# FORTALECIMIENTO DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE UNA UNIDAD DIDÁCTICA DISEÑADA CON BALDOSAS ALGEBRAICAS Y MANIPULADORES VIRTUALES


Autor:

Odair Ordoñez Ortega

Director:

Dr. Élgar Gualdrón Pinto



GRUPO DE INVESTIGACIÓN: EDUCACIÓN Y LENGUAJE
LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS

UNIVERSIDAD AUTONÓMA DE BUCARAMANGA-UNAB
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
PROGRAMA BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE
BUCARAMANGA
2018

FORTALECIMIENTO DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE UNA UNIDAD DIDÁCTICA DISEÑADA CON BALDOSAS ALGEBRAICAS Y MANIPULADORES VIRTUALES


Autor:

Odair Ordoñez Ortega


Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de:

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
PROGRAMA BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE
BUCARAMANGA
2018

## DEDICATORIA

***A Dios.***

Por ser la fuente de la fuerza espiritual que revitaliza para afrontar todas las dificultades que se presentan en el camino.

***A mi familia.***

Por su paciencia, compañía, apoyo y amor que facilitan y le dan sentido a mi vida. A mis padres por la protección durante toda mi vida, a mis hijos por las alegrías que me dan y por ser mi mejor creación, a mi esposa por su paciencia y su amor que me regala día tras día.

**AGRADECIMIENTOS**

A todas aquellas personas que hicieron posible la materialización de este trabajo investigativo: Agradezco especialmente a mis estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa la Garita, por el apoyo incondicional que me dieron.

A mi director de tesis el Doctor Élgar Gualdrón Pinto, por compartir sus conocimientos, por su amabilidad, por su paciencia y por su sabiduría.

A la Doctora Graciela Wagner Osorio quien me facilitó con toda la amabilidad el software Geometría de Polinomios.

A Max Ray Riek del proyecto de Illuminations por su asesoría en la utilización del aplicativo MVU Algebra Tiles.

**TITULO**

FORTALECIMIENTO DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE UNA UNIDAD DIDÁCTICA DISEÑADA CON BALDOSAS ALGEBRAICAS Y MANIPULADORES VIRTUALES

**RESUMEN**

La presente investigación es de enfoque cualitativo, tipo investigación acción; se desarrolló con los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa la Garita del municipio de Los Patios. El propósito de este estudio fue potenciar el desarrollo del pensamiento variacional a través de una unidad didáctica para la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios.

Se aplicó una prueba diagnóstica para evaluar el desempeño de los estudiantes en los pensamientos variacional y geométrico, obteniendo como resultados que la mayoría de los estudiantes desconocían el concepto de variable, presentaban dificultades para realizar operaciones que involucran variables, no realizaban modelos geométricos para representar áreas y no conocían las fórmulas para encontrar las áreas de superficies planas.

Partiendo de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, se intervino al grupo con una unidad didáctica diseñada bajo un enfoque constructivista, utilizando material concreto y manipuladores virtuales. Durante el proceso se observó que las estrategias implementadas durante las intervenciones pedagógicas, motivaron a los estudiantes para lograr avanzar en los objetivos de este estudio. También se evidenció mejoras en el desarrollo del pensamiento variacional, los estudiantes fueron ampliando la noción de la variable, adquirieron destreza para realizar modelos geométricos con baldosas algebraicas, potenciaron las operaciones con polinomios y por último, encontraron invariantes en los modelos geométricos que posibilitaron la formulación de identidades como: $(\mathrm{a} \pm \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 \pm 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$, $\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 = (\mathrm{a} + \mathrm{b})(\mathrm{a} - \mathrm{b})$, $x^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = (x + d)(x + e)$: donde $\mathrm{d} + \mathrm{e} = \mathrm{b}$, y, $\mathrm{d} * \mathrm{e} = \mathrm{c}$.

**Palabras clave:** Algebra, trinomios cuadráticos, estrategia didáctica, material concreto, MVU Algebra Tiles.

**ABSTRAC**

The present investigation is of qualitative approach, type investigation action; It was developed with the eighth-grade students of the La Garita Educational Institution of the municipality of Los Patios. The purpose of this study was to promote the development of variational thinking through a didactic unit for teaching the addition, subtraction, multiplication and factorial decomposition of polynomials.

A diagnostic test was applied to evaluate students' performance in the variational and geometric thoughts, obtaining as results that the majority of students did not know the concept of variable, they presented difficulties to perform operations that involve variables, they did not perform geometric models to represent areas and they did not know the formulas to find areas of flat surfaces.

Based on the results obtained in the diagnostic test, the group was intervened with a didactic unit designed under a constructivist approach, using concrete material and virtual manipulators. During the process it was observed that the strategies implemented during the pedagogical interventions motivated the students to achieve the objectives of this study. There was also evidence of improvements in the development of variational thinking, students were expanding the notion of the variable, acquired dexterity to perform geometric models with algebraic tiles, enhanced operations with polynomials and finally, found invariants in the geometric models that made possible the formulation of identities such as: $(\mathrm{a} \pm \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 \pm 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$, $\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 = (\mathrm{a} + \mathrm{b})(\mathrm{a} - \mathrm{b})$, $x^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = (x + d)(x + e)$: $where\ d + e = b,\ y,\ d * e = c$.


**Keywords**: Algebra, quadratic trinomies, didactic strategy, concrete material, MVU Algebra Tiles.

# TABLA DE CONTENIDO

# ÍNDICE DE FIGURAS

## ÍNDICE DE TABLAS



## ÍNDICE DE ANEXOS

# 1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

## 1.1 Descripción de la situación problemática.

La enseñanza de las matemáticas ha sido un problema que aqueja a la población docente y estudiantil en los diferentes niveles y subsistemas de la educación. Al llegar a las universidades se pueden observar notablemente las deficiencias que poseen los estudiantes, el poco manejo de los conceptos más importantes y la falta de uso del razonamiento lógico en los aspectos básicos referidos a esta disciplina. Con respecto a esto, Ruiz (2008) dice que esto se debe a que:

> La tendencia es cada vez mayor a pasar de un aprendizaje mayormente centrado en el docente (concepto tradicional del proceso de enseñanza aprendizaje), hacia uno centrado en el estudiante, lo cual implica un cambio en los roles de estudiantes y docentes. Así pues, el rol del docente dejará de ser únicamente el de transmisor de conocimientos para convertirse en un facilitador y orientador del conocimiento y en un participante del proceso de aprendizaje junto con el estudiante. (p. 1)

En tal sentido, se puede decir que el docente se ha convertido simplemente en un trasmisor de información, sin verificar si en realidad lo que está impartiendo es importante para el estudiante y si lo está haciendo con las estrategias y recursos necesarios para que lo motive hacia el aprendizaje. Es por ello que el docente debe ir más allá, convirtiéndose en un facilitador del conocimiento y orientador de las actitudes y aptitudes de sus estudiantes, es decir, no puede quedar aislado del proceso de enseñanza.

Aspectos que conducen a reflexionar sobre los estudiantes de la Institución Educativa la Garita, que llegan al grado octavo después de haber cursado como mínimo siete grados de la básica y uno de preescolar. Hasta el grado sexto, los estudiantes sólo conocen el conjunto de los números naturales y los llamados números fraccionarios junto con las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación. En los grados sexto y séptimo tienen el primer reto cognitivo, entender que existen más conjuntos de números, como es el caso de los números Enteros y los números Racionales. En el grado octavo, además de estos conjuntos, trabajan también el conjunto de números Irracionales y, por último, con la unión de todos estos conjuntos se construye el conjunto de los números Reales, las operaciones siguen siendo las mismas.

Es en este grado que se tiene la difícil tarea de entender que las letras también pueden representar cantidades, que estas también se pueden operar teniendo presente las propiedades para las operaciones en el conjunto de los números reales y que el trabajo con letras posibilita la realización de modelos matemáticos para llegar a la generalización. En este sentido, Alonso y otros (1993) afirman:

> La generalización dentro del aprendizaje del álgebra tiene como objetivo la expresión escrita, en forma simbólica, de las relaciones cuantitativas que se observa. Pero la expresión escrita, el registro de las palabras y las ideas, es una fase avanzada del proceso de generalización y de todas las formas de expresar una regla por escrito, la simbólica suele ser la más difícil. Por ello esta es la última fase, tanto en el proceso que lleva a generalizar como en su aprendizaje. (p. 38)

Para resolver diferentes situaciones problemáticas en el área de las matemáticas es necesario leer, interpretar, analizar y modelar; en este sentido, “el álgebra se convierte en un instrumento de modelización matemática que se debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos” (Godino, Font, 2003, p. 14.). Parte fundamental en el estudio del álgebra es el trabajo con expresiones algebraicas que a su vez es un tema central de la modelización, su enseñanza ha sido marcada por una corriente tradicionalista donde, tanto los docentes como los estudiantes han tomado como libro guía a Baldor (1982).

El ICFES, en su tarea de contribuir al mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes, publica en su página de internet los resultados obtenidos en las pruebas saber 3, 5 y 9, año 2009 a 2016. En las siguientes gráficas se observan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado noveno en los años 2014, 2015 y 2016.

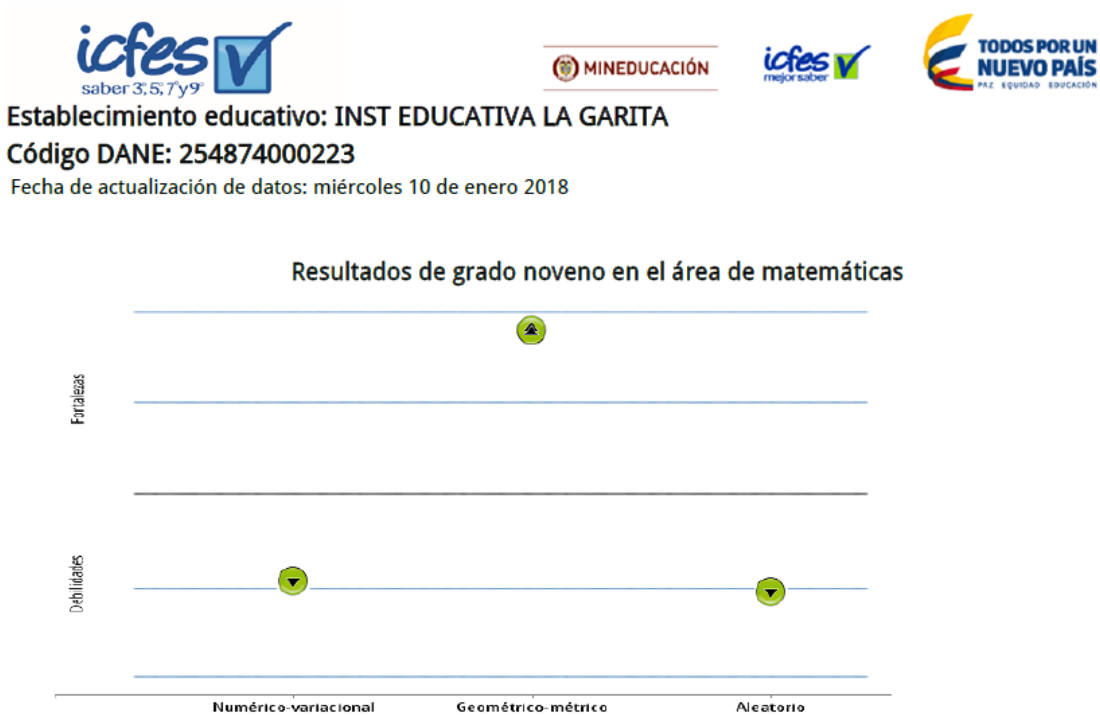



*Figura 1. Resultados de las pruebas Saber de Matemáticas del grado noveno 2014. Fuente: ICFES.*

El informe del ICFES presenta la siguiente lectura de resultados: en comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar al suyo en el área y grado evaluado, su establecimiento es: débil en el componente Numérico - variacional; muy fuerte en el componente Geométrico - métrico, representación y modelación y débil en el componente Aleatorio. Datos que permiten establecer una comparación con el 2015 tal como se evidencia a continuación:

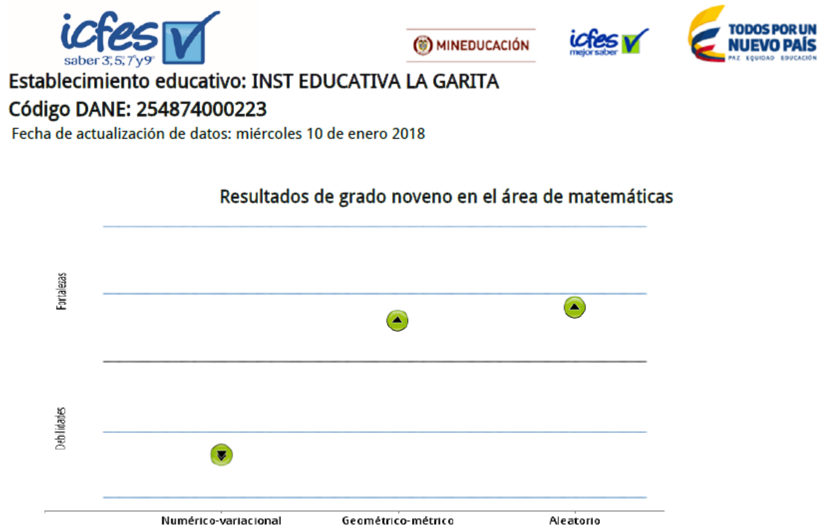



*Figura 2. Resultados de las pruebas Saber de Matemáticas del grado noveno 2015. Fuente: ICFES.*

El informe del ICFES presenta la siguiente lectura de resultados: en comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar al suyo en el área y grado evaluado, su establecimiento es: muy débil en el componente Numérico – variacional; fuerte en el componente Geométrico-métrico, representación y modelación y fuerte en el componente Aleatorio. Al comparar esta información con los resultados del 2016 se evidenció lo siguiente:

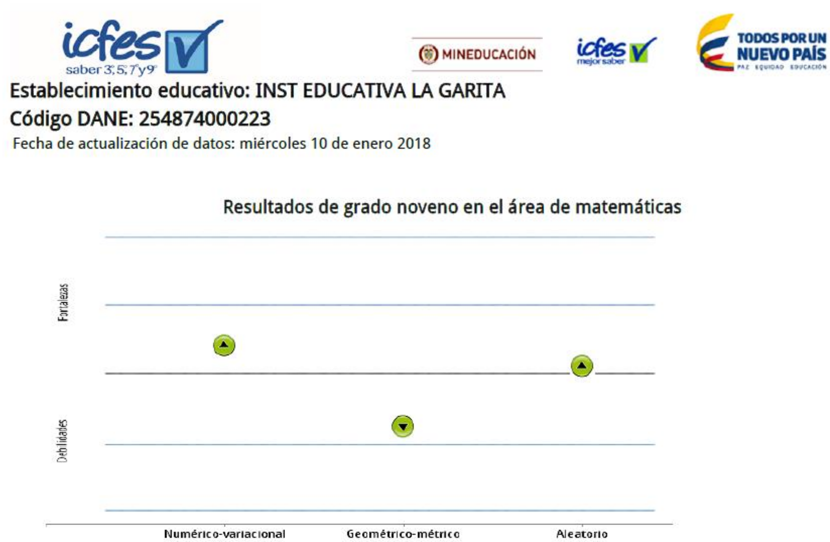



*Figura 3. Resultados de las pruebas Saber de Matemáticas del grado noveno 2016. Fuente: ICFES.*

El informe del ICFES presenta la siguiente lectura de resultados: en comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar al suyo en el área y grado evaluado, su establecimiento es: fuerte en el componente Numérico – variacional, débil en el componente Geométrico-métrico, representación y modelación y fuerte en el componente Aleatorio. Al analizar los resultados obtenidos durante los tres últimos años en las pruebas saber 9°, con relación al área de matemáticas, se evidencia que existe una problemática grande en el rendimiento de los estudiantes, no se están generando aprendizajes significativos que potencien el desarrollo del pensamiento variacional entre otros.

