Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza de los números enteros basada en conceptos de la neurociencia.

Autor:

Fabio Andrés Molano Sánchez

Director:

James Velasco Mosquera

Universidad Autónoma de Bucaramanga

Maestría En Educación

Programa Becas Para La Excelencia Docente

Bucaramanga 2016

DEDICATORIA

A todos mis maestros de vida:

A mi mamá Bertha Cecilia por ser mi primera maestra; a mi hermana Eliana por enseñarme a querer mediante la completa entrega; a mi hermano Nelson por mostrarme el significado de la constancia; a mi sobrina Silvia Fernanda por valorarme en la dificultad y a Yeny por iniciarme en el amor a la educación.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a todas las personas que con su presencia y aportes hicieron posible que este proyecto se desarrollara:

Al profesor James Velasco Mosquera, mi asesor de proyecto, por su compromiso, valiosos aportes y lectura siempre meticulosa. Al profesor Wilfrido Ríos Palacios, rector del colegio Facundo Navas Mantilla, por su voluntad y confianza al darme la oportunidad y el tiempo para cursar la maestría. A Jairo y Holger, por su invaluable amistad y preocupación constante. A Irene, por su amistad sincera, impulso en días largos. A Erika, Juliana, Sofía y Paula, por su apoyo.

TABLA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El propósito del proyecto es mejorar la comprensión de los números enteros y su aritmética básica en estudiantes de grado séptimo del Colegio Facundo Navas Mantilla de Girón mediante el diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en conceptos de la neurociencia que potencien las habilidades perceptivo-motrices y la memoria visual. La propuesta se desarrolló siguiendo la metodología de investigación-acción y utiliza actividades que buscan usar procesos mentales asociados a la ubicación espacial y la lectura de ideogramas como los kanji japoneses para potenciar la comprensión de la matemática asociada a los números enteros.

CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

1. Contextualización de la investigación

Los números enteros se comienzan a enseñar generalmente en el grado séptimo de la educación básica. El dominio de la aritmética de este conjunto de números es un complejo problema para los estudiantes pues se ha creado una forma de pensar basada en las propiedades de los números naturales en la que, sumar es acrecentar y restar es quitar, a diferencia de los enteros en que los una suma puede dar como resultado un número con un valor absoluto más pequeño que cualquiera de los sumandos (Bell, 1986).

En el aula de clases se hace evidente la confusión que esto genera sobre los estudiantes y se hace evidente el sentimiento de frustración entre ellos, al trastocar un conocimiento que tenían por sentado, en el que dos números sumados siempre daban como total un número más grande.

Los números enteros son fundamentales para la construcción conceptual del aprendizaje de otros temas del área: funciones, dominio, rango, estadística, álgebra, representaciones gráficas, matemáticas contables, etc. La falta en el dominio de ese tema desestabiliza el aprendizaje de los antes mencionados, demorando o impidiendo el desarrollo de las competencias matemáticas más complejas, saliendo de la educación básica y extendiéndose hasta el nivel universitario. Los problemas que subsisten hasta este nivel se relacionan con "calcular raíces de sumas y/o restas de números enteros, realizar operaciones combinadas con números enteros y con resolver potencias con exponentes enteros negativos."(Pochulu, s.f. p.p 9).

Por otro lado, la competencia matemática que exige un dominio de los procesos en los diferentes contextos en los que se desempeña el estudiante es muy débil a la luz de estudios como los realizados por Pochulu(s.f.) que ponen en evidencia la debilidad en la educación superior por culpa de las deficiencias en la educación básica y hasta en la preescolar.

Dentro de los procesos para ser matemáticamente competente está el proceso de notación o comunicación (MEN, 2004). En la misma línea la OCDE conceptúa que

> "La facultad de leer, escribir, entender y hablar una lengua es la herramienta de mediación más importante de la que disponen los seres humanos para interrelacionarse socialmente. De hecho, cualquier lengua y cualquier uso del lenguaje posee una estructura enormemente intrincada que se engarza de formas muy complejas con una gran diversidad de funciones. Afirmar que alguien está dotado de competencia lingüística equivale a decir que esa persona conoce muchos de los recursos estructurales de una determinada lengua y que es capaz de aplicar esos recursos a una gran variedad de funciones sociales. De forma análoga, considerar las matemáticas como un lenguaje implica que los alumnos deben conocer los rasgos estructurales presentes en el discurso matemático (los términos, hechos, signos, símbolos, procedimientos y habilidades que se han de emplear para ejecutar ciertas operaciones en unos subdominios matemáticos específicos, así como la estructura de esas ideas en cada uno de los subdominios), y aprender a utilizar esos conceptos para resolver problemas no rutinarios en una variedad de contextos definidos según sus funciones sociales." (OCDE, 2015)

Precisamente en las pruebas PISA, Colombia presenta en matemáticas unos resultados muy bajos, alojándose en los últimos puestos del ranking internacional[1] con casi el 75% de sus estudiantes ubicados en la desempeño más bajo de la escala.

1.1 Situación problema

Pregunta generadora

¿Cómo puede un programa de estudio basado en conceptos neurocientíficos relacionados con habilidades visuales y perceptivo-motrices mejorar las

[1] http://www.eduteka.org/imgbd/27/27-01/PruebaPISA%202012_CuadroPrincipal.jpg

habilidades matemáticas específicamente en la aritmética de los números enteros en los estudiantes del grado séptimo del colegio Facundo Navas Mantilla?

1.2 Objetivo general y objetivos específicos.

a. Objetivo General

Mejorar los desempeños relacionados con los números enteros en los estudiantes del grado séptimo del colegio Facundo Navas Mantilla por medio del uso de herramientas que ejerciten las habilidades visuales y la representación perceptivo-motriz según conceptos de estudios neurocientíficos.

b. Objetivos específicos

- Identificar el dominio de las matemáticas de los estudiantes de séptimo grado del colegio Facundo Navas Mantilla relacionado específicamente con la aritmética de los números naturales.
- Identificar el desempeño de los estudiantes en pruebas de atención y observación al igual que su ubicación espacial al comienzo del proyecto.
- Diseñar e implementar una secuencia didáctica sobre el tema de los números enteros que incorpore actividades de mejora de la observación y la atención así como el concepto de lateralidad.
- Evaluar el dominio de la aritmética de los números enteros luego de desarrollar la estrategia didáctica.

1.3 Justificación

A propósito del discurso de competencias, el Ministerio de Educación Nacional, MEN(2004) señala que uno de los procesos para ser matemáticamente competente es el de

> "Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos." (p. 51).

Los números enteros es uno de los muchos temas que se sustentan en los sistemas de representación y es quizás aquí donde se presenta la mayor debilidad: en la ausencia o mínima capacidad de cambiar de sistemas de representación. A propósito de esto señala Duval(1999) que "en matemáticas,…, poder cambiar de sistema de representación es una exigencia cognitiva absolutamente necesaria y fundamental" (p. 18).

En el mismo sentido el MEN(2004) apunta citando a Wiske

> Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. (p. 51).

Según esto, el problema parece estar en los problemas semióticos y comunicativos relacionados con diferentes sistemas de representación de los números enteros. "Comunicar en matemáticas es diversificar los sistemas semióticos de representación para: razonar y calcular, y para la visualización" (Duval, 1999, p. 17).

Duval(1999) estima que "se debe pasar de lo fonético-auditivo a la manipulación de lo visual". Esta es una primera pista sobre la forma en que se debe emprender la enseñanza de las matemáticas y específicamente de los números enteros: a partir de elementos visuales y no desde elementos lógicos (algorítmicos).

Es necesario entonces la construcción de una estrategia que se sustente en lo visual pero basado en lo que Duval(1999) denomina la arquitectura cognitiva

> "El sujeto está constituido por un conjunto complejo de sistemas productores de representaciones de diferente naturaleza. La mayoría de estos sistemas, cuyo funcionamiento es infraconsciente, tiene un sustrato orgánico. Así funcionan las diferentes formas de memoria que se movilizan en el tratamiento interno de la información, desde su recepción visual o auditiva hasta las decisiones de respuesta. ;estas producen todas las representaciones que permiten al sujeto, no solo reconocer o evocar lo ya conocido , sino, igualmente hacer anticipaciones." (p. 18) (El subrayado es propio).

Normalmente lo visual se basa en la lectura de la escritura matemática y sus símbolos, así como en las gráficas y tablas basadas en datos numéricos que forman parte del discurso de las ciencias. Y aunque las matemáticas no son un lenguaje "ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan." (MEN, 2004.p 54). Si se toman sus elementos lingüisticos entonces, para las matemáticas, también se puede aplicar el concepto de Javary (2014) de que cada "lengua se construye una representación del mundo a partir de los términos que ella emplea para designar y describir los objetos que la rodean" (p. 9).

Aunque la matemática crea símbolos propios (números, subíndices, signos, hiperíndices, operadores matemáticos y lógicos) también utiliza letras del alfabeto (griego o español en nuestro caso) para la construcción de sus representaciones, quizás por esta razón se intenta su lectura utilizando recursos aprendidos para el desciframiento de los textos literarios: movimiento ocular de izquierda a derecha en la espera de hallar la descripción, la sentencia o el dialogo, elementos comunes que aparecen en la literatura. En realidad, en la comunicación matemática (ecuaciones, figuras, tablas) muchos elementos deben descifrarse de forma parecida a como se hace con la escritura pictográfica, o a la búsqueda y rastreo que se hace en la lectura de un mapa o de una obra de arte.

Por ejemplo, en la expresión “ $y = 5x^2$ “ si nos atenemos a la lectura literal de un lego en las matemáticas, hay dos letras del alfabeto español, dos números arábigos y un operador, el igual, que en un principio no está dentro de los números ni tampoco en el alfabeto. Los números, ciñendosé a la lectura literal, desempeñarían la misma función comunicativa dentro de la ecuación sin importar la diferencia de tamaño entre el cinco y el dos; o sin contar con la diferencia de altura que hay entre ellos. Las letras, dentro de la expresión, en primera instancia, quizás parecen “intrusas” en el discurso matemático y sin relación alguna con los números.

En las matemáticas, la lectura literal no dice nada para aquellos que buscan hacer un ejercicio basado en su experiencia como lectores de textos continuos (narrativos, expositivos, argumentativos o descriptivos. En cambio, el sentido que puede darle un experto en matemáticas puede mostrar su comprensión sobre los principios de igualdad, los conceptos de función, potenciación, algebra, graficación y otros muchos más aplicados inclusive a situaciones acaecidas en la vida cotidiana y que explican el comportamiento de la naturaleza o del mundo humano.

Los elementos gráficos que componen las expresiones de las matemáticas en sí mismos no cuentan con un significado propio sino que se establece por convención teniendo en cuenta aspectos como la posición, el tamaño y hasta los elementos adyacentes que cambian el sentido de las marcas organizadas en un texto de carácter matemático.

Esta forma de escritura está más cerca de los ideogramas o de los pictogramas utilizados en lenguas como el chino o el egipcio antiguo, lo que hace inconveniente una lectura fonética o “aditiva” en las matemáticas; una lectura que une solamente signos sin darles un carácter especial, sin una interpretación como sí lo hace un músico con su partitura o un japonés con los kanji.

Entonces, quizás sea mejor utilizar las estrategias que usa el cerebro “oriental” que domina la lengua china o japonesa que las estrategias usadas por el cerebro “occidental” cuando escribe y lee en español o inglés.

La neurociencia actual es capaz de obtener imágenes del funcionamiento cerebral para detectar las diferencias cuando se leen ideogramas del chino,coreano o japonés y cuando se leen abecedarios del inglés, el francés o el inglés.

Ayudados con esta ciencia se pueden apreciar las diferentes habilidades requeridas para dominar una lengua logográfica como el japonés o el chino frente a las habilidades necesarias para el correcto uso de una lengua fonográfica. Un estudio de la Universidad de Oxford y de la Universidad de Birmingham (Koyama, Hansen, & Stein, 2008) comparó el sistema de escritura japonés fonográfico denominado "Kana" y el sistema logográfico "kanji" para evaluar la contribución fonológica y el procesamiento visual para la alfabetización en estas dos diferentes formas de escribir para el mismo lenguage encontrando que en los sistemas logográficos la memoria visual es un componente importante para los desempeños superiores a diferencia de los sistemas fonográficos que se basan en la oralidad.

El sistema Kana contiene dos silabarios fonéticos: el hiragana y el katakana. El silabario Hiragana es el básico, y el primero en ser enseñado. Está compuesto por 46 caracteres principales, que se dividen en 40 sílabas, cinco vocales y una consonante. Se emplea para la escritura japonesa en general. (Cardona, 2004)

H	K	H	K	H	K	H	K	H	K
あ	ア	い	イ	う	ウ	え	エ	お	オ
a		i		u		e		o	
か	カ	き	キ	く	ク	け	ケ	こ	コ
ka		ki		ku		ke		ko	
さ	サ	し	シ	す	ス	せ	セ	そ	ソ
sa		shi		su		se		so	
た	タ	ち	チ	つ	ツ	て	テ	と	ト
ta		chi		tsu		te		to	
な	ナ	に	ニ	ぬ	ヌ	ね	ネ	の	ノ
na		ni		nu		ne		no	
は	ハ	ひ	ヒ	ふ	フ	へ	ヘ	ほ	ホ
ha		hi		fu		he		ho	
ま	マ	み	ミ	む	ム	め	メ	も	モ
ma		mi		mu		me		mo	
や	ヤ			ゆ	ユ			よ	ヨ
ya				yu				yo	
ら	ラ	り	リ	る	ル	れ	レ	ろ	ロ
ra		ri		ru		re		ro	
わ	ワ							を	ヲ
wa								wo	
				ん	ン				
				n					

ILUSTRACIÓN 1. SILABARIO HIRAGANA (H) Y KATAKANA (K).

El Katakana, por su parte, está compuesto por la misma cantidad de caracteres, y es equivalente al Hiragana, pero su uso se restringe a casos particulares: para escribir nombres o palabras de origen extranjero (principalmente del inglés), para escribir onomatopeyas, o para resaltar palabras (algo similar a las comillas o a la cursiva en nuestro idioma). (Cardona, 2004)

Los kanji se utilizan en su mayoría para expresar conceptos, a diferencia del chino, donde pueden emplearse también en su carácter fonético. Un kanji puede tener diferentes pronunciaciones, o lecturas, dependiendo del contexto, uso en combinación y su localización en la oración.

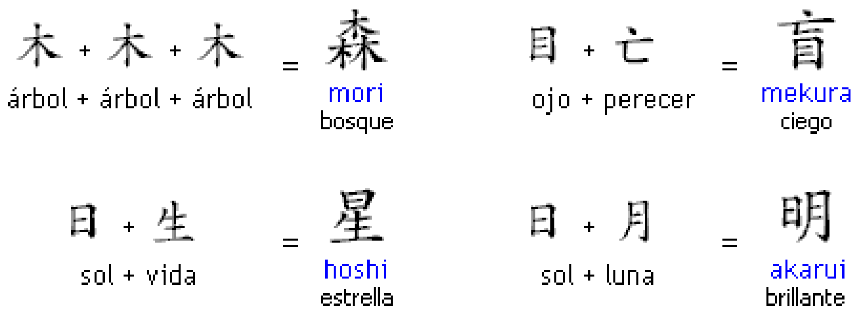


ILUSTRACIÓN 2. EJEMPLOS DEL USO DE COMBINACIÓN DE KANJI PARA FORMAR CONCEPTOS.

La mayor parte de los kanji poseen dos lecturas, una de kun'yomi y otra de on'yomi, con sus alteraciones fonéticas accidentales, pero algunos kanji (muchos de ellos de uso diario) tienen diez o más posibles lecturas.Aunque una palabra puede ser representada por un Kanji, la mayoría está formada por dos o más.

En el primer grado de escolarización se deben aprender 80 kanjis; ya para el sexto grado se deben haber aprendido 1006 con 2005 pronunciaciones diferentes. (Koyama, Hansen, & Stein, 2008)

Koyama et al (2008) encontraron que el “nivel de suficiencia en la alfabetización por la escritura Kana se predijo de manera significativa por el procesamiento sensorial de bajo nivel (tanto en frecuencia auditiva, sensibilidad de modulación y sensibilidad de movimiento visual), así como la conciencia fonológica, pero no por la memoria visual.” Este resultado es en gran medida coherente con estudios anteriores en otras escrituras fonográficas como el español o el inglés.

Por el contrario, el nivel de alfabetización Kanji fue “fuertemente predicho por las habilidades relacionadas con la memoria visual pero no por otras habilidades de procesamiento sensorial y de la conciencia fonológica.” (Koyama et al, 2008)

La memoria visual es entonces una estructura cognitiva que impacta fuertemente en el dominio de lenguajes logográficos. Y aunque las matemáticas no son un lenguaje utiliza simbolizaciones que requieren movilizaciones funcionales del mismo tipo que lo hacen idiomas como el coreano, el chino o el japonés. Por lo tanto de la misma forma en que una mejora en la memoria visual de corto y largo plazo mejora el proceso lector de pictogramas y logogramas, así también se pueden mejorar los procesos de notación y comunicación en las matemáticas de los estudiantes del colegio Facundo Navas Mantilla.

Estos resultados junto con la premisa de que la comunicación matemática debe abordarse como se hace con escrituras logográficas definen mayormente la línea de este proyecto: potenciar la memoria visual de corto y largo plazo para mejorar las habilidades comunicativas matemáticas de los estudiantes.

De forma particular este proyecto toma un tema que es complejo para muchos estudiantes como lo es el de los números enteros además de las dificultades generales ya mencionadas sobre los aspectos comunicacionales y de notación de las matemáticas. Al respecto estudios neurocientíficos muestran que hay una fuerte relación de la ubicación espacial y de la representación de secuencias ordenadas de números.

Al respecto se ha estudiado mucho el efecto SNARC o Spatial Numerical Association of Response Codes (Dehaene et al,1993) que sugiere que la representación mental de los números se hace en la misma zona cerebral relacionada con la ubicación espacial y por lo tanto dependiente de las posiciones relativas izquierda-derecha de sus elementos.[2]

Se puede deducir entonces que debido a que nuestro cerebro evolucionó sin la ayuda de las matemáticas y el concepto de número, utilizamos regiones del cerebro (p.e. giro fusiforme) encargadas de asuntos biológicamente importantes como la empleada para la ubicación espacial (consecución de alimento y migraciones) para realizar tareas relacionadas con las secuencias numéricas. (Koyama et al, 2008).

Estudios recientes señalan el vínculo que hay entre la actividad matemática de alto nivel y las habilidades de orientación espacial además de la relación con el número. Al respecto Amalric(2016) señala que

[2] http://www.cienciacognitiva.org/?p=13

> Nuestros resultados sugieren que el pensamiento matemático de alto nivel hace uso mínimo de áreas de lenguaje y en vez recluta circuitos inicialmente involucrados en el espacio y el número. Este resultado puede explicar por qué el conocimiento del número y espacio, durante la primera infancia, predice el rendimiento matemático (Amalric et al, 2016).

En el mismo sentido Einstein comentó

> Las palabras o el lenguaje, escrito o hablado, no parece jugar ningún papel en mi mecanismo de pensamiento. <u>Las entidades físicas que sirven como elementos en el pensamiento son ciertos signos e imágenes más o menos claras que pueden ser "voluntariamente" reproducidas y combinadas.</u> Hay por supuesto, una cierta conexión entre esos elementos y conceptos lógicos relevantes. Está claro también que el deseo de llegar a conceptos conectados lógicamente es la base emocional de este bastante vago juego con los elementos mencionados. Pero tomado desde un punto de vista psicológico, <u>el juego combinativo parece ser el elemento esencial del pensamiento productivo, antes de que haya alguna conexión con la construcción lógica en palabras u otra clase de signos que pueda ser comunicada a otros. Los mencionados elementos son , en mi caso, de naturaleza visual y algunos de naturaleza muscular</u>. Las palabras convencionales u otros signos se tienen que buscar de una forma laboriosa, solo en una segunda etapa, cuando el juego asociativo está suficientemente establecido y puede ser reproducido a voluntad. (Hadamard, 1945).

Según parece el pensmiento matemático de alto nivel se basa en conceptos visuales y hasta "musculares" entendiendo esto como memorias musculares que se exponen en el momento de la producción de pensamiento. Como el cerebro utiliza analogías corporales (izquierda-derecha; arriba-abajo) para organizar números entonces se justifica organizar junto a las actividades para la mejora de la memoria visual, actividades que ayuden a mejorar aspectos perceptivo-motrices como la lateralidad corporal.

Es por esto que presente proyecto se basa en la mejora de la memoria visual y de aspectos perceptivo-motrices como la ubicación espacial para mejorar el proceso comunicativo de las matemáticas y con este, los demás procesos que hacen matemáticamente competente a un estudiante.

1.4 Contextualización de la institución

El Colegio Facundo Navas Mantilla se encuentra ubicado en el municipio de San Juan Girón. Lleva 12 años de funcionamiento y en la actualidad cuenta con cerca de 1550 estudiantes repartidos en cuatro sedes. Cerca de un 76% del estudiantado proviene de hogares estratificados en los niveles 1 y 2.

Hay 56 profesores de los cuales 9 trabajan en la clase de matemáticas pero solo 4 de ellos son nombrados por el estado para ser docentes de matemáticas. El resto son profesores de básica primaria con conocimientos en otras áreas del conocimiento o profesores de bachillerato que para cumplir con su carga laboral establecida por la ley, trabajan en el área de forma esporádica.

El grado sobre el cual se planea hacer la intervención es el séptimo que funciona en la sede principal del colegio. Hay cuatro cursos en el grado pero el autor del proyecto solo es profesor de matemáticas para tres de ellos. Cada uno de estos cursos tiene entre 38 y 41 estudiantes.

La edad de los estudiantes está entre los 11 y los 15 años. El 63% de los estudiantes de los tres cursos son mujeres. Los mejores resultados son logrados en promedio por las mujeres. Aunque hay muy buenos desempeños por algunos niños, en su mayoría, las niñas lideran los procesos de aprendizaje sin dejarse de presentar casos entre ellas con muy malos desempeños en las matemáticas.

En el Colegio Facundo Navas Mantilla los resultados en matemáticas no son los mejores. En las evaluaciones hechas por la prueba SABER de noveno entre el 2013 y el 2014, el 80% de los estudiantes se sitúa en los niveles mínimo e insuficiente mientras que no existe ningún estudiante en el nivel satisfactorio.

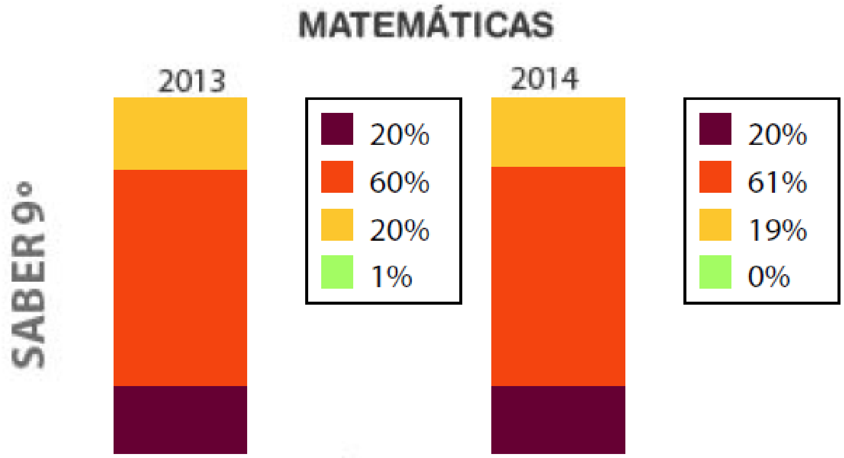


ILUSTRACIÓN 3 PRUEBAS SABER 9°. AÑOS 2013 Y 2014. RESULTADOS DE MATEMÁTICAS. FUENTE: ISCE

La enseñanza de los números enteros ocurre entre el grado 5° y el 9° por lo que es relevante el resultado de las pruebas con respecto a los resultados esperados, teniendo en cuenta que hay otros pensamientos (variacional, estadístico, etc.) que forman parte de la evaluación aparte del numérico. Eso sí hay que tener en cuenta que el dominio del pensamiento numérico es fundamental para los otros tipos de pensamiento lo que puede ser punto de partida para el bajo desempeño de los estudiantes en la prueba.

La descripción general de los niveles de desempeño en la prueba Saber de matemáticas de noveno grado que da el ICFES[3], fija la diferencia entre los estudiantes que están en el nivel mínimo y los que están en satisfactorio en la competencia para utilizar "las propiedades de la potenciación, radicación y/o logaritmación para solucionar un problema, utiliza expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones sencillas de variación".

En el mismo documento se insiste en el concepto de que un estudiante en el nivel avanzado pasa de "la representación algebraica a las propiedades de una función o sucesión y viceversa, establece equivalencias entre expresiones algebraicas y

[3] http://www2.icfes.gov.co/index.php/instituciones-educativas/pruebas-saber-3-5-7-y-9/informacion-de-la-prueba-saber3579

numéricas, enuncia propiedades relativas a determinados subconjuntos numéricos".

Todo esto relacionado con una de las características de un estudiante matemáticamente competente como lo reflejan los estándares básicos de competencias que dice que debe

> "Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos." (MEN, 2004,p.51).

Todo lo anterior muestra la necesidad de implementar un proyecto que influya y aporte en la mejora del rendimiento en esta área del conocimiento y en sus procesos de pensamiento implicados en la arquitectura cognitiva de los niños (Duval, 1999, p.19) desde los aspectos comunicativos y de notación matemática para luego si poder emprender mejoras en los procesos de modelado, razonamiento y argumentación que son más complejos pero dependientes de dominar el lenguaje utilizado en las matemáticas.

2. Marco referencial

2.1 Antecedentes de la investigación

Los antecedentes locales, nacionales e internacionales fueron vinculados a través de dos aspectos básicos de la presente investigación: la temática matemática (los números enteros) y el fundamento científico de la propuesta (la neurociencia).

2.1.1 Antecedentes sobre investigaciones de los números enteros

En el ámbito local:

- González, J. & Torres, J. (2012). Ambiente virtual de aprendizaje para la enseñanza de los números enteros en el grado sexto de la institución educativa INEM Custodio García Rovira del municipio de Bucaramanga. (Tesis de pregrado) Universidad Francisco de Paula Santander. Bucaramanga. Concluyeron que los maestros pueden ofrecer a los estudiantes recursos basados en las TIC para dar confianza y solución a la dificultad del aprendizaje al tiempo que pueden resolver dudas del tema.

- Mantilla, M. & Murillo, R. (2015). Juego como lúdica para la enseñanza de los números enteros. (Tesis de especialización) Fundación Universitaria Juan de Castellanos. Bucaramanga. Señalan que la dimensión lúdica de la enseñanza puede ayudar a mejorar el interés y aprendizaje sobre el tema de los números enteros.

