APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO LA ESTRATEGIA DE MODELACIÓN A TRAVÉS DEL USO DE *APPLETS*

María del Rosario Arenas, Lorenza Illanes, Ruth Rodríguez
Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey. (México)
rosarioarenas800@gmail.com, lillanes@itesm.mx, ruthrdz@itesm.mx
Modelación Matemáticas, Básico
Palabras clave: Pitágoras, modelación, tecnología, Matemática Educativa.
Key words: Pythagoras, modeling, technology, educational mathematics.
Resumen: Este trabajo está enfocado en el aprendizaje del teorema de Pitágoras utilizando la modelación matemática como estrategia de enseñanza; utilizando tres secciones de clase de tres horas cada una, en el periodo académico del mes de febrero de 2013 con alumnos de segundo de secundaria. El objeto del estudio es determinar si la modelación matemática como estrategia de enseñanza del Teorema de Pitágoras con el uso de *applets* geométricos mejora el aprendizaje en los alumnos de segundo de secundaria, dado quecrea un ambiente de aprendizaje favorable en el aula, evidenciando la comprensión en su forma más rigurosa del teorema de Pitágoras y la aplicabilidad que tiene en la cotidianidad, logrando contextualizar el conocimiento mediante situaciones reales, situando al alumno en relación directa con sus preferencias y el mundo que lo rodea, despertando el interés en las nociones básicas de la Geometría, poniendo en evidencia sus aplicaciones en el mundo contemporáneo.

Abstract: This work was focused on learning the Pythagorean theorem using the mathematical modelling as a teaching strategy; using three sections class of three hours each, in the academic period of the month of February 2013 high school students from the freshman year. The object of the study was determined if mathematical modeling and teaching strategy of the Pythagorean theorem with the use of geometric applets there were learning improves in students of a freshman high school year, since it creates a favorable learning environment in the classroom, demonstrating understanding in its stricter form of the Pythagorean theorem and applicability that has on everyday life achieving contextualized knowledge through real situations, placing the student in direct relation to their preferences and the world that surrounds him, arousing interest in the basics of geometry, highlighting their applications in the contemporary world.

Introducción: En el presente estudio se desarrolla una investigación que tiene como objetivo investigar, si la modelación matemática mejora el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, en los alumnos de una institución pública de zona rural de Colombia. Nuestro interés particular es incrementar la capacidad de reflexión, de conceptualización y de comprensión en los alumnos sobre problemas geométricos al tomar estos un papel más activo e independiente en su proceso de aprendizaje (Hitt, 1994). En un primer momento se presenta un resumen de los aspectos teóricos sobre el teorema de Pitágoras, la modelación matemática y la tecnología; en un segundo momento se tiene la metodología, donde se hace una descripción de la manera como se llevó a cabo la investigación; en un tercer momento tenemos el análisis de resultados, donde se ponen de manifiesto todos los hallazgos surgidos en todo el proceso de la investigación y por último se encuentran las conclusiones a las cuales se llegaron después de efectuado el estudio.

Marco teórico: Esta investigación está enmarcada en tres temas: El Teorema de Pitágoras, la modelación matemática y la tecnología, con respecto a este último, se tiene en cuenta uno de sus tres grupos, los *applets* (Escudero, 1995).

El teorema de Pitágoras, es el legado más representativo de la tradición pitagórica, perteneciente a la base cultural de la humanidad. (González, 2008). Ha sido conocido por las primeras civilizaciones de la humanidad (Mesopotamia, Egipto, India, China), desde un punto de vista práctico. Allman (1976) atribuye su descubrimiento a los egipcios, en lo concerniente a la Geometría de áreas, y al método usado en la disección de las figuras, en el cual los egipcios eran famosos.

El Teorema de Pitágoras, es una relación matemática, de auténtica complejidad, que el estudiante aprende en la formación básica y que brinda, un considerable valor práctico, teórico y didáctico, tanto en su versión aritmético algebraica $a^2 + b^2 + c^2$; como en su versión geométrica (Martínez, 2000).