Por otro lado, el contexto en que se está desarrollando las clases de matemáticas genera en los estudiantes, miedos, incertidumbres y desánimo. En ocasiones los estudiantes sienten deseos de abandonar sus estudios por la desmotivación que causa el aprendizaje del área, específicamente, en el grado octavo cuya enseñanza se basa en el trabajo con expresiones algebraicas, en el cual no se incorporan materiales didácticos para su enseñanza y los estudiantes se tienen que conformar con la explicación teórica del profesor y luego memorizar los algoritmos para solucionar las posteriores misceláneas heredadas del libro de Baldor (1982).

Bajo este contexto, la didáctica de la matemática ha experimentado importantes avances en los últimos años, en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los diferentes contenidos de esta ciencia particularmente en situaciones escolares, determinando condiciones didácticas que permiten mejorar los métodos y los contenidos de enseñanza asegurando en los estudiantes la construcción de un saber vivo y funcional, susceptible de evolucionar y que permita resolver problemas dentro y fuera del aula.

En el mismo orden de ideas, “la matemática en las instituciones educativas debe ser facilitada como un saber útil, pertinente, deseable, conveniente, provechoso, importante, necesario y adecuado para dar respuestas a los problemas actuales, vitales, cercanos, interesantes que confronta el educando” (Rueda, 2006, p. 42). Es, por tanto, que el docente participa en un trabajo creador, diseña y desarrolla estrategias sustentadas en la didáctica para el aprendizaje y de esta manera, potenciar los conocimientos que enseña en función de los diferentes tipos de contextos.

### 1.2 Formulación del Problema.

El propósito investigativo que se pretende abordar en la Institución Educativa La Garita, responde a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional, a través de una unidad didáctica en la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de expresiones algebraicas en los estudiantes del grado 8° de la Institución educativa La Garita?

Otras preguntas complementarias que apoyan la problemática observada son:

¿Cuál es el desempeño de los estudiantes del grado 8°de la Institución Educativa La Garita en el pensamiento variacional?

¿Cómo diseñar una unidad didáctica para fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional en la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de expresiones algebraicas en los estudiantes del grado 8° de la Institución educativa La Garita?

## 1.3 Objetivos.

### *1.3.1 Objetivo General:*

Fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional a través de una unidad didáctica en la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de expresiones algebraicas en los estudiantes del grado 8° de la Institución educativa La Garita.

### *1.3.2 Objetivos específicos:*

- Identificar el desempeño de los estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa La Garita en el pensamiento variacional.
- Diseñar e implementar una unidad didáctica fundamentada con baldosas algebraicas y manipuladores virtuales, en la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios, en los estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa La Garita.
- Evaluar el impacto que tiene la unidad didáctica en el desarrollo del pensamiento variacional, en los estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa La Garita.

## 1.4 Justificación.

Los resultados obtenidos por los estudiantes colombianos de colegios públicos, privados, rurales y urbanos en el área de matemáticas de las pruebas PISA aplicadas en los años 2006, 2009 y 2012 no son alentadores. En el año 2012 el resultado estuvo 118 puntos por debajo del promedio OCDE y 237 puntos por debajo de Shanghái quien ocupó el primer lugar.

Al respecto Tapia y Pulla (2011) afirman:

> De lo que hemos observado las matemáticas de hoy se sigue enseñando como hace 30 años o más. Tanto más que los textos muchas veces son los mismos. En educación básica tienen categoría de sagrados el álgebra de Baldor, Mancil, el conocido Repetto. (p.13)

En ningún momento se desvirtúa el potencial que tienen estos textos en las aulas de clase como herramienta de enseñanza, lo que se quiere es aclarar que por el mal uso o abuso que se les ha dado, han generado en los estudiantes temores, decepciones, desmotivaciones que entorpecen su entendimiento. Al respecto algunas fuentes opinan sobre el tema, como por ejemplo el 24 de enero del 2016 el Heraldo en su página de internet publicó “Baldor mantiene su vigencia como el ‘terror’ de los textos escolares”. En este artículo se encuentra opiniones de tres grupos, Vendedores de libros, quienes afirman que es uno de los libros más vendidos año tras año; estudiantes, quienes afirman que es un tema difícil de entender en el grado 8°, pero que fortalece sus habilidades, y por último, los docentes quienes opinan que es un dolor de cabeza para la mayoría de los estudiantes, pero es de mucha utilidad en el estudio profesional.

De acuerdo a lo anterior, se hace necesario que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios se revolucione, aprovechando el potencial de las TIC y las herramientas didácticas que se han creado para tal fin. Por consiguiente, el presente estudio se justifica por la necesidad de fortalecer el aprendizaje en el área de matemática, ya que los requisitos en la vida laboral y en la participación ciudadana en el mundo contemporáneo, incluyen la flexibilidad para razonar sobre la información cuantitativa y utilizarla adecuadamente. La comprensión, formulación y comprobación como estructura del pensamiento es necesario desarrollarlas para enfrentarse a nuevos problemas y contextos.

Bajo esta perspectiva, a medida que cambia los juicios sobre los hechos o procedimientos Dewey (1989), expresa que “entre enseñar o aprender existe exactamente la misma relación que entre vender y comprar. La única manera de aumentar el nivel de aprendizaje de los alumnos es incrementando la cantidad y cualidad de la enseñanza real”(p.22). De acuerdo con el autor, esto es fundamental en un mundo cada día más tecnológico, se hace importante incluir estrategias que potencien su deseo de entender aquello que se les pide, que aprendan basándose en sus experiencias de su vida diaria. La comprensión de ideas matemáticas puede alcanzarse a lo largo de los años de escolaridad si se les compromete a los estudiantes activamente en tareas y experiencias para profundizar y relacionar sus conocimientos proponiendo ideas y conjeturas matemáticas.

Finalmente, se puede decir que la investigación promueve acciones innovadoras dentro del contexto programático y las estrategias de enseñanza por parte del docente, las cuales deben orientarse hacia el cambio de actitud tanto del estudiante como del docente y que aprendan a darle una aplicación más práctica y real a las matemáticas. Asimismo, se orienta al fortalecimiento del aprendizaje en el estudiante en cuanto a resultados y al docente al obtener dichos resultados en forma positiva y significativa.

## 1.5 Contextualización de la Institución.

La Institución Educativa la Garita se ubica geográficamente en el área rural del Municipio de Los Patios, sobre la vía principal kilómetro 20 que de Cúcuta conduce a Pamplona. Su entorno está conformado por las siguientes veredas: La Garita, Trapiches, Corozal, California, Colchones, 20 de Julio, Los Vados, Agua Linda, Helechal, La Mutis y Tascarena. De acuerdo a la Ley 505 de 1999, estos lugares se clasifican en Centros Poblados y Áreas Suburbanas.

De acuerdo a la Ley 505/99, en el Municipio de Los Patios, se pueden identificar cinco (5) Centros Poblados, ubicados en las veredas Agua Linda, El Trapiche, Helechal, La Mutis y Tascarena. Según la anterior clasificación legal, estas veredas se destacan por presentar características como las siguientes:

- Concentración de viviendas.
- La mayoría de ellas están articuladas por un incipiente trazado de vía principal.
- No poseen una clara definición de elementos constitutivos de espacio público.
- No poseen infraestructura ni equipamientos colectivos.
- Los problemas de servicios públicos son múltiples.
- En algunas de ellas como el caso de la vereda El Trapiche, aparte de la concentración de viviendas, éstas presentan un alto grado de deterioro y marginalidad.

Los anteriores aspectos reflejan una total improvisación en el asentamiento de las mismas, lo que denota una aglomeración de construcciones no entorno a algún tipo de elementos articuladores, sino por un simple establecimiento de viviendas una junto a la otra, para el caso de veredas como Agua Linda y el trapiche. En las veredas Helechal, La Mutis y Tascarena, las viviendas están distanciadas unas de otras, a distancias medianas o mayores, para el caso de estas tres últimas el centro articulador es la capilla de La Mutis.

# 2 MARCO REFERENCIAL

## 2.1 Antecedentes de la investigación.

La enseñanza de la matemática en las instituciones educativas ha sido y es fuente de preocupación para padres, maestros y especialistas. A pesar de los variados recursos didácticos utilizados, el acceso de los estudiantes al sistema de numeración se constituye en un problema, de igual manera como lo es para el docente en su práctica pedagógica. A continuación, se presentan las investigaciones que sirven de antecedentes al presente estudio, las cuales exhiben información sobre las estrategias y recursos para el mejoramiento en el área de matemática, factor incidente en el proceso enseñanza y aprendizaje. La mayoría de ellos se centraron en la práctica pedagógica que realiza el profesor en el aula de clase.

### *2.1.1 Ámbito Internacional.*

Matamala (2005) realizó un estudio titulado: “Las estrategias metodológicas utilizadas por el profesor de matemática en la enseñanza media y su relación con el desarrollo de habilidades intelectuales de orden superior en sus alumnos y alumnas” (Tesis de Maestría). Universidad de Chile. El autor plantea el objetivo de establecer cuáles son las estrategias metodológicas más comunes que utilizan los profesores de Matemática, en un Colegio particular pagado de la comuna de La Reina en los niveles de Primero, Segundo y Tercero medio.

Los resultados de la investigación muestran que el continuo modelo utilizado por los estudiantes se ubicó preferentemente en las estrategias del tipo superficial con énfasis en el estudio metódico. Esto señaló que, aunque en ocasiones se intente favorecer el aprendizaje significativo, los estudiantes manifiestan marcada tendencia hacia técnicas repetitivas. Las estrategias metodológicas de los profesores no difieren sustancialmente, usando mucho la clase frontal pasiva y de poca participación. Las evaluaciones que se realizan en general promueven sólo el procesamiento superficial de la información en los alumnos. Al comparar los tres grupos se apreció que no existen diferencias significativas en la manera de procesar la información. En general se puede concluir que ni las estrategias metodológicas, ni la forma de evaluar de los profesores promueven en el alumno el procesamiento profundo de la información.

La anterior investigación guarda relación con la presente, porque el autor propone que el uso de estrategias de enseñanza fortalecidas con didácticas innovadoras, promueve el desarrollo del pensamiento y genera aprendizajes significativos mediante la resolución de problemas en el área de matemática.

Castro (2007) presentó una investigación titulada: “Estrategias utilizadas por los docentes en la enseñanza-aprendizaje de la matemática en noveno grado” (Tesis de Maestría). Universidad Experimental Libertador. El autor plantea como objetivo general, proponer estrategias motivacionales dirigidas a los docentes para mejorar los procesos enseñanza y aprendizaje en los estudiantes de noveno grado de la Unidad Educativa el Guayabo, estado Zulia (Venezuela). Encontró que los docentes presentan debilidades notorias en la aplicación de estrategias motivacionales, las cuales, desvirtúan la finalidad propuesta contemplada en la Normativa del Ministerio del Poder Popular para la Educación, también se pudo detectar que al no aplicar de manera eficiente estas estrategias dificulta el logro de los aprendizajes significativos en los estudiantes.

El investigador realizó el trabajo bajo la modalidad de proyecto factible, apoyada en una investigación de campo, descriptiva, tipo cuantitativa; fue realizada en la Unidad Educativa "El

Guayabo" del municipio Catatumbo del estado Zulia, utilizó una muestra de 4 docentes de noveno grado del área de matemática. Para recolectar la información aplicó un cuestionario de doce (12) ítems con alternativas de respuesta (siempre, Casi Siempre, A Veces, casi Nunca y Nunca), cuyos resultados fueron manipulados a través de la estadística descriptiva. La autora recomendó a los directores, apoyar la labor docente mediante talleres de actualización sobre estrategias de enseñanza y evaluación; a los docentes recomendó utilizar estrategias innovadoras específicas que permita realizar una evaluación constante para desarrollar cada objetivo del programa; propiciar el aprendizaje y la motivación a los escolares por aprender la asignatura.

Esta investigación hace un aporte al presente estudio porque orienta al docente en la implementación de estrategias didácticas que mantengan la motivación y el interés por los aprendizajes significativos, acompañada también de la innovación didáctica para poder facilitar herramientas a los estudiantes en la construcción del conocimiento.

Calvo (2008) realizó una investigación titulada: “Estrategias para la enseñanza de la matemática en la Segunda Etapa de Educación Básica, en la Unidad Educativa Estadal Dr. Raúl Leoni”. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Abierta de la localidad de Rubio del municipio Junín del estado Táchira. Para ello, el autor desarrolló una investigación de campo documental, de naturaleza cualitativa descriptiva, aplicó para la recolección de los datos una guía de observación a veinte (20) docentes de I y II etapa de la institución objeto de estudio.

El autor concluyó que los docentes desarrollan una práctica de acento tradicional, que se limitan a transmitir contenidos programáticos a los alumnos, mediante la realización de ejercicios, tanto en el aula como en actividades a desarrollar en la casa; la evaluación va en función de exámenes con ejercicios prácticos y teóricos. El autor recomendó a los docentes sensibilizarse e indagar en la búsqueda de su auto formación para la adquisición de habilidades y destrezas en el diseño de estrategias motivacionales para la enseñanza y evaluación de la matemática.

El enfoque anterior sustenta el planteamiento del problema de la presente investigación, cuando afirma que el docente de matemática desarrolla los contenidos programáticos de manera tradicional, observándose la despreocupación de los mismos en el diseño y utilización de estrategias didácticas innovadoras, haciendo que la asignatura sea difícil y poco significativa para la mayoría de estudiantes, además, sugiere la autoformación para afrontar la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque participativo, donde el docente es un mediador entre el conocimiento y el estudiante, y este a su vez, desempeñe un papel protagónico de su propio aprendizaje, motivado por los retos cognitivos que propone el docente, a través de actividades significativas y retadoras.

*2.1.2 Ámbito Nacional.*

Villarroel (2014) con su investigación titulada "Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica "caja de polinomios", en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano del municipio de Medellín" (Tesis de Maestría). Universiad Nacional de Colombia. El autor se propone diseñar una propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas y la descomposición factorial; para alcanzar este objetivo utilizó un material concreto llamado la caja de polinomios. Su trabajo se desarrolló aplicando 7 guias de aprendizaje, durante el mismo número de encuetros presenciales, la intervención del docente durante los encuentros fue mínima para analizar el actuar de los estudiantes, permitiéndoles que construyan de manera guiada su conocimiento. El autor concluye su trabajo diciendo que después de aplicadas las guías, las operaciones que más se facilitaron para resolver fueron la adición y sustracción pero, por su parte la multiplicación, división y factorización presentaron mayor dificultad.

Esta investigación aporta una valiosa información que fue tenida en cuenta para potenciar las actividades de la unidad didáctica que involucran las operaciones básicas entre polinomios y la descomposición factorial de exprseiones algebraicas.

