierra con color verde el ángulo de menor medida y de color rojo al de mayor medida.



9. Relaciona cada uno de los ángulos con el nombre correspondiente.





## Anexo 2. Diario de campo

<p><b><i>Fortalecimiento de los Procesos Matemáticos de Pensamiento: Definición y Clasificación en Estudiantes de 5° Grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales-Bolívar</i></b></p> <p>“DIARIO PEDAGÓGICO”</p>		
<b>FECHA:</b> 12 al 16 de Agosto 2019	<b>TOTAL DE ESTUDIANTES:</b> 28	<b>GRADO:</b> 5° A
<b>ACTIVIDAD: N° 0. Reforcemos preconceptos</b>		
<b>OBJETIVO:</b> <i>Fortalecer el preconceptos geométricos que involucran la definición y clasificación de rectas, semirrectas, segmentos y ángulos, que son esenciales para el desarrollo de concepto de polígono.</i>		
OBSERVACIÓN	DESCRIPCIÓN	REFLEXIÓN
<p>Las actividades se llevaron a cabo en el aula de clase, con 28 estudiantes.</p> <p>Al dar inicio a la actividad se realizaron algunas preguntas sobre los conceptos a tratar para identificar nuevamente el nivel de conocimientos previos; donde se evidenció que algunos de ellos lo hacen de forma asertiva, otros se muestran indecisos y otros simplemente no responden.</p> <p>Al iniciar la explicación de los temas como: segmentos, semirrectas, rectas (paralelas, oblicuas y perpendiculares), ángulos (agudos, obtusos y rectos), al momento de dar los términos y uso, algunos estudiantes tomaron la iniciativa y se mostraron tranquilos y receptivos.</p> <p>Al momento de realizar cada una de las tareas la mayoría demostraban concentrados y las resolvieron sin problema, aunque algunos intranquilos manifestaban a la docente investigadora el “no saber cómo hacerlo”.</p>	<p>Luego de haber realizado un acercamiento con los padres de familia para hacerles saber sobre el proyecto de investigación que se va desarrollar con los estudiantes, en este caso sus hijos, se hizo una primera intervención con la actividad N° 0, donde se reforzaron los preconceptos para consolidar en los estudiantes, a través de tareas, los procesos matemáticos de pensamiento definición y clasificación de los mismos, y así poder expresar y apropiarse de los conocimientos y convertirlos en saberes estables y duraderos. Es preciso recordar en este momento, que estos conceptos se incluyeron en esta actividad porque fueron en los que los estudiantes mayor dificultad tuvieron al desarrollar la prueba diagnóstica inicial.</p>	<p>La docente investigadora durante el desarrollo de las diferentes tareas les presta asesoría a los estudiantes, les pide leer pausadamente la actividad, en cada uno de las tareas; repetir la lectura si es necesario para que puedan comprender y saber lo que deben realizar. Además, motivarlos seguidamente para que las pudieran desarrollar con éxito.</p> <p>Al terminar las horas asignadas para la elaboración de las actividades no se logró culminar todas las tareas; la docente investigadora les pide terminar en la siguiente sección para poder estar presente en la orientación de lo que ellos no puedan entender.</p> <p>Dentro de la sección se pudo observar que la mayoría de los estudiantes mostraron interés y motivación en el desarrollo de cada una de las tareas.</p>

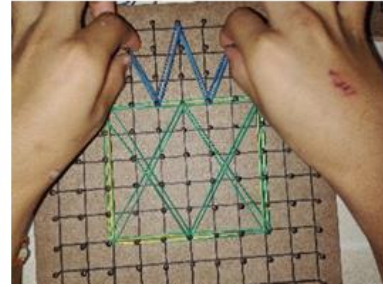
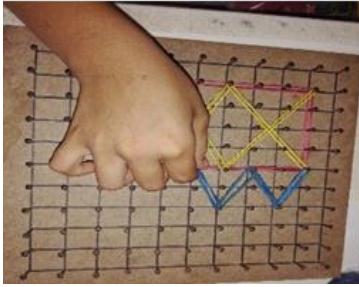
Evidencias:





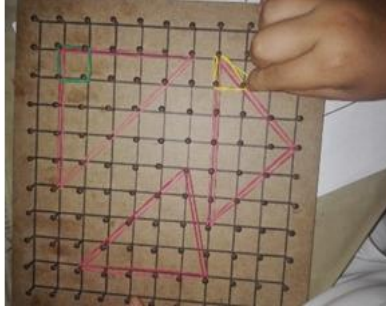


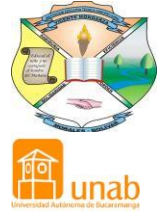
<p><b>Fortalecimiento de los Procesos Matemáticos de Pensamiento: Definición y Clasificación en Estudiantes de 5° Grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales-Bolívar</b></p> <p>“DIARIO PEDAGÓGICO”</p>		 
<b>FECHA:</b> 20 de agosto al 6 de septiembre 2019	<b>TOTAL DE ESTUDIANTES:</b> 28	<b>GRADO:</b> 5° A
<b>ACTIVIDAD: N° 1. Descubro por medio de atributos el concepto de polígono.</b>		
<b>OBJETIVO:</b> Fortalecer los procesos de pensamientos matemáticos definición y clasificación mediante los polígonos.		
OBSERVACIÓN	DESCRIPCIÓN	REFLEXIÓN
<p>Se dio inicio a la actividad N° 1 donde los estudiantes desarrollaron tareas sobre los polígonos utilizando como instrumento el Geoplano para realizar cada una de estas.</p> <p>Los estudiantes se notan animados y más motivados (que en la anterior actividad) a participar. Si alguno de los estudiantes no lo hace correctamente, otros compañeros toman la iniciativa de explicarle para que lo pueda lograr. Es notorio que a medida que manipulan el Geoplano se les hace más fácil y divertido el aprender a desarrollar cada una de las tareas propuestas y así el aprendizaje sea más significativo.</p>	<p>Al momento de vincular el Geoplano en la resolución de las tareas, los estudiantes se les hace más fácil y divertido el desarrollo de estas, se involucran y fortalecen el conocimiento cada vez más en los procesos de matemáticos pensamiento, como lo son la definición y clasificación de los polígonos.</p> <p>En el desarrollo de la actividad se encontraron con la tarea 5, donde construyeron una figura en el Geoplano e identificaron cuántos polígonos se encontraron en la figura. Para los estudiantes fue muy impactante el darse cuenta la cantidad de figuras que pudieron descubrir con las ligas de colores; no lo habían imaginado; esto les permitió ver una nueva forma para adquirir los conocimientos.</p>	<p>Los estudiantes iniciaron con actitud positiva el desarrollo de cada una de las tareas propuestas en la actividad, donde se incluyeron 14 tareas que les permiten desarrollar la clasificación y definición de polígonos.</p> <p>La docente investigadora les hace acompañamiento para resolver inquietudes y llegar a conclusiones precisas.</p>

**Evidencias:**



<p><b><i>Fortalecimiento de los Procesos Matemáticos de Pensamiento: Definición y Clasificación en Estudiantes de 5° Grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales- Bolívar</i></b></p> <p align="center"><b>“DIARIO PEDAGÓGICO”</b></p>		 
<b>FECHA:</b> 9 de septiembre al 4 de octubre 2019	<b>TOTAL DE ESTUDIANTES:</b> 28	<b>GRADO:</b> 5° A
<b>ACTIVIDAD: N° 2. Clasifico y defino el concepto de triángulo utilizando el Geoplano.</b>		
<b>OBJETIVO:</b> <i>Fortalecer el concepto de triangulo con los procesos de pensamientos matemáticos definición y clasificación utilizando el Geoplano.</i>		
OBSERVACIÓN	DESCRIPCIÓN	REFLEXIÓN
<p>Los estudiantes participan con seguridad al momento de dar respuesta a lo que se pregunta, se muestran menos temerosos.</p> <p>El ambiente en el aula de clases es más agradable. Al momento de dar explicación de las temáticas sobre triángulos se evidencia que para ellos es más fácil de comprender y resolver cada una de las tareas propuestas dentro de esta actividad.</p> <p>En la tarea donde los estudiantes debían identificar los ángulos agudos, obtusos y rectos lo realizaron de forma tranquila y manifestaron asombro al descubrir lo interesantes y fácil que podían hacerlo con el Geoplano.</p>	<p>En esta actividad fue muy notorio en los estudiantes el avance que presentaron en cada una de las tareas estipuladas para el concepto de triángulo, teniendo en cuenta los procesos matemáticos de pensamiento definición y clasificación. Se evidencia más claridad en las respuestas verbales y escritas que realizan; es una evidencia más de que el Modelo de Van Hiele contribuye de forma acertada en el desarrollo de procesos de razonamiento geométrico para el desarrollo del aprendizaje en los estudiantes.</p> <p>En este momento de la intervención se puede establecer que las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes se está fortaleciendo; es decir los aprendizajes esperados se están alcanzando.</p>	<p>En esta actividad los estudiantes se muestran más competitivos entre sí, están alerta a cada una de las tareas propuestas para darle respuesta y poder compartirlas a los demás compañeros; esto es indicio que están motivados y que lo que uno como investigador realmente está generando en ellos es un nuevo conocimiento y fortaleciendo la enseñanza y el aprendizaje, en este caso, de los procesos matemáticos de pensamiento y definitivamente del concepto de polígono.</p>

**Evidencias :**

<p align="center"><b>Fortalecimiento de los Procesos Matemáticos de Pensamiento: Definición y Clasificación en Estudiantes de 5° Grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales-Bolívar</b></p> <p align="center">“DIARIO PEDAGÓGICO”</p>		
<b>FECHA:</b> 21 de octubre al 1 de noviembre 2019	<b>TOTAL DE ESTUDIANTES:</b> 28	<b>GRADO:</b> 5° A
<b>ACTIVIDAD: N° 3. Clasifico y defino el concepto de cuadrilátero utilizando el Geoplano y descubro lo divertido que se puede aprender</b>		
<b>OBJETIVO:</b> Fortalecer el concepto de cuadriláteros con los procesos de pensamientos matemáticos definición y clasificación utilizando el Geoplano.		
OBSERVACIÓN	DESCRIPCIÓN	REFLEXIÓN
<p>En esta actividad los estudiantes tomaron rápida iniciativa en el abordaje de las tareas propuestas. Al momento de participar lo hacían con seguridad y celeridad, sin duda debido al fortalecimiento en la adquisición de conceptos y los diferentes procesos matemáticos. Es así como se refleja que fue un valioso trabajo el que se desarrolló con estos estudiantes.</p>	<p>El uso del Geoplano ha resultado ser un excelente mediador en el aprendizaje de los cuadriláteros y, en general, de los polígonos. Una dificultad que se logró superar sin mayores traumatismos fue que lograran diferencias a los trapecios de los cuadriláteros más comunes: el cuadrado, el rectángulo y el rombo. Se evidencia que los estudiantes definitivamente aprendieron que la posición de las figuras es irrelevante al momento de identificarlos, definirlos y clasificarlos. Las clasificaciones inclusivas fueron bien comprendidas. Por ejemplo en la tarea que preguntaba:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- si un cuadrado es un rombo, o si</li> <li>- un cuadrado es un rectángulo,</li> </ul> <p>los estudiantes respondieron, casi inmediatamente, que si lo eran.</p>	<p>A pesar de que esta actividad estaba planeada para 4 semanas, los estudiantes lograron desarrollarla solamente en 2 semanas. De acuerdo con lo observado se puede decir que en este momento de la experimentación los estudiantes han adquirido un importante nivel de razonamiento geométrico y, en particular, el fortalecimiento de los procesos matemáticos. Además, en este momento de la experimentación, se notó que los estudiantes trabajaron de manera más independiente, haciendo un mejor uso del instrumento Geoplano y mostrando más y mejores formas de razonamiento geométrico. Todo lo anterior es evidencia de que el diseño y experimentación de la unidad didáctica fue adecuado y pertinente.</p>

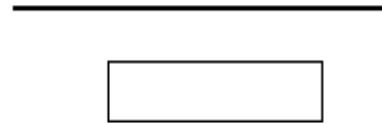
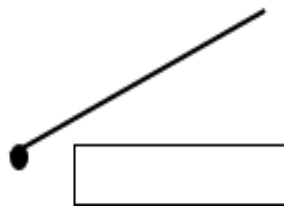
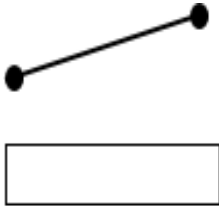
**Evidencias:**



## Anexo 3. Unidad didáctica

**ACTIVIDAD # 0**Nivel 1: *Visualización*Fase: *Información***Tarea 1.**

a) Escribe dentro del recuadro el nombre del objeto geométrico observado.