Burton (1991) sostiene que un diagrama en la Aritmética Clásica de China representa la más antigua demostración conocida del Teorema de Pitágoras, admirada por su simple elegancia, y más tarde expuesta en el Bija Ganita (Strachey, 1813) por el matemático hindú Bhascara Acharya (Strachey, 1813), el punto de partida es una demostración (ver figura 1), la cual reestructurada conduce al teorema de Pitágoras, el autor manifiesta la expresión, sin añadir otra palabra de explicación (Burton, 1991).

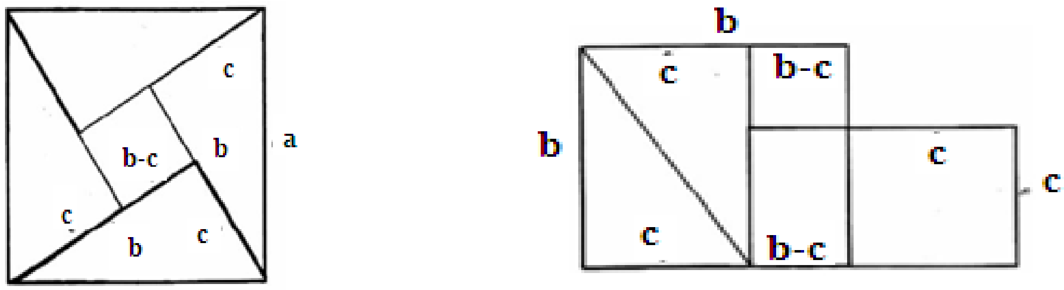

Figura 1. Punto de partida (izquierda) y reestructuración (derecha) de una demostración. Fuente: Burton, D. M. (1991). *The History of mathematics. An introduction*. Dubuque, U. S. A.: Wm.C. BrownPublishers.

La modelación es un proceso que tiene su génesis en la conceptualización de una situación real, utilizando las matemáticas como herramienta de modelación para otras ciencias; en el aula, los alumnos construyeron sus conocimientos, favoreciendo el desarrollo de una matemática funcional en el sistema educativo. La modelación es un puente entre las matemáticas y las experiencias de la vida real; por lo cual es un aprendizaje que contiene un grande apoyo cognitivo. La base de este estudio es una reducción del modelo, de Rodríguez (2007, 2010) a seis etapas de las ocho que consta el modelo quitando Modelo Físico y Resultado Físico.

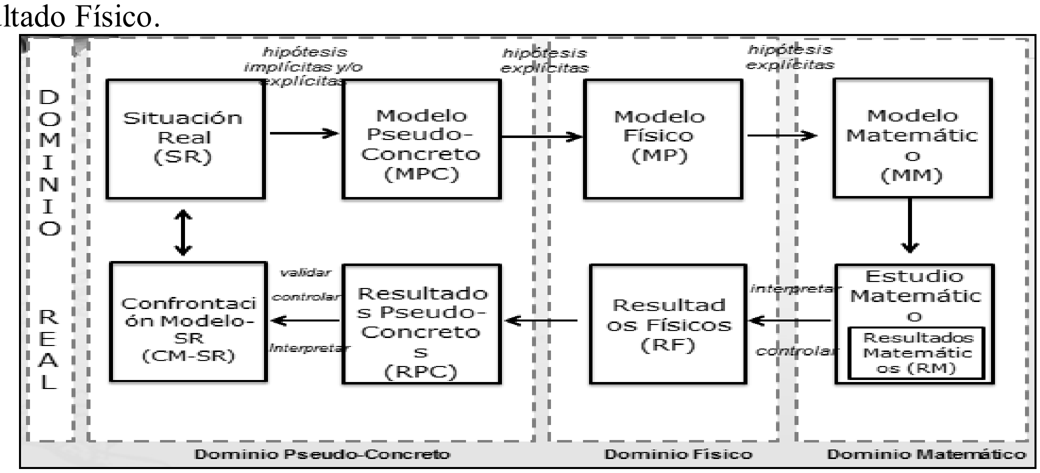

Figura 2. Modelo Matemático. Fuente: Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELIME), 13 (4-I), 191-210.