Ballén (2012) realizó un trabajo investigativo titulado: "El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado". (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia. El autor  se propone realizar un recorrido histórico y epistemológico del algebra buscando elementos que obstaculizan y enriquecen su proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular busca utilizar como recurso didáctico el álgebra geométrica. Concluye su trabajo de la siguiente manera: Los temas de enseñanza del álgebra, en especial los que tienen que ver con los procesos de factorizar, con nuestros estudiantes no son fáciles de abordar, por lo que debemos acudir a diferentes estrategias que nos permitan mejorar los resultados con nuestros niños. El álgebra geométrica realmente logra que exista una mejor comprensión de los temas a pesar de las limitaciones que pueda tener, pero la parte visual que tiene este recurso genera una mayor motivación porque se logra manipular los conceptos algebraicos de una manera más atractiva sin dejar a un lado su fundamentación teórica.

El estudio otorga una fuente de información completa sobre el desarrollo del álgebra a través de la historia y el aporte de la geometría para facilitar la construcción de los conceptos algebraicos, al servir de conector entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, dicha información será tenida en cuenta para estructurar la información que se presentará en la unidad didáctica.

Quintero (2014) realizó un estudio titulado: “Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria” (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales. El autor se propone como objetivos, identificar e interpretar las dificultades que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas en todos los grados de educación secundaria.

Para alcanzar los objetivos desarrolló en la Institución Educativa Jorge Isaac ubicada en la vereda El Villar en el departamento de Valle del Cauca, en los grados de 6° a 11° una investigación de tipo cualitativo. Realiza un taller con el fin de reflexionar sobre las tres etapas para desarrollar un problema: entender el problema, procedimiento y evaluar el resultado del problema, apoyado en la propuesta de resolución de problemas de Polya (1957). Por otro lado, el taller también permitió realizar una reflexión metacognitiva a través de la regulación de los procesos cognitivos esenciales: planeación, monitoreo y evaluación postulados por Brown (1987). Los resultados encontrados fueron los siguientes:

- Falta de conocimiento metacognitivo de la tarea
- Dificultad para representar semióticamente
- Falta de responsabilidad y autonomía en el aprendizaje
- Dificultad para recordar
- Falta de regulación o control metacognitivo
- Dificultad en la ejecución de operaciones
- Calibración en metacognición.

En una de sus conclusiones afirma que: en todos los estudiantes se puede evidenciar una fuerte tendencia a creer que las matemáticas están centradas en las operaciones o algoritmos, menospreciando el razonamiento lógico como medio eficaz para solucionar problemas. Esto puede presumirse en la medida que los estudiantes relacionan su fracaso con las dificultades para recordar las fórmulas o técnicas aprendidas.

El trabajo investigativo sustenta el problema descrito en el capítulo anterior en el momento que el autor menciona que una de las dificultades que poseen los estudiantes, es la falta para representar semióticamente las variables. Por lo tanto, la presente investigación se nutre de esta afirmación y busca diseñar actividades que potencien las representaciones semióticas.

Carmona y Jaramillo (2010) realizaron un trabajo de investigación titulado: “El razonamiento en el desarrollo del pensamiento lógico a través de una unidad didáctica basada en el enfoque de resolución de problemas” (Tesis de maestría). Universidad de Tecnológica de Pereira. Los autores abordan como objetivo general, favorecer mediante una unidad didáctica basada en el enfoque de resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje en el área de Ciencias Naturales del concepto fuerza, el desarrollo del Pensamiento Lógico en los niños y niñas de grado sexto del Instituto Kennedy del municipio de Pereira, desde una de sus formas lógicas como es el Razonamiento.

La investigación se fundamentó bajo el enfoque cualitativo utilizando el método estudio de caso, el cual midió y registró la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado. Se emplearon en el estudio dos instrumentos: la prueba Psicométrica BAD y G3 para observar si existían variaciones en el desempeño a partir de la intervención y el plan de observación de los procedimientos lógicos asociados al razonamiento.

Se seleccionó el grado sexto C del Instituto Kennedy conformado por 39 estudiantes, se desarrolló la parte inicial de la unidad didáctica con el total de estudiantes y posteriormente se seleccionaron 12 para llevar a cabo la segunda parte que se fundamentó en la resolución de problemas al final se seleccionaron una vez más dejando un grupo de 3 estudiantes.

Una de las conclusiones obtenidas afirma que el enfoque como fue planteado en la Unidad Didáctica favoreció el proceso interactivo entre los investigadores, estudiantes, contextos problemáticos y tareas.

Por lo anterior, este trabajo investigativo se constituye en parte fundamental del presente trabajo, toda vez que muestra la relevancia de incorporar la unidad didáctica en el currículo escolar, con el fin de generar aprendizajes significativos.

*2.1.3 Ámbito Local.*

Rojas, Suárez y Parada (2014) desarrollaron un trabajo investigativo titulado: "Presaberes matemáticos con los que ingresan estudiantes a la universidad". Universidad Francisco de Paula Santander. Los autores plantearon como objetivo elaborar e implementar una prueba diagnóstica para identificar los presaberes matemáticos con los que ingresan los estudiantes a la universidad. La prueba buscó identificar el nivel de desempeño en los componentes variacional y algebraico.

En el diseño del instrumento se incluyeron los documentos orientadores como: las competencias matemáticas enunciadas por los lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación de Colombia MEN, 1997) y los Estándares Básicos de Matemáticas para Colombia (Ministerio de educación de Colombia MEN, 2006), fue aplicada a 255 estudiantes matriculados en el curso de cálculo diferencial. Los resultados obtenidos demostraron que el nivel de desempeño de los estudiantes fue básico presentando mayor dificultad en el componente variacional.

El artículo anterior sustenta el planteamiento del problema de la presente investigación, cuando afirma que los estudiantes llegan a la universidad con un nivel de desempeño bajo en el componente variacional, por lo tanto es necesario que se potencie el desarrollo de este pensamiento desde la formación básica.

Prada, Fernandez y Ramirez (2016) realizaron una investigacion titulada: “Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de Ingeniería”. En su trabajo de investigación plantearon como propósito, evaluar la comprensión de la noción de función y la capacidad de articular distintos registros semióticos para su representación por parte de los estudiantes de nuevo ingreso en la carrera universitaria en Colombia.

Se utilizó un diseño metodológico cualitativo, aplicando una prueba en la que se mostró a los estudiantes dos representaciones gráficas con la intención de que identificaran cuál de ellas constituía una función. Se analizaron 86 producciones de los estudiantes con el software Atlas.ti 7.0. El sistema de categorías emergente permitió vislumbrar los siguientes hallazgos: deficiencias conceptuales, diversidad en aproximaciones conceptuales, referentes conceptuales, representaciones semióticas y, por último, destacan las distintas variaciones conceptuales.

La investigación presenta información que sustenta la necesidad de favorecer desde la básica los diferentes sistemas de representación semiótica, toda vez que al suministrar más herramientas a los estudiantes, se facilitará la comprensión y el desarrollo de los conceptos matemáticos necesarios en la educación superior.

## 2.2 Marco Teórico.

Para el desarrollo del fundamento teórico de la presente investigación se realizó una exhaustiva búsqueda y selección de material bibliográfico pertinente que posibilitara estructurar el estudio planteado, con una solución adecuada al problema de investigación detectado. El resultado de dicha búsqueda se organizó y se presenta a continuación:

### *2.2.1 La Enseñanza de la Matemática en Entornos Educativos.*

Cuando se prepara una clase de matemática, una de las preocupaciones principales radica en cómo mantener a los estudiantes interesados en el tema que se va a desarrollar. Más aún, cómo estructurar el discurso didáctico para atraer y mantener la atención de los estudiantes. Después de todo, “el docente de matemática tiene, por lo general, el estigma de ser el profesor de una materia difícil y aburrida” (Gardner , 1995, p.67).

Por otra parte, es labor del docente de matemáticas buscar estrategias que motiven al estudiante.  Son muchos los esfuerzos que se han planteado a través del tiempo, pero el que mejor plantea la posibilidad de motivar a los educandos es presentar clases dinámicas, donde todos tengan la oportunidad de participar e interactuar de manera agradable y divertida. La unidad didáctica como estrategia metodológica permite presentar al estudiante temas de matemáticas  interesantes para ellos, que al estar fuera del currículo formal del curso, se libera al estudiante de la preocupación de tener que aprenderlo y se convierten en un entretenimiento y por tanto una actividad de carácter lúdico que potencia el aprendizaje. Las prácticas que se desarrollan en la escuela para el estudio del conocimiento matemático, dentro del currículo de la enseñanza obligatoria, se consideran como un aporte fundamental del saber que todo ciudadano debe tener como contenido mínimo; por tanto, su tratamiento debe estar dirigido fundamentalmente al estudio comprensión e intervención en su entorno cotidiano.

Por consiguiente, la enseñanza de la matemática es, según Gallego (2007), “un proceso didáctico de aspectos lógicos y analíticos, a través de los cuales el estudiante debe aprender a pensar y razonar" (p.76). De allí que, los estudiantes aprenden su aplicación en la práctica cotidiana, su relación con otras asignaturas y las ventajas futuras. En el mismo orden de ideas, Aja (2001) refiere que el aprendizaje está “considerado como un proceso psico-cognítivo fuertemente influenciado por factores motivacionales y actitudinales del estudiante” (p.339). Es así que, el docente juega un papel protagónico en el sentido de generar las motivaciones y actitudes hacía el área de matemáticas, planeando los procesos de enseñanza y aprendizaje desde un enfoque constructivista, separándose de los enfoques tradicionalistas, memorísticos y pasivos como es el conductismo, para así, afectar positivamente los resultados del aprendizaje.

De esta manera, el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas impone en el quehacer del docente, un análisis que brinda salidas eficientes desde una posición didáctica en la cual se seleccionan objetivos, contenidos, métodos y evaluación apropiada; dando lugar a la planificación como herramienta indispensable para el análisis de los diferentes aspectos vinculados con los contenidos escolares, es decir, aclara qué, cómo y para qué se lleva a cabo la tarea de enseñar.

Con respecto a la planificación, Antúnez (2002) la define como: “proceso reflexivo sobre la práctica, reporta calidad a la enseñanza, facilita la autonomía pedagógica al aumentar su capacidad de decisión e investigación de lo que acontece en el aula, debe ser flexible, contextualizada y completa” (p.76). Es decir, que puede ser visto como un camino mediante el cual se determinan las metas y se establecen los requisitos para lograrlas de la manera más eficiente y eficaz posible. En ese proceso se trata de racionalizar la acción en una pauta temporal, en función del logro de fines bien definidos que se consideran valiosos.

Por consiguiente, el docente debe ser cuidadoso en el diseño de la misma, indagando información significativa para el estudiante, con el fin de ser innovador y creador de su praxis pedagógica. Además, el docente de matemáticas debe reflexionar sobre cada uno de los siguientes aspectos: a) conocimiento socio-cultural del grupo, b) contenidos matemáticos explícitos en el programa en curso, c) recursos materiales disponibles (texto, biblioteca, aula de informática, lúdicas entre otros), d) estrategias metodológicas a emplear, e) qué, cómo y cuándo evaluar; así lo afirma el autor antes señalado.

Por otra parte, la enseñanza de esta asignatura según Gutierrez (2000) debe estar enfocada en tres tópicos: uno, utilizar la matemática conocida como herramienta para resolver problemas cotidianos; otro, aprender a enseñar matemáticas, lo cual provee al estudiante herramientas necesarias para solucionar problemas nuevos y al mismo tiempo mantiene vivo su saber; por último, crear matemática novedosa, adoptando modelos conocidos a las necesidades del estudiante, de modo que los apliquen en situaciones nuevas. Por lo anterior, el docente debe a través de estrategias metodológicas, motivar a los estudiantes, y de esta manera, utilizarlas para valorar a través de la práctica los conocimientos adquiridos y su actitud al resolver problemas cotidianos que puedan aplicarlos eficientemente en su vida cotidiana.

En este orden de ideas, la motivación, ha sido objeto de numerosas investigaciones y se ha abordado desde diversos puntos de vista, con la finalidad de recabar toda aquella información necesaria para descubrir la incidencia que ésta pueda tener en determinados patrones de conducta. Por tanto la motivación es entendida como el momento en el cual el docente pone a los estudiantes frente a situaciones de aprendizaje, para despertarles curiosidad e interés por aprender.

Es por ello, que el docente debe tener la habilidad para investigar a cada uno y formar ideas de las motivaciones que les impulsan en todo el proceso de aprendizaje, y con base a esto, planificar actividades que los lleven a descubrir lo que es significativo, a unificar lo afectivo con lo cognitivo, a crear un ambiente favorable al aprendizaje efectivo que les permita reflexionar, expresar sus pensamientos, sentimientos e inquietudes, confrontando las diversas opiniones y puntos de vista, haciendo que cada aprendizaje se celebre con alegría. La enseñanza de las matemáticas requiere que el docente aplique procesos didácticos, que posibiliten la actividad dentro de los contenidos de esta ciencia, es decir, que la misma debe dirigirse de tal modo al estudiante, que se le facilite "la rica experiencia del conocimiento, del descubrimiento y de la investigación". (Fernández, 2004, p.55).

De lo anterior, se deduce que los diferentes aspectos del estudio de las matemáticas se deben relacionar con actuales dispositivos didácticos y recursos adecuados a las distintas dimensiones del proceso de estudio, haciendo el acercamiento inicial a través de relaciones con otras ciencias que hacen uso de las matemáticas, de adecuaciones a circunstancias de la realidad humana o bien a presentaciones de juegos tratables matemáticamente. No obstante, en la realidad, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas adopta la necesidad de analizar los procesos involucrados en el mismo, para poder incidir sobre el rendimiento de los estudiantes. Según Aja (2001), "el docente debe modificar su conducta, pensamiento, su forma de interpretar el saber matemático" (p. 128). Es decir, debe dejar de mirarse como una entidad reproductora y convertirse en una organización productiva, creadora, dejar el aislamiento y abrir caminos para la participación de la comunidad con toda su potencialidad en la escuela, además, establecer relaciones con la familia, medios de comunicación, empresas, asociaciones de vecinos, clubes deportivos, entre otros; ya que ésta no puede consistir sólo en manipular números y procedimientos, sino que fundamentalmente, debe servir, según González (2001) para:

> a) Propiciar situaciones que brinden al estudiante la oportunidad de comunicar sus ideas matemáticas, b) Generar actividades que los capacite para obtener, organizar y analizar información, resolver problemas y construir argumentaciones lógicas, c) Relacionar la asignatura con el entorno, d) Vincular la matemática con otras áreas de la creación humana, e) Desarrollar en el alumno sentimientos de autodisciplina, t) Habilitar al estudiante para el trabajo en equipo, planteando tareas intelectuales exigentes y g) Preparar al alumno para el uso efectivo, consciente y crítico de las nuevas tecnologías. (p.56).

Ante lo planteado por el autor, el aprendizaje debe tener lugar en ambientes reales dentro y fuera del aula, vinculando las actividades seleccionadas con las experiencias vividas por el estudiante; en otras palabras, incluir la actividad (ejercitación), concepto (conocimiento) y cultura (contexto). Es así que el docente debe esforzarse en obtener aprendizajes significativos basados en la experiencia, analizando junto con los estudiantes, las respuestas que han dado a las actividades programadas y relacionar sus conocimientos previos con los contenidos, esto para dar lugar al aprendizaje de los nuevos conocimientos, desde la memoria inicial hasta la formación de conceptos, teniendo en cuenta el estilo de aprendizaje de cada uno.

En este mismo sentido, para hacer que las matemáticas cumplan con su papel de contribuir al desarrollo del pensamiento, el docente debe propiciar al estudiante actividades en las que pueda: explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre su quehacer, al respecto Guzmán (2007) expone:

> La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces. Se trata de considerar como lo más importante que el estudiante: a) manipule los objetos matemáticos, b) active su propia capacidad mental, c) ejercite su creatividad, d) reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, e) haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, de ser posible, f) adquiera confianza en sí mismo, g) e divierta con su propia actividad mental, h) se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana y i) se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia. (p.35).