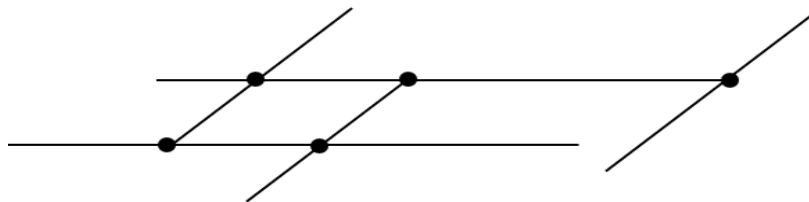
Ahora con tus palabras define lo siguiente:

- Segmento: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Semirrecta: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- Recta: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

b) Dibuja cada figura con un color diferente.

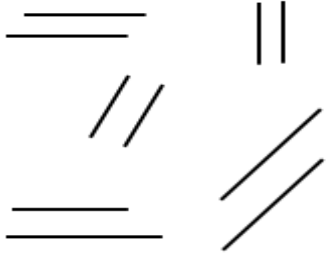
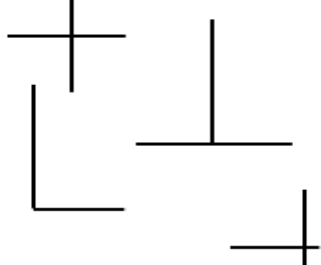

- Una recta que pase por el número 1. ● 1      ● 2  
¿De cuántas formas diferentes lo puedes hacer?
- Una semirrecta que inicie en el número 2.  
¿De cuántas formas diferentes lo puedes hacer?
- Un segmento cuyos extremos sean 3 y 4. 3 ●      ● 4  
¿De cuántas formas diferentes lo puedes hacer?

c) Analiza la figura y repasa con color diferente los segmentos y semirrectas, luego contesta:

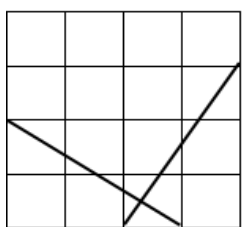


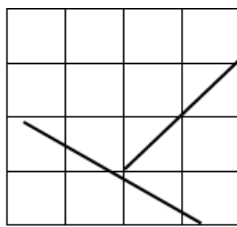
- ¿Cuántos segmentos hay? \_\_\_\_\_
- ¿Cuántas semirrectas hay? \_\_\_\_\_

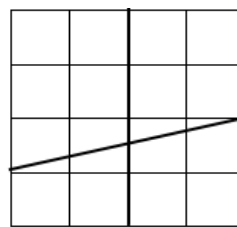
**Tarea 2.** Analiza el siguiente esquema, luego resuelve lo siguiente:

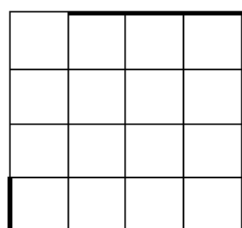
<b>Rectas paralelas</b> Nunca se interceptan (nunca se cortan)	<b>Rectas perpendiculares</b> Dos rectas son perpendiculares si son oblicuas y forman al menos un ángulo recto	<b>Rectas oblicuas</b> Dos rectas son oblicuas si se interceptan en un punto y no son perpendiculares
		

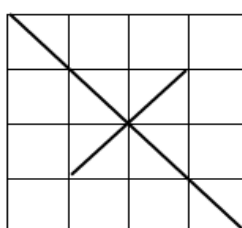
- a) Marca con una **X** (en cada pequeño cuadrado), cuál o cuáles de las siguientes figuras representan líneas perpendiculares. Justifique la respuesta.

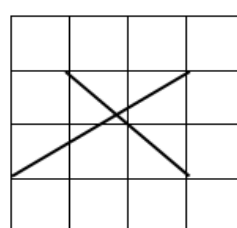












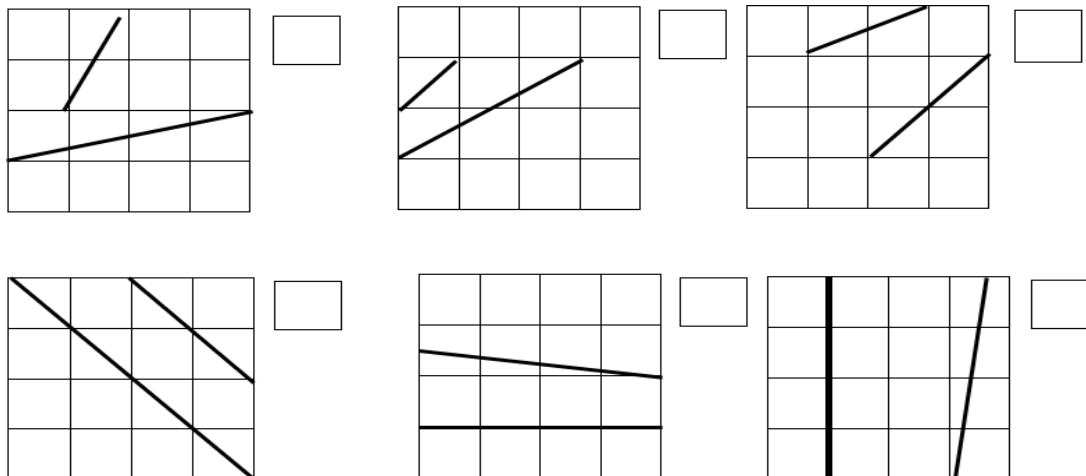

RTA: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

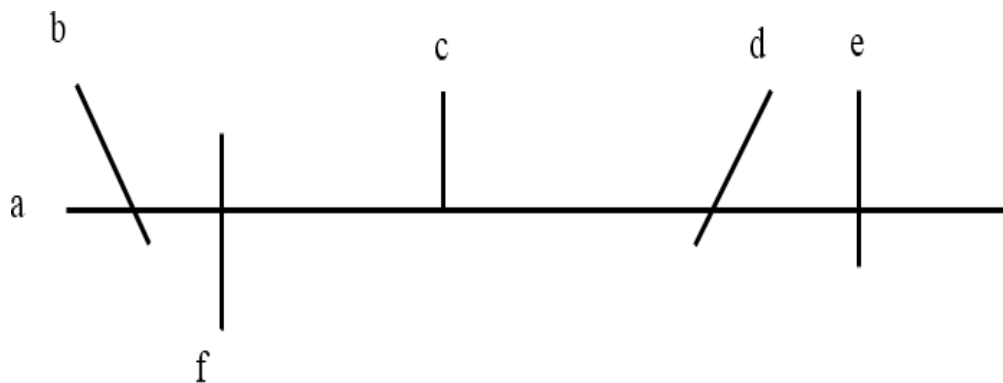


b) Marca con una **X** cuál o cuáles de las siguientes figuras representan líneas paralelas. Justifica tu respuesta.


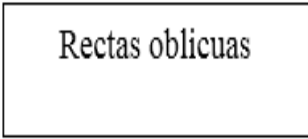
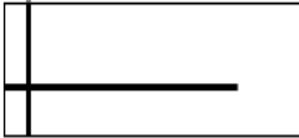

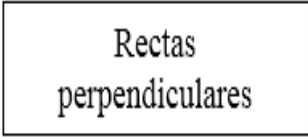


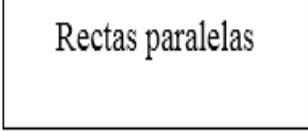
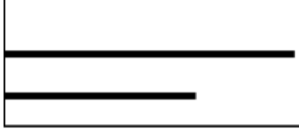


RTA: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

c) Encuentra y escribe en la figura los pares de líneas perpendiculares, paralelas y oblicuas.



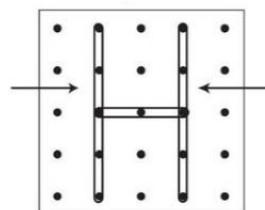
d) Relaciona las rectas según su clasificación.

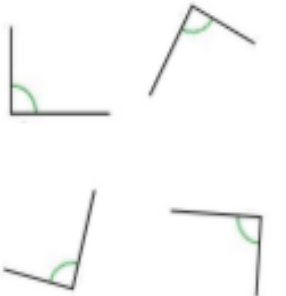
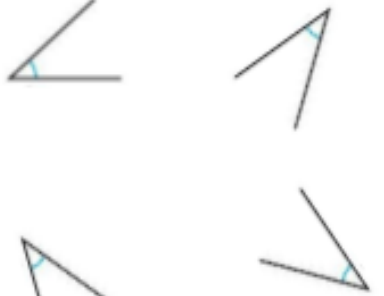
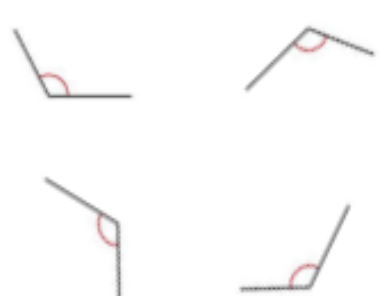
e) En el Geoplano haz 4 letras mayúsculas que tengan 2 o 3 líneas paralelas con color verde y resalta con color rojo las que son paralelas. Luego, haz 2 letras mayúscula que tengas 2 o 3 líneas oblicuas con color verde y resalta las líneas oblicuas con color amarillo. Para finalizar, haz 2 letras mayúsculas que tengan 2 o 3 líneas perpendiculares con color verde y resalta las líneas perpendiculares de color azul.