La tecnología es un actor esencial en el aula para trabajar con modelos matemáticos (Jacobini, 2007). Este estudio se centra concretamente en el uso del *applets* (Bishop, 1994) como elementos de las páginas *webs* (Bemers, 1989); su valor educativo es desarrollar un aprendizaje activo (Borromeo, 2006). Los *applets* (Bohigas, Jaén y Novell, 2003), secundan al alumno en el proceso de visualizar las figuras geométricas resultantes de la demostración de este teorema, a través de la modelación, de manera vivencial con el uso de la tecnología (Rodríguez, Quiroz e Illanes, 2013), haciendo participe al alumno se su propio aprendizaje, para darle forma a sus creencias y actitudes en la importancia del área para sí mismo y su comunidad.

Metodología: El estudio la Modelación Matemática (Rodríguez, 2010) como estrategia de enseñanza del teorema de Pitágoras mediante el uso de *applets*, se fundamenta en una investigación cualitativa, la cual se apoyó en el estudio de casos (Hernández, Fernández, y Baptista, 1994), como metodología de investigación, dado que la muestra es pequeña.

Para lograr el objetivo propuesto en la Modelación Matemática el teorema de Pitágoras, se emplearon tres actividades que comprenden seis de las ocho etapas de la Modelación Matemática (Rodríguez, 2010). Así mismo para la recolección de los datos se utilizó la observación participante e intencionada, dado que el investigador fue como otro miembro del grupo donde cumplió con el rol de facilitador durante todo el proceso, los datos observados se registraron en la bitácora. También se contó con un observador de clase para el grupo en general, empleando 10 aspectos relacionados con el comportamiento del grupo y del investigador, en el curso de la experimentación.

La prueba piloto por su parte se conformó por dos pruebas planteadas a través de dos problemas, uno el problema dentro de un *pretest*, cuyo objetivo era hacer un diagnóstico sobre los conocimientos previos que el alumno posee sobre el tema del teorema de Pitágoras. El segundo problema fue dentro del *posttest*, su fin consistió en verificar los conocimientos adquiridos del teorema de Pitágoras. La experimentación se aplicó en tres secciones, cada una de ellas con una intensidad de tres horas.

Análisis de resultados: En la etapa inicial con la actividad 1 (ver figura 3), los alumnos presentan el más bajo rendimiento, demostrando dificultad para leer e interpretar, la situación planteada. El mejor rendimiento fue la del A5, en la actividad 1 la totalidad de los alumnos expresan interés por la geometría frente a su aplicación.

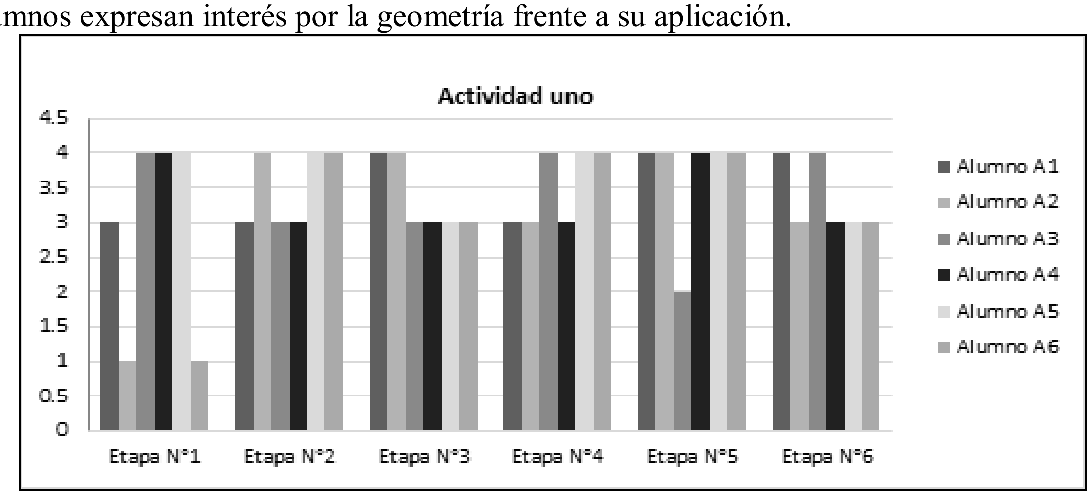

Figura 3. Actividad 1.

Se continúa con la problemática de la etapa 1 en la actividad 2 (ver figura 4); el mejor rendimiento que se estuvo en la etapa 2, en donde se demostró especial interés en la construcción del gráfico de la situación geométrica y se identificó sus partes.