En el ámbito nacional:

- Navia, N. & Orozco, V. (2012). Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la educación básica. (Tesis de pregrado) Universidad del Valle. Cali. Proponen varias conclusiones pero las más importantes son dos: los estudiantes con dificultades en la aritmética de los números naturales tienen dificultades con las operaciones con números enteros; y que las construcciones prácticas de conocimientos con una buena cimentación teórica pueden dar buenos resultados en los estudiantes.
- Castillo, C. (2014). Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos. (Tesis de maestría) Universidad Nacional de Colombia. Palmira, Valle. Su contribución más importante es que los objetos físicos permiten mejorar la recordación de los conceptos teóricos.
- Becerra, O; Buitrago, M & Calderón, S. (2014). Fenomenología asociada a una tarea que involucra adición y sustracción de números enteros. Comunicación presentada en Foro EMAD (4 de noviembre de 2014). Bogotá. Los autores presentan el papel del análisis

fenomenológico en el diseño de una tarea propuesta para una unidad didáctica sobre adición y sustracción de números enteros, para lo que identifican fenómenos, situaciones, contextos y subestructuras presentes en el tema.

En el ámbito internacional:

- Bruno, A. (2000). Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. En Climent, Nuria de los Ángeles; Contreras, Luis Carlos; Carrillo, José (Eds.), Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 119-130). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Bruno señala que métodos relacionados con redactar y resolver problemas relacionados con los números enteros mejora el desempeño en esa tarea de los estudiantes por encima de métodos que dejan los problemas para la conclusión de las clases expositivas.
- Gallardo, A.; Santos, N; Hernández, J. (2010). La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria: un estudio de caso. En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, Assumpta (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 303-314). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Los autores identifican "sentidos de uso" de los enteros tanto en autores de textos clásicos matemáticos como en estudiantes de secundaria actuales. Ellos afirman que el análisis de los sentidos de uso producidos por un alumno competente en el sistema matemático de signos del álgebra, revela los procesos cognitivos que lo conducirían paulatinamente al significado del número entero.
- Hernández, A; Gallardo, A. (2009). Sentidos de uso del cero y la negatividad en la recta numérica. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 57-66). México DF,

México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. El artículo reporta un estudio realizado con 40 estudiantes, donde se manifiestan diferentes sentidos de uso del cero como origen, vía tres situaciones: primera, un punto fijo arbitrario localizado sobre la recta numérica; segunda, un punto móvil arbitrario que cambia de ubicación; tercera, un punto fijo inamovible, esto es el punto medio de la recta numérica.

2.1.2 Antecedentes sobre investigaciones relacionadas con neurociencia.

En el ámbito local

- Beltrán, C y Solis, G. Evaluación Neuropsicológica en Adolescentes: Normas para Población de Bucaramanga. Revista Neuropsicología, Neuropsiquiatría y Neurociencias, Julio-Diciembre 2012, Vol.12, Nº2, pp. 77-93 77. La investigación pretendía mostrar los resultados en diferentes test utilizados por neuropsicólogos para medir atención, memoria (Verbal-visual), función ejecutiva y lenguaje, aplicados en Bucaramanga y en estudiantes entre los 9 y los 16años. Se evidenció significancia estadística en algunos test frente al grado de escolaridad y sexo.

En el ámbito nacional

- Talero, C; Zarruk, J.; Espinosa, A. Percepción musical y funciones cognitivas. ¿Existe el efecto Mozart?. España, Revista De Neurología. 2004 vol:39 fasc: 12 págs: 1167 - 1173 . El artículo revisa la bibliografía científica disponible sobre la relación que existe entre la música, el sistema nervioso central (SNC) y las funciones cognitivas haciendo énfasis en los estudios relacionados con su mejoría.

- Landeira-Fernandez, J., Zylberberg-Landeira, R., Charchat-Fichman, H., Cardenas, F. P. (2012). Working memory and mathematical thinking: a cognitive and affective neuroscience approach. International Journal for Studies in Mathematics Education, 5, 65-88. El grupo de investigadores internacional que cuenta con un representante de la Universidad de Los Andes sugiere que el desempeño en el área de matemáticas depende del desempeño de la memoria de trabajo y que además si se disminuye la ansiedad para enfrentar tareas relacionadas con las matemáticas se logran mejores resultados.

En el ámbito internacional

- Lesh, R.; Sriraman, B. (2009) Re-conceptualizing Mathematics Education as a Design Science. Chapter Theories of Mathematics Education. Part of the series Advances in Mathematics Education pp 123-146. En este capítulo se propone re-conceptualizar el campo de la educación matemática como la de una ciencia de diseño similar a la ingeniería y otros campos interdisciplinarios emergentes que implican la interacción de los "sujetos", sistemas conceptuales y tecnología influenciados por las restricciones sociales y “affordances”. Se proporciona un marco (un sistema de pensar, junto con los conceptos que se acompañan, el lenguaje, las metodologías, herramientas, etc.) para ayudar a los investigadores en educación matemática a partir de pruebas rigurosas, la comunicación y la acumulación, de modo que las formas productivas de pensar no se pierden y se integren en los desarrollos futuros.
- Smedt, B. & Verschaffel, L. ZDM Mathematics Education (2010) 42: 649. doi:10.1007/s11858-010-0282-5. El artículo señala que la neurociencia ofrece una serie de herramientas, metodologías y teorías para investigar los procesos cognitivos que tienen lugar durante el pensamiento y el aprendizaje matemático. Sugiere

además que se conecten los estudios neurocientíficos con el contexto escolar real ya que hay una gran influencia en el rendimiento matemático y su actividad cerebral correlacionada, esto supondría un viaje de ida y vuelta entre la neurociencia cognitiva y la educación matemática.

- Ku Y., Hong B., Zhou W., Bodner M., Zhou Y.-D. (2012). Sequential neural processes in abacus mental addition: an EEG and fMRI case study. PLoS ONE 7:e36410. 10.1371/journal.pone.0036410. La investigación apunta que los expertos del ábaco son capaces de calcular mentalmente números de varios dígitos con rapidez y por eso intentan disociar el proceso neuronal visuoespacial del proceso neuronal visuomotor durante el cálculo mental con ábaco. Sugieren la formación de una red cerebral supra-modal cuando se hace adición mental con el ábaco que puede desarrollarse a partir de las redes normales de cálculo mental.

2.2 Marco teórico

La investigación se centra en los conceptos matemáticos que giran alrededor de los números enteros pero a su vez su objetivo es el de mejorar el aprendizaje dentro de los estudiantes de grado séptimo del Colegio Facundo Navas Mantilla. Es por esta razón que el marco teórico se divide en dos partes: la matemática y la pedagógica.

2.2.1 Marco teórico matemático

- Marco teórico anillos

Para el álgebra, los números enteros están enmarcados en la teoría de anillos.

Así que hay que definir el concepto de anillo. Según Cotlar & Ratto (1971) un anillo es un sistema algebraico formado por un conjunto no vacío y dos operaciones internas, llamadas usualmente «suma» y «producto», que cumplen ciertas propiedades. En términos más específicos, se define a la terna (A,+,•) como anillo si (A,+) es un grupo abeliano y • es una operación asociativa y distributiva respecto de +. Suele denominarse «suma» y «producto» a las operaciones + y •, respectivamente. En esta convención, el elemento neutro de la suma se designa como 0 y el inverso con respecto a la suma de un elemento a, perteneciente al conjunto A dado, se denota como –a. (p. 43).

Así que es importante conocer algunas definiciones básicas y características importantes de la teoría de anillos para poder enfocar la parte conceptual del proyecto a partir del fundamento teórico algebraico; esto se hará a continuación a partir del texto de José Luis Tábara publicado en internet en el año 2001.

Definiciones básicas

Definición 1.1 Un anillo A es un conjunto dotado de dos operaciones, llamadas suma (+) y producto (·) que cumplen:

(A, +) es un grupo abeliano.

El producto es asociativo: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todo a, b, c de A.

El producto es distributivo respecto a la suma $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ y $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

En principio un anillo debería ser denotado por (A, +, ·) para hacer clara referencia a las operaciones. Sin embargo nosotros seguiremos el convenio habitual y lo denotaremos simplemente por A. Si el producto es conmutativo, el anillo se llama conmutativo. En el caso en que la operación producto tenga elemento neutro, el anillo se dirá que es un anillo con unidad. La unidad del anillo se denotará siempre por 1 y cumple

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

El elemento neutro para la suma se denota por 0 y el opuesto de a para esta operación es −a. También es costumbre denotar el producto por la yuxtaposición y suprimir el punto. Así ab significa el producto de a por b en el orden indicado. En todo grupo abeliano (G, +) se puede introducir una estructura de anillo definiendo ab = 0 para todos los elementos de G. Decimos en este caso que es un anillo trivial. Nosotros siempre supondremos que los anillos no son triviales. En el caso en que el grupo esté formado por solo un elemento diremos que el anillo es el anillo cero y se suele denotar por 0. Este es el único anillo trivial que consideraremos.

Proposición 1.1 Dado un anillo A, se cumple:

$(a - b)c = ac - bc$ y $a(b - c) = ab - ac$

$0a = a0 = 0$

$(-a)b = a(-b) = -(ab)$

$(-a)(-b) = ab$

$(-1)a = -a$

Corolario 1.2 Un anillo A con más de un elemento no es trivial si $1 \neq 0$. Si n es un entero positivo na es la suma de n veces el elemento a

$na = a + \cdots + a$ (n veces)

Si n es negativo entonces definimos

$na = -a - \cdots - a$ (- n veces)

Proposición 1.3 Si $m, n \in Z$ y $a, b \in A$ se cumple: $(m + n) a = ma + na$. $(mn) a = m(na) = n(ma)$. $m(a + b) = ma + mb$. $1a = a$.

Definición 1.2 Sea A un anillo con unidad. Decimos que un elemento $a \in A$ es una unidad si existe otro elemento b tal que $ab = ba = 1$. El conjunto de unidades de A se denota U(A).

Si el anillo es conmutativo, basta imponer solo la condición $ab = 1$. El elemento b, que se demuestra fácilmente que es único, se denota por a^{-1} y se dice que es el inverso de a. Como sabemos por la proposición 1.1 el cero nunca es invertible.

Proposición 1.4 Las unidades de un anillo forman un grupo respecto a la multiplicación.

Definición 1.3 Un anillo A donde todo elemento de A^* es una unidad, se llama anillo con división. Si el anillo con división es conmutativo se denomina cuerpo.

Definición 1.4 Un elemento $a \in A$ es un divisor de cero si existe otro elemento b de tal modo $ab = 0$.

En propiedad, si el anillo no es conmutativo deberían diferenciarse divisores de cero por la derecha y por la izquierda.

Definición 1.5 Un anillo sin divisores de cero se denomina anillo ıntegro.

En un anillo ıntegro se pueden simplificar factores. Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$. Para demostrarlo escribimos $ab - ac = 0$ y sacamos factor común, $a(b - c) = 0$ y como a $\neq 0$ concluimos que $b - c = 0$. Decimos que en un anillo se cumple la ley de cancelación si se pueden simplificar factores.

Proposición 1.5 Todo anillo íntegro y finito es un anillo con división.

Definición 1.6 Si A es un anillo, un subconjunto B es un subanillo si con las operaciones inducidas B posee estructura de anillo. Si $1 \in B$ diremos que B es un subanillo con unidad.

Naturalmente todo subanillo es un anillo con las operaciones inducidas.

Proposición 1.6 Un subconjunto $B \subset A$ es un subanillo si y solo si $a, b \in B$ implica que $a - b \in B$ y $ab \in B$.

Proposición 1.7 La intersección de subanillos es un subanillo. (Tábara, J., 2001)

Todo lo anterior se cumple para cualquier tipo de anillo definido por el álgebra pero hay unas propiedades y características específicas para el anillo de los números enteros.

- Marco teórico anillo de los números enteros.

Los números enteros ($\mathbb{Z}$) son un conjunto numérico que contiene los números naturales, sus inversos aditivos y el cero. Los enteros negativos son menores que todos los enteros positivos y que el cero. En la recta numérica encontramos los números negativos a la izquierda del cero y a su derecha los positivos. (Hutton, 1971. p. 185).

Francisco Rivero (s.f) define algunos axiomas y teoremas de los números enteros:

I) Axiomas de Suma

Existe una operación binaria en $\mathbb{Z}$, llamada la suma de enteros, la cual sería denotada por + y satisface:

1. Cerrada

Para a y b números enteros, $a + b$ es un número entero

2. Conmutativa

$a + b = b + a$, para todos a y b enteros.

3. Asociativa

$(a + b) + c = a + (b + c)$, para todos a, b y c enteros.

4. Elemento neutro

Existe un elemento en $\mathbb{Z}$ llamado el cero, el cual se denota por 0, y satisface:

$0 + a = a + 0 = a$ para todo a entero.

5. Elemento opuesto

Para todo a en $\mathbb{Z}$ existe un elemento, llamado el opuesto de a, el cual denotamos por -a, y que satisface:

$a + (-a) = -a + a = 0$

II) Axiomas de Multiplicación

Existe una operación binaria en $\mathbb{Z}$, llamada producto de números enteros, la cual se denota por ·, y satisface a su vez:

1.3. Propiedades de los Enteros

1. Cerrada

Para a y b números enteros, $a \cdot b$ es un número entero

2. Asociativa

Para a, b y c enteros

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3. Conmutativa

Para a y b enteros

$a \cdot b = b \cdot a$

4. Elemento neutro

Existe un entero, llamado el uno y denotado por 1, tal que para todo entero a se tiene

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

III) Axioma de distributividad

Para a, b y c enteros se cumple que

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Definición 1.3.1 Una relación de orden en un conjunto A, es una relación R sobre A, con las siguientes propiedades:

1. Propiedad simétrica

Para todo a en A, se verifica aRa.

2. Propiedad Transitiva

Para a, b y c en A se verifica: Si aRb y bRc, entonces aRc

3. Propiedad antisimétrica

Si aRb y bRa entonces a = b.

A continuación daremos una forma, quizás un poco rigurosa, de introducir esta relación, usando la suma de enteros y la existencia de un conjunto P. (Conjunto de enteros positivos).

IV) Axiomas de Orden

Existe un conjunto de enteros, llamados enteros positivos, el cual denotaremos por P, y que satisface:

1. Para todos a y b en P, a + b y a.b están en P.
2. 1 está en P.
3. Ley de tricotomía

Para todo entero a se tiene una y sólo una de las siguientes:

i) a está en P, ii) -a está en P, iii) a = 0.

Usando los axiomas de orden, se define la siguiente relación en el conjunto de los enteros:

Definición 1.3.2 Sean a y b dos enteros, diremos que a es menor o igual que b, y lo denotamos por $a \leq b$, si y sólo si b - a es positivo o cero.

Definición 1.3.3 Sean a y b dos enteros, diremos que a es menor que b, y lo denotamos por $a < b$ si y sólo si $a \leq b$ y $a \neq b$.

También diremos que: a es mayor o igual a b, y lo denotamos por $a \geq b$ si b es menor o igual que a.

Igualmente, diremos que a es mayor que b, y se denota por $a > b$, si b es menor que a.

2.2.2 Marco teórico de la propuesta pedagógica

La idea de usar principios de la neurociencia para mejorar el desempeño de los estudiantes se basa en investigadores neurocientíficos al mismo tiempo que en pedagogos de la educación matemática que proponen el uso de la semiótica para comprender los procesos de comprensión de la formalización matemática. Algunos de ellos son:

- Raimond Duval: Catedrático de la Universidad Louis Pasteur de Estrasburgo y ha trabajado desde 1970 en el equipo interdisciplinario de

Didáctica de la Matemática y Ciencias Cognitivas, desarrollando numerosas investigaciones y publicaciones científicas sobre sus experiencias en las aulas, tanto a nivel intermedio como superior. Su principal obra es "Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales" publicado en 1995, en la que desarrolla una teoría de representación semiótica y analiza el funcionamiento del pensamiento en la adquisición de conocimiento logrando sentar las bases para los estudios y tesis en el ámbito de la educación y los modelos de aprendizaje. Su trabajo muestra la importancia de su teoría de los registros de representación semiótica para la investigación en la didáctica de las matemáticas. La Universidad del Valle ha traducido al español su obra y lo ha invitado a impartir clases en el doctorado en educación. (Universidad Distrital Francisco José de Caldas,2016)

- Stanislas Dehaene: profesor en el Colegio de Francia, autor, director de la Unidad Neuroimagen Cognitiva. Ha trabajado en una serie de temas, incluyendo la cognición numérica, la base neural de la lectura y los correlatos neuronales de la conciencia. Dehaene fue una de las diez personas a las que se les concedió la beca James S. McDonnell de la Fundación Centennial Fellowship en 1999 por su trabajo en la neurociencia cognitiva de la aritmética. En 2003, junto con Denis Le Bihan, Dehaene fue galardonado con el premio D. Luis del Instituto de Francia. En 2014, junto con Giacomo Rizzolatti y Trevor Robbins, fue galardonado con el premio Cerebro. (Wikipedia, 2016)
- Carlos Eduardo Vasco: Nacido en Medellín y egresado de la Universidad Javeriana en Filosofía y Letras y en Matemáticas, con estudios de posgrado realizados en Estados Unidos y Alemania. Profesor en el departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá durante 25 años, jubilándose como Profesor Emérito de esa universidad. En los años 1985 y 1986 la Universidad de Harvard lo nombró Profesor de Educación, siendo también un Investigador Visitante de esta universidad estadounidense en 1986, 1996 a 2002. Asesor del Ministerio de

Educación Nacional de 1978 a 1993. Durante su paso por el MEN estuvo a cargo de la elaboración de los programas de matemáticas de la renovación curricular de primero a noveno grado. Fue comisionado coordinador de la Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo, conocida como "La Comisión de Sabios", en la que también fue editor de los siete volúmenes de documentos que se produjeron. Fue también en el Ministerio, y en Ascofade, asesor de la elaboración de los estándares básicos de competencias y coordinó la nueva introducción a los estándares de matemáticas; además formó parte de la comisión de 10 personalidades que animaron el proceso de conformación del Plan Nacional Decenal de Educación 2006-2016. Actualmente Carlos Eduardo Vasco labora a tiempo parcial en la Universidad del Valle, en la Universidad Distrital de Bogotá y en la Universidad de Manizales como coordinador y colaborador en tres de sus programas de doctorado. Es además profesor de desarrollo humano, epistemología y metodología de la Fundación Cinde. (MEN, 2016)

Los anteriores autores proponen algunas ideas que forman parte de la base epistemológica y científica del proyecto:

Koyama, M., Hansen, P., & Stein, a. J. (2008). Logographic Kanji versus Phonographic Kana in Literacy Acquisition. How Important Are Visual and Phonological Skills? Annals of the New York Academy of Sciences, 41-55. El aporte de esta investigación es el estudio comparativo de las habilidades necesarias para utilizar los alfabetos fonográficos frente a las habilidades necesarias para el uso eficiente de los caracteres logográficos lo que abre también la posibilidad de aprovechar este conocimiento para la mejora de los procesos comunicativos en matemáticas.

Amalric, M. & Dehaene, S. Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. Social Sciences - Psychological and Cognitive Sciences - Biological Sciences Neuroscience PNAS 2016; published ahead of print April 11, 2016

Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology*, 371-396. Esta investigación aporta la base científica para intervenir la representación perceptivo-motriz de los estudiantes específicamente su lateralidad como analogía corporal de la secuencia de los números enteros.

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Santiago de Cali: Universidad del Valle. Este libro aporta la base conceptual sobre los elementos semióticos y comunicacionales que tienen las matemáticas.

MEN. (2004). *Estándares básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: MEN. Los lineamientos y directrices del Ministerio de Educación aportan el marco legal para el proyecto así como los ideales en cuanto a procesos y contenidos que a la final son el producto de evaluación en pruebas internas y externas.:, doi:10.1073/pnas.1603205113

- Fundamentos conceptuales de tipo pedagógico

Los números enteros se comienzan a enseñar generalmente en el grado séptimo de la educación básica. Según mi experiencia, son un gran problema para los estudiantes pues se ha creado una forma de pensar en la que sumar es acrecentar y restar es quitar, a diferencia del conjunto de los enteros en que una suma puede dar como resultado un número con un valor absoluto más pequeño que cualquiera de los sumandos.

Eso confunde a los estudiantes y hace crecer el sentimiento de frustración entre ellos al trastocar un conocimiento que tenían por sentado en el que dos números sumados siempre daban como total un número más grande.

Los números enteros son fundamentales para la construcción conceptual del aprendizaje de otros temas del área: funciones, dominio, rango, estadística, álgebra, representaciones gráficas, matemáticas contables, etc. La falta en el dominio de ese tema desestabiliza el aprendizaje de los antes mencionados, demorando o impidiendo el dominio de las competencias matemáticas más complejas.

El propósito de esta unidad didáctica es el de enfrentar esta dificultad con este tema en particular utilizando la ubicación espacial como estrategia de enseñanza, vinculando diversas actividades relacionadas con este proceso cognitivo para que se logre el aprendizaje en los estudiantes de grado séptimo.

El MEN señala que uno de los procesos para ser matemáticamente competente es el de

> "Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos." (MEN, 2004)

Uno de estos sistemas de notación está configurado por los números enteros que permite definir sistemas aún más complejos como los que tiene el álgebra, la lógica y el cálculo. Previamente, específicamente en la primaria, se ha enseñado a los niños la aritmética de los números naturales y sus propiedades.

Si los procesos con algoritmos en la aritmética de los naturales son débiles, los niños tendrán dificultades en la comprensión de los algoritmos de los números enteros y habrá que revisar bajo qué enfoque han trabajado los profesores de primaria para reforzar el conocimiento que tiene el niño o si agotada esa fase, es necesario cambiar completamente el enfoque buscando que el niño comprenda los preconceptos necesarios para los números enteros.

A lo largo de la historia se han propuesto diferentes enfoques metodológicos y epistemológicos para revisar el tema de los números enteros, su teoría y su didáctica. Al ser los primeros matemáticos al mismo tiempo los primeros educadores y divulgadores de la matemática se mezclan las concepciones teóricas al lado de las concepciones pedagógicas. Intentar separar los dos aspectos significa ignorar el derrotero histórico y la construcción humana del conocimiento matemático.

Lo que sí parece conveniente es revisar la idea actual de enseñanza de los números enteros para descubrir a través del devenir histórico las dificultades y concepciones de cada tiempo para luego compararlas con las que se entretejen en las aulas del país hoy en día.

Así pues, analizando dentro del documento de estándares básicos de competencia se proponen cinco procesos generales que deben dominar los estudiantes de la educación básica y media dentro del área de matemáticas. Estos son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

En el caso de los números enteros es preciso primero comenzar por formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos para luego sí comenzar a fundamentar los otros cuatro procesos. Hay que señalar que cuando se encuentran por primera vez con los números enteros, los estudiantes solo conocen los números naturales y los números racionales. La entrada de cantidades negativas y de operaciones como la suma, resta, multiplicación y división, es un fuerte impacto en la mayoría del estudiantado por la idea de suma como aumento y de resta como disminución, lo que lleva a mucha confusión.

Una vez se ha comprendido que además de la existencia de los números naturales están los números enteros y qué cantidades representan, se pasa a organizar los algoritmos de resolución de operaciones elementales. Para la adición y sustracción, normalmente se ha enseñado el tema a partir de dos estrategias básicas: utilizando la recta numérica o a través de la memorización de las reglas de operación aritmética entre cantidades de igual o diferente signo (Bruno, 2000).

Cada una de las estrategias compromete ciertas dificultades didácticas y epistemológicas según reportan estudios previos como los de Lytle (1994), Gallardo (1994) y el mismo Bruno (2000).

Históricamente el problema de aceptación de los números negativos como un subconjunto formal de los números generó errores epistemológicos estudiados ampliamente en un artículo de Eva Cid (2000) en lo que es un gran referente de la didáctica de los números enteros. Ella a su vez toma ideas de Glaeser (1981) para definir los siguientes errores epistemológicos:

- Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas: Diofanto establece la regla de los signos, pero no acepta la existencia de números negativos.
- Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Ciertos matemáticos como Stiven y D´Alembert aceptan la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones como cantidades ficticias.
- Dificultad para unificar la recta real: McLaurin, D´Alembert, Carnot y Cauchy concebían a los negativos y los positivos en términos opuestos lo que cimentaba el modelo de dos semirrectas opuestas y divididas.
- La ambigüedad de los dos ceros. Este obstáculo hace referencia a las dificultades que hubo entre los matemáticos Stiven, McLaurin, D´Alembert, Carnot y Cauchy para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente.
- El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Glaeser denomina estadio de las operaciones concretas a una corriente ideológica que tiene sus inicios en los Elementos de Euclides y se caracteriza por partir de la idea que los objetos matemáticos son objetos del mundo físico.
- Deseo de un modelo unificador. Parte de la idea de justificar la estructura aditiva y la multiplicativa de los números enteros para poder ser comprendida por los estudiantes del tema.

A partir de las anteriores dificultades epistemológicas se vislumbran en la actualidad algunos obstáculos para la enseñanza de los números enteros. Por un lado uno de los obstáculos que se generan es que la enseñanza de éstos no admite ser enteramente tratada como una entidad concreta y extraída de la realidad; por otro lado, está el problema de enseñar los enteros positivos y negativos desde el aspecto formal lo que conlleva a reducir el número a un enfoque clásico y deductivo lo que es odioso para la mayoría de los estudiantes y principio para darle olvido.

De esta manera, el obstáculo presente está enmarcado en las relaciones entre lo real y lo formal, es decir, por la confrontación entre el conocimiento formal de los números y el conocimiento práctico que se posee de ellos como representación de lo real (González, et al., 1999).

Con respecto a lo anterior, González, et al., (1999), presenta una serie de obstáculos encaminados en el aprendizaje de los números enteros:

- La aritmética práctica: la creencia de que el número está vinculado con la cantidad y que las matemáticas revelan verdades acerca del mundo real.
- La suma como aumento. Al estar el número relacionado con la noción de cantidad, la adición se relaciona mentalmente con la acción de añadir una cantidad a otra por lo que siempre hay un aumento.
- La multiplicación como aumento: La idea de considerar la suma como aumento se traslada para la multiplicación.
- La sustracción como disminución: La sustracción identificada con la acción de quitar está asociada con la disminución.
- La división como división natural: En los números naturales la división se interpreta como reparto o agrupamiento de objetos esta concepción genera un obstáculo epistemológico, por no permitir la generalización a la división de números enteros, donde el número negativo deja de ser un objeto concreto.
- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural: En los números naturales los números van aumentando a medida que se alejan del origen.

Con todo el estudio de los procesos didácticos para la enseñanza de los números enteros en el mundo, se han venido diferentes tendencias y propuestas para superar las dificultades en el proceso de la conceptualización de número entero y su aplicación en la resolución de problemas matemáticos, también llamados situaciones cotidianas.