En síntesis, es necesario reconceptualizar el rol del docente e identificar las habilidades que debe poseer, como ser: un investigador capaz de diseñar y evaluar estrategias que le permitan resolver los problemas de la realidad, planificar la acción pedagógica, prever los recursos disponibles, aplicar motivación apropiada, explorar conocimientos previos, contenidos y recursos para construir nuevos conocimientos y lograr aprendizajes efectivos.

Con el propósito de cumplir con lo expuesto anteriormente, la presente investigación expone en el capítulo 4 una unidad didáctica que fue diseñada y probada, la cual sirve como una herramienta metodológica de enseñanza aprendizaje donde el docente deja a un lado su papel protagónico y el estudiante asume su proceso de aprendizaje desde un enfoque innovador, lúdico, donde puede manipular objetos reales, ejercitar su pensamiento matemático, construir las nociones y hacer trasferencia hacia los conceptos.

### *2.2.2 Estrategias Pedagógicas y Didácticas en la Matemática en las Instituciones Educativas.*

El docente cumple la función de guía al orientar sobre la mejor forma de presentar y abordar los conocimientos sobre la materia. En este sentido, el docente otorga al estudiante oportunidades para observar, clasificar, resolver y analizar la información lógica a través del uso de herramientas didácticas de estudio sobre las matemáticas, pero en algún momento los estudiantes deberán entender que el conocimiento adquirido ha de ser aplicado a su contexto.

Por ello, los docentes deben motivar a los estudiantes hacia el fortalecimiento de la cognición, usando estrategias pedagógicas como las unidades didácticas que contengan diferentes actividades que favorezcan la observación, clasificación y análisis de objetos matemáticos en la apropiación y corrección de los trabajos prácticos, que aprenda a reconocer las dificultades presentadas y resolver problemas de manera que el estudiante desarrolle competencias cognitivas y metacognitivas, conocimientos y reflexiones.

Atendiendo a las capacidades desarrolladas para su edad mental y su edad cronológica entendiéndose que después de los once años se adquieren ciertas habilidades y destrezas que surgen del pensamiento hipotético – deductivo, como se puede evidenciar la deducción en esta etapa no contempla solamente las realidades percibidas, sino que se refiere también a enunciados hipotéticos: la deducción consiste entonces en vincular entre si esas presuposiciones extrayendo sus consecuencias necesarias incluso cuando su verdad experimental no vaya más allá de lo posible. Inhelder y Piaget, (1955, citado en Cano, 2007).

De hecho, las estructuras operatorias que están en juego en el pensamiento formal, de acuerdo a Inhelder y Piaget (1955, citado en Cano , 2007) hacen algunas observaciones acerca de los instrumentos lógico – matemáticos que emplean en dicho análisis: Al respecto, explican que toman como modelo las estructuras matemáticas generales expuestas por los hermanos Bourbaki, quienes afirman que tres tipos de estructuras fundamentales pueden combinarse en formas múltiples para explicar cualquier otra estructura, independientemente del dominio particular de la estructura a explicar; estas estructuras son: a) estructuras topológicas, referidas a lo continuo y que no interesan en el caso de estructuras psicológicas; b) estructuras algebraicas cuyo prototipo es el grupo y c) estructuras de orden, una de cuyas formas principales la constituye el reticulado. El modelo de estas estructuras básicas permite la comparación del pensamiento operacional concreto con el pensamiento formal y la comprobación de cómo las estructuras más complejas pueden construirse a partir de las simples.

De acuerdo a lo planteado, estas nuevas capacidades mentales, se demuestran por un rápido incremento en la habilidad para conservar propiedades de objetos a través de cambios y realizar una clasificación y ordenamiento de los objetos que también surgen en este período, permite que el estudiante se convierta en un ser capaz de pensar en situaciones físicamente ausentes, que se apoyan en imágenes vivas de experiencias pasadas, por eso el pensamiento está limitado a cosas concretas en lugar de ideas, y las acciones pedagógicas tienen su duración en la escolarización media. Para ordenar mentalmente un conjunto de elementos de acuerdo con su mayor o menor tamaño, peso o volumen y clasificación, se perfeccionan los conceptos de casualidad, espacio, tiempo y velocidad.

En esencia, el ser humano en la etapa operativa concreta alcanza un nivel de actividad intelectual superior en todos los sentidos. Por lo general, en esta etapa todavía no es posible aplicar, la lógica a problemas hipotéticos, exclusivamente verbales o abstractos, y si se presenta un problema exclusivamente verbal es incapaz de resolverlo de manera correcta. Pero si se le presenta desde una perspectiva real es capaz de resolver problemas que incluyen variables. La metodología que se emplea en este trabajo, permite favorecer la construcción del conocimiento y el éxito académico, que debe tenerse ante estas características, diseñando y favoreciendo la construcción de los objetos matemáticos algebraicos desde un entrono real, manipulando figuras geométricas conocidas por los estudiantes, lo cual contribuirá al desarrollo del pensamiento concreto (Salvador, 1990, p.166)

Por consiguiente, es necesario apuntar a una renovación pedagógica total, donde los docentes asuman un rol protagónico, que incluya la modernización de los instrumentos escolares, el mejoramiento de técnicas, para optimizar las relaciones entre estudiantes y maestros, readaptar la escuela al medio y trabajar en esfuerzos comunes. La renovación pedagógica radicalmente debe actuar sobre los estudiantes, fortaleciendo la metacognición, asumiendo que aplica el docente cuando actúa como formador con sensibilidad, equilibrio, maestría y autoridad, usando factores de eficiencia del éxito.

Sin embargo, en cuanto a la atención de los estudiantes se orienta hacia la vigilancia y esmero que debe suministrar el docente, estar orientado al desarrollo de competencias cognoscitivas, solución de problemas, clasificación, seriación, ordenación y razonamientos matemáticos de manera significativa. De acuerdo a Sánchez (2001), la clasificación es: “el proceso mediante el cual se organizan los objetos de un conjunto de clases con un criterio previamente definido”. (p.51). Se entiende por clase, al grupo de elementos que tienen unas características en común y es compartida por objetos, situaciones o conceptos similares.

Asimismo, el procedimiento que se debe tener en cuenta para clasificar, es definir el propósito observando los objetos del conjunto e identificar sus semejanzas y diferencias; establecer relaciones, identificar variables, seleccionar objetos. Para definir los criterios de clasificación es necesario identificar los grupos, con respecto a las variables elegidas y asignadas a cada objeto correspondiente una característica; anotarla, describirla y verificarla en el proceso. La falta de reversibilidad es otro factor restrictivo del desarrollo cognitivo. Todas las operaciones lógicas son reversibles en el pensamiento, pueden ser recorridas en sentido inverso para regresar a las situaciones originales del problema.

De allí que, la seriación, según Sánchez (2001), está referida a la “estimación y la operación del pensamiento a través de la cual el alumno aplica un determinado orden de ideas y objetos presentes en un contexto”. (p.58). La seriación por repetición en el orden de los objetos presenta dificultad al estudiante cuando las situaciones son complejas, y en estos casos requieren de la ayuda del docente.

El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros niveles educativos apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas. Los modelos y los materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.54).

En tal sentido, el razonamiento explica la coherencia interna del su organización lógico-racional, indaga procesos inferenciales del pensamiento matemático al momento de resolver problemas matemáticos, que interactúan detrás de estructuras de representación halladas experimentalmente. Para ello, se diferencia entre procesos inferenciales implícitos y explícitos de la dinámica representacional de la mente, y su estudio abarca la génesis y consolidación de nuevas estructuras formales y lingüísticas necesarias para la comprensión y resolución de problemas.

El análisis es un proceso que permite separar un todo en sus partes; entonces el análisis es una de las operaciones mentales más frecuentes utilizadas en diversos tipos de actuación. Se debe tener en cuenta que la habilidad para analizar, supone un entrenamiento dirigido a esos fines y tomar en cuenta el programa de enriquecimiento instrumental que al cumplimiento de ciertos pasos o normas, para obtener buenos resultados como dividir un todo en sus partes, comprender el número de fragmentos en las cuales un todo es individuo; tiene el propósito quien ejecuta el análisis, practica las estrategias de identificación y denominación como medios para organizar el trabajo y restringir la impulsividad.

En este sentido, cuando un estudiante actúa bajo incertidumbre se presentan una serie de conflictos que produce indecisión, principalmente al momento de desarrollar trabajos, porque no tiene las herramientas necesarias que permitan hacer uso del conocimiento. Es probable, que al enfrentarse a resolver un problema no maneje las competencias necesarias para solucionarlo, por tanto, hace que el estudiante tenga una sensación de inseguridad de frustración, por hacer procedimiento erróneos, sin conocimientos ni aplicación del pensamiento matemático, que desfavorece el aporte a la solución de un conflicto.

La inseguridad y la frustración debe ser superada, por cuanto el trabajo escolar en el aula en el área de las matemáticas, tiene que ver con las necesidades propias del estudiante en su entorno; debe asumir una comprensión de su contexto, por eso se requiere herramientas conceptuales elaboradas con procedimientos metacognitivos para que contribuya con procedimiento efectivo, y a la medida que lo aplica, le permite fundamentar el conocimiento razonado, aprendido a partir de su experiencia.

Además, presentan problemas para mantener la atención, finalizar tareas o actividades sugeridas en las clases. Pierden u olvidan cosas necesarias, no parecen escuchar al hablarles, no relacionan los saberes previos con los nuevos conocimientos y olvidan realizar tareas cotidianas. Por eso, el control de la impulsividad, requiere atención y aprendizaje sobre conocimientos, también el docente aplica la metacognición en matemáticas, cuando divide las tareas o temas en pequeños pasos destacando siempre lo más importante, puede dedicarle también una charla tranquila, preguntando: ¿cómo se sienten realizando trabajos de la asignatura?

De allí, la importancia de la unidad didáctica presentada en el capítulo 4, aplicándola como herramienta pedagógica que dinamice el aprendizaje progresivo, relacionando los objetos reales con los objetos matemáticos abstractos. De esta manera se contribuye al estudiante para que regenere su energía y confianza, obteniendo motivación para realizar las actividades por gusto propio, permitiéndole que descubra la estructura de las cosas y fenómenos, reconstruya relaciones para que lo ayuden a reflexionar en las experiencias de aprendizaje, de igual manera, impulsar el desarrollo de las habilidades cognitivas del estudiante y encauzarlo a la resolución anticipada de problemas a través del pensamiento matemático, lo cual incluye la generación de ideas no convencionales, el desarrollo de habilidades de comparación, clasificación, ordenación y organización, así como contribuir al desarrollo del pensamiento analítico, sintético y evaluativo.

Ahora bien, en la aplicación del conocimiento en ideas nuevas, se toma en cuenta a Chadwick (1999), quien manifiesta que “el conocimiento aumenta la eficacia al ofrecer la diferencia, se puede partir de errores y generar una idea innovadora, mientras que implícitamente el modelo lógico formal, de pensamientos no analiza una idea sino, lo enlaza al postulado general” (p.78). Por esta razón, un modelo de pensamiento estratégico en el cual se sigan ciertos pasos para concluir la estrategia más adecuada, debe estar acompañado de una reestructuración de esos prototipos de pensamiento para generar nuevas ideas, por ello, es decisivo definir los roles de los docentes, permitiendo con esto que los procesos de aprendizaje sean cada vez más asumidos por los estudiantes; el rol de los docentes radicaría en favorecer este tipo de aprendizaje.

### *2.2.3 Pensamiento Variacional*

De acuerdo a Vasco (2003) “El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.” Las operaciones del pensamiento variacional se pueden describir como: Manejo de lo desconocido, particularización, reversibilidad, conjeturar, abstracción y generalización. (p.63)

El Ministerio de Educación Nacional, mediante sus lineamientos propone desarrollar el pensamiento variacional con la implementación de estrategias que le permitan al estudiantes reconocer, percibir, identificar, caracterizar la variación y el cambio desde diferentes contextos, así como la descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos para aplicarlo en situaciones de su vida cotidiana.

El desarrollo del pensamiento variacional es un proceso que requiere de los conocimientos y la relación de los pensamientos numérico, geométrico y métrico por parte de los estudiantes y de estrategias didácticas por parte del docente, dado a que es “lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre las variables” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 68)

El objetivo central del pensamiento variacional es la modelación matemática, los ejercicios que se les proponen a los estudiantes deben convertirse en retos o desafíos, que requieran de la realización de un modelo para su solución y no solo la simple realización de ejercicios rutinarios que se resuelven repitiendo algoritmos. (Vasco, 2003, p.64)

En este sentido, Vasco (2003) propone esquematizarlo en momentos así: “momento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece, momento de creación de un modelo mental, momento de echar a andar el modelo, momento de comparar los resultados con el proceso modelado, momento de revisión del modelo”. (p.64)

De esta manera, el pensamiento variacional está ligado con la identificación y la caracterización de lo que cambia y de lo que permanece constante, la generación de modelos, las posibles formas de representación, graficas, verbales o algebraicas. En este sentido, Posada Obando (2006), afirman que el desarrollo de este pensamiento se da mediante:

> El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación - gráficos, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión. (p.16).

El pensamiento variacional se desarrolla con el pensamiento numérico, con el pensamiento espacial, con el pensamiento métrico, con el pensamiento proporcional, con las representaciones gestuales, con reinterpretaciones de representaciones las gráficas y tabulares, con representaciones sagitales, entre otras. (Vasco, 2003, p.65)

Desde el Ministerio de Educación Nacional se viene proponiendo que se incluya en las aulas de clase el desarrollo del pensamiento variacional, en relación al: “reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como lo son su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos". (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.73)

En este sentido, en el presente trabajo investigativo se plantea una propuesta para potenciar los registros semióticos, verbales, algebraicos y geométricos. Así mismo, construir modelos geométricos de expresiones algebraicas, identificar invariantes, lo que no varía y proponer fórmulas generales, utilizando para este fin materiales concretos y virtuales.

Cuando se trata de proponer fórmulas generales, se requiere la búsqueda de patrones que definen los invariantes, esta representación se puede realizar a través de esquemas, diagramas, entre otras, en este sentido, "la matemática es esencialmente un pensamiento diagramable" (Otte, 2006 p.14) presente propuesta se sustenta bajo este principio, utilizar un medio de representación geométrico para potenciar la conceptualización.

Al respecto Duval (1999) afirma:

> En efecto, en los diferentes niveles de enseñanza de las matemáticas, se puede observar la persistencia de un encerramiento entre representaciones que no proviene del mismo sistema semiótico. El pasaje de un sistema de representación a otro, o la movilización simultanea de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual, fenómenos tan familiares y tan frecuentes en la actividad matemática, para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos. (p.16).

A manera de ejemplo observemos la siguiente situación que se muestra en tres representaciones semióticas. Para este estudio se utilizará las representaciones que se muestran en la tabla 1.