En la actividad 3 (ver figura 5), se pone de manifiesto la superación de los logros, en especial en la etapa 1, donde se presentó mayor dificultad. Las etapas de mejor rendimiento fueron la cinco y la seis, en su mayoría los alumnos alcanzan a identificar los datos necesarios para darle solución a la situación matemática de triángulos rectángulos, aplicando el teorema de Pitágoras.

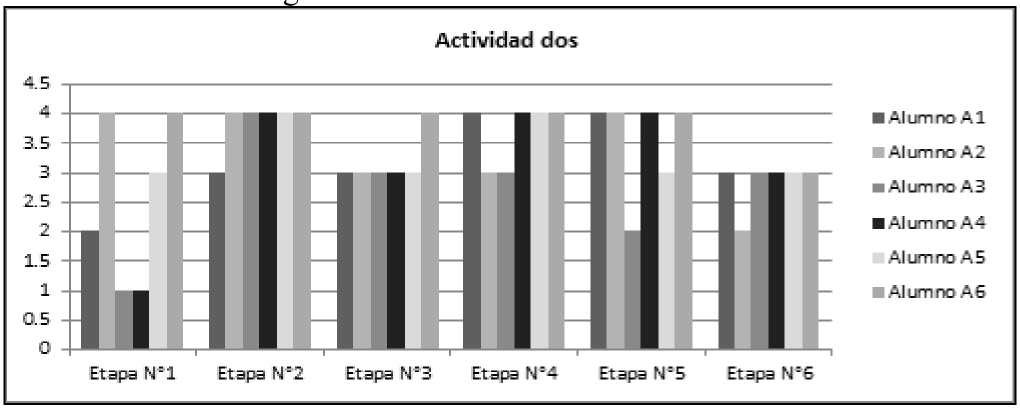

Figura 4. Actividad 2

En las tres actividades se refleja la habilidad de los alumnos en el uso de la tecnología, en la forma como manipulan los *applets* geométricos; además se observó que los alumnos no son hábiles cuando se le solicita escribir un procedimiento, pero si en el momento de aplicarlo, obteniendo muy poco progreso en este aspecto durante todo el proceso.

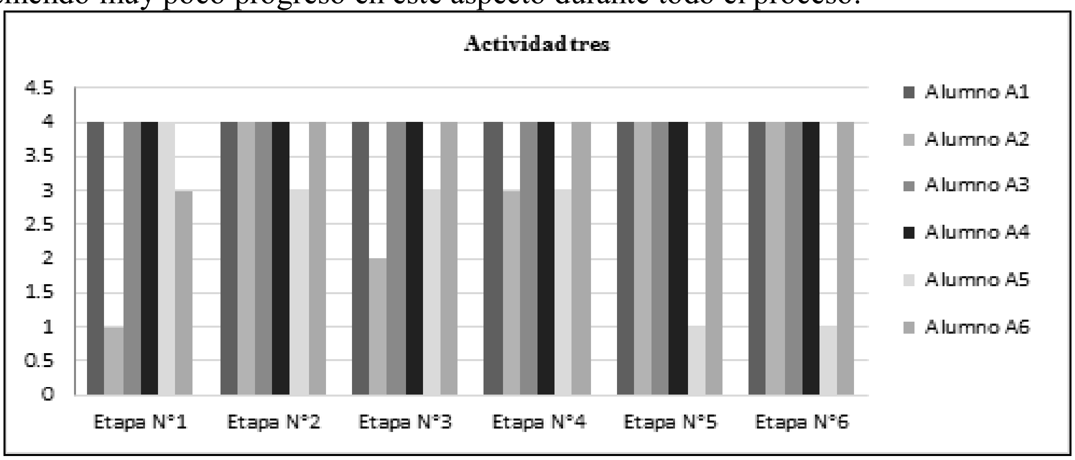

Figura 5. Actividad 3.

En la figura 6. Se hace una comparación de los rendimientos de los seis alumnos en los problemas pretest (diagnóstico) y postest (verificar los conocimientos). De acuerdo a las seis etapas de Modelación Matemática (Rodríguez, 2010).