EJEMPLO:

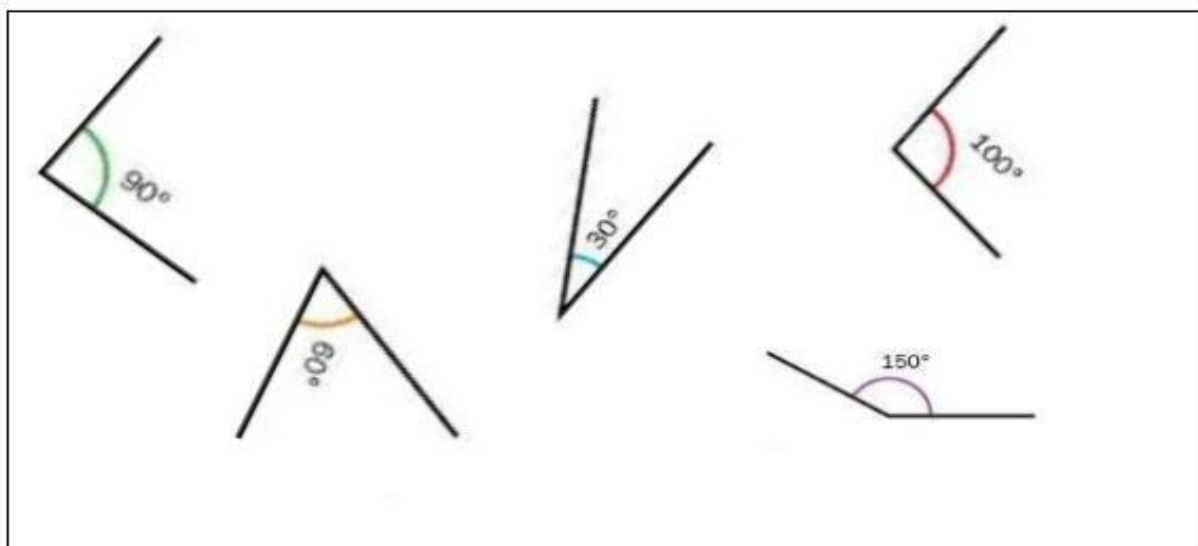
El niño Héctor realizó en el Geoplano la letra H para identificar líneas paralelas



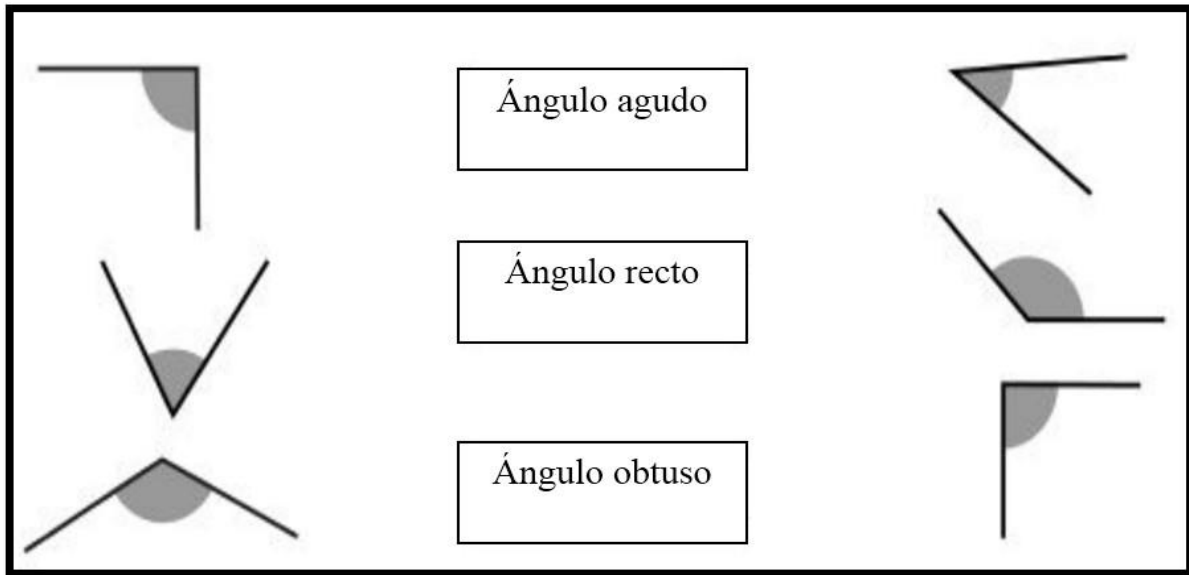
**Tarea 3.** Analiza el siguiente esquema, luego responde:

<b>Ángulo recto</b> Un ángulo recto mide $90^\circ$	<b>Ángulo agudo</b> Un ángulo agudo mide menos de $90^\circ$	<b>Ángulo obtuso</b> Un ángulo obtuso mide más de $90^\circ$
		

a) Observa las medidas de cada ángulo y escribe el nombre correspondiente. Luego encierra con color verde el ángulo de menor medida y, de color rojo, el de mayor medida.













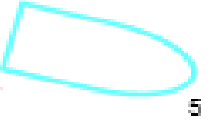







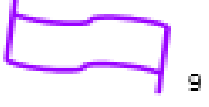
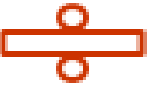

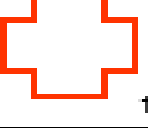


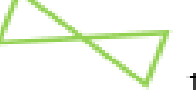




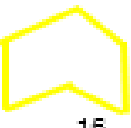
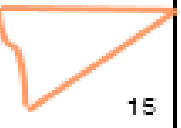
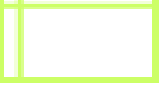

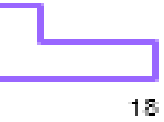

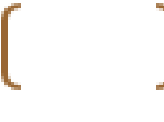
b) Relaciona cada uno de los ángulos con el nombre correspondiente.



## ACTIVIDAD N°1

Nivel 1: *Visualización*Fase: *Orientación Dirigida*

**Tarea 1.** Observa detenidamente las siguientes figuras geométricas planas y luego define que es para usted POLÍGONO, según lo observado

Ejemplos de POLÍGONOS		Ejemplos de NO POLÍGONOS	
 1	 2	 1	 2
 3	 4	 3	 4
 5	 6	 5	 6
 7	 8	 7	 8
 9	 10	 9	 10
 11	 12	 11	 12
 13	 14	 13	 14
 15	 16	 15	 16
 17	 18	 17	 18

Un **POLÍGONO** es:

---



---



---

**Tarea 2.** Según su definición de **POLÍGONO**, dibuja tres polígonos y tres no polígonos (diferentes a los de la tarea 1), utilizando el Geoplano.

**Tarea 3. a).** Según las indicaciones dadas, realiza la representación gráfica del polígono en el Geoplano.









INDICACIÓN
Se llama pentágono
Tiene 3 lados
Se llama hexágono
Tiene 8 lados
Se llama cuadrilátero

**b)** Analiza la siguiente tabla. Luego, utilizando el Geoplano, construye cada polígono teniendo en cuenta el nombre y su número de lados.

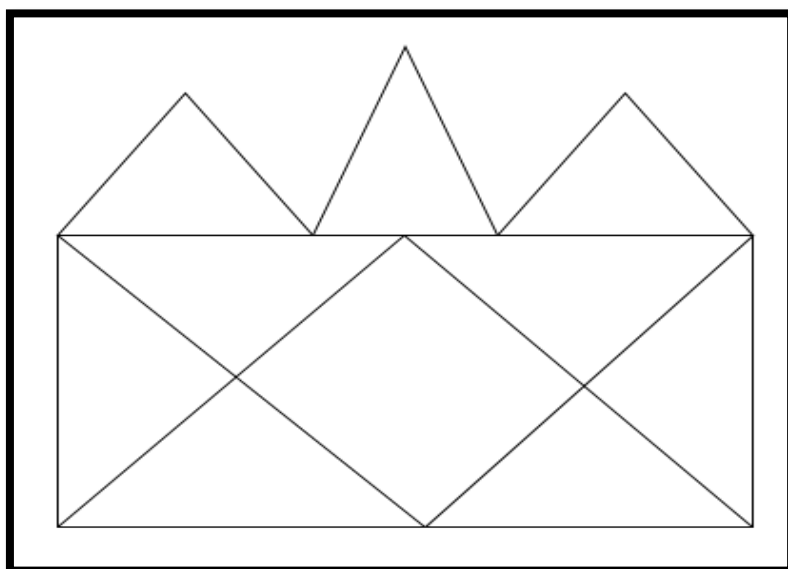
NOMBRE DEL POLÍGONO	NÚMERO DE LADOS
Triángulo	3
Cuadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octágono	8
Nonágono	9
Decágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12

Nivel 1: *Visualización*  
Fase: *Orientación Libre*

**Tarea 4.** Analiza las siguientes tablas, luego construye en el Geoplano la opción correcta y justifica tu respuesta.

<p>A) ¿Cuál de estos polígonos es un <b>HEXÁGONO</b>?</p>  <p>¿Por qué? _____</p>	<p>B) ¿Cuál de estos polígonos <b>NO</b> es un <b>TRIÁNGULO</b>?</p>  <p>¿Por qué? _____</p>
<p>C) ¿Cuál de estos polígonos es un <b>CUADRADO</b>?</p>  <p>¿Por qué? _____</p>	<p>D) ¿Cuál de estos polígonos <b>NO</b> es un <b>PENTÁGONO</b>?</p>  <p>¿Por qué? _____</p>
<p>E) ¿Cuál de estos polígonos no es un <b>RECTÁNGULO</b>?</p>  <p>¿Por qué? _____</p>	<p>F) ¿Cuál de estos polígonos es un <b>PENTÁGONO</b>?</p>  <p>¿Por qué? _____</p>
<p>G) ¿Cuál de estos polígonos se llama <b>DECÁGONO</b>?</p>  <p>¿Por qué? _____</p>	<p>H) ¿Cuál de estos polígonos <b>NO</b> es un <b>OCTÁGONO</b>?</p>  <p>¿Por qué? _____</p>

**Tarea 5.** Observa y construye la figura utilizando el Geoplano y ligas de diferentes colores. Luego cuenta cuántos polígonos hay.



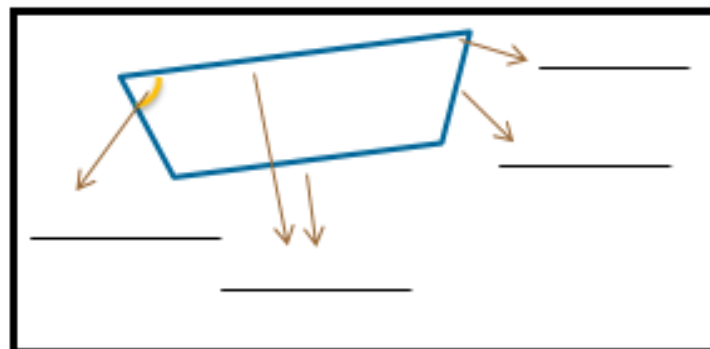
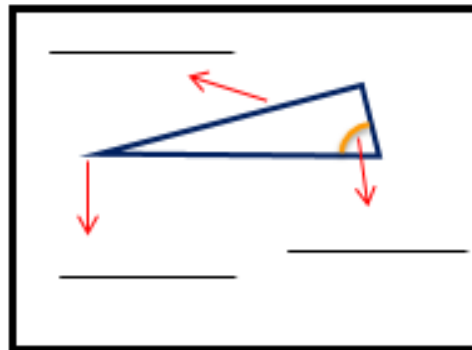
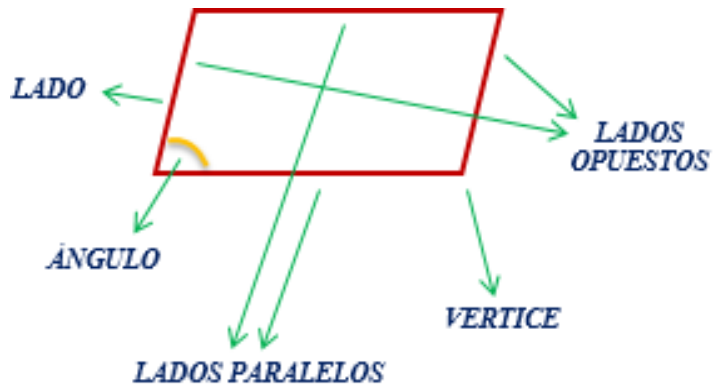
¿Cuántos hay? \_\_\_\_\_



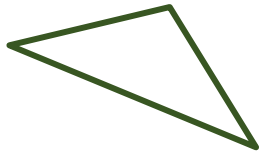
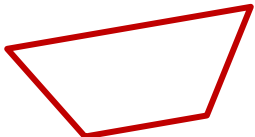
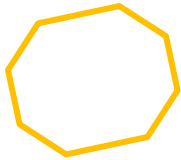
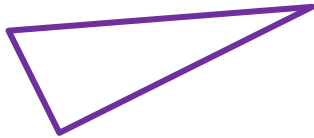
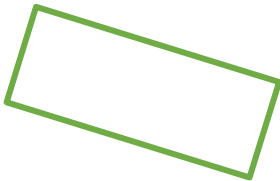
Nivel 1: *Visualización*

Fase: *Integración*

**Tarea 6.** Observa el siguiente polígono con sus partes y luego completa



**Tarea 7.** Observa las figuras y completa la siguiente tabla.

<i>Figura plana</i>	<i>Número de lados</i>	<i>Número de vértices</i>	<i>Número de ángulos</i>	<i>Nombre</i>
				
				
				
				
				

Nivel 2: *Análisis*

Fase: *Orientación Dirigida*

**Tarea 8.** Relaciona la *columna A* con la *columna B*, uniendo la figura con su definición correcta (puede existir más de una relación).