La investigación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son temas muy tratados como conexión con los propósitos de la educación como se evidencia en los Estándares Nacionales de la Educación de Ciencia en Estados Unidos (National Research Council, 1996)

Con estos conceptos se ha buscado implementar diferentes tipos de proyecto basados en sendos teóricos. Por ejemplo, algunos utilizan los principios de Duval (Cupitra & Aldana, 2013) quien sustenta su teoría en los registros de representación o simbolización de un concepto para que haya una mejor "… aprehensión de este mismo".

Además Cupitra et al (2013) muestra la importancia de la Noesis (representación mental), la cual, según ellos, "debe ser traducida mediante símbolos al exterior a través de la semiosis", y vinculada a una ingeniería didáctica de manera directa, en la que se muestra al docente como un ingeniero, el cual puede realizar un proceso de investigación de acuerdo a sus conocimientos, este debe ser sometido a un rigoroso sistema de control científico.

Los números enteros al igual que otros contenidos matemáticos, se pueden considerar bajo varias perspectivas que modifican sustancialmente las acciones didácticas a seguir.

Algunas planeaciones didácticas como las de Vergnaud (1995) y Gallardo (1996), están centradas en operaciones (suma y resta), no consideran a las relaciones de orden como objeto de estudio y no dan una definición de lo que implica construir el concepto de número negativo.

Gallardo realizó su investigación en una escuela secundaria del medio urbano. En el trabajo exploratorio encontró que, además de tener dificultades con las operaciones, los alumnos tienen dificultad para comprender el orden entre enteros.

Ella llevó a cabo una propuesta pedagógica con el método chino modificado (la unidad negativa anula a la positiva), e hizo una serie de entrevistas clínicas después del tratamiento, con lo cual identificó 4 diferentes perfiles de desempeño, sin embargo, el orden entre enteros no es un indicador de los mencionados perfiles.

Cid (2006) en una investigación documental de corte histórico, sugiere la posibilidad de que los adolescentes tengan obstáculos epistemológicos para la construcción de los números negativos.

También ha habido el intento de utilizar el modelo de fichas de colores (Borjas, 2009). Sobre esto la conclusión extraída es que es un método de enseñanza constructivista, ya que el estudiante va construyendo el conocimiento matemático, a partir de ese modelo concreto, le permite descubrir las reglas de operación que rigen a los números enteros, trasladando sus experiencias del modelo "real" al mundo de los símbolos escritos de la matemática.

La Universidad de los Andes (García, 2012) produjo un documento en el cual se resalta el uso de recursos y materiales (sumadora de enteros, fichas bicolores y la recta numérica) de acuerdo con los aportes realizados por los estudiantes, favoreció el logro de las expectativas de aprendizaje propuestas en términos de competencias, objetivos y capacidades, por tratarse de elementos que permitieron manipular las cantidades representadas, dando sentido así a las situaciones. Los materiales y recursos, además de favorecer la comprensión de las situaciones expuestas, contribuyeron a la resolución de las tareas y tuvieron un alto grado de aceptación.

Implementación

El objetivo de la estrategia didáctica es la de enseñar el concepto de número entero y toda su aritmética a partir de la ubicación espacial que puede ser representada en forma gráfica mediante la recta numérica. En un estudio realizado por investigadores de la Universidad Complutense de Madrid y de la Universidad de Tubinga (Vázquez et al, 2009) se menciona que debido a la reciente aparición de los cálculos matemáticos en la evolución humana, la zona del cerebro en donde parece que se asienta el pensamiento numérico es la que está destinada originalmente a la ubicación espacial.

Aprovechando este tipo de conclusiones neurocientíficas, se ha diseñado una unidad didáctica utilizando como base la idea propuesta por el Doctor Carlos Eduardo Vasco de establecer "sistemas matemáticos (Vasco, 1994. p 14)". En ella, él propone "descomponer el sistema en tres niveles: los sistemas simbólicos por encima, el sistema conceptual en el centro, y los sistemas concretos debajo". (Vasco, 1994. P 18). El orden que propone el Doctor Vasco va desde los sistemas concretos y subiendo a los conceptuales para terminar en los simbólicos.

Siguiendo esta organización, se comenzará con un sistema concreto relacionado con la ubicación de los números enteros en la recta numérica y la suma y resta de números enteros que utiliza conceptos de lateralidad y desplazamiento corporal. En el manejo corporal dentro de las matemáticas hay una idea de disfrute que ayuda a motivar el aprendizaje del tema por parte de los niños. Luego se desarrollará el sistema conceptual acerca de las propiedades básicas de los números enteros y de la suma, resta, multiplicación y división como operaciones. Finalmente, utilizando conceptos relacionados con la observación y la atención, se formalizará el sistema mediante el nivel simbólico en el que se representan las operaciones con enteros mediante signos propios del tema y de su esquema representacional.

Las actividades son de diferente tipo y utilizando diversos recursos para introducir la idea y luego hacer los refuerzos sobre la suma y la resta de enteros. El movimiento y los conceptos de lateralidad que se manejan en educación física son necesarios para establecer los enteros como coordenadas físicas que se traducen en coordenadas mentales.

Al final de la unidad didáctica el niño debe usar las dos operaciones del anillo de los números enteros, sin equivocaciones y sin dudas, de forma rápida, al menos con números enteros de un solo guarismo, por ejemplo, -3 + 4 = 1.

Es necesario que el estudiante aprenda o demuestre el conocimiento de una serie de conceptos y procedimientos como:

- Ubicar a partir de su cuerpo los conceptos de derecha e izquierda, arriba y abajo.
- Entienda el valor del cero como punto de origen y de referencia para la diferenciación de los enteros positivos de los negativos.
- Hallar el valor absoluto de un número y entenderlo como una distancia con respecto al número cero.
- Se desplace física y mentalmente por espacios bidimensionales y tridimensionales cuando se le señalan coordenadas.
- Comprenda que la suma es un desplazamiento hacia la derecha de la recta numérica y que la resta es un desplazamiento hacia la izquierda. Además que puede aplicar la propiedad conmutativa y clausurativa de la suma cuando hay varios términos en la operación.
- Sintetice los resultados de las sumas como un algoritmo extraído de su experiencia y concretado por el mismo mediante un instructivo de uso personal.
- Represente operaciones con enteros usando los símbolos matemáticos apropiados como paréntesis, signos positivos y negativos.

Cada uno de los puntos anteriores es un paso en la unidad didáctica que tiene que irse evaluando para observar el nivel de aprendizaje de los estudiantes lo que permite conocer si está funcionando la estrategia didáctica y dónde se puede mejorar.

3. Diseño metodológico

3.1 Tipo de investigación

El enfoque básico del proyecto es de una investigación acción: se quiso intervenir en el dominio del proceso comunicativo de las matemáticas de los números enteros a partir de una estrategia que implica el uso y mejoramiento de la arquitectura cognitiva de los estudiantes mostrando el papel que juega cada uno de los actores involucrados en el proceso como lo señala Paz (s/f) quien dice que "se pretende, fundamentalmente, propiciar el cambio social, transformar la realidad y que las personas tomen conciencia de su papel en ese proceso de transformación."

En cuanto a la práctica pedagógica de las matemáticas aún no es amplio el uso de elementos neurocientíficos para la planeación de las clases pero la apuesta de este proyecto es el intento de asomarse a una nueva base conceptual lo que reafirma la concepción de investigación-acción pues según Kemmis y McTaggart (1988)

> "Significa darse cuenta de que las clases, las escuelas y la sociedad de hoy son resultados de un proceso de formación social e histórica y que, para lograr una forma diferente de clases, escuelas o sociedades, debemos emprender un proceso de reforma o transformación: una lucha por una reforma" (p 39-40).

El enfoque metodológico en sí mismo permite aplicar metodologías no probadas y evaluarlas en la práctica como lo menciona Elliot (1993, p. 88): "En la investigación-acción, las "teorías" no se validan de forma independiente para aplicarlas luego a la práctica, sino a través de la práctica."

Se hicieron observaciones desestructuradas y entrevistas para ir puliendo la estrategia a medida que se desarrollaba con el objetivo de afinar el proceso de acuerdo con las observaciones de los estudiantes implicados en el proceso.

También se crearon instrumentos cuantitativos de evaluación de la memoria, la lateralidad y el dominio matemático del tema para reflexionar acerca de la eficacia del proyecto con el fin de refinar la estrategia y proyectar su uso en otros ambientes y otros temas.

3.2 Proceso de investigación

3.2.1 Diagnóstico acerca de aspectos matemáticos, sensomotrices y visuales de los estudiantes que participan en el proyecto.

La unidad didáctica se diseñó para usar conceptos neurocientíficos en la mejora del desempeño de los estudiantes de grado séptimo en el tema de los números enteros. El primer objetivo era evaluar el desempeño de los estudiantes en: su conocimiento de la aritmética básica de los números naturales, tema que es el sustrato sobre el que se sostiene pedagógicamente el tema de los números enteros; su desempeño sensomotriz en ejercicios relacionados con su ubicación espacial y desplazamientos dirigidos; y en sus habilidades visuales en los momentos de hacer observación.

Para evaluar el desempeño en la aritmética de los números naturales se aplicó una prueba básica en un formato de papel (Anexo 1) en la que se revisaban los conocimientos de los niños sobre suma, resta, multiplicación, división, y potenciación. Algunos ejercicios planteaban ejercicios elementales y otros con grado mayor complejidad por el dominio que debe tener el niño con los signos de agrupación y la jerarquía operacional. Buena parte del grupo de niños evaluados presentó niveles aceptables en sumas y restas. Así mismo, una gran porción de los estudiantes mostró dificultades en las multiplicaciones, divisiones, y potenciaciones. La causa principal de esta situación se puede relacionar con la poca recordación de las tablas de multiplicar. Al preguntárseles de manera oral las tablas, la mayoría de los estudiantes fallaban. Si se tiene en cuenta que la población a la que se dirigió el proyecto es de grado séptimo y que está entre los 12 y 15 años es, a lo menos, una situación inquietante.

Con respecto al diagnóstico de sus habilidades sensomotrices y ubicación espacial se detectó mediante una actividad que son muchos los estudiantes que no reconocen su izquierda o derecha. Otros dudaban o se demoraban unos segundos pero finalmente cumplían con la tarea que les pedía señalar una dirección determinada. Estas habilidades corresponden a aprendizajes tempranos a nivel del prescolar y que se van afianzando a lo largo de la primaria principalmente en la clase de educación física. (Anexo 2)

En cuanto a las habilidades visuales en tareas que implicaban atención, concentración y búsqueda, la mayoría de los niños se mostraron interesados en el primer momento porque había dibujos, retos visuales y otras actividades lúdicas pero luego de un tiempo, que variaba entre los cinco y diez minutos, se cansaban y buena parte del grupo no llegaban a completarlas. (Anexo 3). La observación requiere que haya una búsqueda sistemática dentro de una imagen; requiere además que haya un reconocimiento de ciertas características o estructuras que previamente se han depurado y consolidado hasta convertirlo en memoria de trabajo, quizás por deficiencias en estos aspectos la observación es que los niños se cansan en retos que impliquen la búsqueda visual.

3.2.2 Desarrollo de la unidad didáctica

La unidad se había diseñado para centrarse en los números enteros pero como había deficiencias en la inmensa mayoría de los estudiantes en la aritmética de los números naturales, específicamente en multiplicación, división, potenciación y radicación principalmente originadas por la falta de memorización de las tablas de multiplicar y, en consecuencia, en los algoritmos específicos de cada operación, se tomó la decisión de reforzar algunos aspectos con actividades los conocimientos relacionados con el tema. Las actividades se basaron en técnicas para aprender de memoria las tablas utilizando la teoría de sistemas de representación visual, auditivo o kinestésico (V.A.K). Aunque hubo una leve mejora motivada por un refuerzo conductista relacionado con la evaluación académica, fueron pocos los estudiantes que tuvieron un aprendizaje duradero.

Luego, se comenzó el tema de los números enteros partiendo de la visualización de la recta numérica que representa los números naturales. Después se les mostró que a la izquierda del cero se extendían los números negativos y que entre más a la izquierda estuviera un número con respecto a otro eso lo hace más pequeño. Así que era necesario consolidar el conocimiento de izquierda y derecha lo cual se hizo con tres sesiones de clase fuera del salón de clases centradas en el desarrollo de la lateralidad.

En el patio de descanso se dispusieron unos conos en el piso a semejanza de una pista de obstáculos para que un estudiante dirigiera de un lado a otro a un condiscípulo que tenía vendados los ojos (Anexo 3). Los comandos orales para que los dos se comunicaran dependían del concepto de izquierda y derecha. Se dio tiempo para que el ejercicio se realizara en repetidas ocasiones de forma libre. Al finalizar las tres sesiones de trabajo se evaluaba a los estudiantes por parejas revisando la velocidad y correcta comprensión de los conceptos de derecha e izquierda. La mayoría de los estudiantes mejoró significativamente su diferenciación lateral. Luego en el salón de clases mediante ejercicios colectivos se hacían ejercicios para reforzar la ubicación espacial vinculándola a ejercicios escritos como los descritos en el anexo 1.

Una vez finalizada esta fase del proyecto se volvió al aula de clases para enseñar a los estudiantes la dimensión formal de la matemática de los enteros. Se les enseñó cómo se escriben los números enteros, lo que visualmente diferencia a positivos de negativos; de la misma manera, se les indica que el número cero es el hito que separa a unos y otros, y que por lo tanto no es ni positivo ni negativo. Después se enseñó el concepto de valor absoluto como la distancia que hay entre un número cualquiera, positivo o negativo, y el número cero (Anexo 4).

Para agilizar la ubicación de los números enteros en la recta numérica se utilizó el mismo concepto de ubicación espacial corporal para luego hacer la ubicación espacial en el papel. Se procedió a pintar una recta numérica de 16 metros de largo en una de las canchas del colegio (Anexo5). Luego se hacían ejercicios en los que se les pedía a los niños ubicaran en la recta números, diferenciando positivos de negativos. También se les pedía que señalaran la ubicación de niños voluntarios que se paraban en ciertos puntos de la recta. Finalmente, el niño debe ahora reemplazar las palabras “izquierda” o “derecha” por las palabras “negativo” y “positivo”, respectivamente para que se vaya familiarizando con la posición relativa de los números enteros con respecto al cero.

Para completar la actividad de ubicación de los números en la recta se les solicitó a los niños que llevaran al salón de clases, materiales como cartón de cajas viejas para elaborar una recta numérica que fuera durable y permitiera hacer el ejercicio de ubicar los enteros muchas veces sin tener que trazar la recta continuamente en el cuaderno (Anexo 6). Además, la regla de cartón a manera de recta es un objeto manipulable que permite al niño el contacto físico lo que hace que sea menos abstracto el conocimiento que intenta construirse y le da confianza al estudiante en el proceso de aprendizaje. Se hacen varios ejercicios de ubicación en la recta numérica durante el desarrollo de clases y se les pide a los niños practiquen en casa (Anexo 7).

Para comenzar a enseñar a adicionar números enteros, siguiente tema de la unidad didáctica, se ve la necesidad de comenzar por la dimensión formal de la matemática, es decir, en este caso escribiendo adiciones en las que intervengan dos números enteros mediados de un signo que representa la operación (Anexo 8). Se hace hincapié que uno es el signo que hace parte del número y otro es el signo que representa al operador. Se escriben decenas de ejemplos para que el niño identifique si en una operación con enteros hay números positivos o negativos (Anexo 9). Hay varias formas de enseñar la suma de enteros. Para el diseño de esta unidad se estableció el método de desplazamiento que es coherente con la propuesta de utilizar la ubicación espacial corporal para hacer las operaciones aritméticas básicas de los enteros. En este método, se concibe la suma como un desplazamiento hacia la derecha que se hace a partir de la ubicación del primer sumando en la recta numérica (Anexo 10).

Obviamente, para los niños es complicado entender abstracciones vinculadas a cómo es posible moverse menos tres pasos o quitar menos siete objetos para los casos en que se resta un número negativo como por ejemplo en 5 - (-3) es decir, restar -3 de 5. Para tal caso se usan las propiedades del anillo de los números enteros en la que se expresa la resta como una suma de números con signo. Un signo menos extra simplemente denota inversión aditiva. Entonces se puede escribir la misma expresión de la siguiente manera 5 - (-3) = 5 + 3 = 8. El anillo ya tiene el concepto de inversiones aditivas y no necesita separar la operación de sustracción como una nueva. Esto se les explica a los niños para que puedan reescribir las adiciones o sustracciones que por signos extra en medio de los números no representen de forma clara una suma.

Para hacer memoria de trabajo sobre el tema se proponen decenas de ejercicios para que el niño establezca: si hay números enteros positivos o negativos, la operación (suma o resta), y de ser necesaria, la reescritura de la expresión matemática para hacerla más fácil de visualizar. Precisamente en la visualización y observación radican varias de las dificultades observadas en los niños al tratar la matemática formal con ellos. Las expresiones matemáticas, ecuaciones, representaciones en la recta numérica o el plano cartesiano son textos discontinuos que deben encararse de una manera diferente a como se hace con un texto continuo. La unidad didáctica hace uso de los kanji, caracteres de la escritura japonesa, para que los estudiantes afronten el reto de utilizar un arsenal de herramientas cognitivas con el fin de observar y repetir el trazo de un kanji lo que podría mejorar sus desempeños en el momento de enfrentar la lectura de símbolos matemáticos asociados al tema de los números enteros.

La hipótesis es que si los niños reconocen el número de trazos, su disposición, la dirección en la que se hacen, el orden de ejecución y otras características estarían utilizando áreas extensas de su cerebro y procesos similares a los que se utilizan cuando se explora un texto discontinuo de carácter matemático, en este caso expresiones en las que hay un conjunto de números con su propia simbología y su aritmética.

Para adelantar ese proceso se trabajaron aspectos básicos de los kanji a modo de generalidades. Solamente se trabajaron unos pocos kanji porque la idea era utilizar los ideogramas como un modo de mantener la atención y definir posibles rutas para hacer una lectura de rastreo en la que se buscan y ubican hitos, ciertos aspectos relevantes en la estructura de cada kanji para luego tratar de reproducirlos y finalmente reconocerlos a pesar de sus similitudes (Anexo 11). Estos ejercicios se desarrollaron en clase y con la ayuda del profesor que guiaba la práctica. Los ejercicios fueron interesantes para los niños que expresaban su gusto por conocer otro idioma. En cuanto a la ejecución, los estudiantes que están a la vanguardia en cuanto a la ejecución de la guía sobre kanjis son aquellos que tienen buen rendimiento académico y no tienen dificultades con el área debido quizás a su atención, concentración, interés y constancia a pesar de la dificultad. El resto de niños, la mayoría de los estudiantes que conforman la muestra de la investigación, hacen la tarea por obligación y sin seguir las pautas del profesor pues, el ejercicio al partir de la atención, dificulta su seguimiento a niños con dispersión mental.

Luego de los ejercicios con kanji se introdujo el tema de operaciones con enteros. Paso seguido, se pasa al patio donde se encuentra la recta dibujada para que los niños hagan el ejercicio de sumar o restar varios números entendiendo la operación como desplazamiento hacia la derecha en caso de encontrar el operador suma o hacia la izquierda en el caso de encontrar el signo menos. La totalidad de los niños hicieron correctamente el ejercicio con varios casos que se les plantearon. Incluso cabe resaltar el caso de un niño de 12 años (que se incorporó al colegio ese mismo día luego de hacer traslado desde Rionegro, (Santander). Él no conocía los números enteros pero por su atención a los ejercicios realizados por sus compañeros era capaz de realizar sumas y restas que se comunicaban de forma oral haciendo desplazamientos corporales e incluso corregía las ejecuciones que les fallaban a otros niños.

De vuelta, en el salón de clases, se plantearon los mismos ejercicios realizados en el patio con la recta numérica gigante, para realizarlos utilizando la recta numérica de cartón. Habían transcurrido entre tres y cuatro días de la última clase y la mayoría de los niños no recordaban el procedimiento de suma y resta como desplazamiento por lo que no completaron el ejercicio. Hubo necesidad de repetir la clase con la recta gigante una clase más y luego sí proponer los ejercicios escritos en el salón. La mayoría de los niños completaron los ejercicios de manera satisfactoria. Con aquellos que había dificultades se hizo un repaso adicional y al final todos hacían ejercicios que involucraban dos números. Hay que apuntar que la mayoría de los niños que tenían dificultades no habían traído los materiales necesarios para hacer su regla de cartón así que se les pidió prestadas a sus compañeros las suyas, lo que retrasó a algunos niños en la actividad de clase.

Se hizo un repaso con la ayuda de todos para que pudiera proponerse la evaluación para la semana siguiente. Los niños estaban animados y muchos de ellos pedían que la evaluación se hiciera de manera inmediata. Para revisar si el aprendizaje superaba la prueba del tiempo la evaluación se realizó entre cuatro y cinco días después de la última clase. Los productos de la mayoría de los niños fueron deficientes no solo por la falla en los resultados de las operaciones sino porque había inconsistencias en las que en ocasiones con planteamientos similares hacían procedimientos diferentes. Por ejemplo, ante -2+ (-1) varios niños obtuvieron como resultado 3; y con -6+ (-2) obtuvieron 4. Esas inconsistencias revelaron que los niños no hacían un solo algoritmo de operación, aunque fuera equivocado, sino que hacían los ejercicios de forma azarosa, según les pareciera en ese momento.

La construcción de la memoria de trabajo se basa en la repetición hecha con atención y muchos estudiantes de la población no realizan ejercicios para repetir el algoritmo de operación, ni en clase ni en la casa, lo que hace que cualquier forma de enseñar se vuelva infructuosa en términos de aprendizaje. Este fue el caso pues aunque se propusieron varios ejercicios para aprender la forma de sumar y restar, pocos estudiantes completaron la tarea de manera personal. La mayoría copió trabajos propuestos para la casa a compañeros que resolvieron atentamente la práctica, lo que hace que en esa mayoría haya muy poca construcción de la memoria necesaria para adquirir la habilidad de operar con enteros.

Para tratar de subsanar ese problema se pensó en hacer un folleto, dirigido por el profesor pero, elaborado por los estudiantes siguiendo indicaciones particulares acerca de los contenidos pero no sobre el diseño (Anexo 12). En el folleto estaban sintetizadas a manera de instructivo los pasos para hacer sumas y restas según el método enseñado. El ejercicio se completó y luego se permitió su uso durante los trabajos de clase y las evaluaciones. Aunque se autorizaba su uso como ayuda para el momento de hacer la evaluación del tema muchos niños, cuando se les interrogaba porque no lo utilizaban, algunos decían que no les ayudaba porque en los ejercicios, según ellos, los números cambiaban haciéndolo inoperante para ellos.

Después de este proceso, una vez practicadas las evaluaciones, los resultados en las evaluaciones individuales fueron deficientes. Se hacían talleres de clase para reforzar el aprendizaje sobre todo cuando había la oportunidad de tener dos horas seguidas. Al ser evaluados los talleres las calificaciones en muchos de ellos eran buenas pero luego de un par de días, si se les evaluaba, los estudiantes mostraban poca consistencia a la hora de resolver el mismo tipo de ejercicios. Aparentemente, en casa de muchos estudiantes se hacía poca práctica de ejercicios propuestos para el tema y el conocimiento se diluía de una clase a otra sin poderse consolidar completamente.

Aunque no se había logrado consolidar el tema de suma y resta de enteros había que seguir la programación del área y continuar con la enseñanza de la multiplicación de números enteros. Para hacer introducción al tema se plantearon ejercicios de búsqueda visual (encontrar personajes en una imagen, sopas de letras y números, hallar diferencias entre diferentes tipos de imágenes) para mostrar lo importante del rastreo de elementos como forma de lectura de textos discontinuos como los que se hallan en expresiones matemáticas en las que se combinan sumas, restas y multiplicaciones con signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves) y que ayudan a definir el orden de operación.

Luego se hizo un repaso del uso de los signos de agrupación mediante ejemplos y ejercicios de clase. Al introducir la multiplicación de enteros se explicaron sus propiedades y la forma en que los paréntesis ayudaban a definir expresiones en las que se combinaban diferentes operaciones como la suma y el producto. Aquí era importante repasar la idea de que un signo representaba una idea según los elementos que lo acompañan, es decir que el contexto juega una parte importante de la lectura que se haga de un elemento simbólico (Anexo 13). Por ejemplo si se usa un paréntesis en la siguiente expresión $3(-4)$ es para expresar de forma sintética la multiplicación del 3 con el -4; en cambio, en la expresión $(2-8+3)/3$ es para señalar que hay que operar primero los números que están dentro del paréntesis y luego la división. Esta dificultad de los diversos significados de un mismo signo produce duda en los estudiantes que comienzan a operar con los enteros y por ello se les propone a los estudiantes actividades para comprender la importancia de interpretar correctamente los símbolos matemáticos (Anexo 14).

Además, si los estudiantes tienen debilidades haciendo la suma, al explicárseles la operación producto y la jerarquía de las operaciones junto con los signos de agrupación y su uso, hay una gran confusión por la gran cantidad de variables que deben manejar de manera casi simultánea (Anexo 15). Un experto debe manejar: los símbolos necesarios para escribir números positivos y negativos, la forma de operar en la suma y el producto, las diferentes formas de escribir las operaciones y los significados de los signos de agrupación. Por todo esto fue que se plantearon de nuevo ejercicios con kanji para mejorar las destrezas de atención y observación que ayudan a la lectura correcta y que se pueden transponer a la matemáticas. Estas actividades fueron de interés solo para una parte de los estudiantes quizás porque no implicaban necesariamente una evaluación de conocimientos matemáticos propiamente.

Después se retomaron los conceptos básicos de la operación producto; en este momento los estudiantes estuvieron más displicentes con los talleres y los trabajos quizás porque la dificultad que ellos sentían se manifestaba en el desinterés por aprender. La forma de intentar enfocarlos era proponiendo ejercicios en los que se les ayudaba mediante preguntas tales como: "¿Cuántos números positivos hay en la siguiente expresión? ¿Cuántos negativos? ¿Hay signos de agrupación? ¿Qué operaciones hay? ¿Cuál operación se hace primero? ¿El folleto sobre la suma ayuda a hacer la operación? (Anexo 16). Los resultados de los talleres mejoraron mucho con esta metodología pero muy pocos niños incorporaron la metodología de la respuesta a estas preguntas para resolver los ejercicios individuales. (Anexo 17). Para intentar promover el ejercicio de plantearse las preguntas para resolver los ejercicios se diseñó otro folleto que sintetizara los pasos y les ayudara a recordarlos (Anexo 18).

Finalmente, se hicieron varios talleres para tratar de consolidar los conceptos de la multiplicación y la combinación con sumas y signos de agrupación en un mismo polinomio aritmético.