*Tabla 1*

*Representaciones semióticas.*

| Lenguaje natural | Lenguaje algebraico | Representación geométrica |
|---|---|---|
| Una cantidad aumentada en uno | $x + 1$ |  |

*Fuente: Elaboración Propia*

Al respecto los autores Socas, Camacho, Palareay  Hernández (1989) afirman:

> El uso de más de un lenguaje para representar un concepto favorece la abstracción del concepto, ya que tenemos más puntos de referencia y permiten establecer así más relaciones. Por otro lado, el hecho de presentar un concepto de formas diversas hace que a este se le conozca en más facetas de las que normalmente se le considera cuando se hace el aprendizaje con un solo lenguaje. (p.116)

En el ejemplo de representación semiótica de la tabla 1, se puede evidenciar las bondades de un sistema o de otro, en lenguaje natural, una cantidad aumentada en uno, puede que para algunos estudiantes no represente mucho, sin embargo al observar un rectángulo azul junto con un cuadrado amarillo que tienen de área x y 1 unidades cuadradas respectivamente, permite potenciar su representación mental, al punto que el observador  realiza las asignaciones presentadas en la figura 4, para realizar una mejor interpretación.

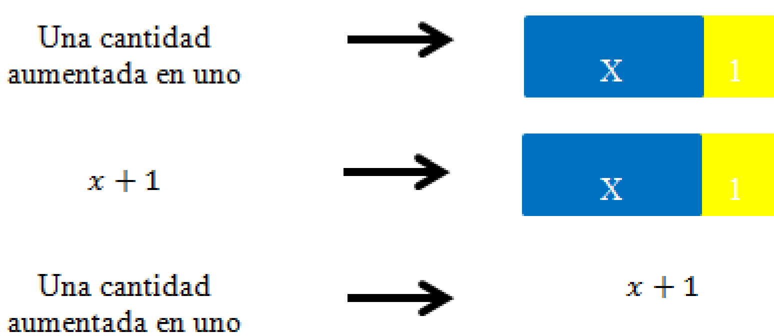



*Figura 4. Asignación Mental. Fuente: Elaboración Propia*

### *2.2.4 Expresiones Algebraicas*

En la literatura existen diferentes definiciones de lo que es una expresión algebraica, los libros de texto escolar la definen como la combinación de letras con o sin números reales, relacionados unos con otros por medio de las operaciones de adición, sustracción, producto, división y potenciación de exponente racional.

Una expresión algebraica es un lenguaje simbólico para representar el lenguaje natural en lenguaje algebraico Puig ( 2003) afirma, "Es un tópico referirse a las expresiones algebraicas como "lenguaje simbólico", por ejemplo, cuando se habla de poner un problema en ecuaciones, se describe usualmente como "paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico". (p.7)

Las expresiones algebraicas tienen su papel preponderante en el aprendizaje de las matemáticas escolares en la medida que se establezcan relaciones entre unas y otras, estas relaciones pueden ser: operaciones entre expresiones algebraicas, transformaciones, representaciones, planteamiento de ecuación e inecuaciones.

De acuerdo a Nemirovsky y Janvier (1996, citado en Torres, Valoyes, Malagón, 2002) las expresiones algebraicas:

> Cobran realmente su dimensión matemática cuando se relacionan y operan, produciendo ecuaciones, inecuaciones y nuevas expresiones algebraicas. En el surgimiento de estos objetos algebraicos aparece el problema de la producción de significado de estos constructos. Esto ha sido ampliamente debatido por distintos investigadores, quienes sustentan la necesidad de trabajar con los estudiantes diversas aproximaciones, por ejemplo, al concepto de ecuación para que ellos las puedan significar. (p.230).

### *2.2.5 Operaciones entre expresiones algebraicas y Descomposición Factorial.*

Al ser una expresión algebraica una extensión de la aritmética es aceptable afirmar que se pueden operar de una manera equivalente a los números reales, es decir, la adición, sustracción, multiplicación, división de expresiones algebraicas se realiza respetando las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales. En este sentido Socas, Camacho, Palarea, y Hernández (1989) afirman "Todo cálculo algebraico se construye a partir de las cinco propiedades características del sistema numérico: la conmutativa y la asociativa de la suma y el producto, y la distributiva del producto respecto de la suma" (p.23)

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times b = b \times a$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

## 2.3 Marco legal.

Este trabajo investigativo está fundamentado de acuerdo con la normatividad vigente en Colombia, las leyes, decretos y lineamientos que respaldan la realización de este trabajo son:

### *2.3.1 Constitución Política de Colombia.*

Esta Ley señala las normas generales para regular el Servicio Público de la Educación que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad. Se fundamenta en los principios de la Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público Ley 115 Colombia Congreso de la República Ley N°115 (1994). De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, define y desarrolla la organización y la prestación de la educación formal en sus niveles preescolar, básica (primaria y secundaria) y media, no formal e informal, dirigida a niños y jóvenes en edad escolar, a adultos, a campesinos, a grupos étnicos, a personas con limitaciones físicas, sensoriales y psíquicas, con capacidades excepcionales, y a personas que requieran rehabilitación social. Según la Constitución Política de Colombia (1991) la Educación Superior es regulada por la ley especial, y "Promueve el uso activo de las TIC como herramienta para reducir las brechas económica, social y digital en materia de soluciones informáticas representada en la proclamación de los principios de justicia, equidad, educación, salud, cultura y transparencia" (p. 192). Para ello, la enseñanza estará a cargo de personas de reconocida idoneidad ética y pedagógica. La Ley garantiza la profesionalización y dignificación de la actividad docente.

El artículo 1° define el objeto de la educación de manera precisa al plantear que: "es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y sus deberes" (Ley General de Educación, 1994, p.1) Lo anterior implica, el cumplimiento de los preceptos definidos en la Constitución Política Colombiana; para esto, en el artículo 5°, la Ley 115 determina los fines que pretende; entre otros: "desarrollar la capacidad crítica, reflexiva y analítica". En el mismo artículo también plantea que la educación se desarrollará atendiendo: La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber. Eso significa que el Estado, a través de las instituciones educativas, debe velar por la formación de ciudadanos íntegros a los que durante todo el proceso se les desarrollen sus potencialidades. El artículo 19 plantea la definición y duración de la educación básica, así:

La educación básica obligatoria corresponde a la identificada en el artículo 356 de la constitución política, como educación primaria y secundaria; comprende 9 grados y se estructuran en torno a un currículo común, conformado por las áreas fundamentales del conocimiento y de la actividad humana.

### *2.3.2 Estándares básicos de competencias en matemáticas*

Estándares básicos de competencias en matemáticas , este documento hace parte de una serie de guías que ha venido publicando el Ministerio de Educación Nacional de Colombia para contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual. En su elaboración participaron numerosos grupos de educadores del país e instituciones educativas, como una respuesta oportuna para comprender mejor los cambios en la relación entre las metas de la educación matemática y los fines de la educación actual de cara al siglo XXI.

Los estándares de competencia se organizan en cinco pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, y se presentan en cinco conjuntos de grados: de primero a tercero, de cuarto a quinto, de sexto a séptimo, de octavo a noveno y de décimo a undécimo. Son un derrotero para establecer lo que nuestros niños, niñas y jóvenes deben saber y saber hacer al terminar un conjunto de grado. Cada estándar de cada pensamiento de cada grado pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática que cruzan dichos tipos de pensamiento (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. El Ministerio de Educación Nacional (2006) afirma:

> Los estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la faceta práctica y la formal de las matemáticas y entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Esta propuesta requiere reconocer que si bien el aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extraescolar, se requiere entretejer los hilos de

> aprendizaje para construir contextos y situaciones que permitan avanzar hacia las matemáticas formales. (p.76)

### *2.3.3 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)*

El Ministerio de Educación Nacional cumpliendo con su meta de mejorar la calidad educativa en el país, desarrolló una serie de documentos para fortalecer las prácticas escolares de los docentes colombianos y así mejorar los aprendizajes de los niños, niñas y jóvenes llamados: Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Son una herramienta de apoyo dirigida a las instituciones educativas oficiales y privadas para identificar los saberes básicos que los estudiantes deben aprender en los diferentes grados de la educación Colombiana.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje guardan una estrecha relación con los estándares básicos de competencia. Los DBA, apoyan el trabajo de aula de los docentes mostrando ejemplos de articulación entre los enfoques, metodologías, estrategias y contextos que cada institución educativa define en su Proyecto Educativo Institucional.

Se logra evidenciar en los párrafos anteriores que es obligatoria la enseñanza de las matemáticas por disposición de la Ley 115 de 1994, a además el Ministerio de Educación Nacional ha dado lineamientos y herramientas para mejorar los aprendizajes de los estudiantes; en tal sentido, es necesario incorporar estrategias innovadoras en la práctica de aula que respondan a las exigencias de la sociedad actual. Allí se logra dar fundamento a la propuesta que se viene planteando debido a que se garantiza su justificación legal.

# 3 DISEÑO METODOLÓGICO

La metodología dentro de una investigación permite dar paso a todos los elementos teóricos que confluyen en plantear el paradigma investigativo; entendiéndose que es el modelo a seguir dentro del contexto que se pretende alcanzar bajo los preceptos del objetivo general planteado que recae en: fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional a través de una unidad didáctica en la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de expresiones algebraicas en los estudiantes del grado 8° de la Institución educativa La Garita.

De allí, que el trabajo que se presenta se enmarca en la investigación cualitativa. Según Olabuénaga (1999)**,** puede percibirse como una vía para entender a profundidad los significados que permitan definir la situación tal como la presentan los sujetos de la investigación. Además, como la intención del investigador no sólo es conocer la realidad sobre la base de la información obtenida y de sus propias observaciones, sino de proponer soluciones en función de las potencialidades del ámbito de estudio y de las necesidades de su comunidad, es necesario entonces, decidir un tipo de investigación cualitativo que permita a los sujetos investigados su participación como investigadores en todas las fases del proceso, por lo que se propone utilizar el tipo de investigación-acción.

En este aspecto, Bonilla y Rodriguez (1997**)** plantean que “la Investigación Cualitativa intenta hacer una aproximación global de las situaciones sociales para explorarlas, describirlas y comprenderlas de manera inductiva a partir de los conocimientos que tienen las diferentes personas involucradas en ella, esto supone que los individuos interactúan” (p.70). En este aspecto, la investigación cualitativa busca comprender la realidad por medio de la interacción de todos los actores que influyen en el proceso investigativo, desde una mirada holística del fenómeno, es decir, no busca variables que determinen una conducta particular, sino que a través de ella busca la comprensión del todo, pues la configuración global de un contexto puede cambiar al variar una de sus partes y esto va a depender de los diferentes factores que influyen en la realidad de estudio.

## 3.1 Tipo de investigación.

Para investigar cualitativamente hay que situarse dentro del contexto: en el caso de este estudio, la investigación es de tipo investigación acción, porque se centra en la reflexión de un problema práctico, cotidiano, experimentado por los profesores y estudiantes en las aulas de clase. Se requiere de contacto directo con el entorno o ambiente donde se sitúa la investigación, permitiendo que se desarrolle un proceso de retroalimentación constante entre el investigador y el individuo que forman parte de la realidad estudiada, donde no interesa dimensionar magnitudes, sino explorar naturalezas, las cuales se conciben desde múltiples perspectivas, apoyándose en los diferentes métodos cualitativos pertinentes como vía de obtención de conocimientos.

En este sentido, Elliot (1993**)** expresa: "podemos definir la investigación acción como el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma" (p.88). En este sentido, se entiende la investigación acción, como la reflexión sobre las situaciones vividas por los docentes en el entorno educativo y tiene como objetivo realizar una comprensión de sus problemas y de encaminar acciones que modifiquen o den solución a la situación experimentada. Para el desarrollo de la presente investigación se tomará como documento orientador, el ciclo de la investigación acción descrito por Latorre (2005).


*Figura 5. Ciclo de Investigación Acción. Fuente: Adaptación al ciclo Citado por Latorre (2005)*

El ciclo de la investigación acción se inicia desarrollando un plan de acción que permita mejorar la práctica actual. El plan debe ser flexible y permitir adaptación en el transcurso de la investigación. La acción es entendida como la implementación del plan, que debe ser deliberado y controlado. La observación de la acción busca  recoger evidencias que permitan evaluarla. La observación debe planificarse, y llevar un diario pedagógico para registrar los propósitos. El proceso de la acción y sus efectos deben observarse y controlarse individual o colectivamente y una reflexión sobre la acción registrada durante la observación, ayudada por la discusión entre los miembros del grupo. La reflexión puede conducir la reconstrucción del significado de la situación. (Latorre 2005, p.33).

### *3.1.1 Fase de Planificación*

Con el objetivo de potenciar el desarrollo del pensamiento variacional, se realizó una consulta de material bibliográfico que orientará el desarrollo teórico y práctico de los aprendizajes de los estudiantes. En la planificación se encontró material teórico que sugirió el diseño de una unidad didáctica como estrategia metodológica y lúdica, de manera que se adecúe el conocimiento matemático al contexto de los educandos, se estructure el proceso de enseñanza aprendizaje y se evite la improvisación, logrando interrelacionar, el docente, el estudiante y los saberes propios de las matemáticas.

### *3.1.2 Fase de acción*

Se intervino al grupo de octavo de la Institución Educativa La Garita con una unidad didáctica titulada "La cobija de mi abuelo está hecha de retazos", la intervención se realizó en dieciséis encuentros de dos horas en un periodo de ocho meses. Los encuentros buscaron primero, dotar a los estudiantes de herramientas conceptuales y actitudinales para potenciar el aprendizaje, segundo, desarrollar las bases teóricas para generar los conceptos matemáticos y por último, aplicar el conocimiento adquirido en la comprensión o formulación de las cinco propiedades características del sistema numérico descritas en el marco teórico.

### *3.1.3 Fase de observación*

En esta fase, se utilizó el diario pedagógico para registrar las actitudes, habilidades, destrezas y conocimientos de los estudiantes observados en las intervenciones, de manera que suministraran información relevante susceptible de ser analizada. Al igual, se recogieron las producciones realizadas por los estudiantes durante los encuentros, con el fin de realizar una comparación y reflexión a la luz de las categorías de análisis.

### *3.1.4 Fase de reflexión*

Esta fase estuvo dirigida a la generación de espacios de reflexión, para fortalecer las prácticas pedagógicas de aula, a través de los hallazgos encontrados en los registros de los diarios pedagógicos y las producciones de los estudiantes, que permitieron realizar una comprensión de la problemática planteada y la propuesta de una alternativa de solución, con el fin de potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa La Garita.

## 3.2 Categorías de análisis.

Para el diseño de las categorías iniciales se tuvieron en cuenta documentos como: Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencia, Derechos Básicos de Aprendizaje las Mallas de Aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional. Es así que para el presente estudio se plantean las siguientes categorías iniciales; es importante aclarar que pueden surgir otras, pero esas se visualizan a partir de la reflexión de las categorías iniciales.

En la siguiente tabla se presentan las categorías de análisis y sus subcategorías mostrando los indicadores para evaluar las producciones de los estudiantes en las intervenciones pedagógicas.

*Tabla 2.*

*Categorías de análisis*

| Categorías | Subcategorías | Indicadores |
|---|---|---|
| Pensamiento variacional | Operaciones con expresiones algebraicas (OEA) | Utiliza un modelo geométrico o algebraico para sumar o restar expresiones algebraicas. |
| | | Utiliza un modelo geométrico o algebraico para reducir términos semejantes en una expresión algebraica. |
| | Transformar expresiones algebraicas (TEA) | Utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de un monomio por un binomio. |
| | | Utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de dos binomios. |
| | | Identifica las multiplicaciones de expresiones algebraicas que no pueden representarse con modelos geométricos. |
| | | Utiliza modelos geométricos o algebraico para representar la identidad: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ |
| | | Utiliza modelos geométricos o algebraico para representar la identidad: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ |
| | | Utiliza modelos geométricos o algebraico para representar identidad: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ |
| | | Utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un monomio |
| | | Utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático. |
| | Expresiones algebraicas equivalentes (EAE) | Utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas. |
| | | Resuelve problemas y los justifica algebraica o geométricamente. |
| | Ecuaciones (E) | Utiliza un lenguaje algebraico para plantear ecuaciones de primer grado de acuerdo a la situación enunciada. |
| | | Representa cantidades desconocidas con variables. Soluciona ecuaciones de primer grado mediante un modelo geométrico o algebraico |
| Pensamiento geométrico | Nociones básicas | Encuentra el área de regiones planas y el volumen de sólidos. |
| | | Calcula áreas y volúmenes a través de la composición y descomposición de figuras. |
| Motivación (M) | Actitud | Realiza las actividades con motivación propia |
| | | Demuestra interés por realizar las actividades propuestas. |
| | Emociones | Manifiesta conductas de ansiedad o temor |

Fuente: Adaptación de los Derechos Básicos de Aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional de Colombia 2016.