*Columna A*

**TRAPECIO:** es una figura geométrica plana de cuatro lados, con solamente un par de lados paralelos.

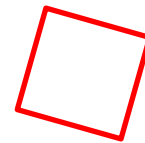
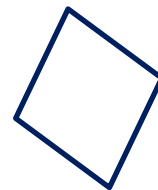
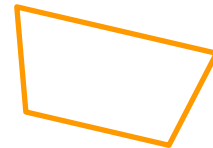
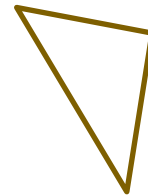
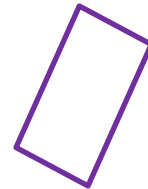
**CUADRADO:** es una figura geométrica plana de cuatro lados de igual medida y cuatro ángulos de  $90^\circ$ .

**ROMBO:** es una figura geométrica plana de cuatro lados de igual medida.

**TRIÁNGULO:** es una figura geométrica plana de tres lados.

**RECTÁNGULO:** es una figura geométrica plana de cuatro lados y cuatro ángulos de  $90^\circ$ .

*Columna B*



**Tarea 9.** Con las indicaciones dadas, construye y nombra el polígono correspondiente utilizando el Geoplano y luego en el recuadro.

<i>INDICACIONES</i>	<i>NOMBRE DEL POLÍGONO</i>
Tiene: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 ángulos.</li> <li>• 3 vértices.</li> </ul>	
Tiene: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 lados de igual medida.</li> <li>• 4 ángulos rectos.</li> </ul>	
Tiene: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 lados.</li> <li>• Un solo par de lados paralelos.</li> </ul>	
Tiene: <ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 lados de igual medida.</li> </ul>	

**Tarea 10.** Selecciona la respuesta correcta, encerrando la letra correspondiente, y luego justifica tu respuesta.

a) Juan hizo un cuadrilátero utilizando el Geoplano con todos sus ángulos rectos, dos lados cortos y dos lados largos. ¿Qué polígono dibujó?

- A. Un rombo
- B. Un cuadrado
- C. Un triángulo
- D. Un rectángulo
- E. Un Trapecio

Justifica tu respuesta:

---



---



---





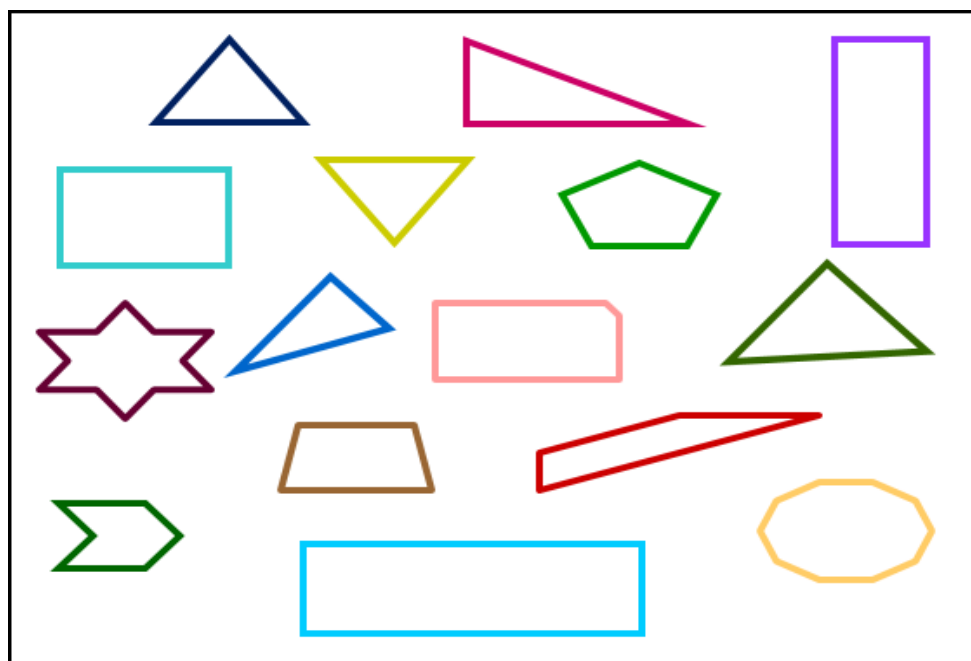
---

Nivel 2: *Análisis*

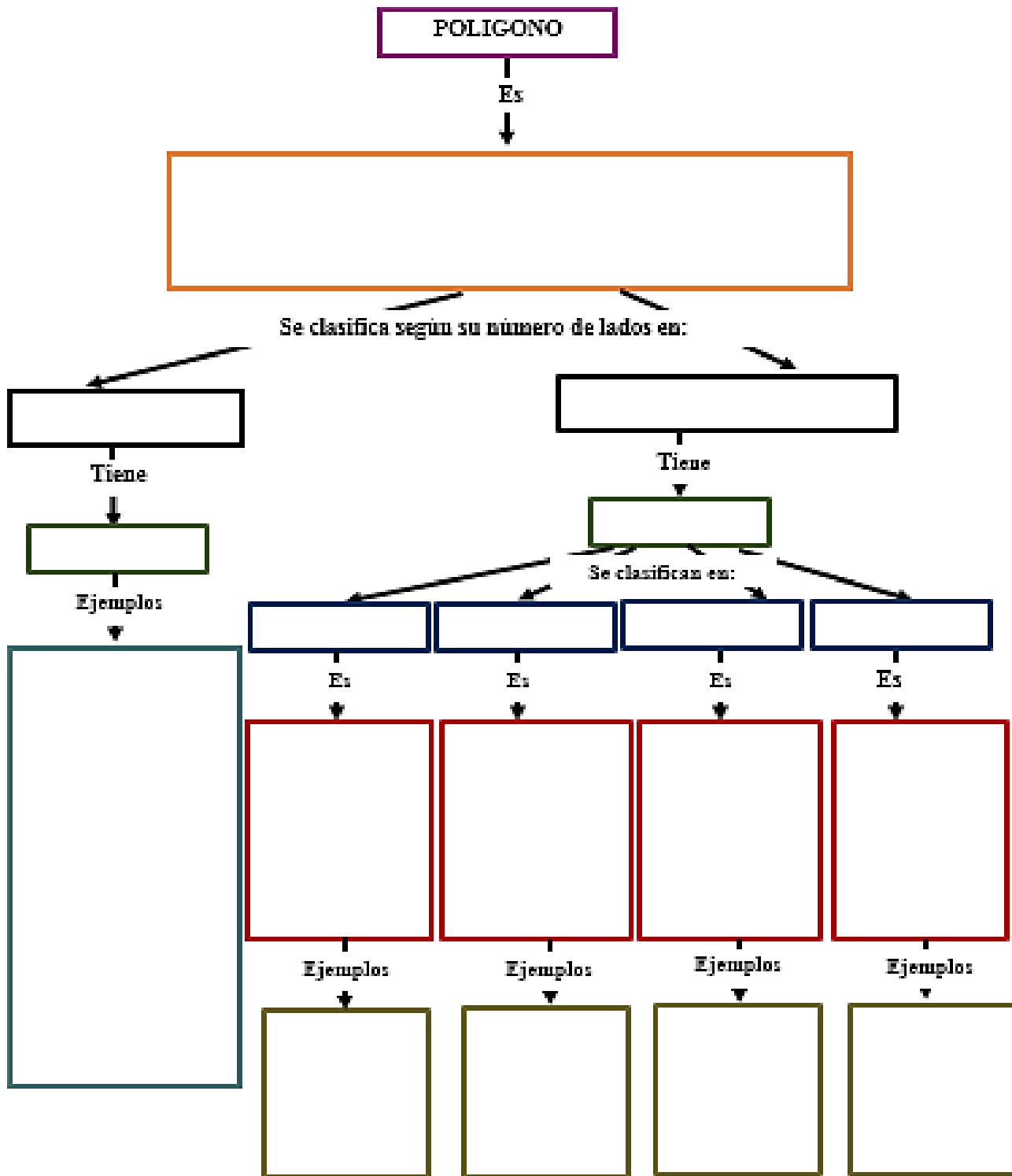
Fase: *Orientación Libre*

**Tarea 11.** Recorta los polígonos dados en la hoja anexa y luego clasifícalos pegándolos en su recuadro correspondiente. Finalmente, escribe la definición de cada grupo.

TRIÁNGULOS	CUADRILÁTEROS
	
Definición	Definición



Tarea 12. Con tus conocimientos completa el siguiente mapa conceptual.

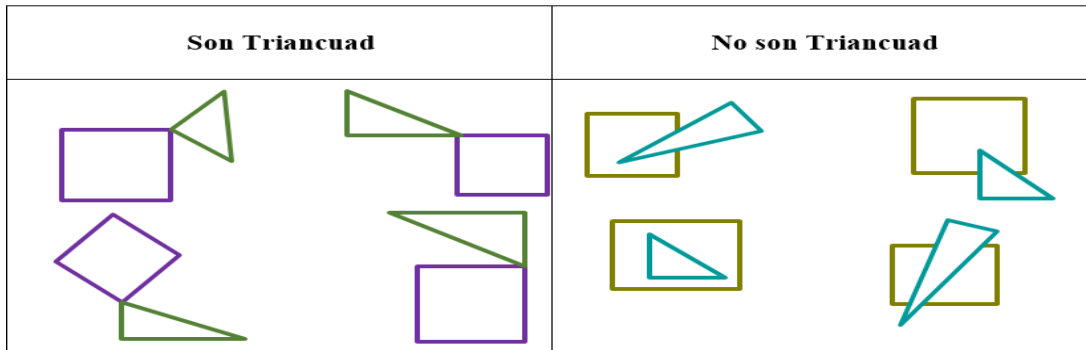


Nivel 2: *Análisis*

Fase: *Integración*

**Tarea 13.** Observa y analiza detenidamente y luego en el Geoplano construye un **TRIANCUAD**. A continuación, defínelo.