3.2.3 Evaluación

La evaluación del aprendizaje se hizo en dos formas: la primera, una vez se explicaba el tema en la misma clase se proponían un taller para entregarlo a su terminación y la segunda, se programaba una evaluación de las mismas características del taller cuatro o cinco días después del último repaso del tema o taller.

En la primera forma, mientras hubo acompañamiento y dirección por parte del profesor la mayoría de las dificultades fueron superadas aunque en los talleres individuales aparecían algunas fallas explicables por la falta de concentración y de la memoria de trabajo.

En la segunda forma de evaluación, se planteaban cuestionarios similares a los realizados en los talleres de clase pero los resultados fueron muy deficientes en buena parte de los estudiantes. Las fallas eran en el algoritmo de las operaciones, en los cálculos y en la jerarquía de las operaciones. Al interrogarse si se había repasado mediante la realización de ejercicios o la revisión de apuntes en casa casi la totalidad de ellos manifestaron que no habían hecho prácticas para repasar los conceptos vistos en clase lo que explicaría los bajos resultados presentados en las pruebas individuales.

3.3 Población y muestra

El Colegio Facundo Navas Mantilla se encuentra ubicado en el municipio de San Juan Girón y cuenta con cerca de 1550 estudiantes de los cuales 139 están en el grado séptimo que es de donde se toma la muestra para la intervención. La mayoría de ellos proviene de hogares estratificados en los niveles 1 y 2.

La jornada de la mañana es la única en la que tienen programadas clases los estudiantes de séptimo. Su hora de entrada es a las seis y la salida a las doce y veinte. Tienen un receso de veinte minutos después de terminar la tercera hora de clase las cuales tienen una duración de 60 minutos. Hay cuatro cursos en el grado pero la muestra se toma en tres de ellos. Cada uno de estos cursos tiene entre 38 y 41 estudiantes al inicio del año.

La edad de los estudiantes está entre los 11 y los 15 años. Las mujeres son mayoría en los tres cursos . Los mejores resultados son logrados en promedio por las mujeres. Aunque hay muy buenos desempeños por algunos niños, en su mayoría, las niñas lideran los procesos de aprendizaje sin dejarse de presentar casos entre ellas con muy malos desempeños en las matemáticas.

En el Colegio Facundo Navas Mantilla los resultados en matemáticas no son los mejores. En las evaluaciones hechas por la prueba SABER de noveno entre el 2013 y el 2014, el 80% de los estudiantes se sitúa en los niveles mínimo e insuficiente mientras que no existe ningún estudiante en el nivel satisfactorio.

3.4 Instrumentos para la recolección de información

Para recolectar información para el proyecto se utilizaron esencialmente tres tipos de instrumentos: el diario de campo pedagógico, los cuestionarios hechos a los estudiantes y sus cuadernos de apuntes.

El diario de campo (ANEXO) estaba diseñado especialmente para apuntar las observaciones personales sobre el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes y revisar la propuesta con el fin de hacer afinaciones progresivas para mejorar su aprendizaje. Las casillas que tenía el diario incluían: curso, fecha de la actividad, nombre de la actividad, grado de aceptación (entusiasmo en el desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes), nivel alcanzado (en el desarrollo de la actividad por parte del grupo), evaluación (si se hacía una prueba individual que midiera el nivel alcanzado por cada niño, se señalaban la prueba realizada y los resultados generales) y las observaciones adicionales.

Los cuestionarios tenían por objetivo evaluar que tanto se había avanzado en: las habilidades perceptivo motrices, las habilidades para la observación y los conocimientos sobre los números enteros. Algunas veces se hacían en grupo, otras veces en el patio de descanso (sobre la recta numérica gigante), algunas veces no tenían una calificación numérica que afectara la nota de la asignatura en el boletín de calificaciones y muchas veces de forma oral pero la mayoría eran cuestionarios escritos de carácter individual y con nota computable.

Además, los cuadernos de apuntes ayudaban a registrar la actividad del estudiante sobre todo dentro de la clase. Aparte de llegar a completar la actividad propuesta se observaba en el cuaderno características como la escritura, la representación gráfica, el manejo del espacio de trabajo y la consistencia a lo largo de todo el ejercicio, todos ellos elementos relacionados con las habilidades que se querían potenciar en el estudiante por medio de la estrategia didáctica. A los niños se les hacían sugerencias orales y escritas sobre el desarrollo del trabajo para que redirigieran sus esfuerzos cognitivos de una mejor manera.

3.5 Validación de los instrumentos

Los instrumentos que se utilizaron a lo largo de la investigación se validaron a la luz de los objetivos planteados y la literatura que sirvió de fundamento. Había tres componentes que eran referentes específicos para el proyecto: las habilidades perceptivo-motrices, las habilidades en la observación y las habilidades matemáticas específicamente utilizadas para la aritmética de los números enteros. Cada uno de estos componentes se tuvo en cuenta a la hora de crear los instrumentos para recolectar información que sirviera para evaluar la pertinencia del proyecto y su incidencia en el aprendizaje de los estudiantes.

3.6 Resultados y discusión

Los resultados de la investigación se analizarán y dividirán de acuerdo a los objetivos planteados en su comienzo.

3.6.1 Diagnóstico

El primer objetivo del proyecto era identificar el dominio de la aritmética de los números naturales por parte de los estudiantes participantes en los tres cursos. Para esto se utilizó un cuestionario (ANEXO) en el que se planteaban ejercicios con operaciones como la suma, la resta, la multiplicación y la división. Algunos proponían realizar una única operación y otros eran polinomios aritméticos. Los ejercicios en los que se presentaban sumas y restas fueron los que tuvieron mayor número de aciertos mientras que aquellos en los que había multiplicaciones y divisiones junto con los polinomios fueron los que tuvieron menor número de respuestas correctas o sin responder. Al interrogárseles por la causa de los resultados, la mayoría de los estudiantes acusaron sus problemas con el conocimiento de las tablas de multiplicar y los algoritmos para realizar las divisiones y operaciones múltiples con y sin signos de agrupación.

Para intentar enmendar la dificultad de las tablas se planteó una clase en la que se les propuso revisar bajo la teoría de aprendizaje VAK (visual, auditivo y kinestésico) diferentes formas de aprender las tablas de multiplicar. Luego del taller se les invitó a aprenderse las tablas con el incentivo de que habría una nota positiva para aquellos que los hicieran. Luego de dos semanas en las que se evaluó de forma oral, pasando al tablero de manera individual a los estudiantes, los resultados fueron en la gran mayoría muy malos; no completaron la tarea de aprender de memoria la tabla y cuando intentó explicárseles los algoritmos de división (con y sin resta visible) se pudo notar que es grande la dificultad por no poder encontrar con seguridad el número de veces que un número contiene a otro.

Con respecto a los signos de agrupación y jerarquía de operaciones dentro de un polinomio había falta de conocimiento del orden en que se realizan las operaciones. La gran mayoría de los estudiantes comenzaban a operar siguiendo el orden de escritura que va de izquierda a derecha como lo hacen con la lectura alfabética y no comprendían la relevancia de los paréntesis a la hora de evaluar ciertas partes del polinomio antes que otras.

Todos estos aspectos que resultaron del cuestionario de diagnóstico muestran grandes deficiencias en los procesos de construcción de la memoria de trabajo y del aprendizaje de los algoritmos de operación en la aritmética de los números naturales en la gran mayoría de los estudiantes. Sin dominio en estos temas los estudiantes se sienten intimidados frente al nuevo conocimiento; además la falta de experticia operando naturales es causa de que la operación con números enteros se dificulte porque, si se conoce perfectamente un tema, hay fundamentos que el estudiante transpone de forma natural por el conocimiento previo que tiene. Siendo estudiantes de séptimo hay que dar cumplimiento al programa del área y no se podía comprometer más tiempo en enseñar las tablas de multiplicar y luego los procedimientos de división y operación en polinomios aritméticos con naturales ya que no corresponde al nivel y sobre todo que no se notaba en los estudiantes el compromiso por usar parte de su tiempo libre en casa para ponerse al día en estos temas.

Dentro de las actividades de diagnóstico se planeó identificar el desempeño de los estudiantes en pruebas de atención, observación y ubicación espacial. Con respecto a la atención se hicieron ejercicios grupales en los que se les presentaban dos imágenes similares que tenían algunas diferencias y que debían ser identificadas por los estudiantes. Buena parte de los estudiantes encontraban la mayoría de las diferencias pero no en su totalidad. Cuando demoraban en encontrarlas, mostraban su frustración y pedían que se les dijera dónde estaban. Para identificar el nivel de su observación se les colocaba a los estudiantes una imagen para ser vista durante un tiempo determinado; luego se les quitaba la imagen y se les solicitaba que respondieran preguntas referidas a ella. Los niveles de atención así medidos mostraban que los estudiantes se fijaban en los rasgos más sobresalientes de la imagen pero que solían pasar por alto detalles menos obvios.

Finalmente, dentro del esquema de diagnóstico que se quería hacer antes de implementar la estrategia didáctica, estaba la evaluación de la lateralidad y ubicación espacial de los estudiantes. Para ella se hicieron ejercicios en los que deberían seguir instrucciones que requerían el conocimiento de la diferencia entre derecha e izquierda. Cerca de la mitad de los estudiantes diferenciaron sin equivocaciones la derecha de la izquierda mientras que el resto de los estudiantes dudaron y fueron inconsistentes, tomando indiscriminadamente izquierda y derecha sin diferenciarlas. Debido a que la estrategia didáctica diseñada se basa en el desplazamiento sobre la recta numérica diferenciando derecha de izquierda se veía la necesidad de implementar los ejercicios relacionados con el dominio de la lateralidad.

3.6.2 Implementación de la estrategia didáctica

- Mejoramiento de las habilidades visuomotores y uso en la aritmética de los números enteros.

Una vez finalizado el diagnóstico se procedió a cumplir las actividades que conformaban la estrategia didáctica. Paralelo al refuerzo en las tablas de multiplicar y su evaluación se comenzó con las actividades relacionadas con el aprestamiento de la lateralidad y ubicación espacial, principalmente con el afianzamiento de la diferenciación del concepto de izquierda y derecha. Para ello se utilizaron imágenes donde había elementos que estaban dispuestos indistintamente señalando la izquierda o la derecha para que los niños rápidamente indicaran verbalmente la dirección correcta.

También se hicieron ejercicios en el patio de descanso que implicaban todo el cuerpo; se dispusieron una serie de obstáculos que deberían ser superados por un niño que tenía los ojos vendados y que era guiado por otro mediante comandos como “izquierda dos pasos, derecha un paso” para completar un recorrido. Los dos niños debían tener muy claros los conceptos de izquierda y derecha: el que guiaba porque debía orientar a su compañero poniéndose en su lugar y controlar con eficiencia y velocidad el movimiento del niño vendado, y este a su vez porque debía cumplir las instrucciones dadas por el niño “vidente” y confiar en que comprendía completamente, de forma rápida y sin duda, el concepto de izquierda-derecha. Se les dio a los niños tiempo para que hicieran de forma libre varios recorridos para que consolidaran el concepto y fueran mejorando su velocidad y precisión. Aunque había al principio había en algunos niños equivocaciones al dirigirse en el sentido contrario al indicado después de varios ejercicios todos los niños eran capaces de distinguir con precisión la derecha de la izquierda. Las parejas de niños se corregían entre sí haciendo observaciones de cómo podían recordar efectivamente estos conceptos, lo que permitía al profesor buscar los niños con más deficiencias y ayudar a corregirlas. La dificultad que se presentó es el desorden que por momentos comprometía la actividad; mientras se les ayudaba a algunos niños a corregir dificultades, otros jugaban o se iban para otras zonas del colegio haciendo que el profesor tuviera que cumplir labores de vigilancia en lugar de orientar la actividad. Cada vez que hubo actividad en el patio se tuvo que sancionar disciplinaria y académicamente a estudiantes que no se centraban en la actividad sino que se dedicaban a jugar o a esconderse en el colegio.

Luego se procedió a hacer la conexión de los conceptos derecha e izquierda con los de “positivos y negativos” relacionados con la ubicación en la recta numérica. Es necesario en este momento introducir el concepto del número cero como punto que señala la separación de la zona de los números negativos de la de los positivos. En consecuencia, hacer hincapié en que al ser frontera de las dos zonas, el cero no corresponde a ninguna de las dos, así que no puede considerarse ni positivo ni negativo. Los ejercicios corporales ahora debían sustituir la palabra izquierda por la palabra negativo y la palabra derecha por positivo. Aunque al principio buena parte de los niños tendían a indicar izquierda y derecha en los ejercicios, de a poco fueron mostrando el remplazo y lo adoptaron con relativa facilidad, evidente más en los niños que al principio no reconocían la derecha o izquierda lo que mostraría que su falta de dominio del concepto era debida a que en su ambiente familiar y escolar previo no se les acostumbró a utilizar las palabras que se refieren a su lateralidad corporal.

Continuando con el desarrollo de la estrategia planteada se pasó a enseñar el concepto de valor absoluto de un número entero como la distancia que lo separa del número cero. En la recta numérica gigante se les indicaba el número y ellos debían moverse desde allí hasta el cero y expresar su valor absoluto. Se les indujo a que los estudiantes pensaran que el valor absoluto al ser una distancia siempre era un número positivo. También se plantearon ejercicios en los que dándoseles un valor absoluto deberían decir los dos números que cumplían con la condición. El concepto fue fácilmente adoptado por los estudiantes quienes no tuvieron contratiempos es entenderlo.

Para ir pasando del desplazamiento físico del cuerpo al desplazamiento mental sobre la superficie del papel se dirigió a los estudiantes en la elaboración de una recta numérica elaborada en cartón corrugado de unos 40 cm de longitud que podía incorporarse a los útiles escolares sin generar incomodidad. Los ejercicios que se habían planteado en el patio de descanso sobre la recta numérica gigante se trasladaron al aula de clases siguiendo las mismas instrucciones con el mismo lenguaje para que los estudiantes siguieran la misma organización mental que tuvieron cuando se movilizaron físicamente.

Sobre el cuaderno se hicieron ejercicios de las mismas características: ubicación de números sobre la recta, definición de la zona de números positivos y de negativos usando el cero, y cálculo del valor absoluto de un número. La respuesta de los niños a los ejercicios sobre el papel mostraba similitudes en su comportamiento en el patio: aquellos que estuvieron haciendo los ejercicios de forma atenta y concentrada sobre la recta gigante tuvieron un buen desempeño en las actividades sobre el cuaderno; por otra parte los estudiantes que no hicieron la actividad de forma repetida y constante, sino que se distrajeron en muchos momentos, no estuvieron centrados en las actividades sobre el cuaderno y no completaron la actividad aunque hubiera alcanzado el tiempo a muchos otros. Se hicieron varias clases intentando que los estudiantes con dificultades en la atención y la concentración fueran mejorando sus desempeños en los ejercicios planteados pero la curva de rendimiento mantuvo la misma tendencia de bajos niveles de aprendizaje en ellos y con el agravante que los estudiantes que ya dominaban el tema se sentían aburridos y cansados de actividades que no representaban reto para ellos.

Por esta razón se tomó la decisión de avanzar a pesar de que había estudiantes que no completaban las actividades, no tanto por su dificultad sino quizás por su falta de motivación para hacerlo. Las siguientes actividades de la estrategia se establecieron para enseñar la operación suma de los enteros. Los primeros ejercicios que se plantearon se hicieron, de nuevo, en la recta numérica gigante ubicada en el patio de descanso. Se les mostró que una suma era un desplazamiento desde un número (el primer sumando) hasta cubrir la distancia que señala el segundo sumando. La dirección del desplazamiento se establece según la convención de que una suma es movimiento hacia la derecha y una sustracción uno hacia la izquierda. Aún no se les mostraba la formalización de la operación ni mucho menos las propiedades relacionadas con el inverso aditivo para evitar sumas o restas con un segundo sumando negativo. Así que todos los ejercicios planteaban un segundo sumando positivo cambiando alternativamente de sumas a restas con números positivos y negativos.

Esta actividad fue un poco más dinámica: se incentivó con una calificación el compromiso con ella y los estudiantes estuvieron más atentos a desarrollarla. De forma rápida la mayoría de ellos comenzaron a comprender la forma de mecanizar la suma o resta pudiéndolo hacer con una secuencia de varios números. Algunos, aquellos que tenían problemas de atención y de seguimiento de instrucciones, presentaban dificultades a la hora de recordar la dirección del desplazamiento pero después de hacerlos repetir el ejercicio, eran capaces de ejecutarlo sin asistencia alguna. Es importante mencionar que el día que se hizo esta actividad con uno de los cursos, se incorporó al colegio un estudiante de 13 años que se había trasladado junto con su familia desde el municipio de Rionegro (Santander) hasta el de Girón. Por ser su primera clase de matemáticas se le preguntó, entre otras cuestiones, si conocía algo de los números enteros, a lo que manifestó que no sabía nada del tema. Se le invitó a sentarse a observar la actividad sin que tuviera que cumplirla, sin embargo, después de 15 minutos el estudiante realizaba sumas y restas sin que nadie le hubiera explicado nada. Se desplazaba por la recta como si la conociera de mucho tiempo y hasta corregía errores que algunos de sus nuevos compañeros cometían a la hora de operar mostrando las ventajas del método de desplazamiento usando el cuerpo para un aprendizaje rápido y que obvia la exposición catedrática como la forma básica de enseñanza.

La última actividad de la estrategia didáctica que intentaba un desarrollo de las habilidades visuomotoras para luego trasladarlas al aprendizaje de las matemáticas era que los estudiantes lograran hacer síntesis de su conocimiento. Ellos debían realizar varios ejercicios y luego tratar de sacar una conclusión que fuera del tipo: “cuando dos números tienen el mismo signo el resultado de sumarlos es igual a sumar sus valores absolutos y ponerle el signo que ambos tenían". Sacar este tipo de conclusiones se basa en el concepto de sintetizar. Esta es una operación mental de alto nivel pues exige de la atención, la observación, la inferencia, la elaboración de hipótesis y de la deducción, todas ellas actividades que exigen gran rigor. Después de varios ejercicios en que los niños intentaban recordar los resultados, (ya que aún no se les había enseñado a formalizar la escritura matemática de la operación con enteros) se les pedía que buscaran inferir resultados de operaciones que no debían realizar por desplazamiento corporal sino ayudados por la recta de cartón o si fuera posible sin contar con ella. La actividad se hizo en grupos de tres personas pero ninguno de ellos completó el ejercicio por su cuenta. Así que para ayudarlos a concretar sus hallazgos se les dio una frase en la que había espacios por completar, del tipo: "cuando dos números tienen el mismo signo el resultado de sumarlos es igual a ____________ sus valores absolutos y ponerle ___________que ambos tenían". De esta forma más de la mitad de los grupos completaron el ejercicio y pudieron crear por su propia cuenta una frase que sintetizara la suma de dos números de diferente signo, aunque les tomó mucho más tiempo alcanzarla. Estos ejercicios fueron complicados para los niños que buscaban evitar enfrentarse a estos retos mentales y se cansaban rápidamente de ellos, por lo que no los completaban si no había un incentivo emocional e intelectual por parte del profesor.

- Mejoramiento de las habilidades visuales y su uso en la aritmética de los números enteros.

Según el MEN el conocimiento matemático tiene dos facetas: la práctica que da sentido al uso social del conocimiento y la formal que se comunica a través del lenguaje propio del área y que como tal puede tener diferentes registros de representación. En este momento del desarrollo didáctico era necesario entrar a la formalización mediante la lectura y escritura de diferentes tipos de texto.

En el momento de formalizar las matemáticas, una de las operaciones claves es la observación ya que se requiere un registro escrito para comunicar no solo los resultados de cálculos sino que aún más importante aún, se deben presentar los algoritmos de solución, las suposiciones y modelos necesarios para llegar a dar una respuesta frente a un problema en particular y la forma escrita es la forma idónea para transmitir las conclusiones. La comunicación, de los resultados y las formas de solución, es una de las formas de establecer el nivel de competencia de un estudiante, definidas por los estándares básicos propuestos por el MEN.

La comunicación escrita es fundamental en el estudio de las matemáticas y se basa en un gran componente visual por lo que se requiere afinar la observación. Esta observación requiere que haya una serie de operaciones mentales que se usen en un solo momento para poder hacer lectura y escritura de la estructura formal de las matemáticas. Estos procesos o actividades primarias son múltiples y aunque similares hay que tratar de deslindarlos para simplificar la tarea para el estudiante. Luego de proponer actividades que potencien las actividades primarias de la observación de manera separada, hay que proponer una actividad que reúna todas las actividades primarias en una sola, relacionada para este caso con las matemáticas de los números en teros.

Una actividad mental primaria, quizás la primera, es la de percibir. Hay un reconocimiento de ciertas características de un objeto y se comparan con las que se tienen alojadas en la mente. Por ejemplo, cuando se le dice a alguien que tome la manzana de la mesa, el sujeto se hace una imagen mental de la manzana y la posible situación en la que se puede encontrar. Para el caso de las matemáticas, el primer reconocimiento de la estructura formal en el nivel que se desarrolla el proyecto es el que se hace sobre los números y los signos de suma, resta, multiplicación y división.

Para mejorar la observación se comenzó con actividades que permitieran hacer ejercicios sencillos de atención y concentración y que al mismo tiempo fueran de tipo lúdico. Progresivamente se fueron cambiando a ejercicios que tuvieran imágenes menos comunes como los kanji para utilizar un grupo de herramientas cognitivas poco habituales en el cerebro lector alfabético. Para finalizar con ejercicios que utilizaban la escritura matemática convencional para el tema de los números enteros.

Las primeras actividades fueron laberintos, sopas de letras, sopas de números, textos discontinuos que llaman la atención y permiten desarrollar la observación de los estudiantes.

Luego se hicieron ejercicios de búsqueda de imágenes como el hecho con los libros "¿Dónde está Wally?" que es una serie creada por Martin Handford. No son libros con texto alfabético sino con dibujos para jugar a encontrar a Wally en una imagen con cientos de detalles que despistan al lector. El personaje principal Wally y todos sus acompañantes siempre van vestidos de la misma manera en todas las escenas, así aunque cambie el paisaje hay una identidad definida y constante para los dibujos que hay que encontrar. Esto es importante para la unidad didáctica porque permite comenzar jugando, algo que motiva el interés de los niños, y al mismo tiempo a nivel didáctico, la actividad requiere que el niño esté atento a las características de los personajes las cuales son constantes en un panorama cambiante, de la misma forma en que signos y números son invariantes en su forma aunque estén en "locus" diferentes en la escena matemática (ecuaciones, gráficos). Al mismo tiempo se hace un ejercicio metacognitivo para que el estudiante reconozca su forma de realizar el ejercicio, es decir que se dé cuenta cómo piensa cuando está en medio de una actividad de observación y atención lo que le puede ayudar a trasladar esa misma estrategia mental cuando se enfrente a la escritura y lectura con signos matemáticos.

Luego se plantearon ejercicios donde se buscaban las diferencias entre dos imágenes. Esto hace que los estudiantes se planteen una lectura de textos discontinuos que lleva implícito un rastreo y una comparación entre imágenes que difiere de la lectura alfabética de palabras que es ordenada por la ubicación de los grafemas. Esta misma forma de lectura por búsqueda de objetivos es la que se desea sistematizar para cuando el estudiante se encuentre frente a una expresión matemática donde hay una jerarquía de operaciones y donde hay cambios que cambian la forma de enfrentar su resolución. Los estudiantes estuvieron entusiasmados pero les costaba completar los ejercicios en un tiempo determinado; otros no fueron capaces de completar los ejercicios ni eliminando la limitante de tiempo lo que es preocupante porque son imágenes que no requieren ser procesadas posteriormente como sí lo hacen las imágenes matemáticas que son insumo primario para cumplir con operaciones mentales como el análisis, la síntesis y otras más.

Lo mismo sucedió con la actividad en la que se les mostraba a los estudiantes una imagen por un minuto, luego se les ocultaba y se les planteaban preguntas relacionadas con ella. La observación y la memoria de corto plazo eran limitadas y la persistencia para continuar con los ejercicios solo era importante para los estudiantes que tienen buenos desempeños frente a sus compañeros.

Siguiendo la programación previamente establecida se comenzaron las actividades con los kanji. La idea era mostrar que aunque las matemáticas no es un lenguaje hay elementos lingüísticos que traspuestos en las matemáticas ayudan a comprenderlas. Por ejemplo, en el idioma español una misma letra se puede pronunciar de dos formas diferentes de acuerdo a la posición que ocupe frente a otras letras. Por ejemplo, en la palabra “canción” la letra c se pronuncia de dos formas diferentes aunque es la misma letra. De la misma forma, en matemáticas un mismo símbolo tiene significados diferentes de acuerdo con su posición o tamaño.

La actividad con los kanji tenía como propósito mejorar las habilidades visuales de los estudiantes al tiempo que trabajaban en la memoria con el fin de utilizar algunas estrategias similares para recordar el significado de ciertos signos matemáticos usados en la escritura de operaciones aritméticas con números enteros. Hay que aclarar que el propósito de la actividad no era aprender kanjis sino proponer una actividad metacognitiva, en la que los estudiantes revisaran cómo hace el cerebro para aprender el significado de ciertos símbolos no alfabéticos, de tal forma que se pudiera utilizar la misma estrategia para aprender a leer y escribir operaciones con números enteros.

Los kanji son los logogramas utilizados en la escritura del idioma japonés. Son como nuestro alfabeto pero en lugar de los 27 signos que aprendemos en los primeros grados de primaria, un adolescente de 16 años en Japón debe saber de memoria 1645 kanjis.

Algunos kanjis son muy parecidos como lo son ciertas letras en nuestro alfabeto. Por ejemplo, en el idioma español la letra “b” y la letra “d” se componen de los mismos trazos pero en diferente posición. De igual forma, hay kanjis que son muy parecidos entre sí y que hay que diferenciar de otros. Para hacerlo es necesario revisar el orden de escritura de los trazos, la posición de los trazos, el punto donde se inicia y donde se termina, es decir que hay que crear una memoria muscular al mismo tiempo que una visual operativa. La actividad pedía repetir los kanji que estaban organizados por parejas que eran muy similares entre sí. La actividad no fue completada por todos los niños: hubo falta de concentración, se distraían a menudo y hacían los ejercicios sin seguir las indicaciones. La mayoría buscaba completarlo de cualquier manera sin seguir la instrucción lo que hacía que muchos esfuerzos fueran infructuosos. Luego cuando se les pedía recordar los kanji y su significado pocos pusieron entusiasmo a la hora de la ejecución. Los pocos estudiantes que siguieron las indicaciones fueron aquellos que no habían presentado dificultades con las temáticas desarrolladas en clase; los mismos que no tenían dificultades con la convivencia en el salón de clases y que tenían una ética del trabajo desarrollada.