## 3.3 Población y muestra

La selección del escenario de la investigación es considerada como uno de los aspectos primordiales que influyen en el logro de los objetivos planteados y el éxito de la investigación. En este caso Rodriguez, Gil y Garcia (1996) expresan que: “la selección, la entrada y la retirada del escenario de la investigación son aspectos fundamentales”. (p. 48).

La población objeto de estudio contemplada para este trabajo investigativo, estuvo constituida por 39 estudiantes del grado octavo de la institución educativa La Garita. Institución educativa de carácter oficial, ubicada en la verada La Garita del Municipio de los patios, Norte de Santander. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 13 y 16 años de edad, en su gran mayoría pertenecen al sector rural del municipio con un nivel socio económico 1 y 2. La muestra corresponde a la misma población.

## 3.4 Técnicas e instrumentos para la recolección de información.

Por tratarse de una investigación con enfoque cualitativo, de tipo investigación acción, la recolección de la información se basará en instrumentos que faciliten la participación de los miembros de la institución sujeta de estudio, de manera que el investigador pueda potenciar este proceso.

En esta dirección, los procedimientos de recolección de información (observación, producciones de los estudiantes y prueba diagnóstica) precisan de unos mínimos planteamientos teóricos previos que los sitúe en el contexto donde van a ser utilizados. A continuación, se hará una descripción:

La técnica de la observación, tal como aquí se plantea, consiste en observar atentamente el caso, tomar información y registrarla en el diario pedagógico para su posterior análisis, la observación es un elemento fundamental de todo proceso investigativo; en ella se apoya el investigador para obtener el mayor número de datos, por ello se tendrá en cuenta la observación no estructurada llamada también simple o libre, que es la que se realiza sin la ayuda de elementos técnicos especiales. Los resultados de la observación se registrarán en el diario pedagógico.

Para Monsalve y Pérez (2012), el diario pedagógico es considerado como una herramienta de gran utilidad para los maestros, no sólo como posibilidad de escritura ni como narración anecdótica de lo que sucede en la clase, sino también como elemento para la investigación. Por tanto, éste no debe concentrarse solamente en los hechos, sino también desde su estructura permitir el abordaje de experiencias significativas, tanto para el maestro como para sus estudiantes (p. 117).

El diario pedagógico aportará información relevante de las observaciones directas que registra el maestro investigador durante las intervenciones, así mismo permitirá resaltar los momentos significativos durante el proceso de enseñanza aprendizaje. Para posteriormente realizar un tratamiento teniendo presente las categorías de análisis.

### *3.4.1 Producciones de los estudiantes*

Las producciones son instrumentos que permitirán tomar información descriptiva sobre las actividades que realizan los estudiantes durante la intervención, de forma escrita o gráfica, teniendo en cuenta la manera como verbaliza las nociones matemáticas y el desempeño en las representaciones geométricas de las situaciones algebraicas. Las cuales sirven como evidencia para demostrar que los estudiantes están desarrollando el proceso de aprendizaje.

### *3.4.2 Prueba diagnóstica*

La prueba diagnóstica permite establecer el desempeño de los estudiantes del grado octavo de la institución Educativa La Garita, referente a los pensamientos variacional y geométrico; específicamente lo relacionado con el reconocimiento de la variable y su manejo, operaciones con expresiones algebraicas, solución de ecuaciones, sustitución de variables y conceptos básicos de geometría como el área de rectángulos.

### *3.4.3 Validación de los instrumentos*

La prueba diagnóstica fue probada en una muestra de cuatro estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa La Garita, el propósito fue de realizar los ajustes necesarios como: la depuración de las preguntas, correcciones gramaticales y tipográficas y presentación visual. Por otra parte, la validación de la prueba diagnóstica y del diario pedagógico estuvo a cargo del experto, Doctor Élgar Gualdrón Pinto.

## 3.5 Técnicas y procedimiento para el análisis de la información.

Dado que la investigación cualitativa implica diferentes enfoques, donde el investigador se sitúa en el lugar natural donde ocurren los hechos, para este proyecto se utilizarán técnicas con escenarios que permitan una recolección clara, precisa y concisa teniendo como mayor herramienta el contexto físico, por ende, las técnicas a utilizar son: a) Observación participante: donde el investigador hará parte activa en el desarrollo de la propuesta a través de la observación del desempeño diario de cada uno de los involucrados, b) Análisis de las producciones de los estudiantes: parte fundamental del desarrollo de esta investigación se llevará a cabo con esta técnica, con el fin de recolectar datos e información que permitan cualificar el logro de los desempeños esperados y confrontar con las observaciones directas realizadas por el investigador y expresadas en el diario pedagógico, c) Presentación de información: la información se presentará en forma verbalizada, donde se hará un recorrido primero, describiendo el propósito de la actividad, segundo se describirán en forma general la actividades a desarrollar y los aprendizajes de los estudiantes y por último se presentarán las producciones de los estudiantes realizando un análisis detallado a la luz de los indicadores de las subcategorías de análisis, con el fin de poder demostrar la evidencia de la categoría y d) Conclusiones: estas permitirán establecer las dificultades de la problemática a analizar dando las respectivas estrategias para mejorar en ámbito educativo e investigativo, así como las diferentes técnicas que conlleven a una mejor calidad pedagógica y organizacional de la institución verificando la verdad de los descubrimientos realizados.

## 3.6 Resultados y Discusión

En el presente apartado se presentarán los resultados obtenidos durante la prueba diagnóstica y durante los dieciséis encuentros que duro la intervención. Se utilizará un procedimiento descriptivo con el fin de mostrar las acciones que realizaron los participantes y el avance que fueron presentando.

### *3.6.1 Resultados y discusión de la prueba diagnóstica*

Se aplicó una prueba diagnóstica con doce ítems; fue diseñada de tal manera que se pudiera obtener información verbalizada de la interpretación que realizan los estudiantes de las situaciones, se animó durante la prueba para que escribieran lo que consideraban era el procedimiento adecuado para resolver cada situación, esto con el propósito de analizar la actividad matemática desde la planeación y su ejecución.

Para el análisis de los datos recogidos durante la prueba diagnóstica, se utilizó un procedimiento estadístico con el fin de condensar la información, permitiendo que su presentación, lectura e interpretación sea más cómoda para el lector. En este proceso se utilizaron las categorías de análisis descritas anteriormente.

La figura 6 corresponde a un diagrama de barras que muestra el porcentaje de aciertos comparado con el porcentaje de desaciertos, se puede evidenciar como en la mayoría de los ítems evaluados el resultado de los aciertos estuvo muy por debajo del porcentaje de los desaciertos, tan solo en los ítems 7 y 12 el porcentaje de los aciertos estuvo por encima del porcentaje de los desaciertos.

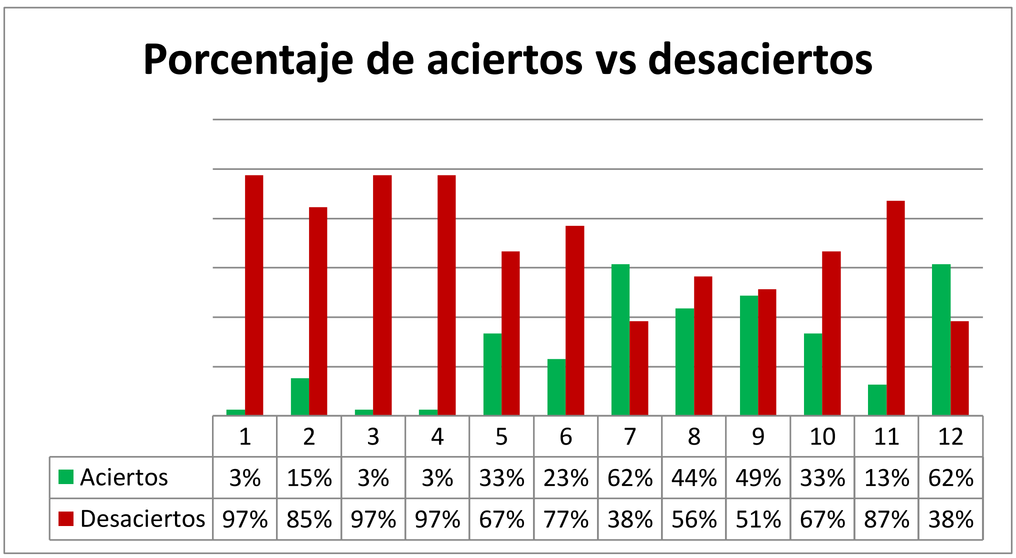



*Figura 6. Comparativo de Aciertos y Desaciertos Prueba Diagnóstica. Fuente: Elaboración Propia*

Para realizar una mejor interpretación de la prueba, los ítems se agruparon de acuerdo a la intención valorativa, para ello se tienen en cuenta las categorías y subcategorías de análisis. La figura 7 representa la condensación de las preguntas. Se utilizó un diagrama de conjunto, con el fin de mostrar la relación de los ítems.

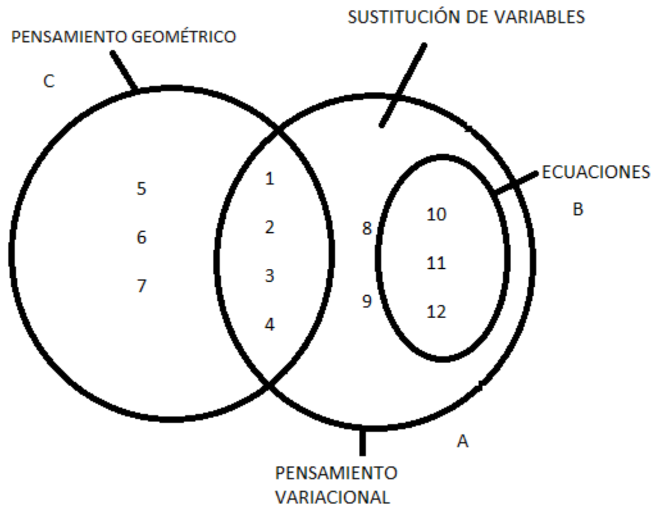



*Figura 7. Agrupación de las Preguntas por Pensamiento. Fuente: Elaboración Propia*

El pensamiento geométrico hace referencia a las preguntas en las que el estudiante debe identificar los procedimientos que se usan en el cálculo de volumen y de área superficial. El pensamiento variacional y geométrico hace referencia a las preguntas donde el estudiante requiere del conocimiento de las fórmulas de área de un rectángulo y su posterior cálculo mediante una expresión algebraica. El Pensamiento variacional-ecuaciones, hace referencia a las preguntas donde el estudiante debe representar la información suministrada mediante una ecuación. Sustitución de variables, hace referencia a las preguntas donde el estudiante debe asignar un valor a una incógnita en una expresión algebraica para obtener un resultado que hace verdadera la expresión.

La figura 8 corresponde a un diagrama de barras donde se muestra la información condensada de acuerdo a los porcentajes de aciertos y desaciertos, los numerales 1, 2, 3 y 4 significan Pensamiento geométrico y variacional, pensamiento geométrico, pensamiento variacional sustitución de variables y pensamiento variacional-ecuaciones respectivamente.

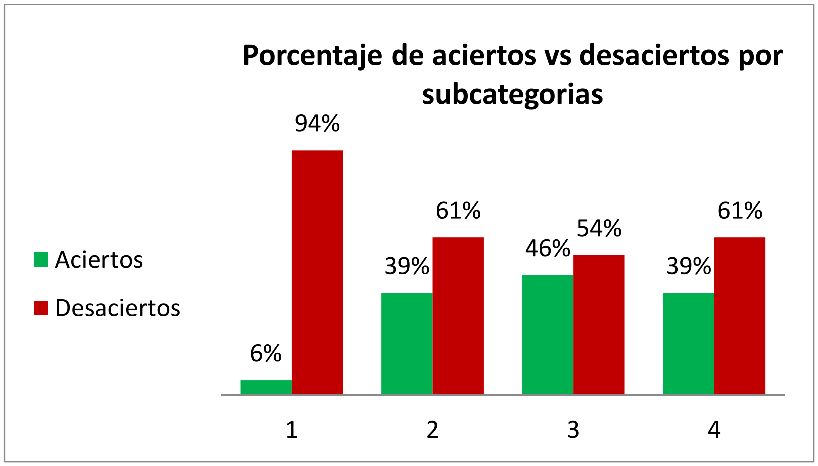
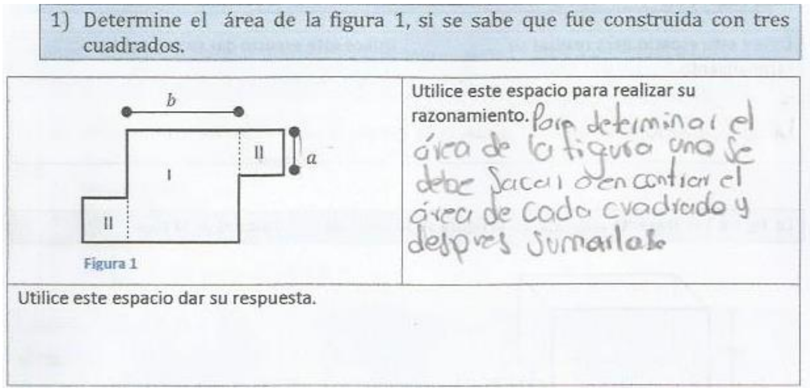



*Figura 8. Diagrama de Barras por Subcategorías. Fuente: Elaboración Propia*

En este sentido, en la figura 8 se observa que todos los pensamientos evaluados requieren atención, sin embargo la situación más preocupante es cuando un problema requiere de la combinación del conocimiento de los pensamientos geométrico y variacional. Lo anterior se puede evidenciar en las producciones de algunos de los participantes, a continuación se presentan algunas producciones realizadas durante la prueba diagnóstica.

La figura 9 corresponde a la producción realizada por el participante N° 35, quien realiza un análisis escrito de la situación manifestando que el procedimiento para llegar a encontrar el área de la figura 1 de la prueba diagnóstica, consiste en sumar las áreas de los rectángulos I y II. Sin embargo, no da la respuesta a lo que se le pedía en el ejercicio número 1.



1) Determine el área de la figura 1, si se sabe que fue construida con tres cuadrados.