**TRIANCUAD**



Un **TRIANCUAD** es:

---



---

**Tarea 14.** Responde la pregunta dada, luego justifica tu respuesta.

A. ¿Un cuadrado es también un rombo? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque:

---



---

B. ¿Un rombo es también un cuadrado? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque:

---



---

C. ¿Un trapecio es también un rectángulo? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque:

---



---

**D.** ¿Un rectángulo es también un cuadrado? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque:

---

---

**E.** ¿Un cuadrado es también un rectángulo? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque:

---

---

**F.** ¿Un rombo es también un rectángulo? **SI** \_\_\_\_\_ **NO** \_\_\_\_\_

Porque:

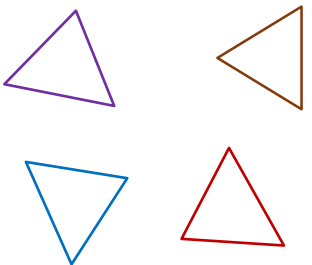
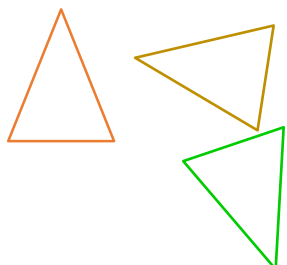
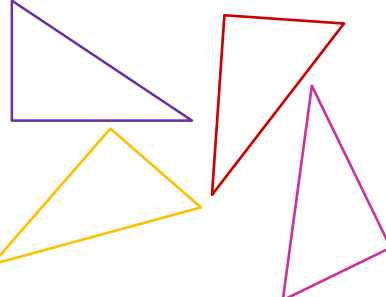
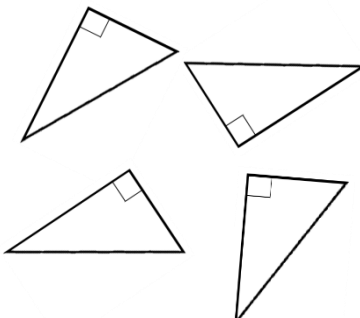
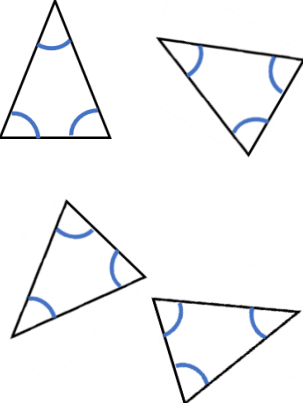
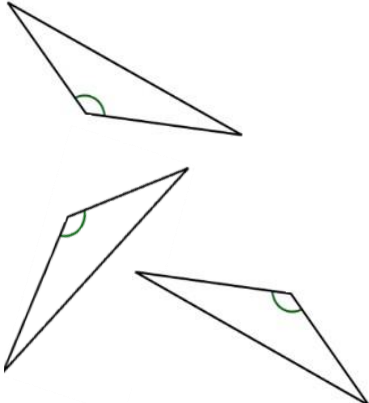
---

---



## ACTIVIDAD # 2

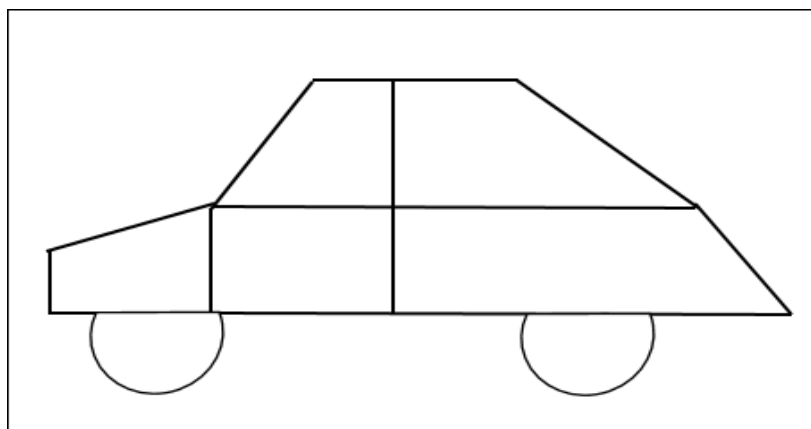
Nivel 1: *Visualización*Fase: *Orientación Dirigida***Tarea 1.** Analiza el siguiente esquema y luego realiza lo siguiente:

<b>CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS SEGÚN LA MEDIDA DE SUS LADOS</b>		
<b>Triángulos equiláteros:</b> tiene tres lados de igual medida.	<b>Triángulos isósceles:</b> tiene dos lados de igual medida.	<b>Triángulos escalenos:</b> sus tres lados son de diferente medida.
		
<b>CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS SEGÚN LAS MEDIDAS DE SUS ÁNGULOS</b>		
El <b>triángulo rectángulo</b> tiene un ángulo recto	El <b>triángulo acutángulo</b> tiene tres ángulos agudos	El <b>triángulo obtusángulo</b> tiene un ángulo obtuso
		

a) Dibuja 2 triángulos equiláteros, 2 triángulos isósceles y 2 triángulos escalenos.

**Tarea 2.** Dibuja 2 triángulos acutángulos, 2 triángulos obtusángulos y 2 triángulos rectángulos.

**Tarea 3.** Construye la siguiente figura en el Geoplano, luego con ligas de color amarillo identifica los ángulos rectos, con ligas de color azul los ángulos agudos y ligas de color verde los ángulos obtusos.



Nivel 1: *Visualización*

Fase: *Orientación Libre*

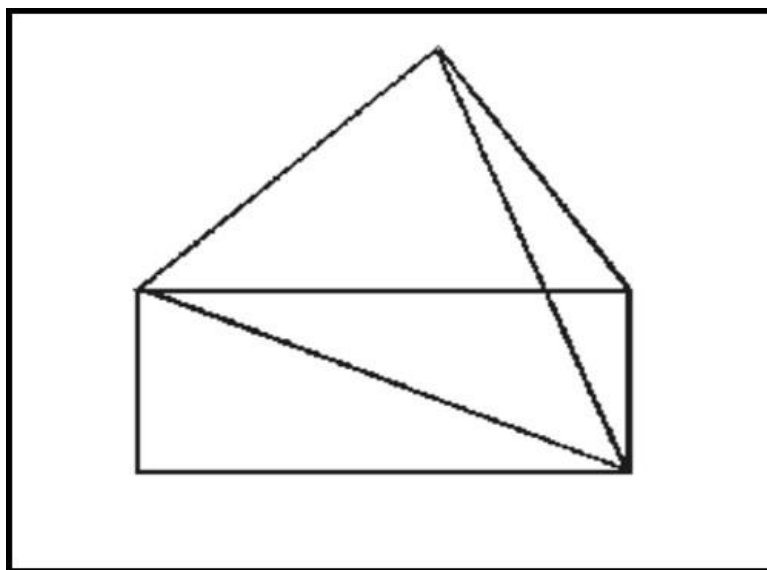
**Tarea 4.** ¿Es posible construir un triángulo isósceles que a su vez sea:

A) Triángulo rectángulo? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_; en caso de responder Sí, dibuja un ejemplo.

B) Triángulo acutángulo? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_; en caso de responder Sí, dibuja un ejemplo.

C) Triángulo obtusángulo? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_; en caso de responder Sí, dibuja un ejemplo.

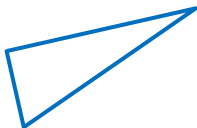

**Tarea 5.** Construye la siguiente figura en el Geoplano, luego identifica con ligas de diferentes colores las clases de triángulos según sus lados o ángulos.



Nivel 1: *Visualización*

Fase: *Integración*

**Tarea 6.** Completa la siguiente tabla de triángulos según sus lados y ángulos.

<i>Figura</i>	<i>según sus lados</i>	<i>según sus ángulos</i>
		
	Equilátero	
		Obtusángulo
	Escaleno	
		

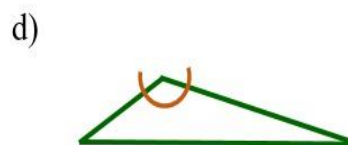
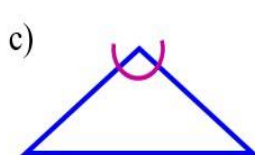
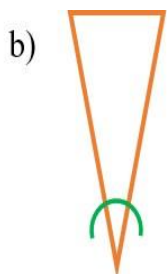
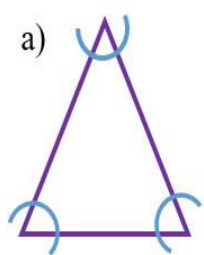
**Tarea 7.** Construye en cada espacio las figuras que corresponden y escribe su definición.

	<i>Figura #1</i>	<i>Figura #2</i>	<i>Definición</i>
<i>Isósceles</i>			
<i>Escaleno</i>			
<i>Equilátero</i>			

Nivel 2: *Análisis*

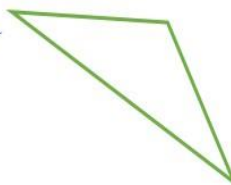
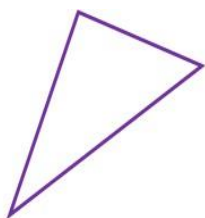
Fase: *Orientación Dirigida*

**Tarea 8.** Observa cada una de las figuras, y teniendo en cuenta cada uno de los ángulos señalados, nombra a qué tipo de triángulo corresponde.



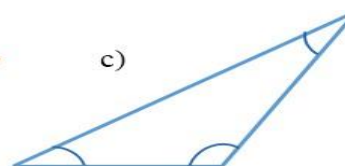
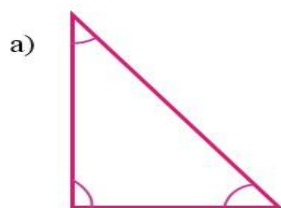
\_\_\_\_\_

**Tarea 9.** Identifica cuál de los siguientes triángulos son equiláteros, isósceles y escalenos.



\_\_\_\_\_

**Tarea 10.** Dados los siguientes triángulos, diga si cada frase es verdadera o falsa según corresponda. Justifica cada respuesta.



- En todo triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a  $180^\circ$ .\_\_\_\_\_

---

---

- Existen triángulos rectángulos que también son triángulos equiláteros.\_\_\_\_\_

---

---

- Existen triángulos rectángulos que también son triángulos isósceles.\_\_\_\_\_


---

---

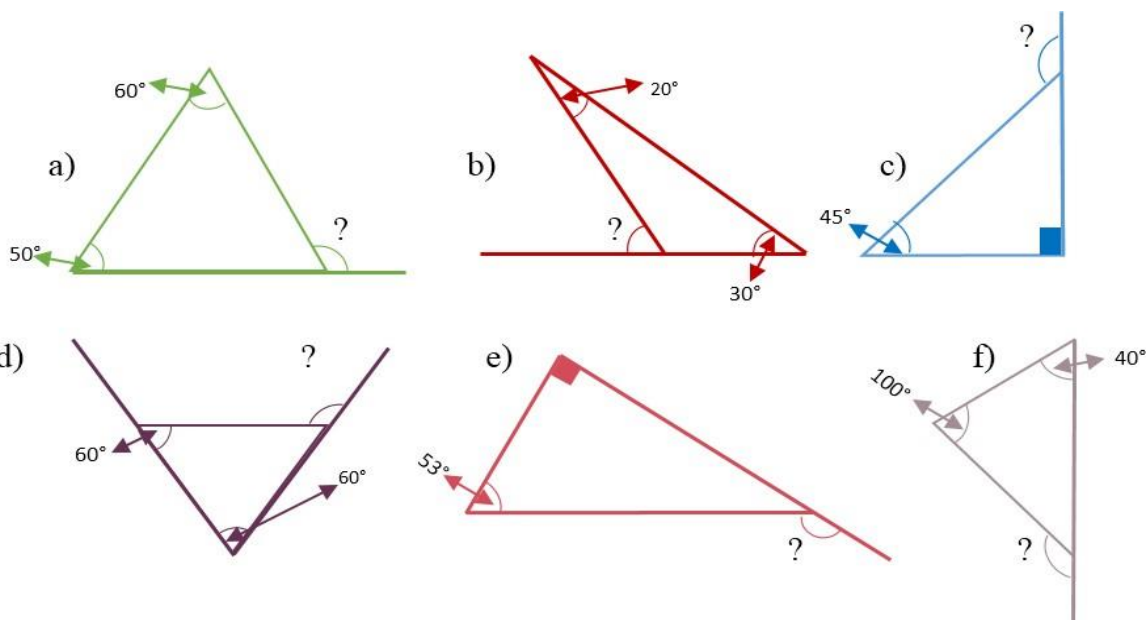
Nivel 2: *Análisis*

Fase: *Orientación Libre*

Dada la definición de ángulo llano y su representación gráfica, realiza la tarea 11.