El paso seguido fue presentar un video que ilustrará las formas de trazar los kanji por japoneses y niños. Luego se les propuso ejercicios que estimularan su memoria para trabajar la escritura kanji. Muy pocos estudiantes hicieron con atención y concentración los ejercicios. La mayoría estuvo dispersa y no trabajaron el ejercicio completo.

Luego se explicó la manera formal de escribir una suma y una resta con enteros. Se hizo especial énfasis en que los estudiantes definieran cuantos números son positivos o negativos y qué operación media entre ellos. Luego se les recordó el método para sumar y restar usando la recta numérica y el desplazamiento como principio, lo mismo que sirvió de base en el trabajo de desplazamiento corporal. Se hicieron varias horas de clase en las que se combinó la explicación en el tablero con ejercicios hechos en el cuaderno. También se hizo una actividad grupal buscando que los estudiantes que ya habían comprendido la lectura fueran orientadores del proceso de aprendizaje de sus compañeros.

Cuando la actividad era guiada por el profesor la mayoría de los estudiantes podía hacer sumas y restas de varios enteros de forma correcta. Terminada la fase de explicación de una clase se les hacía una prueba escrita para revisar si se comprendía el tema. La prueba que consistía en sumas y restas combinadas era superada por buena parte de los estudiantes. La mayoría de ellos solicitaban una evaluación más formal para poder enseñar en casa los resultados. La evaluación no era necesaria solo por el efecto emocional sino que había que revisar si el aprendizaje se había consolidado, para ello se proponían ejercicios de práctica y se acordaba una fecha entre cuatro y cinco días después de finalizada la explicación para realizarla. Una vez llegaba el día, algunos estudiantes cuando se mencionaba la evaluación no recordaban haberla agendado lo que ponía en evidencia la falta de preparación. Sin embargo, la evaluación se llevaba a cabo mostrando muy malos resultados con ejercicios que eran del mismo tipo de los vistos en clase y propuestos para ejercitarse en casa.

Al ver los malos resultados, la mayoría de los estudiantes pidió una nueva explicación, la cual se hizo. Se propuso un trabajo de clase para revisar quienes tenían dudas con el algoritmo de operación expuesto dando un alto índice de comprensión. Con quienes tenían dificultades adicionales se hizo un trabajo grupal separado de sus compañeros, dentro de la misma aula, dirigido por el profesor para salvar los escollos para lograr el aprendizaje. Después se programó una segunda evaluación con la misma condición temporal para revisar la curva de aprendizaje en el tiempo. Los resultados fueron igual de malos para la mayoría: había fallas procedimentales y mucha inconsistencia.

Se les preguntó si estaban haciendo revisando los conceptos en casa o si estaban haciendo ejercicios de los propuestos en el blog o en clase, a lo que manifestaron que no habían completado ni un cuarto de hora de estudio después de salir de clases y hasta el momento de presentar la evaluación. Se les motivó y se les plantearon incentivos para que estudiaran en casa que no fueron efectivos.

Habiendo que terminar la planeación del área se continuó con la enseñanza del uso de los signos de agrupación y la operación producto con números enteros. Se propusieron talleres de aprendizaje en las que se hacía hincapié en la lectura de rastreo buscando los signos de agrupación y siguiendo la jerarquía de operaciones, evitando seguir la lectura de izquierda a derecha impuesta por la lectura alfabética. Las primeras dificultades aparecieron por esta razón: los estudiantes no hacían una búsqueda de las operaciones siguiendo la jerarquía establecida sino que operaban siguiendo el orden de escritura. Los ejercicios se basaron entonces en un procedimiento en que los estudiantes escribieran primero las operaciones que identificaran, luego las ordenaran y por último operaran siguiendo la secuencia por ellos mismos establecida. Las dificultades para sumar, restar y ahora multiplicar aparecieron con más fuerza. La falta de pericia en las operaciones previas dificulta solucionar expresiones más extensas.

3.6.3 Evaluación del aprendizaje

La evaluación de conocimientos sobre la aritmética estaba planeada desde el comienzo del desarrollo de la estrategia didáctica. Consistía en solucionar individualmente polinomios aritméticos con enteros sin asistencia de la calculadora. Menos de la mitad de los estudiantes consiguieron completar los ejercicios de manera correcta. Las fallas fueron varias: desacato al orden de las operaciones, problemas con la operación suma y sus propiedades, problemas con la operación producto y sus propiedades que incluía las dificultades de operar con signos de agrupación. Teniendo en cuenta que no se llegó a planteamiento y solución de situaciones problemáticas en las que se usaran los números enteros, el alcance logrado desde la estrategia didáctica propuesta es un resultado que se puede mejorar.

3.6.4 Conclusiones

- ✓ El desempeño en la aritmética de los números naturales de los estudiantes de grado séptimo del Colegio Facundo Navas Mantilla participantes en el desarrollo de la propuesta didáctica era bajo.
- ✓ El desempeño de un estudiante en la aritmética de los números naturales puede servir para predecir su desempeño en la aritmética de los números enteros.
- ✓ Las actividades de ubicación espacial y de uso de la lateralidad corporal mejoran el desempeño de los estudiantes en el momento de ubicar los números enteros y de ejecutar la operación suma con números enteros si las indicaciones se dan de forma oral.
- ✓ Las actividades de observación y de memoria visual mejoran el desempeño de los estudiantes en el momento de leer expresiones aritméticas que contengan números enteros y las dos operaciones del anillo.
- ✓ Los resultados en la evaluación de ubicación y aritmética básica de los números enteros son buenos si se hacen inmediatamente después de finalizar las actividades de aprendizaje programadas para desarrollar la propuesta didáctica.
- ✓ Los resultados de una evaluación del aprendizaje acerca de la aritmética de los números enteros después de cuatro días de finalizar actividades de la propuesta pedagógica fueron muy deficientes.

4. Bibliografía

Amalric ,M. y Dehaene, S. (2016). Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. Proc Natl Acad Sci USA. *113*(18):4909-17. Doi: 10.1073/pnas.1603205113

Becerra, O; Buitrago, M & Calderón, S. (2014). Fenomenología asociada a una tarea que involucra adición y sustracción de números enteros. Comunicación presentada en Foro EMAD (4 de noviembre de 2014). Bogotá.

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. Enseñanza de las ciencias, 199-208.

Beltrán, C y Solis, G. Evaluación Neuropsicológica en Adolescentes: Normas para Población de Bucaramanga. Revista Neuropsicología, Neuropsiquiatría y Neurociencias, Julio-Diciembre 2012, Vol.12, Nº2, pp. 77-93 77.

Borjas, D. (2009). Aprendizaje de los números enteros una experiencia significativa. Universidad Nacional de Tegucigalpa.

Bruno, A. (2000). Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. En Climent, Nuria de los Ángeles; Contreras, Luis Carlos; Carrillo, José (Eds.), Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 119-130). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Cardona, J. (2004). Nociones básicas sobre el idioma japonés. Guía para hispanohablantes. Medellín: Abigalato.

Castillo, C. (2014). Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos. (Tesis de maestría) Universidad Nacional de Colombia. Palmira, Valle.

Cid, E. (2000). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Octubre de 2016. En file:///C:/Users/G40-80/Downloads/archivoPDF.pdf

Cid, E. (2006) Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Universidad de Zaragoza.

Cotlar & Cora Ratto. (1971) Introducción al álgebra. Nociones de álgebra lineal. Eudeba. Buenos Aires.

Cupitra, Jackeline; Aldana, Eliécer (2013). Aprendizaje del concepto de número entero en el marco de una ingeniería didáctica. En Gallego, Adriana P. (Ed.), Revista Científica (pp. 81-84). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Cyrille, J. y Javary, D. (2014). 100 palabras para entender a los chinos. México: Siglo XXI Editores.

Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. Journal of Experimental Psychology, 371-396.

Duval, R. (1999). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Elliot, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción. Madrid: Morata.

Gallardo, A. (1996). Teaching algebra and negative numbers: two case studies. Proceedings of the Eigteenth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. I, 73ase . 88-92. USA.

Gallardo, A. (2002). The 73ase don73 of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. Educational Studies in Mathematics, 49(2), 171-192.

Gallardo, A.; Santos, N; Hernández, J. (2010). La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria: un estudio de caso. En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, Assumpta (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 303-314). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

García, N. (2012). Proyecto Afromatematiquin, la ciencia de la alegría: una experiencia de la inclusión de actividades lúdicas en la enseñanza de matemáticas. Bogotá: Universidad de los Andes.

Glaeser, G. (1981), 'Epistemologie des nombres relatifs', Recherches en Didactique des Mathematiques, 2(3), 303-346.

González, J. L, Iriarte, M, Jimeno, M, Ortiz, A, Sanz, E. & Vargas-Machuca, I. (1999). Números Enteros. En: Matemáticas Cultura y Aprendizaje Vol. 6 Madrid: Ed. Síntesis. Pp. 21-104.

González, J. & Torres, J. (2012). Ambiente virtual de aprendizaje para la enseñanza de los números enteros en el grado sexto de la institución educativa INEM Custodio García Rovira del municipio de Bucaramanga. (Tesis de pregrado) Universidad Francisco de Paula Santander. Bucaramanga.

Hadamard, J. (1945) A Mathematician's Mind, Testimonial for An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton University Press.

Hernández, A; Gallardo, A. (2009). Sentidos de uso del cero y la negatividad en la recta numérica. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 57-66). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Hutton, R. (1971). Number system. An intuitive approach. Intext Educational Publishers. San Luis Obispo.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). Cómo planificar la investigación-acción. Barcelona: Gedisa.

Koyama, M., Hansen, P., & Stein, a. J. (2008). Logographic Kanji versus Phonographic Kana in Literacy Acquisition. How Important Are Visual and Phonological Skills? Annals of the New York Academy of Sciences, 41-55.

Ku Y., Hong B., Zhou W., Bodner M., Zhou Y.-D. (2012). Sequential neural processes in abacus mental addition: an EEG and fMRI case study. PloS ONE 7:e36410. 10.1371/journal.pone.0036410.

Landeira-Fernandez, J., Zylberberg-Landeira, R., Charchat-Fichman, H., Cardenas, F. P. (2012). Working memory and mathematical thinking: a cognitive and affective neuroscience approach. International Journal for Studies in Mathematics Education, 5, 65-88.

Lesh, R.; Sriraman, B. (2009) Re-conceptualizing Mathematics Education as a Design Science. Chapter Theories of Mathematics Education. Part of the series Advances in Mathematics Education pp 123-146.

Lytle, P. (1994) Investigation of a model 75ase don the neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction, Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, Portugal, Vol.3, p.I92-199.

Mantilla, M. & Murillo, R. (2015). Juego como lúdica para la enseñanza de los números enteros. (Tesis de especialización) Fundación Universitaria Juan de Castellanos. Bucaramanga.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (2004). Estándares básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (2016). Carlos Eduardo Vasco: un ejemplo de la docencia en el país. Octubre de 2016, de Ministerio de Educación Nacional Sitio web: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-167234.html

National Research Council. (1996). National science education standards. Washington, DC. National Academy Press.

Navia, N. & Orozco, V. (2012). Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la educación básica. (Tesis de pregrado) Universidad del Valle. Cali.

OCDE. (2015). PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. 27 noviembre 2015, de OCDE Sitio web: http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

Paz, S. (S/F). Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones. Caracas: Universidad Nacional Abierta.

Pochulu, M. D. (s.f.). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Iberoamericana de Educación, 1-13.

Smedt, B. & Verschaffel, L. ZDM Mathematics Education (2010) 42: 649. Doi:10.1007/s11858-010-0282-5

Tábara, J. (2001). Introducción a la teoría de anillos. Tomado en octubre de 2016 de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/docums/tabara-anillos.pdf)

Talero, C; Zarruk, J.; Espinosa, A. Percepción musical y funciones cognitivas. ¿Existe el efecto Mozart? España, Revista De Neurología. 2004 vol: 39 fasc: 12 págs: 1167 – 1173.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (2016). Doctorado Interinstitucional en Educación. Octubre de 2016, de Universidad Distrital Francisco José de Caldas Sitio web: http://die.udistrital.edu.co/comunidad/raymond_duval

Vasco, C. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volumen 2. Carlos Eduardo Vasco 1994. Bogotá. Universidad Nacional de Colombia.

Vásquez, C., Hervás, G., Rahona, J. J. y Gómez, D. (2009). Bienestar psicológico y salud: Aportaciones desde la psicología positiva. Anuario de Psicología Clínica y de la Salud APCS. 5, 15-28. Recuperado de http://institucional.us.es/apcs/doc/APCS_5_esp_15-28.pdf

Vergnaud, G. (1995). El niño, las matemáticas y la realidad. México: Trillas

Wikipedia. (2016). Stanislas Dehaene. Octubre de 2016, de Wikipedia Sitio web: https://en.wikipedia.org/wiki/Stanislas_Dehaene

5. Anexos

ANEXO 1. CUESTIONARIO SOBRE ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS NATURALES

NOMBRE_____________________________________CURSO _______FECHA______

Resuelva las siguientes operaciones teniendo en cuenta sus conocimientos sobre números naturales.

1. $27 + 9 \cdot 6 - 16 =$

2. $27 + 3 - 45 \div 5 + 16 =$

3. $2 + 5 \cdot (2 \cdot 3)^3 =$

4. $440 - [30 + 6\ (19 - 12)] =$

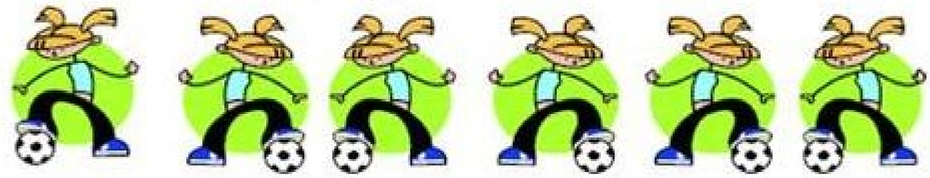
5. $6 + 6 \div 6 - 7 =$

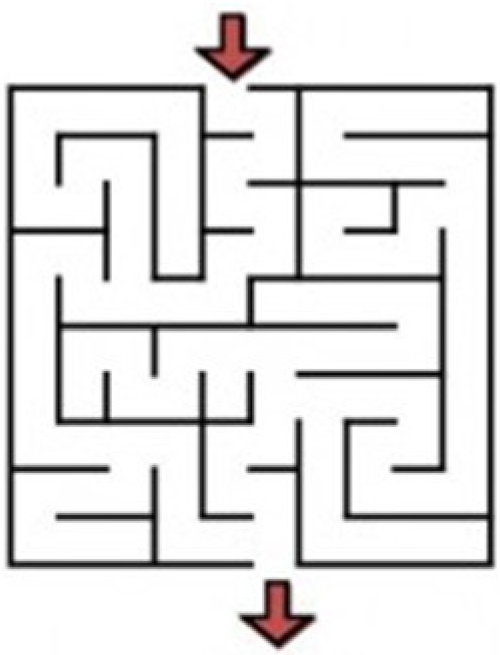
6. $2 + 2(4 - 2 - 1)(8 - 4\ ) =$

ANEXO 2. EJEMPLOS SOBRE ACTIVIDADES PARA EVALUAR EL CONOCIMIENTO SOBRE LA DIFERENCIA ENTRE DERECHA E IZQUIERDA.

Rodea todas las niñas que lleven el globo en su mano izquierda

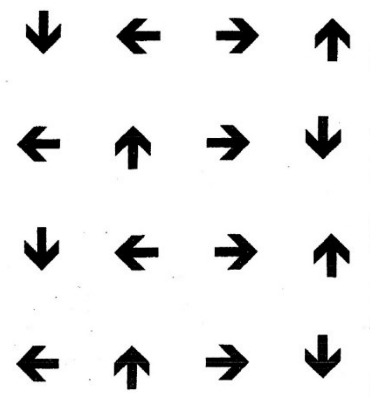
Rodea todas las niñas que aguanten el balón con su pie derecho



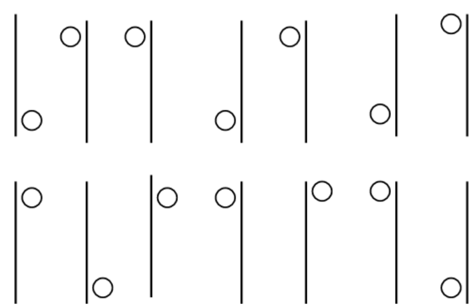


b. Comenzando en la parte de arriba del laberinto, escriba en la siguiente tabla las instrucciones para salir de él. Utilice únicamente las palabras “arriba”, “abajo”, “izquierda” y “derecha”.

c. Ubicar a partir de su cuerpo los conceptos de derecha e izquierda, arriba y abajo. Se coloca la siguiente imagen y todos los niños al unísono deben decir en voz alta la dirección de la flecha que se le indique.



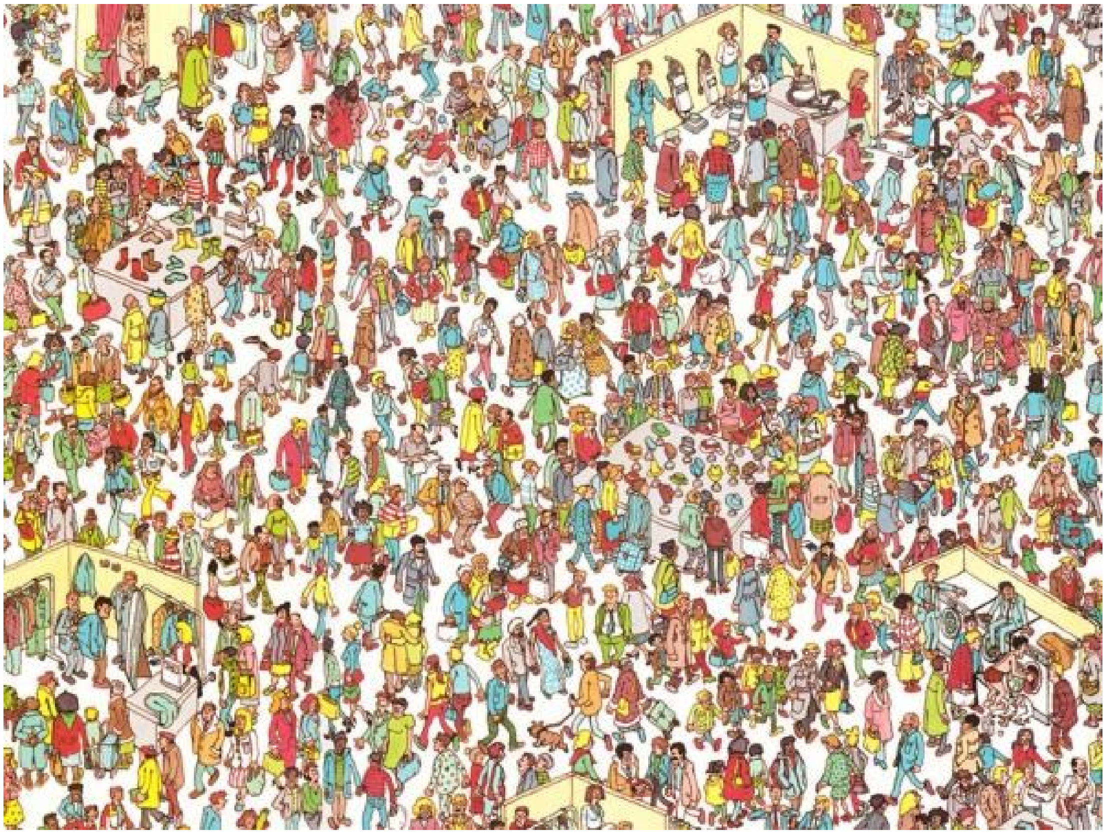
d. Señale la posición del círculo con respecto a la línea recta diciendo en voz alta la palabra “izquierda” o “derecha”.



e. Se pasan varios niños al frente mirando al tablero y otro niño les va diciendo en voz alta las palabras “izquierda” o “derecha”. Los niños que están en frente deben levantar la mano sin equivocarse.

ANEXO 3. EJEMPLOS SOBRE ACTIVIDADES PARA EVALUAR LAS HABILIDADES EN LA OBSERVACIÓN

a. Encontrar un personaje en una escena llena de personas. (¿Dónde está Wally?)



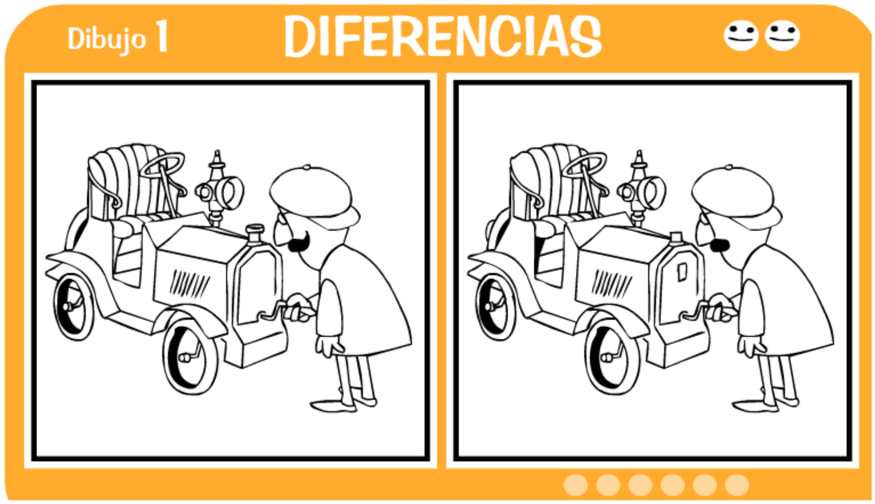
“¿Dónde està Wally?” son una serie de libros creada por Martin Handford . No son libros con texto alfabético sino con dibujos para jugar a encontrar a Wally en una imagen con cientos de detalles que despistan al lector. El personaje principal Wally y todos sus acompañantes siempre van vestidos de la misma manera en todas las escenas, así aunque cambie el paisaje hay una identidad definida y constante para los dibujos que hay que encontrar.

Preguntas para luego de la actividad.

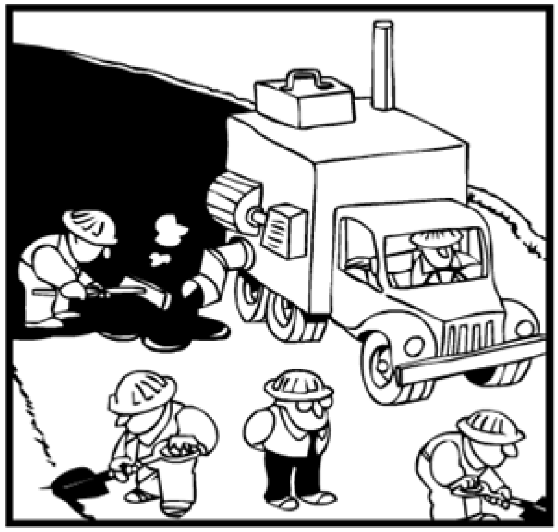
- ¿Cómo reconocías a Wally dentro de las escenas?
- ¿El personaje cambiaba cuando cambiaba la escena?
- ¿Es divertido que haya cambios en la escena para que sea más entretenido el reto? ¿Por qué?
- ¿Es importante utilizar la memoria para ser más ágil en el encuentro de Wally y sus amigos? ¿Por qué?

- ¿Cómo haces normalmente para memorizar algo importante cuando lo ves o lo lees?

b. Encuentre las seis diferencias en las siguientes imágenes



Actividad



Se les da a los estudiantes un minuto para que observen una escena. Luego se oculta la imagen y se les hace preguntas como:

¿Cuántas personas había en cada recuadro de la figura anterior?

¿Cuántas llevaban casco?

¿Cuántas llantas se ven en la imagen?

¿Cuántas palas había en el dibujo?

ANEXO 4. ACTIVIDADES PARA MEJORAR LA LAS HABILIDADES MOTRICES Y DE LATERALIDAD. GUÍA MEDIANTE COMANDOS VERBALES RELACIONADOS CON LA LATERALIDAD.

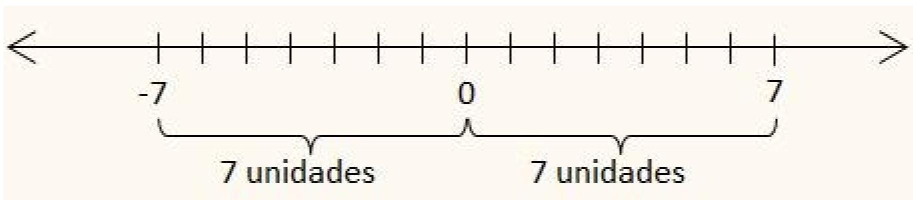
Los estudiantes superan una serie de obstáculos siguiendo las instrucciones de otro que lo guía mediante la comprensión del concepto de izquierda-derecha.

ANEXO 5. POSICIÓN RELATIVA DE POSITIVOS Y NEGATIVOS CON RESPECTO AL CERO. VALOR ABSOLUTO COMO DISTANCIA.

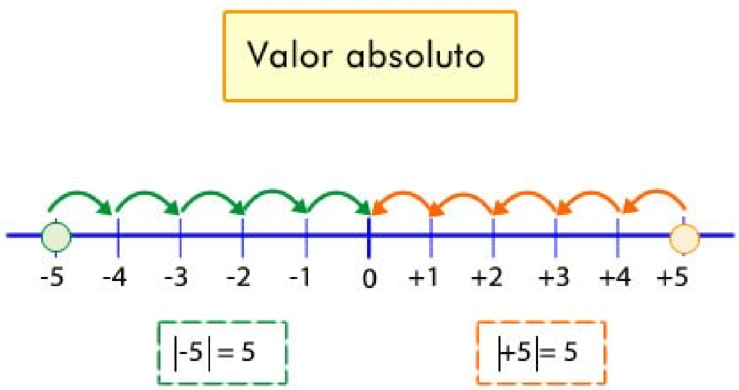
Actividad

Hallar el valor absoluto de un número y entenderlo como una distancia con respecto al número cero.