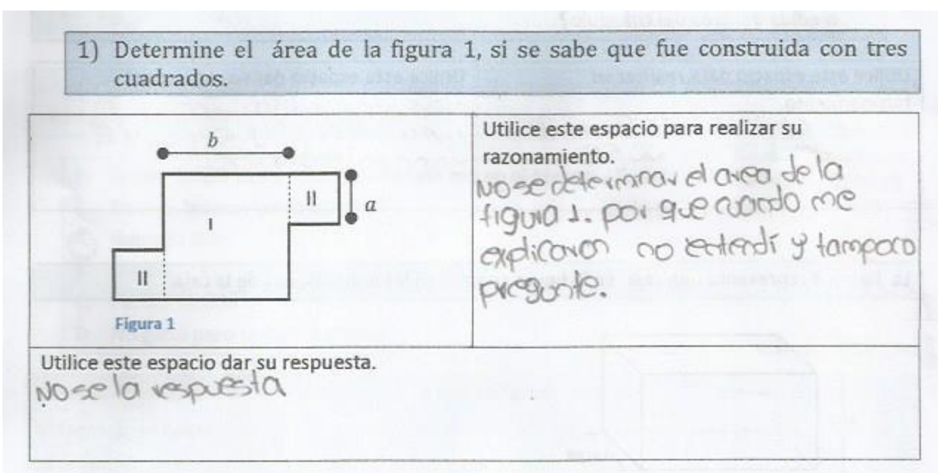


Utilice este espacio para realizar su razonamiento. Para determinar el área de la figura uno se debe sacar o encontrar el área de cada cuadrado y despues sumarlalo

Utilice este espacio dar su respuesta.

*Figura 9. Respuesta del Participante N°35, Prueba Diagnóstica*

Por otro lado, hay situaciones que requieren de especial tratamiento, en la figura 10 se observa la producción del participante N° 31 que pertenece al 97 % de los estudiantes que no acertaron la respuesta, se observa que el participante desconoce el concepto de área y la fórmula para encontrar el área del rectángulo, a pesar que este tema ha sido trabajado en años anteriores. Por lo tanto, se evidencia que el aprendizaje que generó el participante no fue significativo.



1) Determine el área de la figura 1, si se sabe que fue construida con tres cuadrados.



Utilice este espacio para realizar su razonamiento. No se determinar el area de la figura 1. por que cuando me explicaron no entendí y tampoco pregunte.

Utilice este espacio dar su respuesta. No se la respuesta

*Figura 10. Respuesta del Participante N° 31, Prueba Diagnóstica*

En la figura 11 se observa la producción del participante N° 37, él divide el cuadrado I en rectángulos de tamaño similar al cuadrado II, pero se da cuenta que no se puede dividir en partes iguales, el participante agrega que con la ayuda de una regla lo podría solucionar.

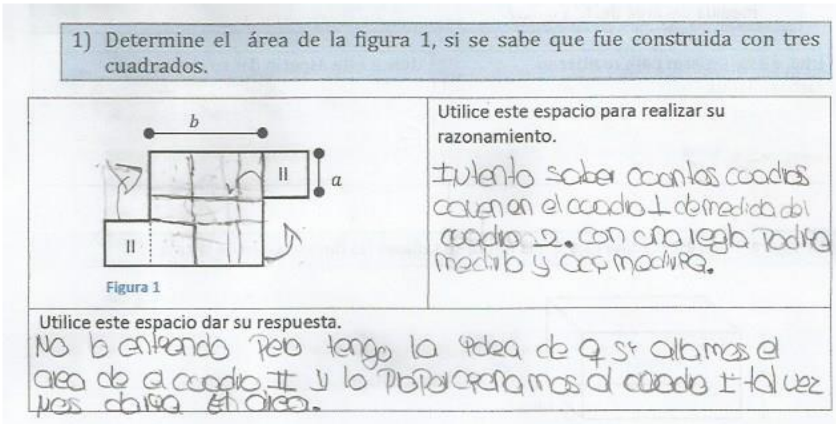



*Figura 11. Respuesta del Participante N° 31, Prueba Diagnóstica*

Por último, se presenta la figura 12 que corresponde a la producción del participante N° 23, el participante asigna valores numéricos a las letras (a y b) con el fin de poder operar numéricamente. Se observa como el participante intenta resolver la situación con operaciones aritméticas, asignando un valor arbitrario a las letras y las operándolas de una manera incorrecta, con el propósito de dar una respuesta numérica.

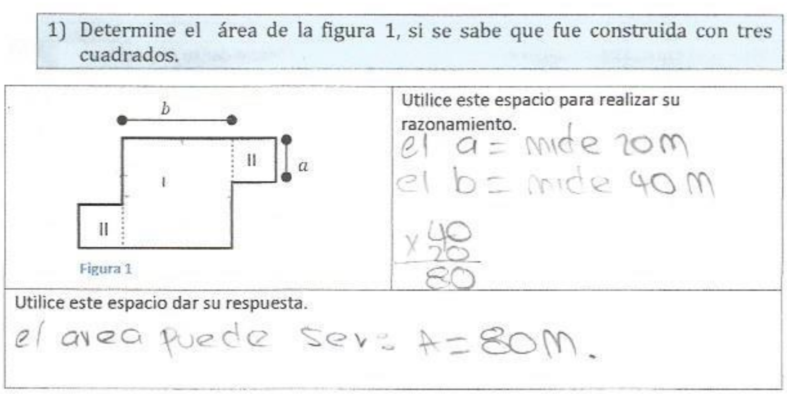



*Figura 12. Respuesta del Participante N° 23, Prueba Diagnóstica*

De acuerdo a lo anterior, Rojas, Rodriguez, Romero, Castillo y Mora (1999), generalizando la interpretación que los estudiantes le pueden dar a la letra en situaciones algebraicas, mencionan que la letra evaluada, se caracteriza porque a la letra se le asigna un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido (p. 32). Al analizar la totalidad de las producciones realizadas por los estudiantes durante la prueba diagnóstica, se evidenciaron los siguientes hallazgos:

- La gran mayoría de los estudiantes desconocen las fórmulas básicas de geometría para el cálculo de las áreas de regiones planas y de volúmenes.
- Los estudiantes asignan un valor numérico a las variables para poder realizar los cálculos aritméticos, de esta manera consiguen realizar una representación del contexto que es significativa para ellos.
- Los estudiantes memorizan las fórmulas de áreas de regiones planas y volúmenes, pero no las aplican en contextos algebraicos.
- La gran mayoría de los estudiantes desconocen la utilidad de las letras en situaciones problemas, no dan significado a la variable y no la tienen en cuenta para realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación.

### *3.6.2 Resultados y discusión de la intervención pedagógica*

En esta sección se presentarán las producciones realizadas por los estudiantes durante la intervención pedagógica. La intervención se dividió en tres actividades: a) Actividad de inicio, b) Actividad de desarrollo y c) Actividad de aplicación. En la actividad de inicio se planteó como propósito motivar a los estudiantes para que desarrollen los encuentros con responsabilidad y con gusto propio. El propósito de la actividad de desarrollo fue construir las nociones y saberes matemáticos para poder aplicarlos en la siguiente actividad. En la actividad de aplicación se planteó el propósito de realizar las operaciones de adición, sustracción multiplicación y descomposición factorial de los polinomios, utilizando los saberes y la motivación lograda en las actividades anteriores.

En este sentido, se hará un recorrido mostrando el avance que fueron consiguiendo los estudiantes a medida que se intervenía al grupo con la unidad didáctica, se mostrará un análisis descriptivo de las producciones de los estudiantes, durante los dieciséis encuentros que duró la intervención, analizando las producciones y mostrando ejemplos paradigmáticos que evidencien el cumplimiento de los indicadores de las subcategorías.

Cada uno de los encuentros se diseñó con el siguiente modelo: a) Momento de inicio, b) Momento de desarrollo y c) Momento de cierre. En el momento de inicio se dan las orientaciones generales para que el estudiante pueda resolver las actividades planteadas, en el momento de desarrollo se presentan situaciones en las cuales el estudiante debe realizar construcciones o representaciones geométricas con las baldosas algebraicas o con el manipulador virtual, posteriormente, el estudiante debe observar sus construcciones y encontrar invariantes para descubrir un patrón, en el momento de cierre, los estudiantes con ayuda del maestro investigador proponen fórmulas generales partiendo de los invariantes.

#### *3.6.2.1 Actividad de inicio encuentros uno al cuarto*

Algo que tienen en común las actividades planteadas en los encuentros 1 al 4, es su propósito de aprendizaje: se buscó que los estudiantes durante estos encuentros se apropiaran del manejo adecuado de las baldosas algebraicas, del software MVU Algebra Tiles, reforzaran los conceptos de rectángulo, cuadrado, de figura regular, de figura irregular, lograran asignar variables a las figuras geométricas, comprendiendo que este es un proceso de representación semiótica, fortalezcan la noción de variable y su utilidad en el desarrollo del pensamiento variacional.

En la figura 13 se presenta un mapa de conceptos que resume los hallazgos encontrados durante la actividad de inicio, se puede observar como el material concreto despertó la curiosidad y la sorpresa en los estudiantes sirviendo como detonante de la motivación, la cual permitió desarrollar construcciones con creatividad e ir construyendo una noción de variable más amplia y activar los conocimientos previos.


*Figura 13.Mapa de Conceptos  Actividad de Inicio. Fuente: Elaboración Propia*

En términos generales, se puede decir que a la mayoría de los estudiantes al comienzo les costó realizar las actividades con éxito, dado a que presentaron problemas con los presaberes de geometría como son: el concepto de cuadrado, el de rectángulo, el de figura regular, el figura de irregular y se les dificultó entender el concepto de la variable. No obstante, el material logró motivarlos, ya que la manipulación del material concreto y el trabajo con el software MVU Algebra Tiles sirvió de puente para construir el concepto de variable y de representación en lenguaje algebraico y natural. El trabajo desde un enfoque geométrico potenció la interpretación de la variable y su posterior manipulación.


*Figura 14. Fotografía de los Estudiantes Durante el Encuentro1*

Durante el primer encuentro, cuyo objetivo era que los estudiantes se familiarizarán con el material concreto, conocido de aquí en adelante como baldosas algebraicas. Se evidenció que la mayoría de estudiantes desconocen la diferencia entre cuadrado y rectángulo, también desconocen el concepto de figuras regulares e irregulares y no prestan atención a la relación de tamaños y aspecto en sus construcciones. A continuación, se presentan las producciones de algunos de ellos.

En la actividad se solicitaba que de manera libre se realizarán figuras geométricas planas, posteriormente, debían determinar si la construcción realizada era regular o irregular y por último, contar el material utilizado. La figura 15 corresponde a las construcciones realizada por los participantes N°1 y N°28. Se observa que los participantes desconocen el significado de los términos regular e irregular, de manera similar desconocen el nombre de las figuras geométricas.

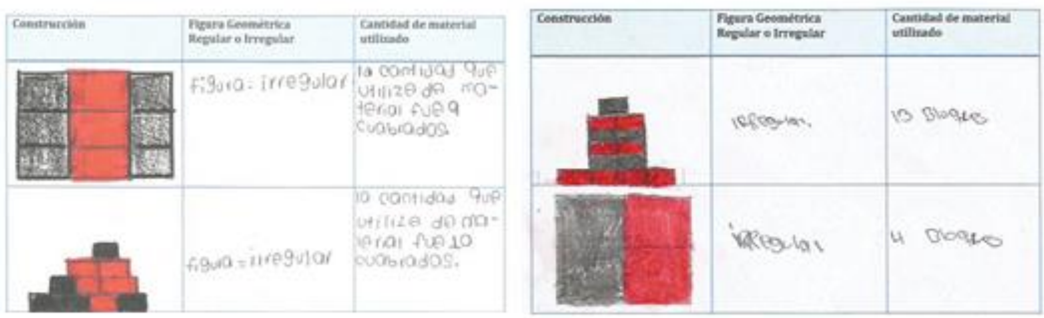



*Figura 15. Construcciones de los Participantes N° 1 y N°28.*

En la figura 16, se observan las construcciones realizada por los participantes N°4 y N°24. Se evidencia que el participante N°4 no diferencia entre rectángulo y cuadrado y asume que son la misma figura. Por otro lado, se observa en la construcción del participante N° 24 la poca atención que pone en relación al tamaño y la simetría de las figuras geométricas.

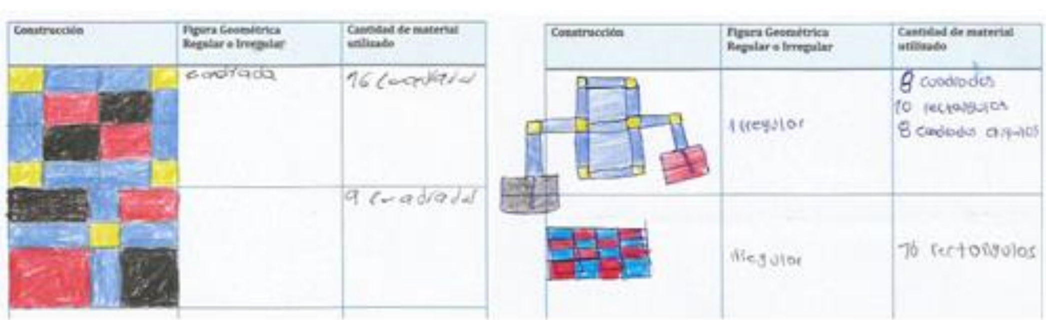



*Figura 16. Construcciones del Participante N°4 y N°24.*

En la figura 17 se presentan las construcciones realizadas por los participante N°3 y N°17. Se observa en las cuatro construcciones que los participantes  tienen claro el concepto de regular e irregular, además durante el conteo, diferencian las figuras geométricas utilizadas en sus construcciones, asignándoles una característica como el color o el tamaño y no menos importante cabe resaltar la creatividad de sus construcciones.


*Figura 17. Construcciones de los Participantes N°3 y N°17, Encuentro 1*

En todas las producciones de los participantes se logró evidenciar la categoría motivación, ya que realizaron las actividades con gusto y con iniciativa propia.

*Figura 18. Fotografía de los Estudiantes Realizando una Cartelera Encuentro2*

Durante este encuentro la mayoría de estudiantes continuaron presentando problemas con los presaberes geométricos, la actividad a desarrollar consistió en realizar una cartelera en equipos de trabajo para exponer a sus compañeros una construcción del encuentro anterior. En la elaboración de las carteleras y en su posterior exposición, los estudiantes pasan por alto la forma correcta de ubicar las baldosas para obtener figuras geométricas regulares. La figura 14 expone la forma correcta e incorrecta de ubicar las baldosas.


*Figura 19. Forma Correcta e Incorrecta de Ubicar las Baldosas. Fuente: Elaboración Propia*

En la figura 20, se observa que la construcción expuesta en la cartelera presenta un error conceptual, el grupo expuso la cartelera afirmando que es un rectángulo, no obstante la construcción es una figura irregular. Los estudiantes no tienen en cuenta que la suma de las bases de cinco baldosas de color amarillo supera la suma de las bases de las baldosas de color azul. El grupo aunque nota la diferencia, le resta la importancia que merece cometiendo un error en su construcción.

*Figura 20. Cartelera Realizada por los Participantes N°8, N°9, N°15 y N°17, Encuentro 2*

cuadrado, y lo presentaron como un rombo, afirmando que dependiendo de la inclinación, se llama cuadrado o rombo. Por otro lado, este grupo expuso la forma correcta de ubicar las baldosas en las construcciones lo cual facilitará el entendimiento de las multiplicaciones entre polinomios y su posterior factorización. En la producción de los estudiantes se evidencia el indicador: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría Expresiones Algebraicas Equivalentes. (EAE).

*Figura 21. Cartelera Realizada por los Participantes N°,3 N°7, N°13 y N°30, Encuentro 2*

*Figura 22. Fotografía de los Estudiantes Nombrando las Baldosas Encuentro 3*

En el encuentro 3 cuyo objetivo era acercarse al nombre de cada una de las baldosas, las producciones realizadas por los participantes no fueron provechosas, dado que los estudiantes tenían que cumplir la difícil tarea de asignar un nombre a cada baldosa dependiendo el área de la misma. La mayoría de los estudiantes no alcanzó la meta, los nombres que asignaron los estudiantes a las baldosas no tuvieron en cuenta el área de la baldosa, los nombres que la mayoría propusieron se basaron en la asignación de una letra como etiqueta. A continuación se presentan algunas de las producciones.