<p>Definición: un ángulo llano es el espacio comprendido en una intersección entre dos rectas cuya apertura es de <math>180^\circ</math>.</p>	<p>Ejemplo:</p> 
---	--

**Tarea 11.** Halla el valor de “?” en la figura.



**Tarea 12.** Construye en el Geoplano, si es posible, el triángulo indicado; luego dibújalo en el cuadro correspondiente. Si no es posible, explica la razón.

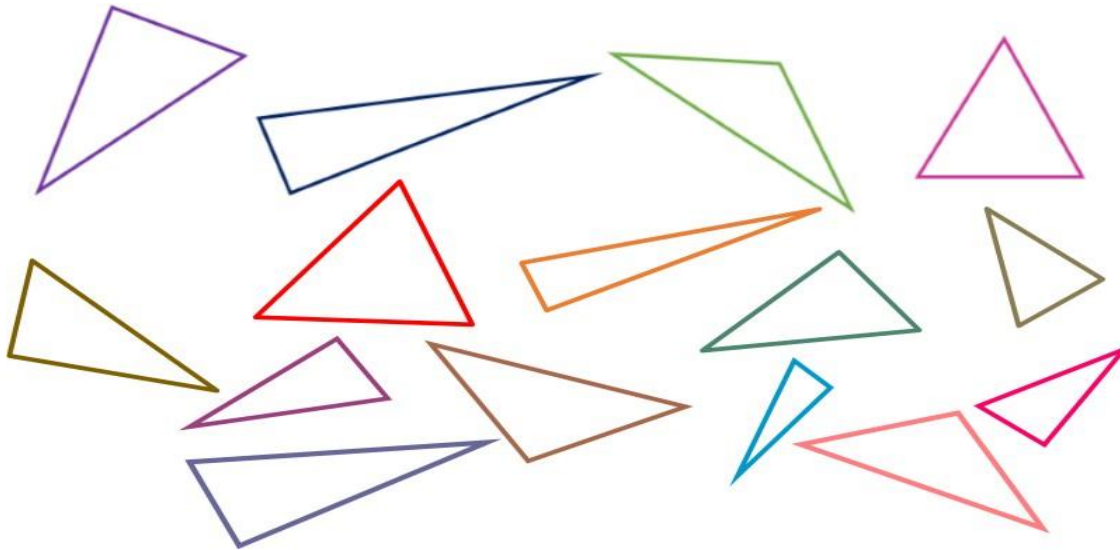
<p><b>a. Triángulo rectángulo e isósceles</b></p>	<p><b>b. Triángulo escaleno y rectángulo</b></p>
<p><b>c. Triángulo escaleno y obtusángulo</b></p>	<p><b>d. Triángulo acutángulo e isósceles</b></p>
<p><b>e. Triángulo acutángulo y equilátero</b></p>	<p><b>f. Triángulo rectángulo y equilátero</b></p>

Nivel 2: *Análisis*  
Fase: *Integración*

**Tarea 13.** Observa detenidamente los siguientes triángulos. Luego coloca dentro de cada uno su letra correspondiente. Puede existir más de una letra dentro de cada triángulo.

**T.E** = Triángulo Equilátero    **T.I** = Triángulo Isósceles    **T.S** = Triángulo Escaleno

**T.R** = Triángulo Rectángulo    **T.A** = Triángulo Acutángulo    **T.O** = Triángulo Obtusángulo



**Tarea 14.** Coloca una **F**, si es falso, o una **V**, si es verdadero. Justifica las respuestas falsas.

A. \_\_\_\_\_ Existen triángulos que pueden tener tres ángulos de igual medida.

---



---

B. \_\_\_\_\_ Existen rectángulos que tienen cuatro ángulos de  $90^\circ$  y todos sus lados de la misma medida.

---



---

C. \_\_\_\_\_ Existen triángulos que pueden ser triángulos rectángulos y a su vez triángulos escalenos.

---



---

D. \_\_\_\_\_ Existen triángulos que pueden tener todos sus ángulos de medidas diferentes.

---



---


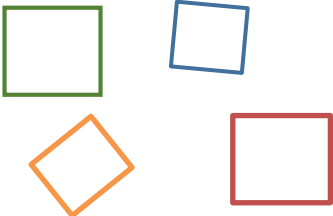
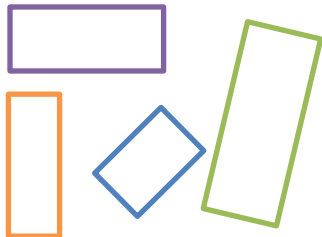
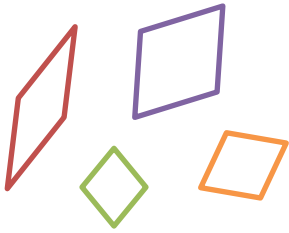
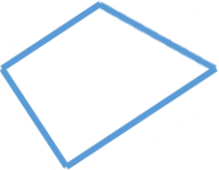
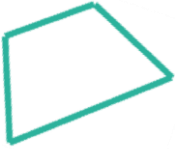
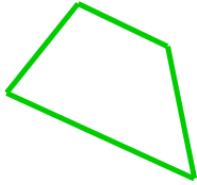


### ACTIVIDAD # 3

Nivel 1: *Visualización*

Fase: *Orientación Dirigida*

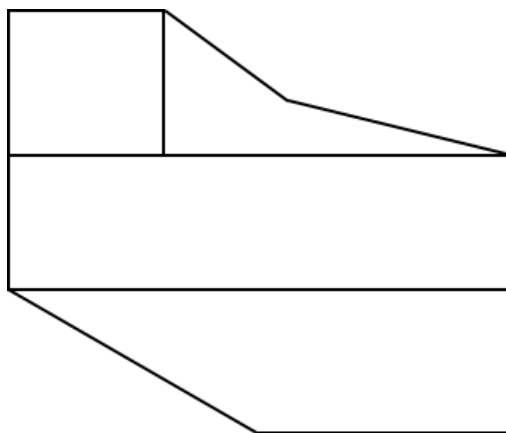
**Tarea 1.** Analiza el siguiente esquema y luego realiza lo siguiente

LOS CUADRILÁTEROS SE CLASIFICAN EN		
<b>CUADRILÁTEROS CÓNCAVOS:</b> cuando al menos una diagonal es exterior.		
		
<b>CUADRILÁTEROS CONVEXOS:</b> cuando sus diagonales son interiores.		
<i>CUADRILÁTEROS SEGÚN SUS LADOS OPUESTOS PARALELOS</i>		
<b>Cuadrado:</b> cuadrilátero cuyos lados son de igual medida y sus ángulos de $90^\circ$	<b>Rectángulo:</b> cuadrilátero con sus ángulos de $90^\circ$	<b>Rombo:</b> cuadrilátero cuyos lados son de igual medida.
		
<i>CUADRILÁTEROS CON SOLAMENTE UN PAR DE LADOS OPUESTOS PARALELOS</i>		
<b>Trapezio rectángulo:</b> Es aquel cuadrilátero que tiene uno de sus ángulos rectos.	<b>Trapezio isósceles:</b> Es aquel cuadrilátero que tiene los lados no paralelos de igual medida.	<b>Trapezio escaleno:</b> Es aquel cuadrilátero que tiene los lados no paralelos de diferente medida.
		

- a) Dibuja 2 cuadriláteros cóncavos y 2 cuadriláteros convexos diferentes a los mostrados en el cuadro anterior.

**Tarea 2.** Dibuja 2 rombos y 3 clases diferentes de trapecio diferentes a los mostrados en el cuadro anterior.

**Tarea 3.** Construye la figura en el Geoplano e identifica con ligas de diferentes colores cuáles cuadriláteros hay, luego escribe sus nombres.



- \_\_\_\_\_.
- \_\_\_\_\_.
- \_\_\_\_\_.
- \_\_\_\_\_.

Nivel 1: *Visualización*

Fase: *Orientación Libre*

**Tarea 4.** Observa detenidamente los ángulos y los lados de los siguientes cuadriláteros y constrúyelos en el Geoplano. Luego, decide si dichos cuadriláteros reciben un nombre particular. Si no recibe un nombre, escribe *NINGUNO*.



**Tarea 5.** Relaciona la *columna A* con la *columna B*, uniendo la figura con su definición correcta (puede existir más de una relación).

*Columna A*

**Cuadrado:** cuadrilátero que tiene sus lados de igual medida y sus cuatro ángulos de  $90^\circ$

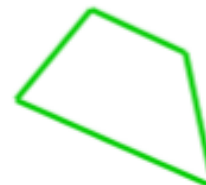
**Trapezio rectángulo:** es aquel trapezio que tiene uno de sus ángulos rectos.

**Rombo:** cuadrilátero que tiene sus lados de igual medida.

**Trapezio escaleno:** es aquel trapezio que tiene los lados no paralelos de diferente medida.

**Trapezio isósceles:** es aquel trapezio que tiene sus lados no paralelos de igual medida.

*Columna B*



Nivel 1: *Visualización*

Fase: *Integración*

**Tarea 6.** Escribe *V* si es verdadero o *F* si es falso, luego justifica las respuestas falsas.

- El trapecio isósceles tiene los lados no paralelos de diferente medida. ( )

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- El cuadrado tiene todos sus lados de igual medida y sus ángulos no tienen  $90^\circ$ . ( )

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- El trapecio escaleno tiene sus lados no paralelos de diferente medida. ( )

Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

- El rectángulo tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos de  $90^\circ$ . ( )

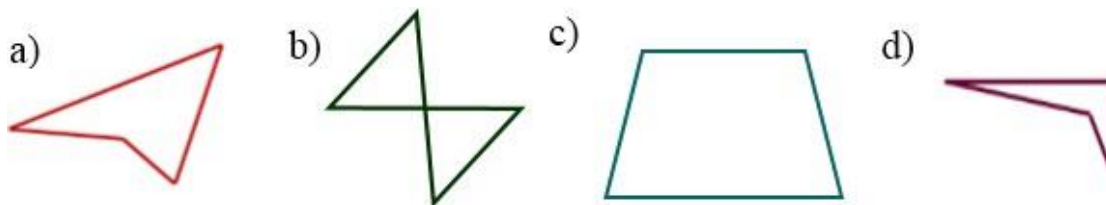
Porque: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Nivel 2: *Análisis*

Fase: *Orientación Dirigida*

**Tarea 7.** Cuáles de los siguientes cuadriláteros no son cóncavos. Justifica tu respuesta.


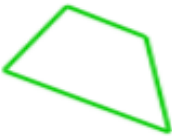




RTA: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**Tarea 8.** Marca con una *X* la opción correcta en relación a los polígonos presentados y justifica tu respuesta.