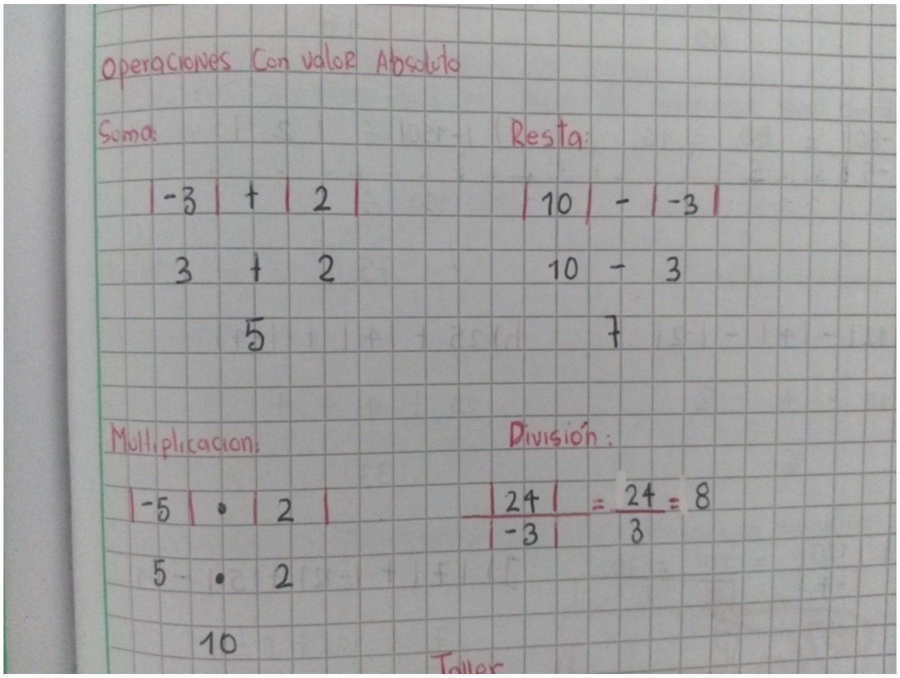
Grafique la recta numérica y marcan el valor absoluto como un desplazamiento con respecto al número cero. Ejemplo: |-7| = 7 y |7| = 7

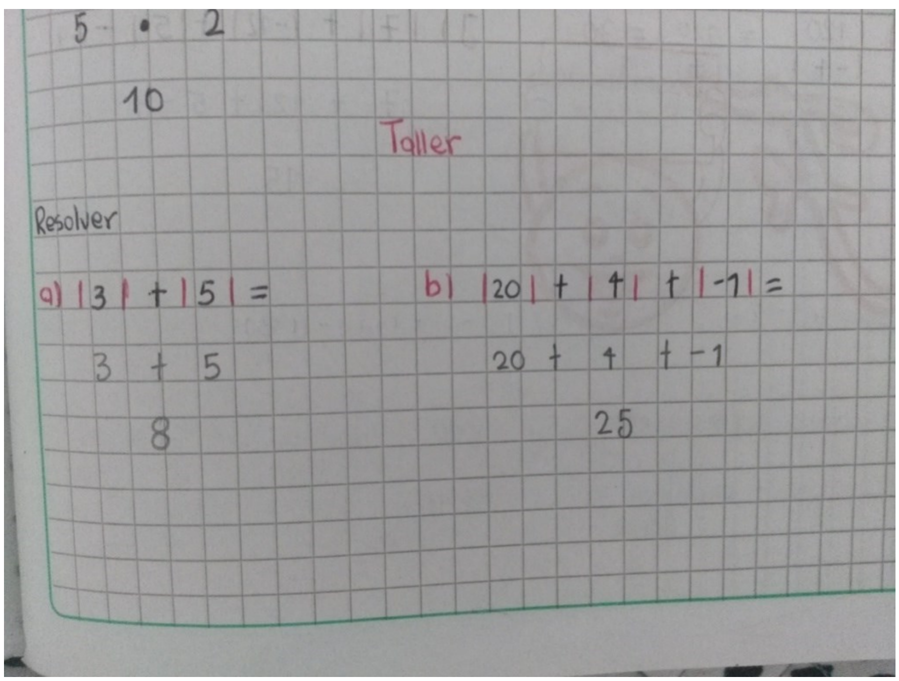


Dando una posición de la recta numérica, señale si está a la izquierda o a la derecha del cero y cuál valor absoluto le corresponde. Ejemplo – 5 y 5.



Actividades desarrolladas en el cuaderno relacionadas con el valor absoluto.

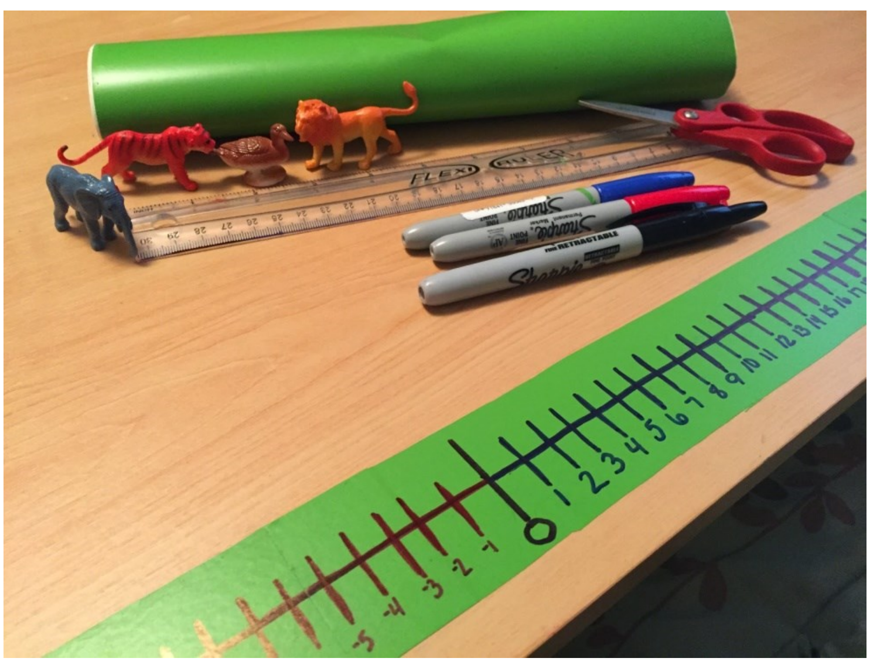




Anexo 6. Recta gigante para que los niños se desplacen físicamente sobre ella.

Momento de elaboración de la recta por parte de un estudiante.

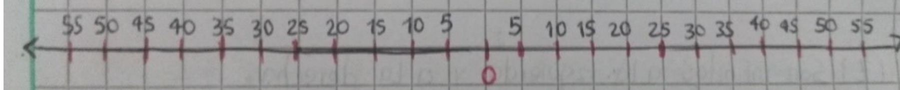
Anexo 7. Diseño de la recta numérica en cartón para el uso diario en clase.



Anexo 8. Ejercicios de ubicación en la recta numérica.

orden de los numeros Enteros

Para establecer el orden en los numeros enteros tenemos en Cuenta su ubicacion en la Recta numerica, Teniendo en Cuenta que entre mas a la izquierda que este un numero mas pequeño es ejemplo:



a. ordenar ~~50~~, (-~~45~~), ~~0~~ (-~~20~~), ~~25~~, ~~30~~, (-~~5~~), (-~~55~~) de Menor a Mayor

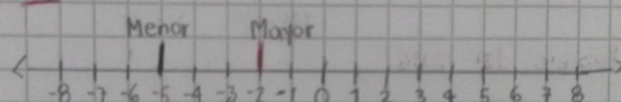
(-55), (-45), (-20), (-5), 0, 25, 30, 50

b ordenar de mayor a menor

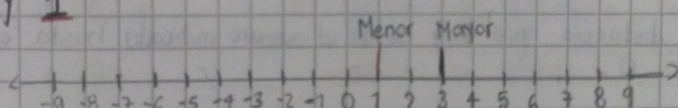
Taller

Señalar Cual es el mas grande, si hay tres numeros indicar Cual es el mas grande y cual el mas pequeño

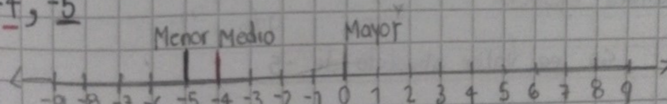
a) -5 y -2



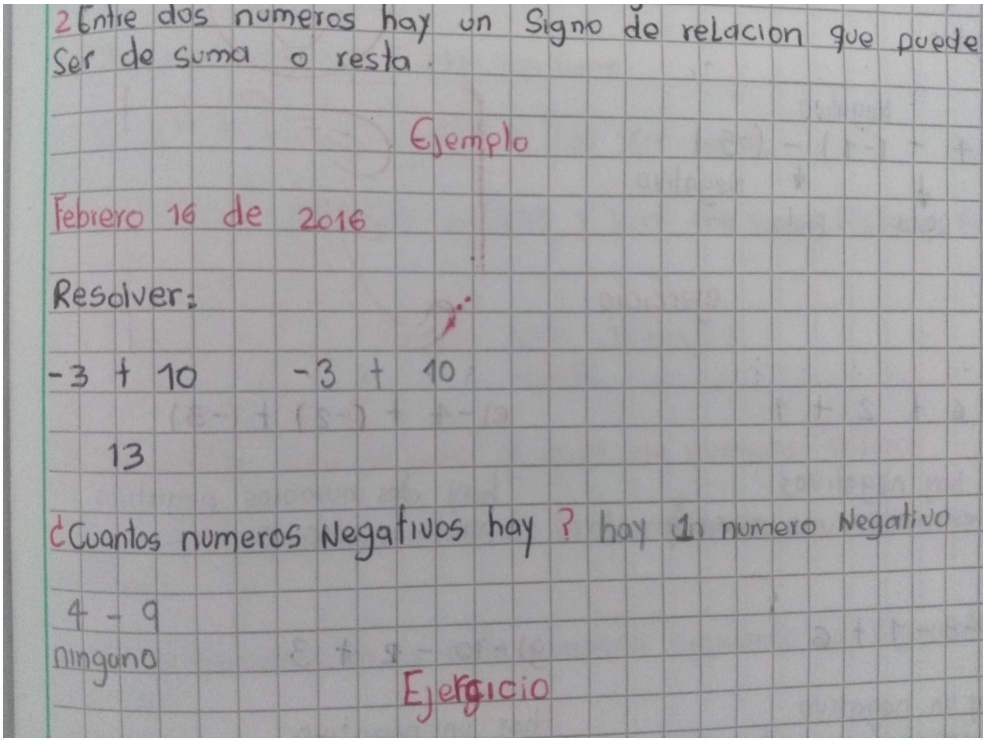
b) 3 y 1



c) 0, -4, -5



ANEXO 9. FORMALIZACIÓN DE LA ESCRITURA. DIFERENCIACIÓN ENTRE LA OPERACIÓN Y EL SIGNO DEL NÚMERO ENTERO.


2 Entre dos numeros hay un Signo de relacion que puede Ser de suma o resta.

Ejemplo

Febrero 16 de 2016

Resolver:

-3 + 10 -3 + 10

13

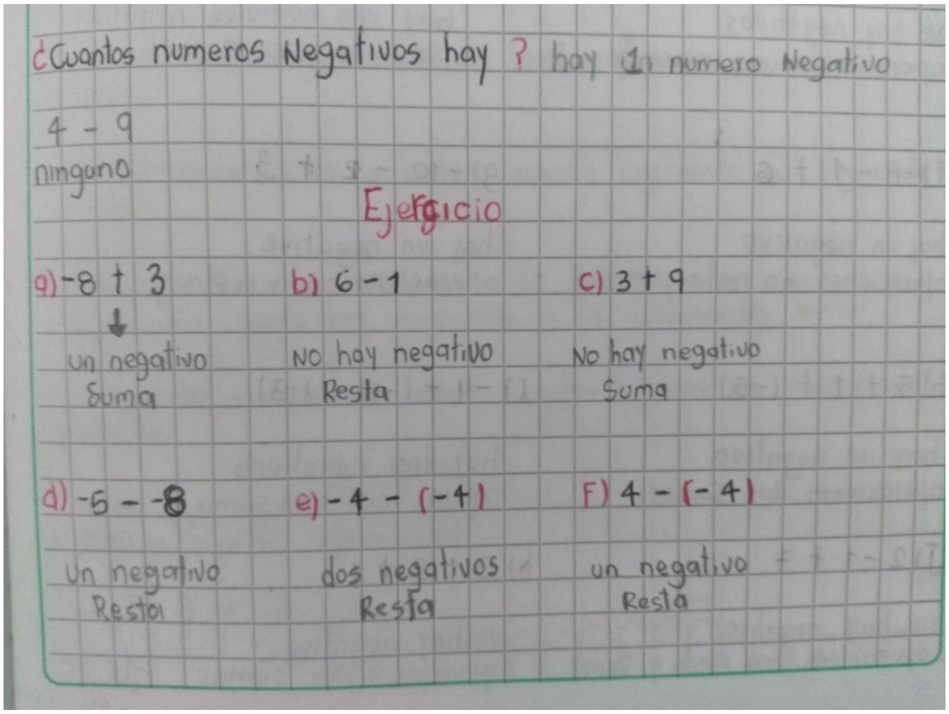
¿Cuantos numeros Negativos hay? hay 1 numero Negativo

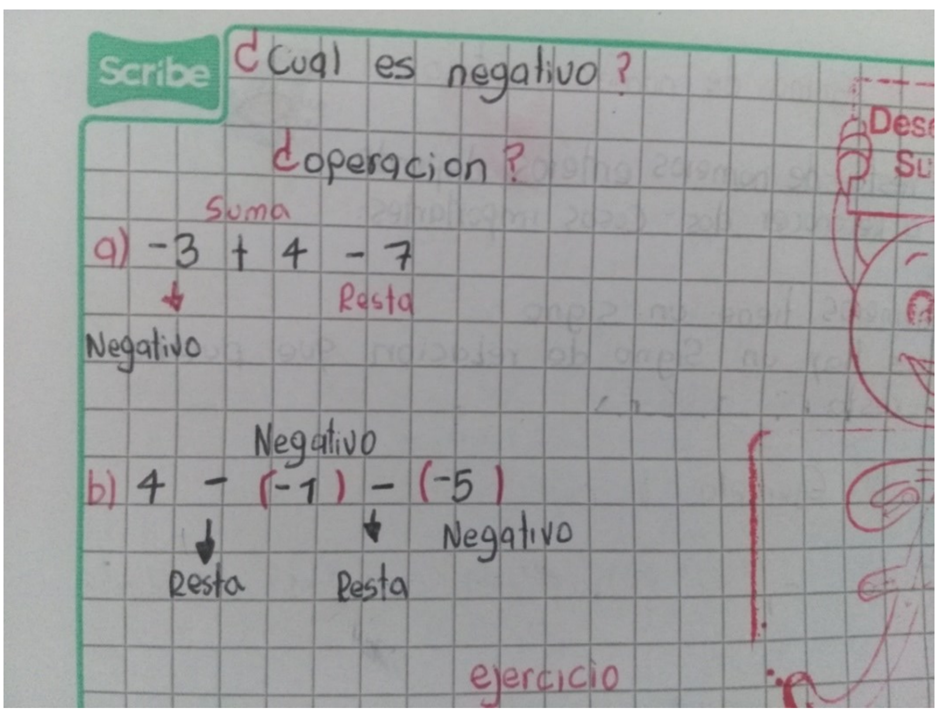
4 - 9

ninguno

Ejercicio

ANEXO 10. TALLER CON EJERCICIOS DE FORMALIZACIÓN PARA DIFERENCIAR LAS OPERACIONES Y LOS NÚMEROS.





d) 6 + 2 − 1

No hay negativos
operaciones: una suma y resta

e) -4 + (-2) + (-3)

hay dos numeros negativos
operaciones: dos sumas.

F) -8 - 1 + 6

hay un negativo
operaciones una resta y suma

g) -10 - 2 + 3

hay un negativo
operaciones: una resta y suma

h) 5 + 1 + (-5)

hay un negativo
operaciones: dos sumas

I) -9 + (-4) - (-3)

hay tres negativos
operaciones: una suma y resta

J) 2 - 1 + 7

no hay negativo
operaciones: una Resta y Suma

k) 3 + 5 + 1

No hay negativo
operaciones: dos sumas

100

18 de Febrero del 2016

ejercicio

a) -2 - 4 = un negativo y hay una resta

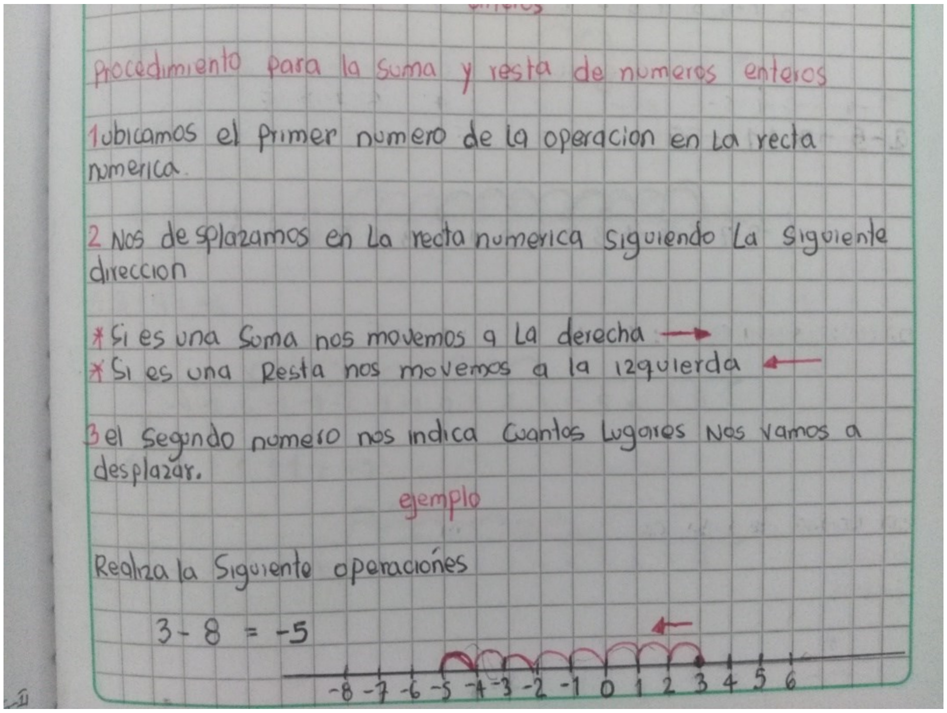
b) -3 + 5 = un negativo y hay una Suma

c) 6 - 7 - 1 = no hay negativos y hay dos restas

d) -4 + 2 - 1 - (-1) = dos negativos y hay una Suma, Resta y

Suma y resta de numeros Enteros

ANEXO 11. EJEMPLOS DE ACTIVIDADES DE SUMAS COMO DESPLAZAMIENTO.



Procedimiento para la Suma y resta de numeros enteros

1 ubicamos el primer numero de la operacion en La recta numerica.

2 Nos desplazamos en La recta numerica siguiendo La siguiente direccion

* Si es una Suma nos movemos a La derecha →
* Si es una Resta nos movemos a la izquierda ←

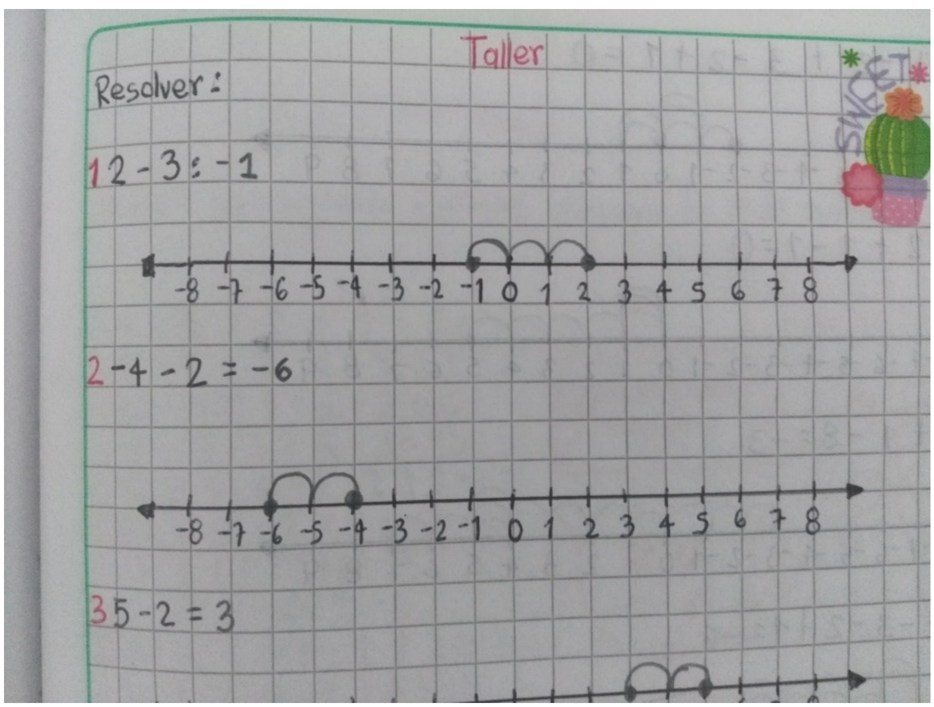
3 el Segundo numero nos indica Cuantos Lugares Nos vamos a desplazar.

ejemplo

Realiza la Siguiente operaciones

3 - 8 = -5

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6



Taller

Resolver:

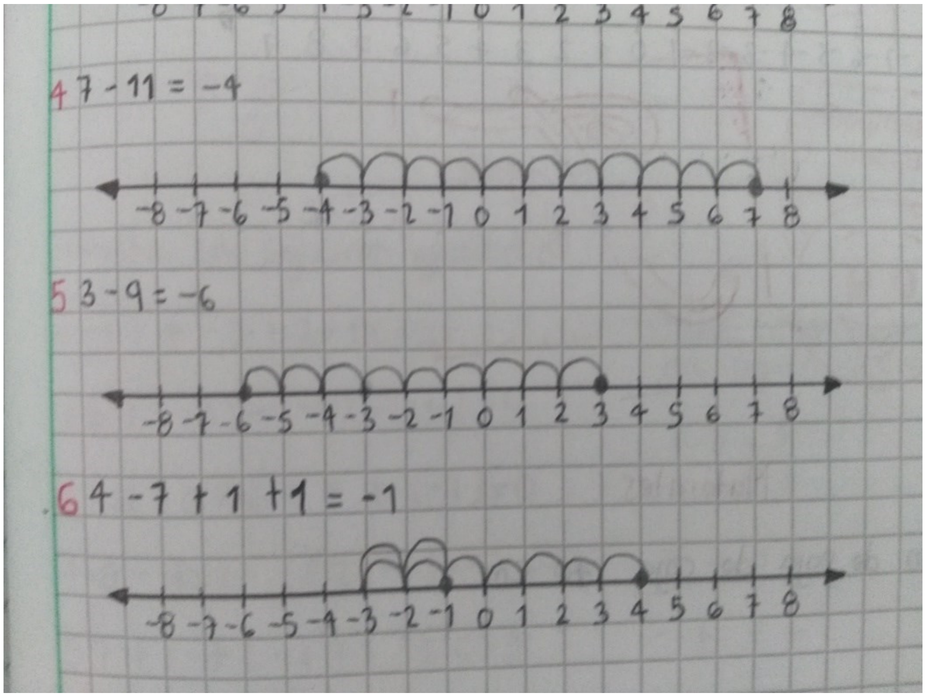
1 2 - 3 = -1

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

2 -4 - 2 = -6

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

3 5 - 2 = 3



Anexo12. Ejemplos de la utilización de los kanji para mejorar la observación.

Actividad

Esta actividad tiene como propósito mejorar tus habilidades visuales al tiempo que trabajas en tu memoria con el fin de que utilices algunas estrategias para recordar el significado de ciertos signos matemáticos usados en la escritura de operaciones aritméticas con números enteros.

Para hacerlo utilizaremos la escritura kanji, uno de los sistemas de escritura japonés. Recuerda que el propósito de la actividad NO es aprender kanjis sino revisar cómo hace tu cerebro para aprender el significado de ciertos símbolos no alfabéticos, de tal forma que puedas utilizar la misma estrategia para aprender a leer y escribir operaciones con números enteros.

Los Kanji

Los kanji son los logogramas utilizados en la escritura del idioma japonés. Son como nuestro alfabeto pero en lugar de los 27 signos que aprendemos en los primeros grados de primaria, un adolescente de 16 años en Japón debe saber de memoria 1645 kanjis.

Algunos kanjis son muy parecidos como lo son ciertas letras en nuestro alfabeto. Por ejemplo, en el idioma español la letra “b” y la letra “d” se componen de los mismos trazos pero en diferente posición. De igual forma, hay kanjis que son muy parecidos entre sí.

El propósito de esta actividad es aprender a ver las diferencias entre algunos kanjis, sistematizar el aprendizaje y hacer que la estrategia de memorización que usemos pueda utilizarse con el tema de los números enteros.

Para comenzar he recopilado 9 pares de kanjis que para los ojos no entrenados pueden tener un aspecto semejante o quizás hasta exactamente el mismo. Las diferencias pueden ser sutiles.

1. 人 vs 入

Se podría pensar que la diferencia entre estos kanjis es ese pequeño pico en la parte superior. Pero en realidad la diferencia está en los trazos que se convierten en el apoyo del kanji. Aunque hay una pequeña diferencia entre los kanjis tipográficos y los kanjis trazados a mano, las dos formas representan el mismo carácter: uno significa “persona” y el otro “entrar”. (Los números indican el orden de los trazos).

Persona Entrar

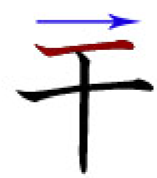
En los siguientes cuadros intenta copiar con todos los detalles los dos anteriores kanjis

Persona Entrar

2. 千 vs 干

En estos dos kanjis se resalta no sólo la diferencia en la dirección del trazo, sino también el tipo de trazo. La parte superior de 千 es un trazo, que levanta la herramienta de escritura a medida que termina la carrera. El trazo superior de 干 es una parada. (La flecha muestra el sentido de la carrera)

Mil



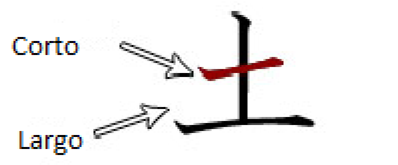
Seco

Intenta representar los kanjis

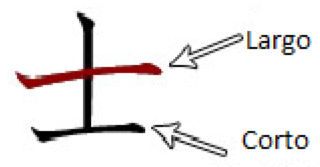
Mil Seco

9. 土 vs 士

De vez en cuando en japonés, la longitud de un trazo puede cambiar el significado. Este par de kanjis, muy particulares, a menudo se utilizan como componentes de kanjis más complejos y sin duda sirven como una referencia rápida para conocer el significado de muchos.



Suelo, Tierra



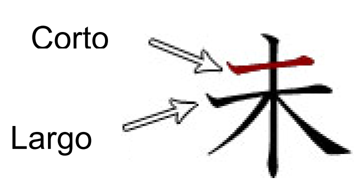
Guerrero, Escolar

Intenta representar los kanjis

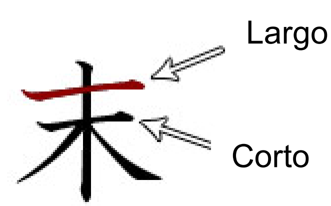
Suelo, Tierra　　Guerrero,

9. 未 vs 末

Al igual que en el numeral 3, este par de kanjis también se diferencian entre sí sólo por la longitud de los trazos.