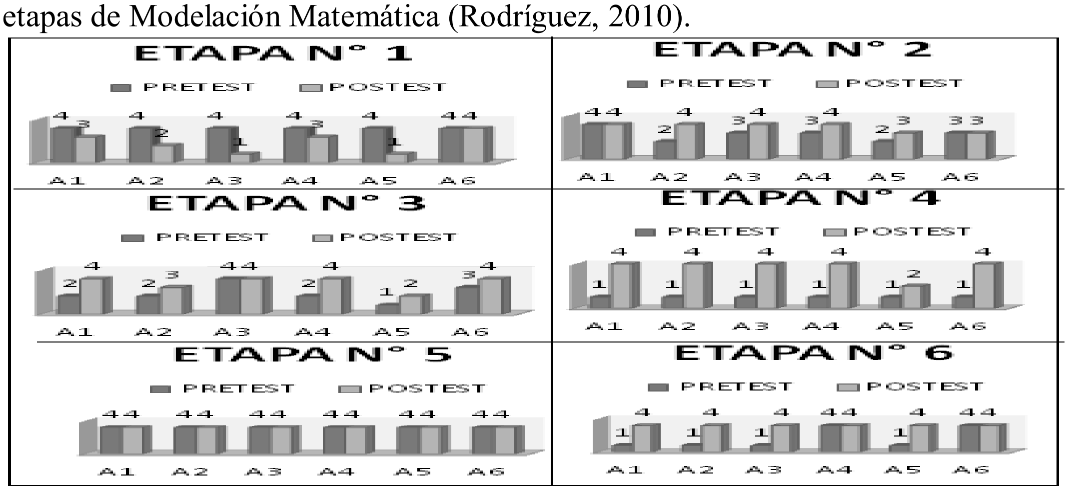

Figura 6. Análisis de los Problemas

En el gráfico (ver Figura 6), se contempla que en el problema *pre-test*, los alumnos presentaron un rendimiento muy bajo, pero en el *post-test*, aunque en la etapa uno obtiene el resultado más bajo, por la dificultad de comprender los datos de una situación cuando están expuestos de una forma implícita, en las etapas N°5 y N°6 subió notablemente su rendimiento siendo estas las etapas con un mejor resultado.

Número	***Concepto***
1	Dominio de los conocimientos previos
2	Comprenden instrucciones y utiliza apropiadamente los materiales
3	Motivación con los materiales y medios utilizados
4	Habilidad para trabajar en grupo
5	Receptividad para interactuar con los materiales, medios y el profesor
6	Trabajo autónomamente
7	Aprovechamiento de los materiales y medios utilizados
8	Expone estrategias para llegar a la solución de la tarea.
9	El docente explica los algoritmos convencionales
10	Se logró que por lo menos el 90% de los alumnos asimilan el contenido

Figura 7. Aspectos de la hoja de observador de clase

En la hoja del observador de clase (ver figura 7), se hizo una síntesis de las observaciones reseñadas en la bitácora, en los gráficos (ver figuras 8, 9 ,10) se visualizan la explicación de parte del docente sobre los algoritmos, aprovechamiento y receptividad para involucrarse con el material, además de la motivación que los alumnos sienten al interactuar con este, obteniendo su mayor puntaje en las tres actividades. También se ve que el trabajo autónomo fue uno de los aspectos que presento mayor progreso.