<i>Figura</i>	<i>Ambos lados opuestos paralelos</i>	<i>Un solo par de lados opuestos paralelos</i>	<i>¿Por qué?</i>
			
			
			
			

**Tarea 9.** Construye un cuadrado, un rombo y un rectángulo, luego traza las diagonales de los polígonos construidos.

a) Teniendo en cuenta los polígonos construidos, responde lo siguiente:

- ¿Qué relación encuentras entre las diagonales?

RTA: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

- ¿Qué relación encuentras teniendo en cuenta las distancias entre la intersección de las diagonales y sus vértices?

RTA: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

b) Construye tres tipos diferentes de trapecios (isósceles, rectángulo y escaleno), luego verifica si las propiedades obtenidas en el literal a) se cumplen para cada uno de estos trapecios.

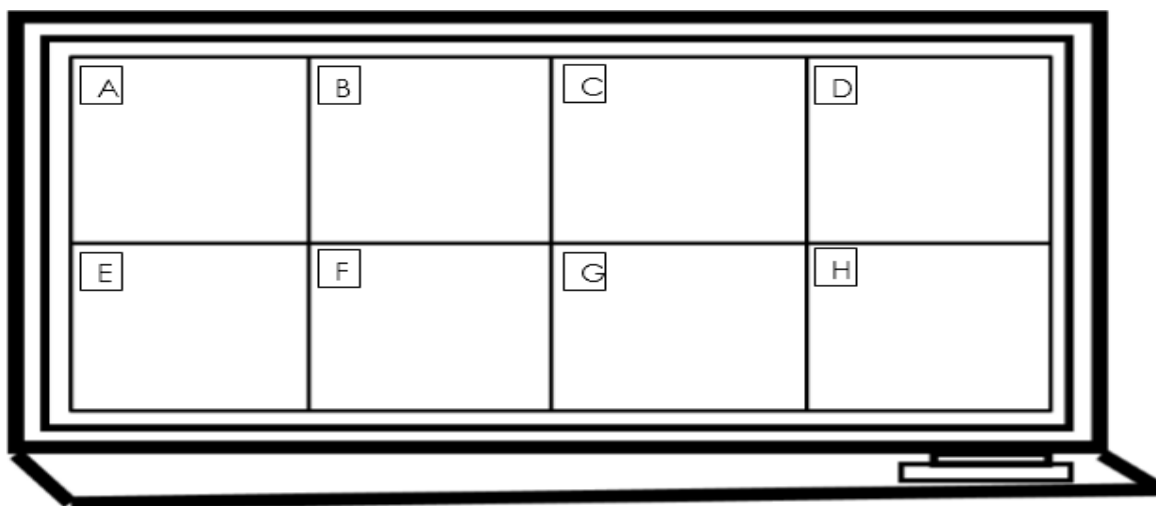
RTA: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Nivel 2: *Análisis*

Fase: *Orientación libre*

**Tarea 10.** Llena el siguiente tablero de 8 casillas con las siguientes instrucciones:

- A. Un cuadrilátero que tenga sus ángulos rectos y sus dos pares de lados paralelos iguales.
- B. Un cuadrilátero convexo.
- C. Un cuadrilátero cuyas diagonales sean perpendiculares.
- D. Un cuadrilátero que tenga la misma distancia entre la intercepción de las diagonales y sus vértices opuestos.
- E. Un trapecio isósceles.
- F. Un cuadrilátero cóncavo.
- G. Un cuadrilátero que tenga sus diagonales perpendiculares y además que las distancias entre su punto de intercepción y los vértices opuestos sean iguales.
- H. Un trapecio cuyas diagonales no sean perpendiculares. ¿En cuáles trapecios se cumple esta propiedad?



**Tarea 11.** Teniendo en cuenta la tarea 10, escribe los nombres de los cuadriláteros que construiste en las 8 casillas del tablero.

- A. \_\_\_\_\_
- B. \_\_\_\_\_
- C. \_\_\_\_\_
- D. \_\_\_\_\_
- E. \_\_\_\_\_
- F. \_\_\_\_\_
- G. \_\_\_\_\_
- H. \_\_\_\_\_

Nivel 2: *Análisis*  
 Fase: *Integración*

**Tarea 12.** En una exposición de obras de Arte se planeó mostrar distintos polígonos. Tu tarea es ayudar a clasificar los tipos de obras que se presentarán, colocando etiquetas sobre ellas.

Debes ubicar el nombre sobre las obras elegidas teniendo en cuenta lo siguiente:

- Los polígonos de la obra de Arte deben ser identificados con una etiqueta en forma de cuadrilátero que debe tener dos pares de lados paralelos.

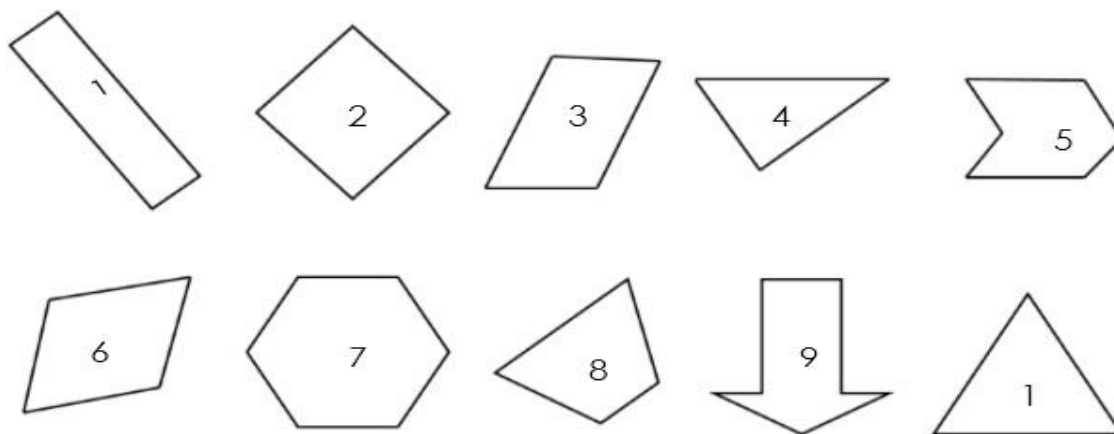
RTA: \_\_\_\_\_

- La etiqueta colocada sobre la obra es un polígono no convexo.

RTA: \_\_\_\_\_

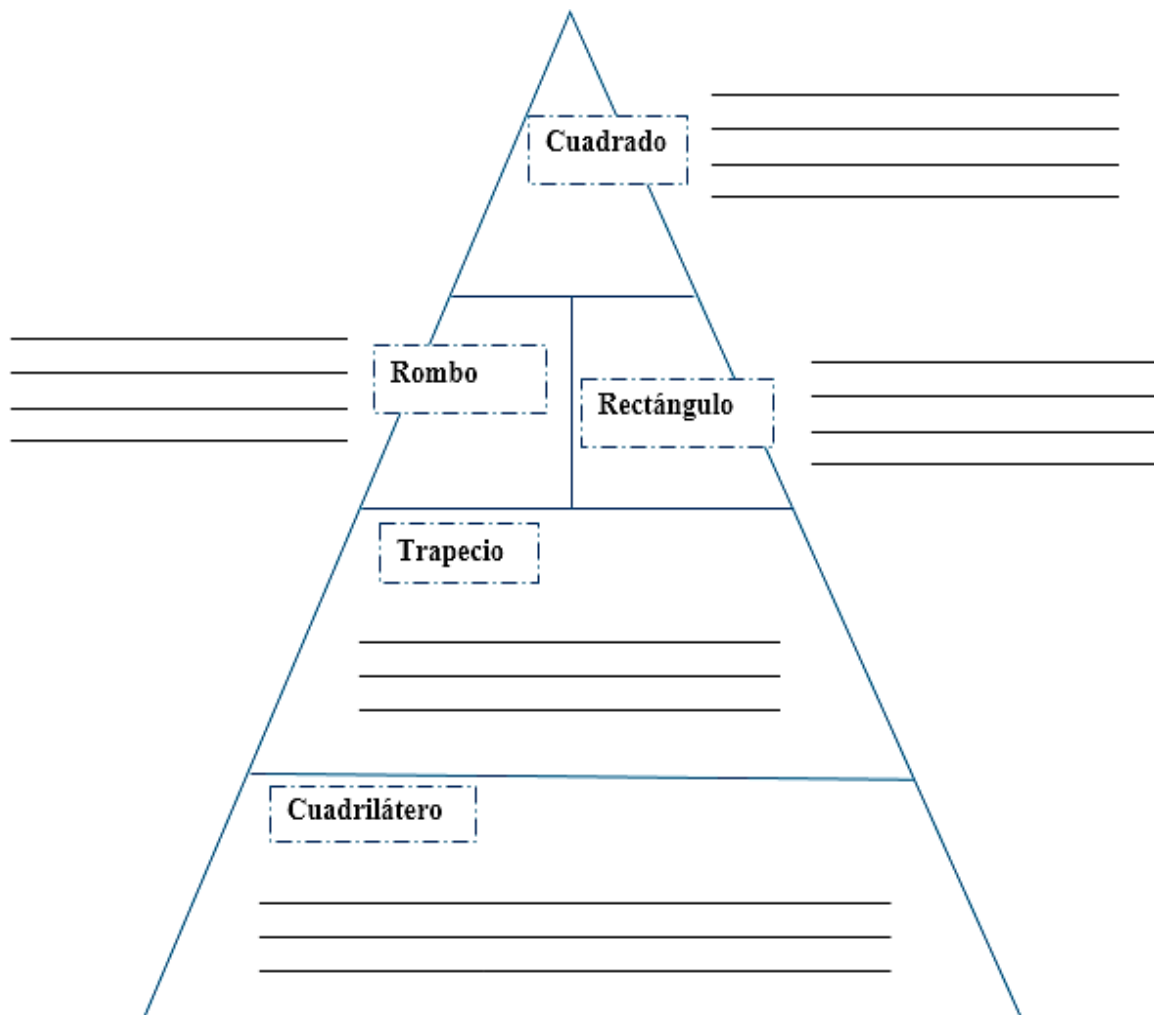
- Las obras deben tener una etiqueta de 4 lados, al menos un par de lados paralelos y dos ángulos obtusos.

RTA: \_\_\_\_\_





**Tarea 13.** En la figura, escribe las propiedades matemáticas de cada elemento.



Anexo 4. Autorización para la realización del proyecto en la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza

Morales, 25 de Abril del 2019.

Doctor(a)  
**Luis Alberto Díaz Quintero**  
Rector

**Asunto:** autorización para realizar investigación en Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza.

Estimado Doctor,

Dentro de la formación de posgrado de la Maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, se considera importante la realización de actividades de investigación en educación. Por lo tanto, es de mi interés que la investigación que estoy realizando titulada "**Fortalecimiento de los procesos de pensamiento geométrico: definición y clasificación a través del Geoplano en estudiantes de 5º grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales Bolívar.**" se pueda desarrollar con los estudiantes de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza. Es importante señalar que esta investigación no conlleva ningún gasto para la institución.