Aún



Fin

A continuación copia en los recuadros los kanjis para las palabras “aún” y “fin”.

Aún Fin

9. 辛 vs 幸

Aunque la diferencia entre estos dos kanjis no es tan sutil se puede presentar alguna confusión sobre todo en el momento de escribirlos.

Difícil, Doloroso Feliz, Afortunado

Difícil, Doloroso Feliz, Afortunado

9. 比 vs 北

Como en el anterior par de kanjis la diferenciación quizás sea fácil de hacer pero los trazos son difíciles de copiar si no hay plena concentración.

Comparar Norte

Comparar Norte

7. 綱 vs 網

Estos dos kanjis de alto nivel son difíciles porque además de su similitud gráfica también son parecidos a nivel semántico.

Cuerda

Red

Cuerda Red

8. 瓜 vs 爪

Estods dos kanjis son diferentes conceptualmente. Recordarlos claramente se relaciona con invocar rápidamente su significado.

Melón

Uña,

Melón Uña,

9. 微 vs 徴

Cuando hay gran cantidad de trazos la tendencia al leer es confundirse por no tener una “entrada” visual fácil.

Pequeño, Leve Recoger, Indicar

Pequeño, Leve Recoger, Indicar

Actividad

En la clase anterior desarrollaste una actividad relacionada con los kanji. ¿Puedes recordar qué es un kanji?____

Traza todos los kanji que recuerdes.

Si se te dificulta recordar los kanji, revisa la actividad anterior antes de seguir contestando las siguientes preguntas.

¿Cuál de los dieciocho kanji te parece más fácil de recordar?

Respuesta:_____________________________

¿Por qué crees que es fácil recordarlo?

Respuesta:_____________________________

De las nueve parejas de kanji que aparecen en la guía ¿cuál pareja te parece más fácil de recordar? ¿Eres capaz de hacer los trazos de estos dos kanjis sin confundirte?

Respuesta:_____________________________

¿Te aprendiste los kanjis con la sola observación? ¿Necesitaste de la explicación oral del profesor? ¿Tuviste que trazarlos para recordarlos? ¿Fue suficiente con trazarlos una sola vez para memorizarlos? Explica tus respuestas

Respuesta:_____________________________

¿Crees que la memorización de los kanji tiene relación con la memorización de conceptos de las matemáticas? Si es así ¿en qué forma?

Respuesta:_____________________________

¿Crees que para aprender la ubicación en la recta numérica y operaciones de los números enteros hay que aprender de memoria algunas cosas? Si es así ¿en qué forma?

Respuesta:_____________________________

¿Crees que la forma de aprender la forma de trazar los kanji y el significado de cada uno se puede usar para aprender los conceptos estudiados en las matemáticas?

Respuesta:_____________________________

Escribe los pasos que utilizas para aprender a dibujar kanjis

Respuesta:_____________________________

Actividad

Has hecho varias actividades con los kanji. Tu memoria debe estar mejorando y si has practicado debes ya recordar los dieciocho Buscar un kanji específico dentro de un grupo de ellos.

Busca dentro de los siguientes kanji el que corresponda a la palabra “feliz”.

辛 幸

綱 網

比 北

¿Cuál es el kanji correspondiente a la palabra “comparar”?

微 比 幸 綱

El siguiente kanji ¿a qué palabra corresponde?

比

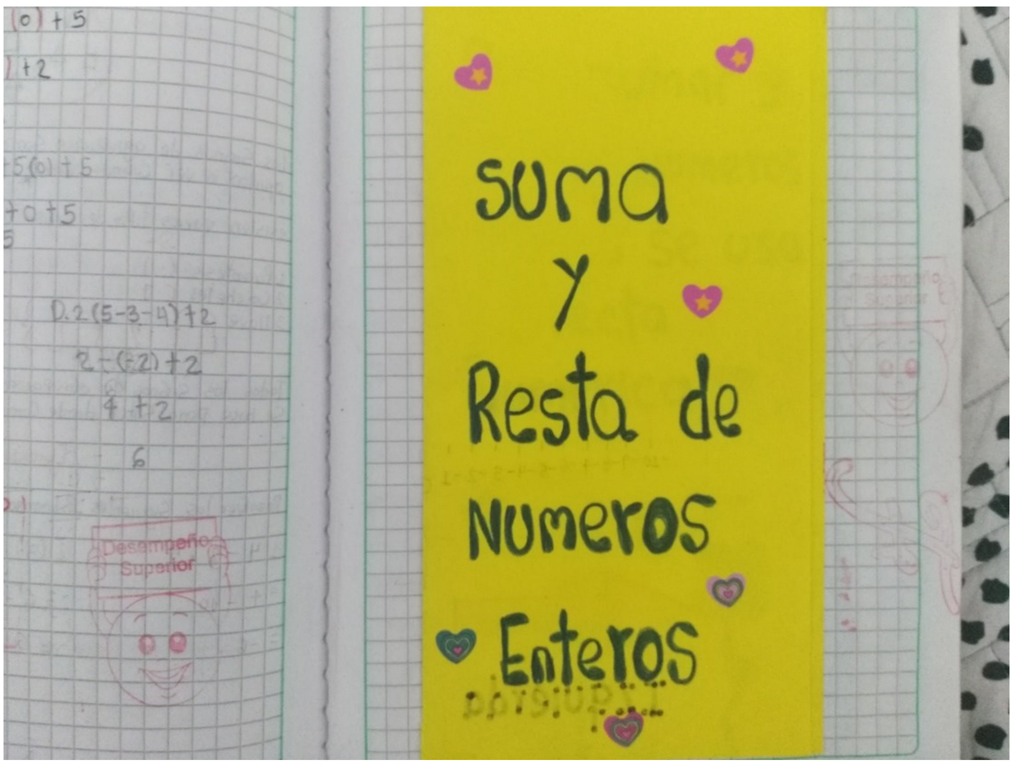
a) Difícil b) Norte c) Comparar d) Pequeño

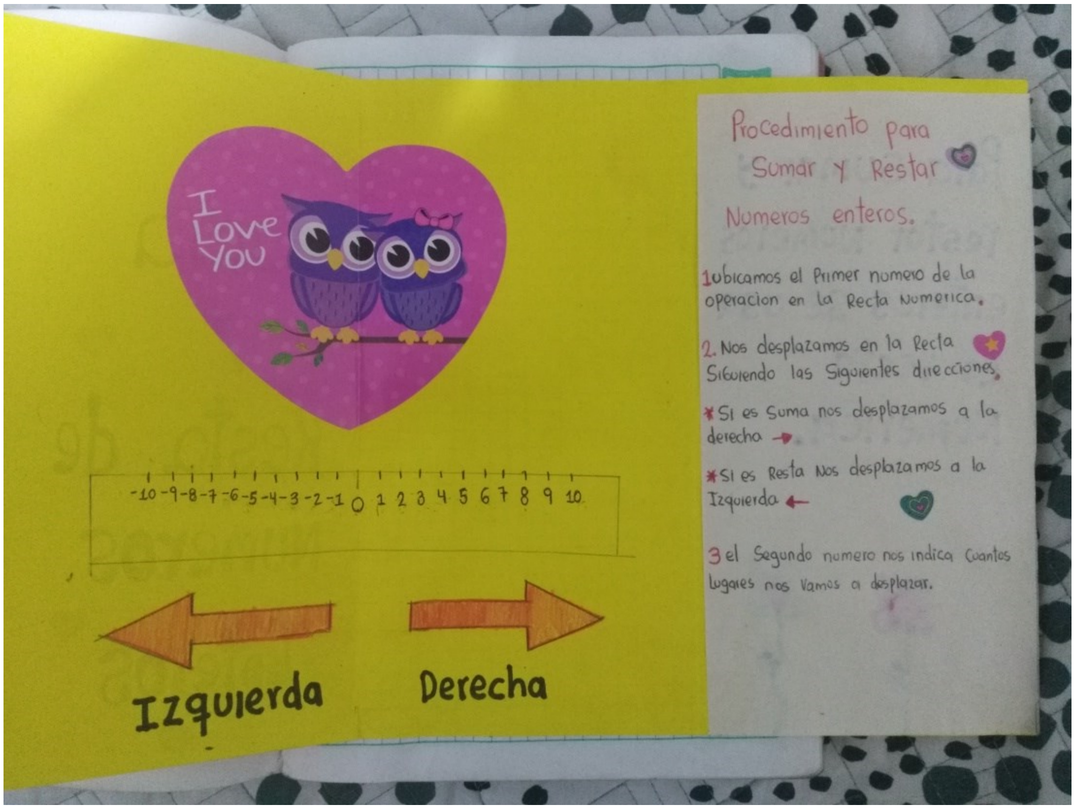
Actividad

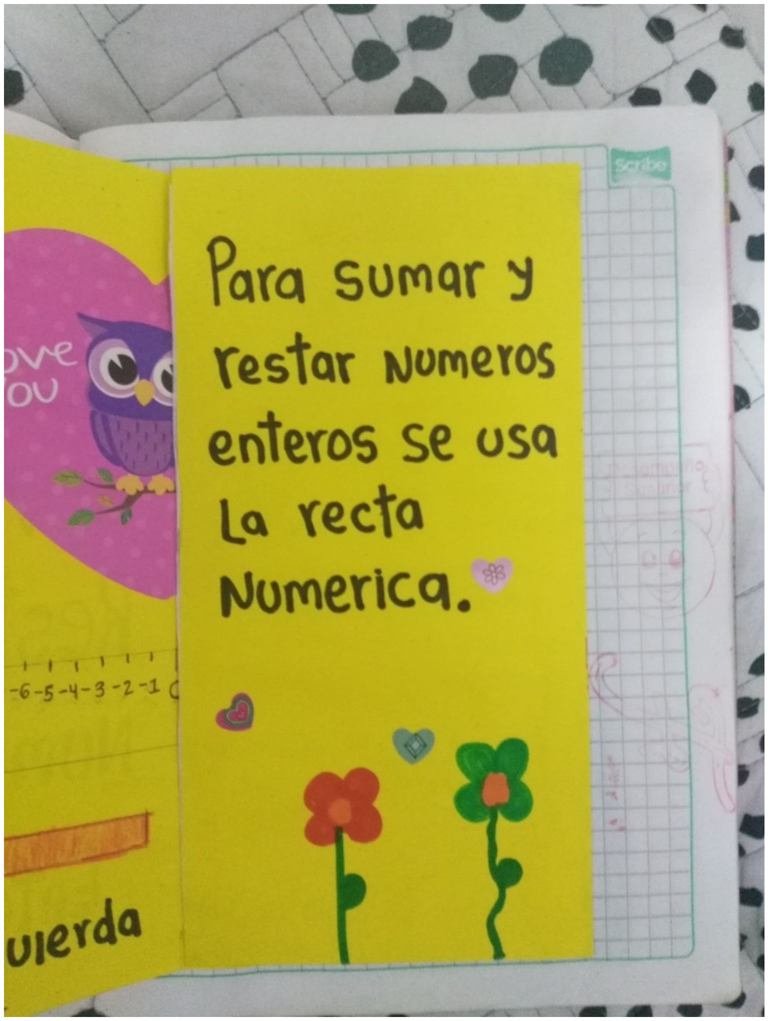
Observar los trazos de varios kanji y repetirlos

Luego de observar en un video cómo se trazan diferentes tipos de kanji de nivel básico (https://www.youtube.com/watch?v=aUMAfv0jJaY) los niños deben repetirlos hasta que puedan trazarlos sin tener que observarlos.

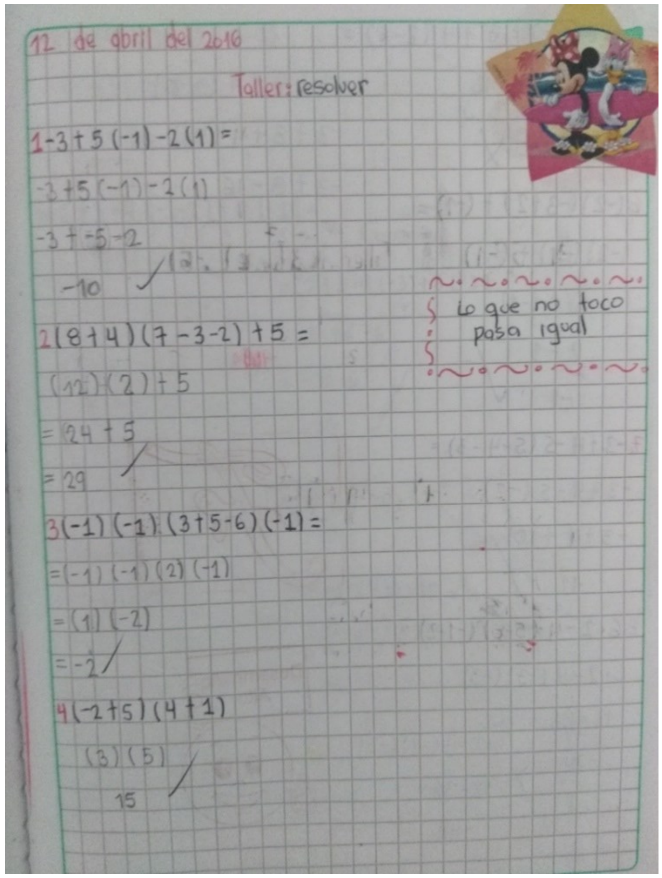
Anexo 13. Elaboración de un folleto para mejorar la memoria a través del seguimiento de instrucciones creadas por los propios estudiantes.




I Love You
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Izquierda
Derecha
Procedimiento para Sumar y Restar Numeros enteros.
1 ubicamos el Primer numero de la operacion en la Recta Numerica.
2. Nos desplazamos en la Recta Siguiendo las Siguientes direcciones.
* Si es Suma nos desplazamos a la derecha
* Si es Resta Nos desplazamos a la Izquierda
3 el Segundo numero nos indica Cuantos lugares nos Vamos a desplazar.


Para sumar y
restar Numeros
enteros se usa
La recta
Numerica.
-6 -5 -4 -3 -2 -1
uierda

ANEXO 14. EJEMPLOS DE ACTIVIDADES DE OPERACIONES COMBINADAS (SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN) CON DIFERENTES SÍMBOLOS MATEMÁTICOS.


12 de abril del 2016

Taller: resolver

1 $-3+5(-1)-2(1)=$

$-3+5(-1)-2(1)$

$-3+-5-2$

-10

Lo que no toco pasa igual

2 $(8+4)(7-3-2)+5=$

$(12)(2)+5$

$=24+5$

$=29$

3 $(-1)(-1)(3+5-6)(-1)=$

$=(-1)(-1)(2)(-1)$

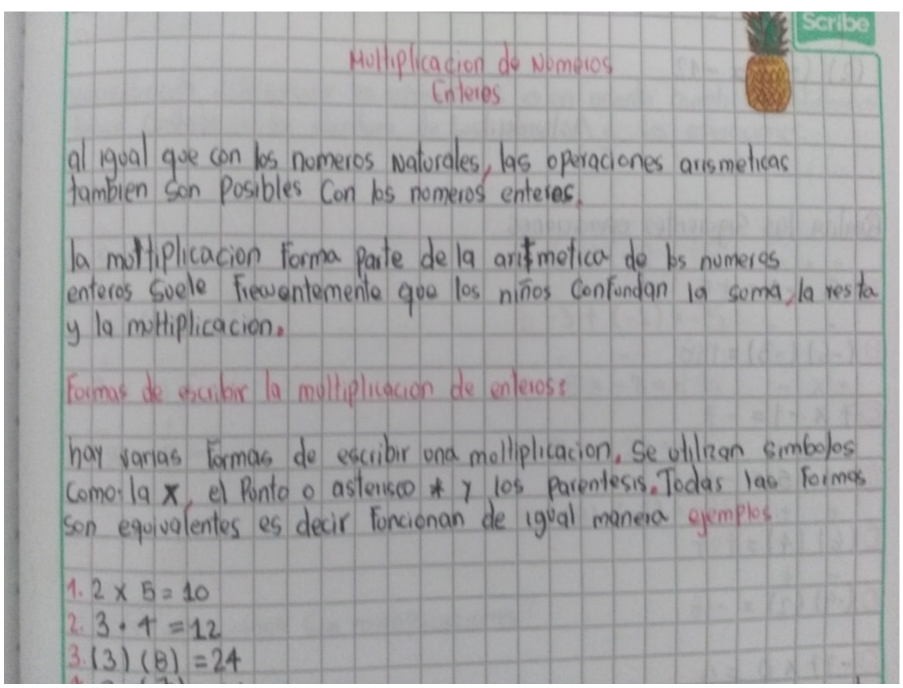
$=(1)(-2)$

$=-2$

4 $(-2+5)(4+1)$

$(3)(5)$

15


Multiplicacion de Numeros Enteros

al igual que con los numeros naturales, las operaciones arismeticas tambien son posibles con los numeros enteros.

la multiplicacion forma parte de la aritmetica de los numeros enteros suele frecuentemente que los niños confundan la suma, la resta y la multiplicacion.

Formas de escribir la multiplicacion de enteros:

hay varias formas de escribir una multiplicacion, se utilizan simbolos como: la X, el punto o asterisco * y los parentesis. Todas las formas son equivalentes es decir funcionan de igual manera ejemplos

1. $2 \times 5 = 10$
2. $3 \cdot 4 = 12$
3. $(3)(8) = 24$

ANEXO 15. TALLER PARA COMPRENDER EL SIGNIFICADO A LOS SIGNOS MATEMÁTICOS COMO EL DE SUMA, PRODUCTO O EL DE IGUALDAD.

Se le propone al estudiante un texto que lo acerque al significado de ciertos símbolos que él ya da por entendidos. Esto hace que, al mismo tiempo que crece su confianza con respecto a conocimientos matemáticos, vaya dándole ubicación en el texto y sentido a signos propios del área. Aquí es necesario que el estudiante visualice sobre todo el lugar de los símbolos matemáticos al tiempo que la interpretación que tiene en el texto.

Por ejemplo:

Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1

El signo igual indica que la cantidad que aparece a la izquierda del signo es igual a la cantidad que aparece a su derecha.

1 $4 + 5 = 3 + 6$

Observa la igualdad del recuadro 1. A la izquierda hay una adición. A la derecha hay otra adición. El signo igual afirma que la cantidad que se obtiene al efectuar la primera adición es igual a la que se obtiene al efectuar la segunda adición.

¿Qué afirma el signo igual en cada una de las siguientes igualdades?

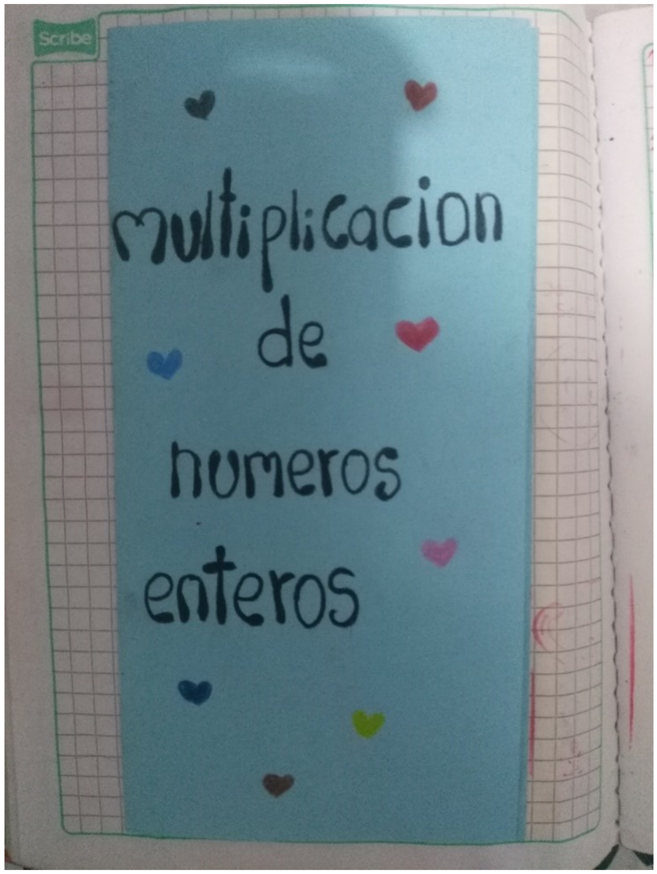
$12 - 5 = 4 + 3$ $\qquad$ $6 \cdot 6 = 30 + 6$ $\qquad$ $246.420 = 444 \cdot 555$

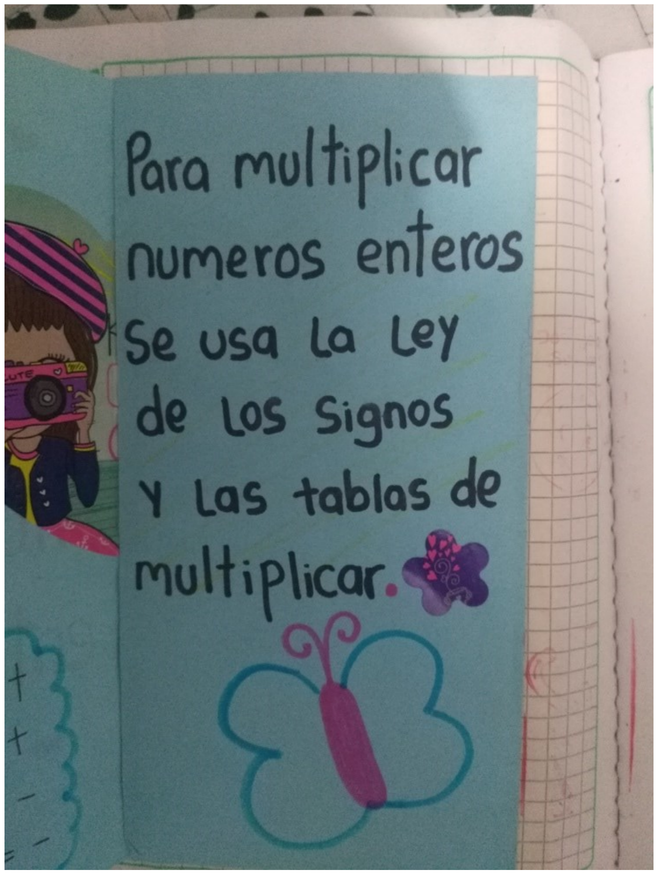
$77 \cdot 7 = 7 \cdot 77$ $\qquad$ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 \cdot 3$

$208 + 499 = 499 + 208$ $\qquad$ $366 : 1 = 366$ $\qquad$ $0 : 75 = 0 : 48$

¿Qué significan los dos puntos?

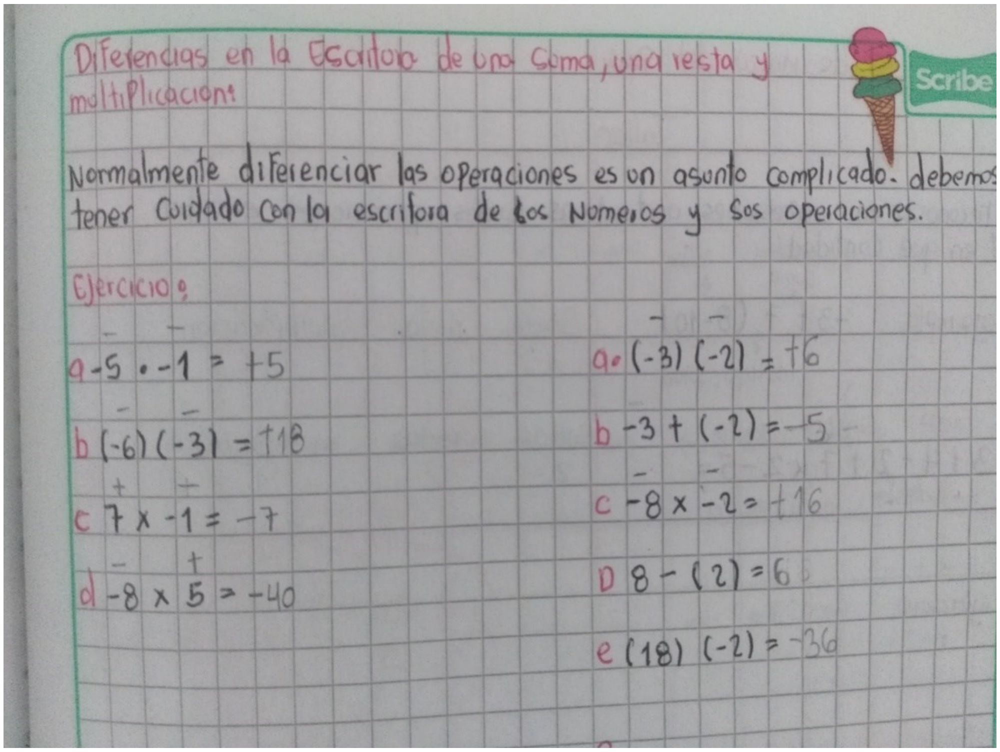
ANEXO 16. FOLLETO PARA REPETIR EL ALGORITMO DE MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS ELABORADO POR EL ESTUDIANTE.




Para multiplicar
numeros enteros
se usa la ley
de los signos
y las tablas de
multiplicar.


KEEP and CALM Cats
+ x + = +
- x - = +
+ x - = -
- x + = -
7 x 3 = 21
7 x 4 = 28
7 x 5 = 35
Reglas para
multiplicar enteros.
1. Se multiplican los signos
siguiendo esta regla.
+ x + = +
- x - = +
+ x - = -
- x + = -
2. Se multiplican los numeros como
se hace con los naturales.
ejemplo -3 x 2 = -6

ANEXO 17. EJERCICIOS DONDE SON IMPORTANTES LAS PREGUNTAS PARA ORIENTAR EL ALGORITMO DE OPERACIÓN EN POLINOMIOS ARITMÉTICOS.



Diferencias en la Escritura de una Suma, una resta y multiplicación:

Normalmente diferenciar las operaciones es un asunto complicado. debemos tener cuidado con la escritura de los Numeros y sus operaciones.