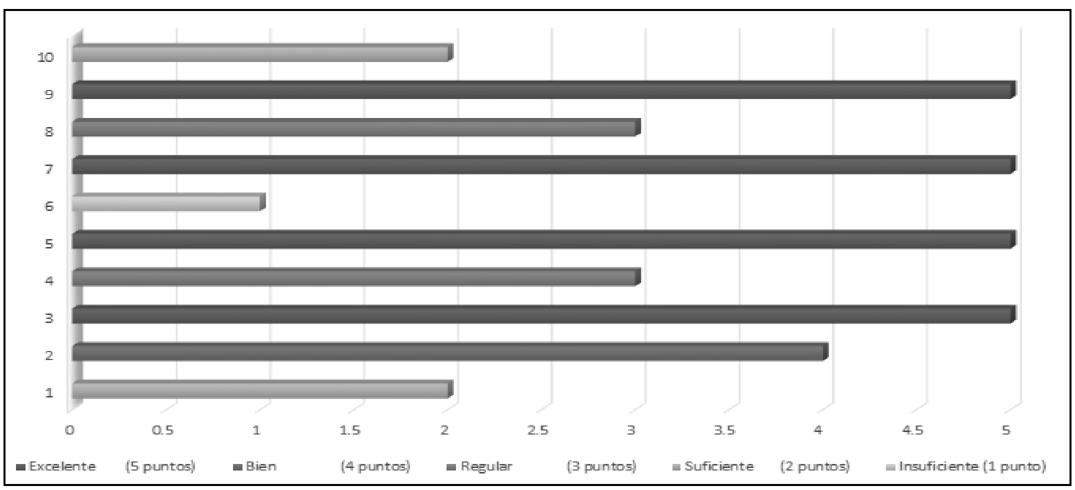

Figura 8. Hoja de observador de clase. Actividad 1.

Conclusiones: En la investigación se constató que la modelación (Rodríguez, 2007, 2010) además de ser un puente entre las matemáticas, y las experiencias de la vida cotidiana de los alumnos, proporciona un ambiente de aprendizaje provechoso en el aula.

Los alumnos desde el inicio de la experimentación manifestaron dominio y agrado al manipular los *applets* geométricos, así como en hacer las construcciones de las situaciones geométricas; aspecto que facilitó su desempeño en todas las actividades planteadas en la experimentación. Así mismo se percibió una gran habilidad en el momento de interactuar con la tecnología de *applets* geométricos; creando un ambiente de aprendizaje favorable en el aula. El estudio presenta evidencia de que los alumnos comprendieron en su forma más rigurosa el Teorema de Pitágoras y el uso que éste tiene en su cotidianidad, siendo una forma de lograr contextualizar el conocimiento de situaciones sobre problema reales representados mediante modelos matemáticos, que se manifiestan cuando surge la necesidad de responder a preguntas específicas en situaciones reales.

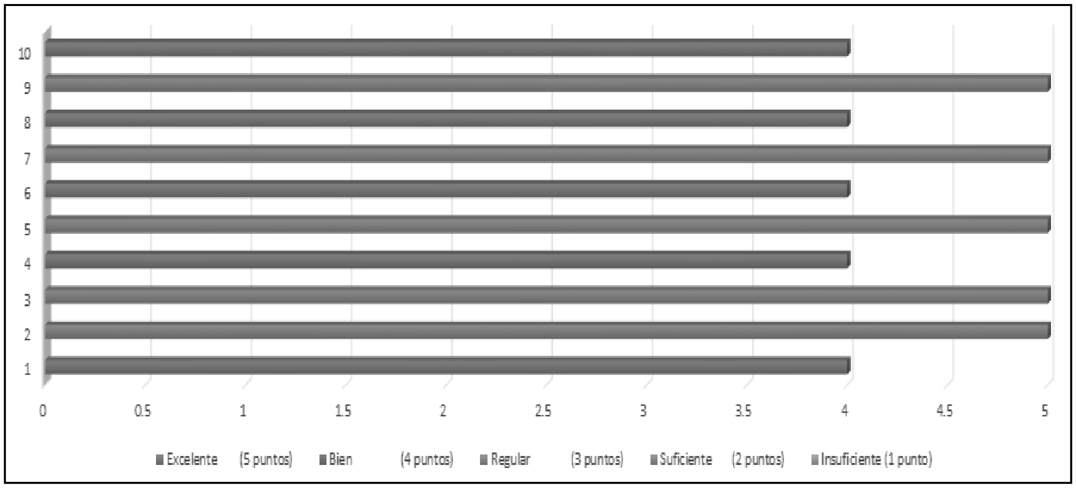

Figura 9. Hoja de observador de clase. Actividad 2

Si se desea replicar o extender este estudio es importante ver a la enseñanza de la Geometría como una resolución de problemas dinámicos más que estáticos propiciando enriquecer los conceptos y las imágenes conceptuales de los objetos geométricos que estudian. También es importante aplicar la modelación como estrategia de enseñanza en el aula de matemáticas, dado que tiende a desarrollar en los alumnos diferentes habilidades: de visualización, de dibujo, de comunicación, de razonamiento y de aplicación.