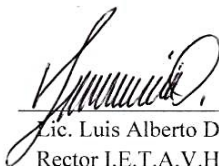
Por lo tanto, al mismo tiempo, solicito su autorización para poder referenciar el nombre de la Institución en el escrito que será el producto de mi trabajo de investigación.

Sin otro particular y esperando una excelente acogida,

Cordialmente,



Maura Alejandra Quintero Campo  
Investigadora principal  
C.c. 1062876222 de Gamarra Cesar



Lic. Luis Alberto Díaz Quintero  
Rector I.E.T.A.V.H

## Anexo 5. Consentimiento informado de padres de familia



INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA  
MORALES BOLÍVAR

**CONSENTIMIENTO INFORMADO A LOS PADRES DE FAMILIA DE LOS  
ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO (A) DE LA INSTITUCION EDUCATIVA  
TECNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA**

Este documento está dirigido a los padres de familia de los estudiantes del grado quinto (A) de la jornada de la mañana de la **Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza**, a quienes se les pide autorización para que los estudiantes pueden participar en la investigación titulada *“Fortalecimiento de los procesos de pensamiento geométrico: definición y clasificación a través del Geoplano en estudiantes de 5° grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales Bolívar”*.

La investigación será realizada por **Maura Alejandra Quintero Campo**, estudiante de Maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, UNAB, y dirigida por el doctor **Élgar Guadron Pinto**.

El objetivo principal de esta investigación es Fortalecer los procesos de pensamiento geométricos: definición y clasificación, a través del Geoplano, en los estudiantes del grado quinto (A) de la IETAVH, mediante una unidad didáctica del concepto de polígono, diseñada con el modelo de Van Hiele.

Esta investigación mantendrá el carácter confidencial de todos los participantes, en el cual ninguno tendrá conocimiento de la información proporcionada por otro participante. Adicionalmente, la información que se obtenga de esta investigación se mantendrá confidencial y anónima, y nadie sino el investigador principal tendrá acceso a ella. Esta información tampoco será compartida ni entregada a nadie. Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

He leído la información proporcionada y consiento voluntariamente que mi hijo (a) participe en esta investigación como participante.

Nombre del Padre de Familia

Melis Pallares Peña

Firma del Padre de Familia

Melis Pallares

Nombre de mi hijo (a) participante

Isabella Orellano Pallares

Fecha

9 mayo 2019



INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA  
MORALES BOLÍVAR

**CONSENTIMIENTO INFORMADO A LOS PADRES DE FAMILIA DE LOS  
ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO (A) DE LA INSTITUCION EDUCATIVA  
TECNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA**

Este documento está dirigido a los padres de familia de los estudiantes del grado quinto (A) de la jornada de la mañana de la **Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza**, a quienes se les pide autorización para que los estudiantes pueden participar en la investigación titulada ***“Fortalecimiento de los procesos de pensamiento geométrico: definición y clasificación a través del Geoplano en estudiantes de 5° grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales Bolívar”***.

La investigación será realizada por **Maura Alejandra Quintero Campo**, estudiante de Maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, UNAB, y dirigida por el doctor **Élgar Guadron Pinto**.

El objetivo principal de esta investigación es Fortalecer los procesos de pensamiento geométricos: definición y clasificación, a través del Geoplano, en los estudiantes del grado quinto (A) de la IETAVH, mediante una unidad didáctica del concepto de polígono, diseñada con el modelo de Van Hiele.

Esta investigación mantendrá el carácter confidencial de todos los participantes, en el cual ninguno tendrá conocimiento de la información proporcionada por otro participante. Adicionalmente, la información que se obtenga de esta investigación se mantendrá confidencial y anónima, y nadie sino el investigador principal tendrá acceso a ella. Esta información tampoco será compartida ni entregada a nadie. Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

He leído la información proporcionada y consiento voluntariamente que mi hijo (a) participe en esta investigación como participante.

Nombre del Padre de Familia

Aura M. Pallares N.

Firma del Padre de Familia

Aura Pallares N.

Nombre de mi hijo (a) participante

Saura Cristina Franco P.

Fecha

9 Mayo 2019.



INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA  
MORALES BOLÍVAR

**CONSENTIMIENTO INFORMADO A LOS PADRES DE FAMILIA DE LOS  
ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO (A) DE LA INSTITUCION EDUCATIVA  
TÉCNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA**

Este documento está dirigido a los padres de familia de los estudiantes del grado quinto (A) de la jornada de la mañana de la **Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza**, a quienes se les pide autorización para que los estudiantes pueden participar en la investigación titulada *“Fortalecimiento de los procesos de pensamiento geométrico: definición y clasificación a través del Geoplano en estudiantes de 5° grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales Bolívar”*.

La investigación será realizada por **Maura Alejandra Quintero Campo**, estudiante de Maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, UNAB, y dirigida por el doctor **Élgar Guadron Pinto**.

El objetivo principal de esta investigación es Fortalecer los procesos de pensamiento geométricos: definición y clasificación, a través del Geoplano, en los estudiantes del grado quinto (A) de la IETAVH, mediante una unidad didáctica del concepto de polígono, diseñada con el modelo de Van Hiele.

Esta investigación mantendrá el carácter confidencial de todos los participantes, en el cual ninguno tendrá conocimiento de la información proporcionada por otro participante. Adicionalmente, la información que se obtenga de esta investigación se mantendrá confidencial y anónima, y nadie sino el investigador principal tendrá acceso a ella. Esta información tampoco será compartida ni entregada a nadie. Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

He leído la información proporcionada y consiento voluntariamente que mi hijo (a) participe en esta investigación como participante.

**Nombre del Padre de Familia**

Cindy P. Pacheco

**Firma del Padre de Familia**

[Firma manuscrita]

**Nombre de mi hijo (a) participante**

Andrés Felipe Salazar P.

**Fecha**

9 de mayo 2015



INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA  
MORALES BOLÍVAR

**CONSENTIMIENTO INFORMADO A LOS PADRES DE FAMILIA DE LOS  
ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO (A) DE LA INSTITUCION EDUCATIVA  
TECNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA**

Este documento está dirigido a los padres de familia de los estudiantes del grado quinto (A) de la jornada de la mañana de la **Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza**, a quienes se les pide autorización para que los estudiantes pueden participar en la investigación titulada *“Fortalecimiento de los procesos de pensamiento geométrico: definición y clasificación a través del Geoplano en estudiantes de 5° grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales Bolívar”*.

La investigación será realizada por **Maura Alejandra Quintero Campo**, estudiante de Maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, UNAB, y dirigida por el doctor **Élgar Guadron Pinto**.

El objetivo principal de esta investigación es Fortalecer los procesos de pensamiento geométricos: definición y clasificación, a través del Geoplano, en los estudiantes del grado quinto (A) de la IETAVH, mediante una unidad didáctica del concepto de polígono, diseñada con el modelo de Van Hiele.

Esta investigación mantendrá el carácter confidencial de todos los participantes, en el cual ninguno tendrá conocimiento de la información proporcionada por otro participante. Adicionalmente, la información que se obtenga de esta investigación se mantendrá confidencial y anónima, y nadie sino el investigador principal tendrá acceso a ella. Esta información tampoco será compartida ni entregada a nadie. Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

He leído la información proporcionada y consiento voluntariamente que mi hijo (a) participe en esta investigación como participante.

Nombre del Padre de Familia

Trinidad Estor L.

Firma del Padre de Familia

T. E. L.

Nombre de mi hijo (a) participante

Cristian Danilo P.E.

Fecha

9 de Mayo 2015



INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA  
MORALES BOLÍVAR

**CONSENTIMIENTO INFORMADO A LOS PADRES DE FAMILIA DE LOS  
ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO (A) DE LA INSTITUCION EDUCATIVA  
TECNICA AGROPECUARIA VICENTE HONDARZA**

Este documento está dirigido a los padres de familia de los estudiantes del grado quinto (A) de la jornada de la mañana de la **Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza**, a quienes se les pide autorización para que los estudiantes pueden participar en la investigación titulada *“Fortalecimiento de los procesos de pensamiento geométrico: definición y clasificación a través del Geoplano en estudiantes de 5° grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales Bolívar”*.

La investigación será realizada por **Maura Alejandra Quintero Campo**, estudiante de Maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, UNAB, y dirigida por el doctor **Élgar Guadron Pinto**.

El objetivo principal de esta investigación es Fortalecer los procesos de pensamiento geométricos: definición y clasificación, a través del Geoplano, en los estudiantes del grado quinto (A) de la IETAVH, mediante una unidad didáctica del concepto de polígono, diseñada con el modelo de Van Hiele.

Esta investigación mantendrá el carácter confidencial de todos los participantes, en el cual ninguno tendrá conocimiento de la información proporcionada por otro participante. Adicionalmente, la información que se obtenga de esta investigación se mantendrá confidencial y anónima, y nadie sino el investigador principal tendrá acceso a ella. Esta información tampoco será compartida ni entregada a nadie. Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

He leído la información proporcionada y consiento voluntariamente que mi hijo (a) participe en esta investigación como participante.

Nombre del Padre de Familia

Gisella Hernández Franco

Firma del Padre de Familia

[Firma manuscrita]

Nombre de mi hijo (a) participante

Paula G. Pérez Hernández

Fecha

9 Mayo 2019.

## Anexo 6. Cartas de validación por expertos.

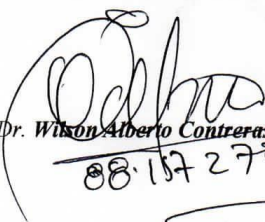


Universidad de Pamplona  
Pamplona - Norte de Santander - Colombia  
Facultad de Ciencias Básicas - Departamento de Matemáticas

**COMUNICACIÓN**

**WILSON ALBERTO CONTRERAS ESPINOSA**, con cédula de ciudadanía 88157279, miembro del **Grupo de Investigación EDUMATEST de la Universidad de Pamplona**, me permito comunicar que como experto en el área realicé la validación de la Unidad Didáctica diseñada para la tesis "*Fortalecimiento de los Procesos Matemáticos de Pensamiento: Definición y Clasificación en Estudiantes de 5º Grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales-Bolívar*".

En Pamplona (N.S.) a los 30 días del mes de noviembre de 2019.

  
Prof. Dr. **Wilson Alberto Contreras Espinosa**  
88.157 279





Universidad de Pamplona  
Pamplona - Norte de Santander - Colombia  
Facultad de Ciencias Básicas - Departamento de Matemáticas

### A QUIEN PUEDA INTERESAR:

Yo, *Arnaldo De La Barrera Correa*, identificado con cédula de ciudadanía 8708294, miembro del *Grupo de Investigación EDUMATEST de la Universidad de Pamplona*, manifiesto que:

- 1) Realicé como experto en el área la validación de la unidad didáctica diseñada para el estudio titulado "*Fortalecimiento de los Procesos Matemáticos de Pensamiento: Definición y Clasificación en Estudiantes de 5° Grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales-Bolívar*".
- 2) Participé, en la terna como experto, en el análisis de la información recolectada para el estudio titulado "*Fortalecimiento de los Procesos Matemáticos de Pensamiento: Definición y Clasificación en Estudiantes de 5° Grado de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria Vicente Hondarza de Morales-Bolívar*".

Se firma en Pamplona (N.S.) a los 30 días del mes de enero de 2020.

*Arnaldo de la B.*  
Prof. Dr. Arnaldo De La Barrera Correa

Anexo 7. Evidencias: fotos.