Ejercicio:

a $-5 \cdot -1 = +5$

b $(-6)(-3) = +18$

c $7 \times -1 = -7$

d $-8 \times 5 = -40$

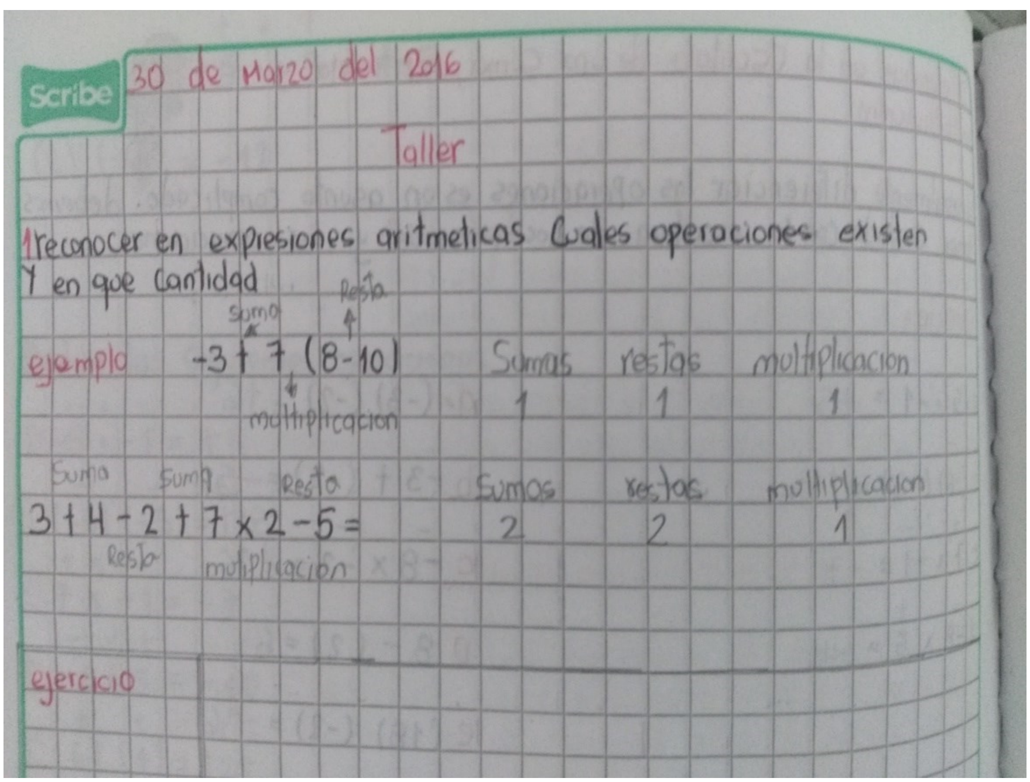
a. $(-3)(-2) = +6$

b $-3 + (-2) = -5$

c $-8 \times -2 = +16$

D $8 - (2) = 6$

e $(18)(-2) = -36$



30 de Marzo del 2016

Taller

1 reconocer en expresiones aritmeticas Cuales operaciones existen y en que cantidad

	Sumas	restas	multiplicacion
ejemplo $-3 + 7\,(8-10)$ (suma, resta, multiplicacion)	1	1	1
$3 + 4 - 2 + 7 \times 2 - 5 =$ (suma, suma, resta, resta, multiplicación)	2	2	1

ejercicio

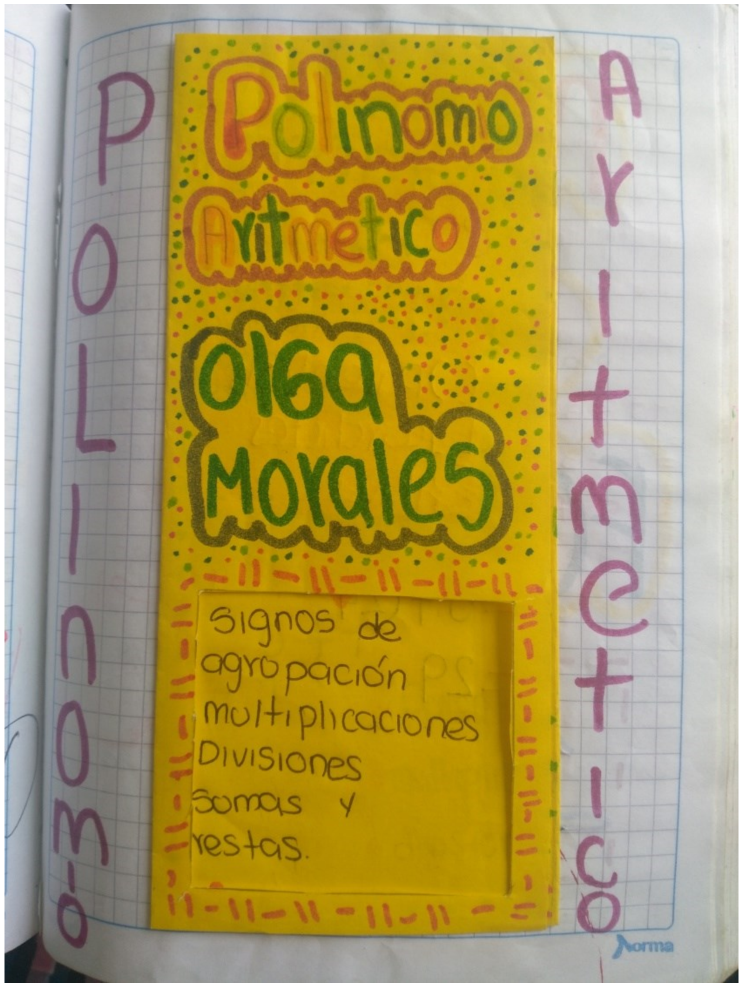
	ejercicio	positivos	Negativos	Sumas	Restas	Multiplicación
a	4 + 2 - 5 + (-3)	3	1	2	1	0
b	-3 + (-2) + 7 x 1	2	2	2	0	1
c	5 (9) - 6 (9) - 7 x 9	6	0	0	2	3
D	(-2) (-1) + 2	1	2	1	0	1
E	8 - 4 (2 + 3 - 4 + 5)	6	0	2	2	1
F	(10) (5 - 3) + 2 (7) - 1	6	0	1	2	1
g	-6 - 2 - 1 + (3) (2) - 5	5	1	1	3	1
h	5 x 4 - 3 (2) + 7 (9) - 5 · 4	8	0	1	2	4
i	8 (7 - 9 - 2 x 1 + 3 x 2) + 8	8	0	2	2	1
J	2 - 4 x 2 + 3 (5 x 2)	6	0	1	1	3

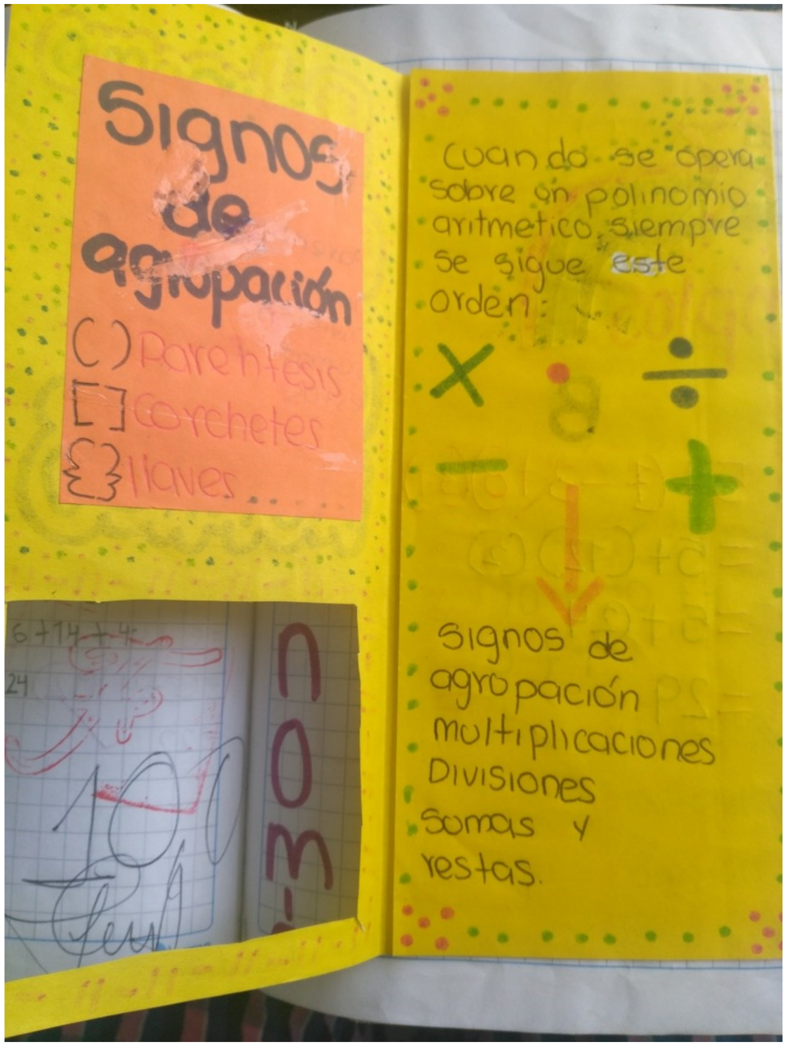
Desempeño Superior

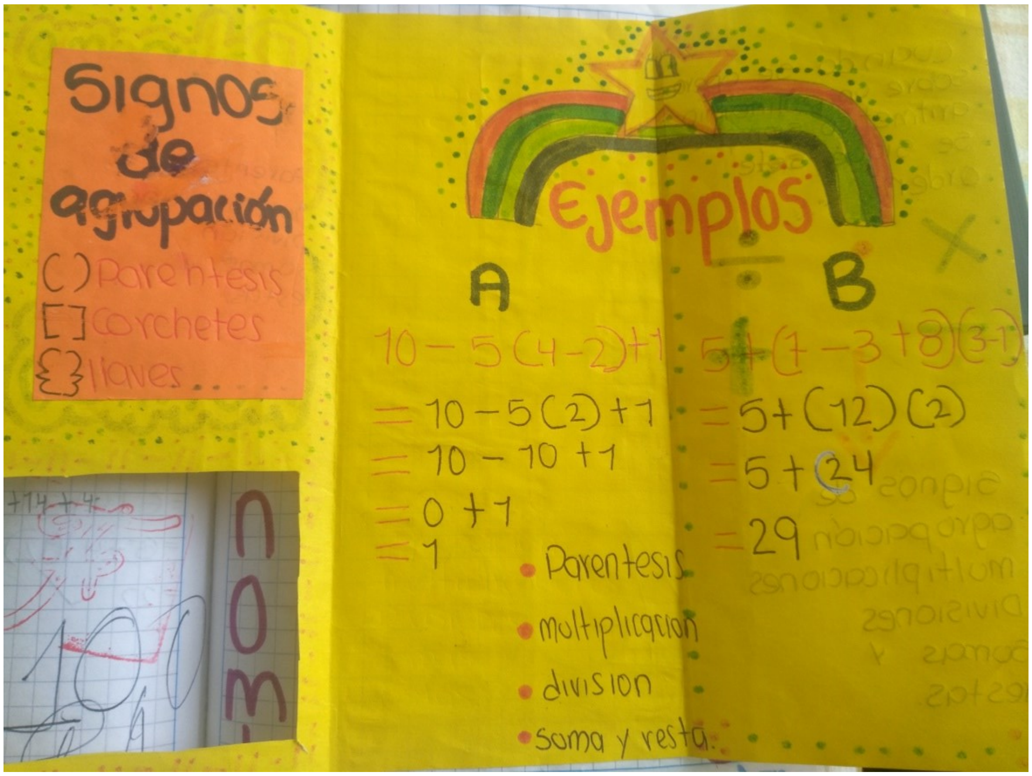
Ejercicios:

En la siguiente tabla vas a completar las casillas teniendo en cuenta los polinomios que aparecen a continuación.

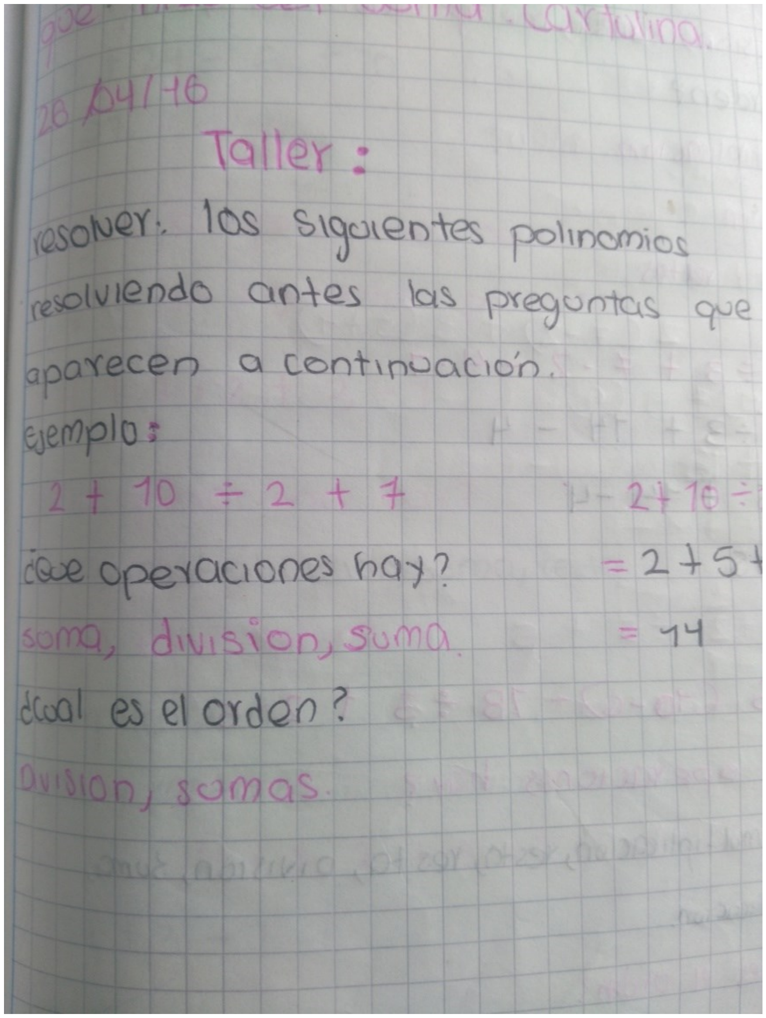
Polinomio	Dentro paréntesis	Dentro corchetes	Dentro llaves
3 + (2 + 5) - 3 (4 - 7)	2, 5, 4, 1	Nada	Nada
4 + {2 x (5 + 1) - 2 [3 - 7]	5, 1	3, 1	2, 5, 1, 3, 7
[7 + 3] - 2 (4 + 3) - 2	4, 3	7, 3	Nada
8 + 2 + 3 {2 [4 + (2 + 3)] - 5}	2, 3	4, 2, 3	2, 4, 2, 3, 5
7 - 4 (2 + 9) - {3 (7 + 4 - 3)}	2, 9, 7, 4, 3	Nada	3, 7, 4, 3
(4 + 9) + [7 - (2 + 3)]	4, 9, 2, 3	7, 2, 3	Nada


Polinomio
Aritmetico
olga
Morales
signos de
agropación
multiplicaciones
Divisiones
Somas y
restas.
Polinomio
Aritmetico
Norma


Signos de agrupación
( ) Parentesis
[ ] corchetes
{ } llaves...
Cuando se opera sobre un polinomio aritmetico, siempre se sigue este orden:
× a ÷
− +
Signos de agrupación
multiplicaciones
Divisiones
Sumas y
restas.


Signos de agrupación
( ) Parentesis
[ ] corchetes
{ } llaves....
Ejemplos
A
B
10 − 5 (4 − 2) + 1
= 10 − 5 (2) + 1
= 10 − 10 + 1
= 0 + 1
= 1
5 + (7 − 3 + 8) (3 − 1)
= 5 + (12) (2)
= 5 + 24
= 29
• Parentesis
• multiplicacion
• division
• soma y resta.

Anexo 18. Preguntas para guiar el algoritmo de operación con polinomios aritméticos.



28/04/16

Taller:

resolver los siguientes polinomios resolviendo antes las preguntas que aparecen a continuación.

ejemplo:

$2 + 10 \div 2 + 7$ | $= 2 + 10 \div$

¿que operaciones hay? | $= 2 + 5 +$

soma, division, suma | $= 14$

¿cual es el orden?

division, sumas.

$15 \div 3 + 7 \cdot 2 - 4 \cdot 1$

¿Que operaciones hay?

Division, soma, multiplicacion, resta, multiplicacion

¿orden?

multiplicacion

Division

somas y restas

$15 \div 3 + 7 \cdot 2 - 4 \cdot 1$

$= 15 \div 3 + 14 - 4$

$= 5 + 14 - 4$

$= 15$

$3 + 6 (10 - 6) - 18 \div 3 + 2 \cdot 5$

¿Que operaciones hay?

Somas multiplicacion, resta, resta, Division, soma, multiplicacion.

¿cual es el orden?

$3 + 6\,(10 - 6) - 18 \div 3 + 2 \cdot 5$

$= 3 + 6\,(4) - 18 \div 3 + 2 \cdot 5$

$= 3 + 24 - 18 \div 3 + 10$

$= 3 + 24 - 6 + 10$

$= 31.$

Realiza las operaciones necesarias para reducir los siguientes polinomios.

① $4 + 7 \cdot 2 + 3 - 1$

¿Que operaciones hay?

suma, multiplicacion, suma, resta.

¿cual es el orden?

multiplicacion.

suma y resta.

$4 + 7 \cdot 2 + 3 - 1$

$= 4 + 14 + 3 - 1$

$= 20$

$= 2 + 5$

$= 7$

c) $10 + 3(5+1) - 2(4-3)$

¿Que operaciones hay?

soma, multiplicacion, parentesis, soma, resta, multiplicacion, parentesis, resta.

¿cual es el orden?

parentesis -

multiplicacion -

suma y resta

$10 + 3(5+1) - 2(4-3)$

$= 10 + 3(6) - 2(1)$

$= 10 + 18 - 2$

$= 26$

⑤ 6+6+6 (6-6) - 6 ÷ 6

¿Que operaciones hay?

parentesis.

Suma, multiplicacion, resta, resta, division

¿cual es el orden?

parentesis.

multiplicacion

division

suma y resta.

$$6+6+6(6-6)-6\div 6$$

$$=6+6+6(0)-6\div 6$$

$$=6+6+0-6\div 6$$

$$=6+6+0-1$$

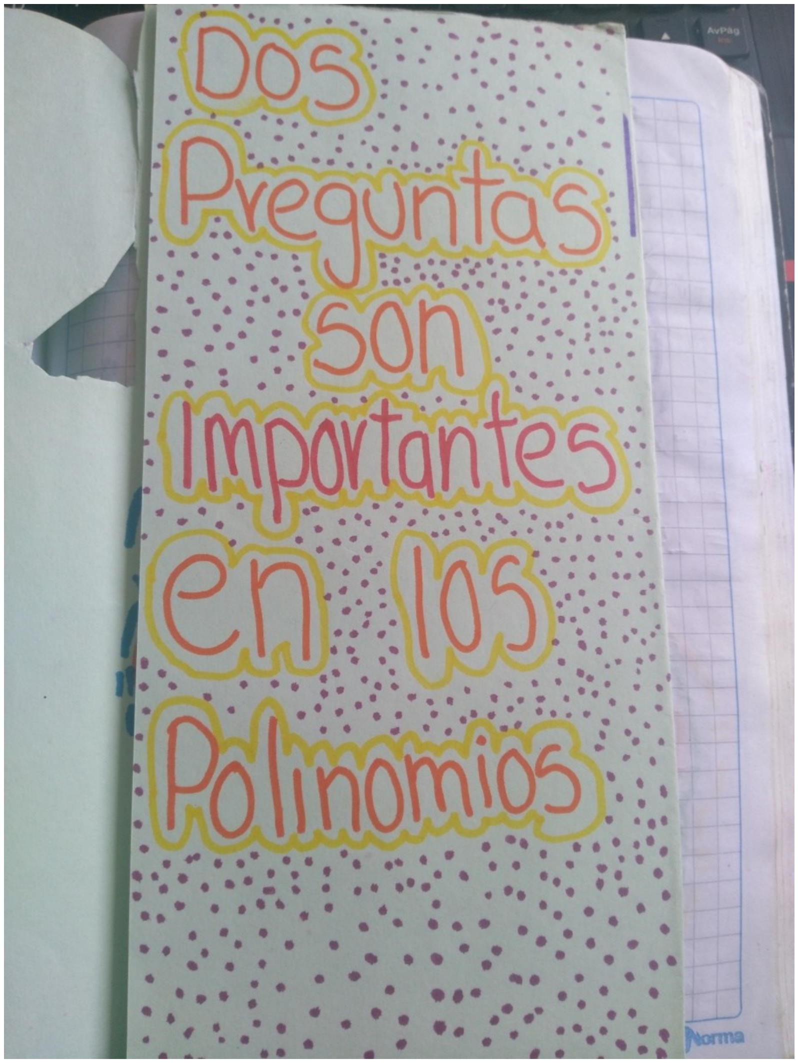
$$=12-1$$

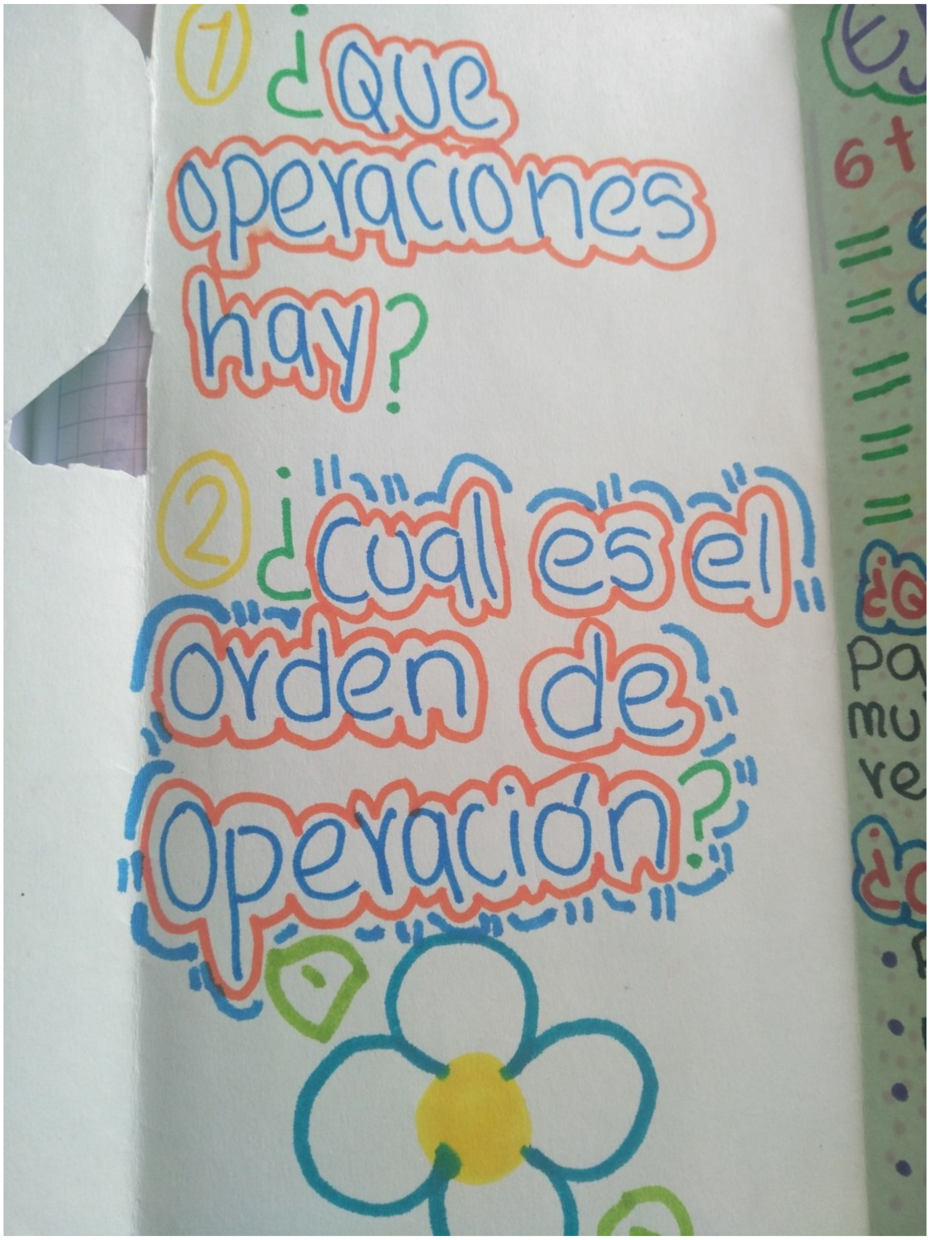
$$=11$$

10,0

26-IV

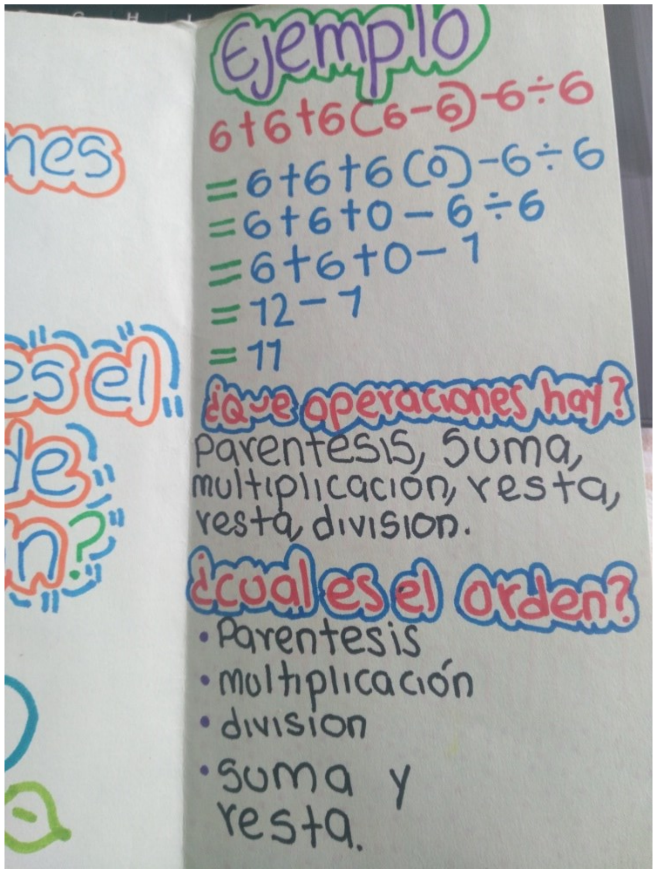
ANEXO 19. FOLLETO PARA RECORDAR LOS ALGORITMOS Y LOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS EN POLINOMIOS ARITMÉTICOS CON NÚMEROS ENTEROS.


Dos
Preguntas
son
Importantes
en los
Polinomios



1 ¿Que operaciones hay?

2 ¿Cual es el orden de operación?



Ejemplo

$6+6+6(6-6)-6\div 6$

$=6+6+6(0)-6\div 6$

$=6+6+0-6\div 6$

$=6+6+0-1$

$=12-1$

$=11$

¿Que operaciones hay?

Parentesis, suma, multiplicación, resta, resta, division.

¿Cual es el orden?

- Parentesis
- multiplicación
- division
- suma y resta.