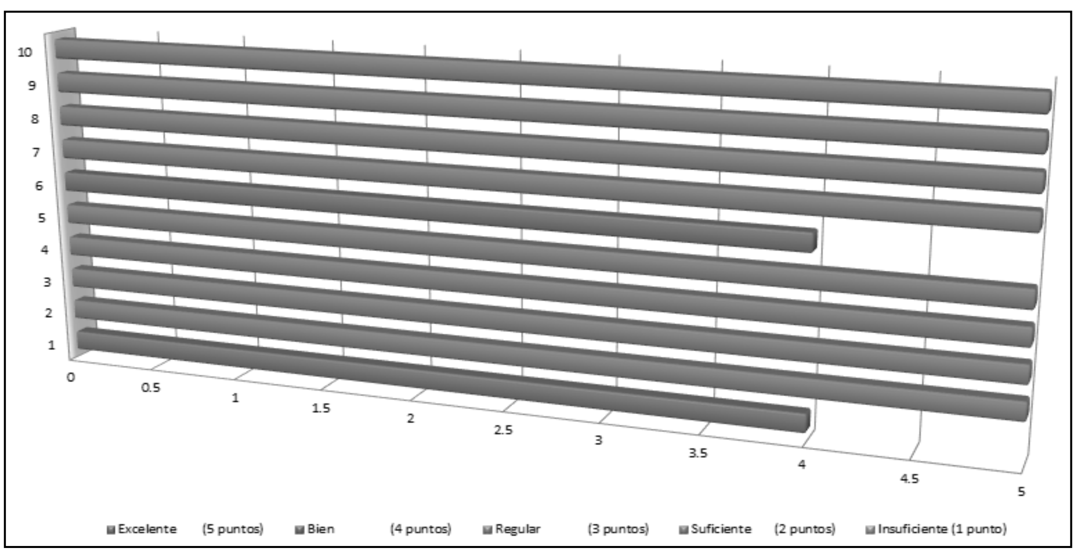

Figura 10. Hoja de observador de clase. Actividad 3.

En este escrito se estableció que la modelación matemática (Rodríguez, 2007, 2010) mejora el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, en los alumnos de una institución pública de zona rural de Colombia.

Referencias bibliográficas.

Allman, G. J. (1976). *Greek Geometry from Thales to Euclid*. New York: Arno Press.

Bemers, L. (1989). Information Management: A Proposal. *Information Management: A Proposal*. Recuperado el 30 de Enero de 2010 de http://cds.cern.ch/record/1405411/files/ARCH-WWW-4-010.pdf

Bishop, A. (1994). Implicaciones didácticas de la investigación matemática. *Antología en Educación Matemática* (Compiladores: Cambray R., Sánchez E. y Zubieta G.).

Bohigas, X., Jaén, J. y Novell, M. (2003). Applets en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias*: *Innovaciones Didácticas*, 21(3), 463-472. Madrid, España.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblattfür Didaktik der Mathematik* 38(2), 86-95

Burton, D. M. (1991). *The History of mathematics. An introduction*. Dubuque, U. S. A.: W. C. BrownPublishers.

González, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. *Revista SIGMA*.32, 103-130

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, L. (2006). *Metodología de la investigación* (3a. ed.). México: McGraw Hill Interamericana.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Educación matemática*. 10 (2), 23-45.

Jacobini, O. R. (2007). A modelagem matemática emsuadimensão crítica: novoscaminhos para conscientização e ação políticas. *V Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática. Anais.* Ouro Preto, Brasil.

Martínez, A. (2000). Teorema de Pitágoras: originalidad de las demostraciones de E. García Quijano. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 3(2), 277–296, 05–08.

Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S*. Tesis de doctorado. Escuela Doctoral de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías de la Información. Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Recuperado el 30 Enero de 2010 de: http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (RELIME), 13 (4-I), 191-210.

Rodríguez, R., Quiroz, S. e Illanes, L. (2013). Competencias de modelación y uso de tecnología en Ecuaciones Diferenciales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME 26).* Belo Horizonte, Brasil: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stracy, E. (1813). *Bija ganita or The algebra of the Hindus.* Londres: W.Glendinning