En la figura 23 se evidencia que el participante N°12 y N°18 asigna una letra a cada baldosa pero la nomenclatura utilizada es aleatoriamente, no da muestras de haber identificado algún tipo de característica para nombrarlas.

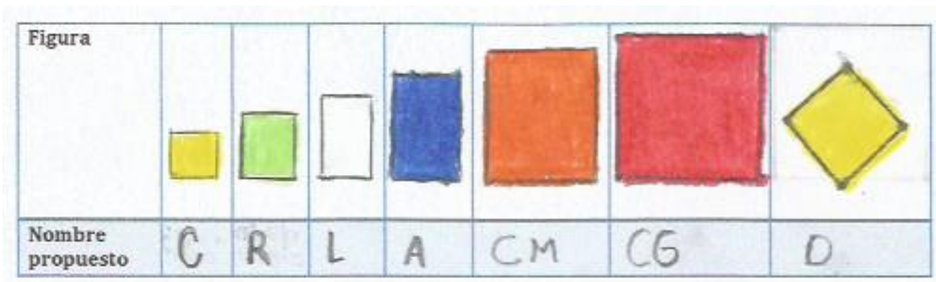



*Figura 23. Nombres Propuestos por los Participantes N°12 y N° 18 a las Baldosas*

En contraste, en la figura 24 se presenta la propuesta realizada por los participantes N°22 y N°23, quienes realizaron un excelente trabajo, nombraron con variables a cada baldosa teniendo presente que estas tienen lados en común, adicionalmente, fueron cuidadosos al asignar la misma variable a la dimensión de la baldosa en común. En la producción de los participantes se evidencia el indicador: representa cantidades desconocidas con variables, perteneciente a la subcategoría Ecuaciones. (E).

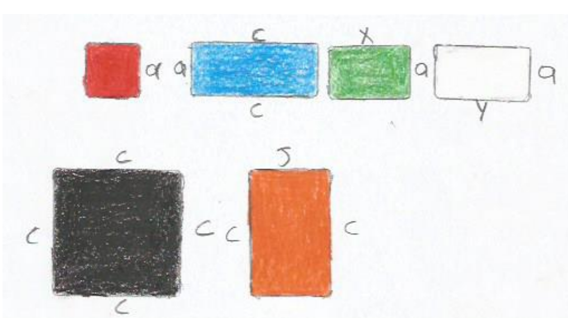


*Figura 24. Nombres Propuestos para las Baldosas por los Participantes N°22 y N°23*

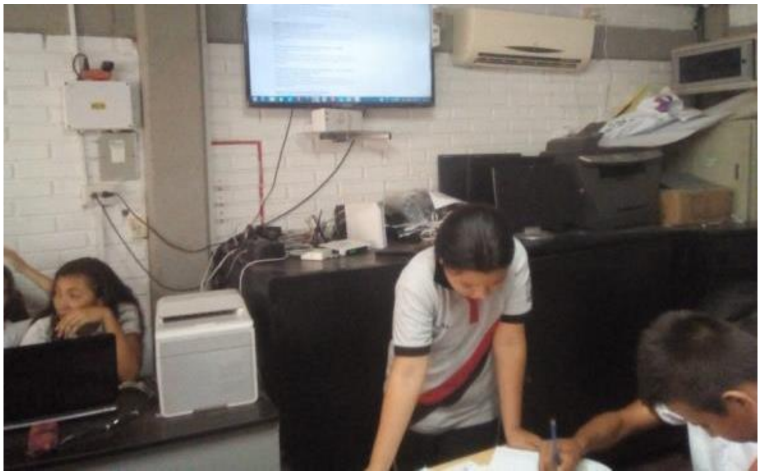


*Figura 25. Fotografía de los Estudiantes Realizando la Consulta del Material Virtual Para la Enseñanza del Algebra Encuentro 4*

El encuentro 4 tuvo dos propósitos, el primero consistió en que los estudiantes realizarán una consulta del software o manipuladores virtuales para la enseñanza del algebra. Este propósito como se planeó no fue posible desarrollarlo, puesto que el contrato de servicio de internet que la institución tenía se terminó, por lo tanto, los estudiantes realizaron la consulta utilizando un solo equipo de cómputo, proyectando la misma información para todos. Por lo anterior, no se tendrá en cuenta las producciones realizadas en este encuentro, sin embargo, se considera que la actividad propuesta es valiosa y tiene potencial, por lo que se decidió no suprimirla de la unidad didáctica. El segundo propósito fue realizar una demostración de la utilización de los diferentes manipuladores virtuales disponibles en línea para la enseñanza del algebra.

**Actividad de desarrollo encuentros cinco al siete**

La figura 26 corresponde a un mapa de conceptos de la actividad de desarrollo. En él se puede observar el papel preponderante que tienen las baldosas algebraicas y los manipuladores virtuales, primero para mantener la motivación de los participantes y segundo para desarrollar las nociones matemáticas. Los modelos geométricos que se construyeron durante la actividad de desarrollo, permitieron ampliar el registro de representaciones semióticas y transitar desde el lenguaje algebraico al natural y a la representación geométrica, además el manejo del material favorece la construcción de la noción de variable, la resolución de ecuaciones y el paso de la aritmética al álgebra, dando indicios del desarrollo del pensamiento variacional.

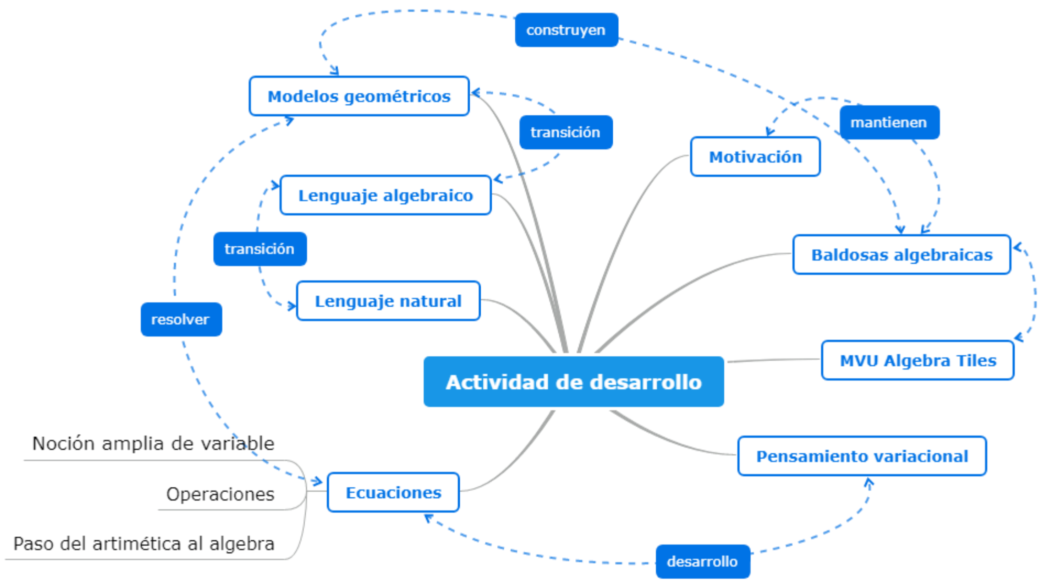



*Figura 26. Mapa de Conceptos Actividad de Desarrollo. Fuente: Elaboración Propia*

Las producciones realizadas por los estudiantes durante estos tres encuentros fueron significativas, los estudiantes trabajaron motivados consiguiendo excelentes resultados. Los participantes lograron ampliar la noción de variable, realizaron representaciones del lenguaje común en lenguaje algebraico y solucionaron ecuaciones de primer grado con una incógnita.

La utilización de las baldosas algebraicas fue fundamental para alcanzar el éxito durante estos encuentros, ya que sirvieron como elementos lúdicos, tangibles y motivacionales, los cuales se pudieron ver, tocar y manipular, acercándose a los elementos abstractos del lenguaje algebraico. Por otro lado, el software MVU Algebra Tiles logró converger la atención de los estudiantes y fue esencial en la socialización y explicación en el tablero de los diferentes ejercicios de representación. A continuación se presentan algunas de las construcciones de los participantes durante estos encuentros.

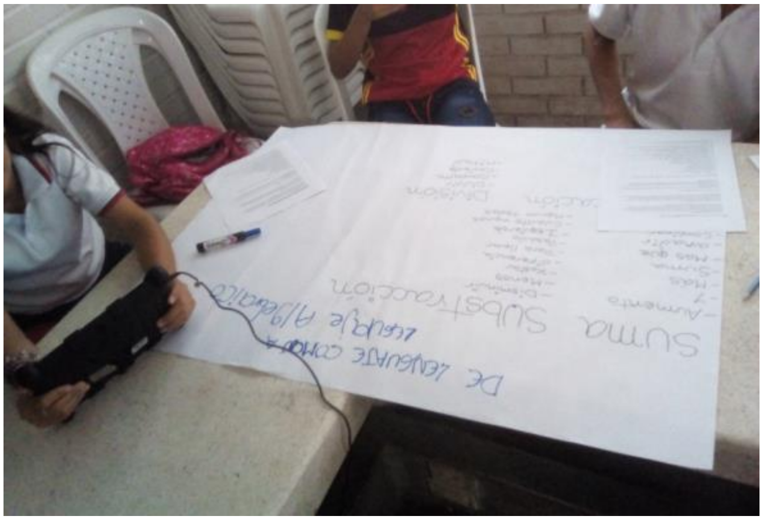



*Figura 27.Fotografía de los Estudiantes Realizando una Cartelera Encuentro 5*

En el encuentro 5 se planteó el propósito de identificar las palabras del lenguaje común que infieren una operación matemática, para poder pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico. Los estudiantes debían revisar un archivo digital e impreso que se les suministró y realizar un listado con las palabras y la operación con la que se relacionan. La mayoría de participantes trabajaron con motivación, lo cual permitió que sus carteleras y exposiciones reflejaran información relevante para pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico.

En la figura 28, se presenta la cartelera realizada por los participantes N°14 y N°34, en el trabajo realizado por el grupo se evidencia disciplina trabajo en equipo, interés por realizas las actividades. En su producción se evidencia la categoría Motivación. (M).

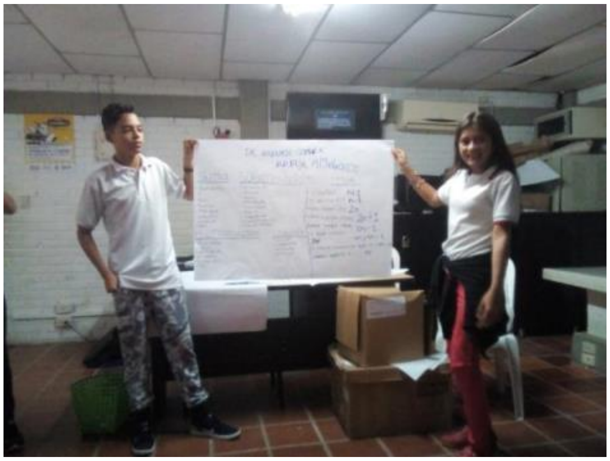


*Figura 28. Cartelera realizada por los participantes N°14 y N°34*

La figura 29 corresponde a una fotografía del software que el participante N°11 encontró en internet y lo instaló en las tabletas de la institución. El participante mostró una buena actitud hacia el trabajo, motivación para ampliar su conocimiento y para contribuir con el objetivo planteado. En el actuar del participante se evidenciaron los indicadores: realiza las actividades con motivación propia y demuestra interés por realizar las actividades propuestas, pertenecientes a la categoría Motivación (M).

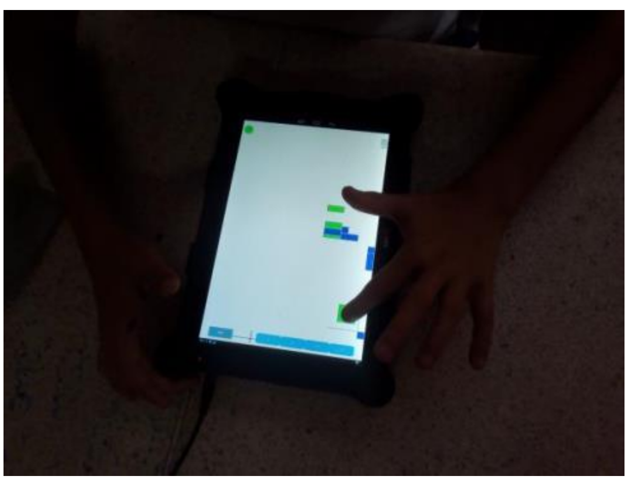


*Figura 29. Fotografía del Software Maths Hunter Algebra Tiles*

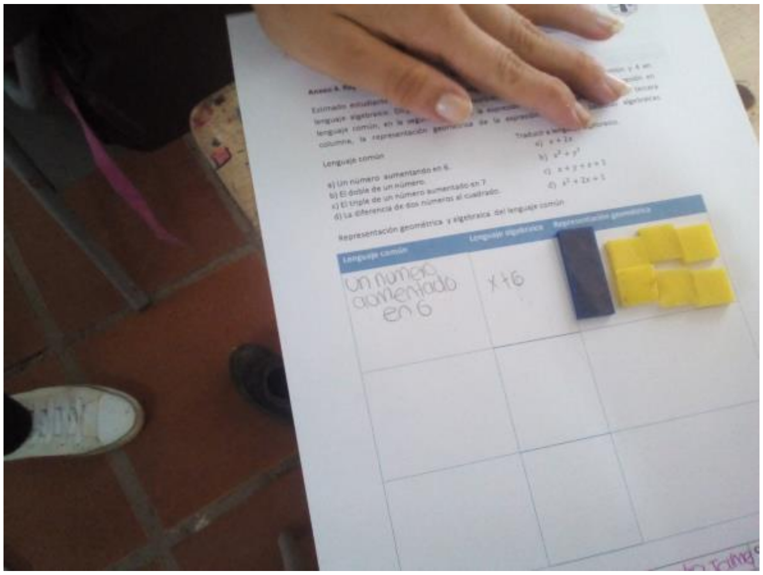



*Figura 30. Fotografía de la Representación Algebraica y Geométrica de una Expresión algebraica Encuentro 6*

El propósito que se planteó durante el encuentro 6 consistió en dotar a los estudiantes de habilidades para representar el lenguaje común con expresiones algebraicas y realizar su representación geométrica con baldosas algebraicas, la mayoría de estudiantes se empoderaron de la estrategia didáctica, logrando manipular las baldosas algebraicas y estableciendo un puente entre el material concreto, las variables lineales y cuadráticas, las baldosas algebraicas facilitaron la representación mental de las variables y su posterior comprensión.

En la figura 31 se puede observar las representaciones que realizó el participante N°5 en el paso de un sistema de representación semiótica a otro; pasó del lenguaje natural al lenguaje algebraico, realizando su representación geométrica. El estudiante interpreta que un número cualesquiera puede ser representado con una letra del alfabeto, utiliza la letra $x$ para referirse a un número cualesquiera. De manera similar interpreta palabras claves que sugieren operaciones como: duplo, triple, doble, entre otras. En la producción del participante N°5 se cumplió con el indicador: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas de la subcategoría Expresiones algebraicas Equivalentes (EAE)

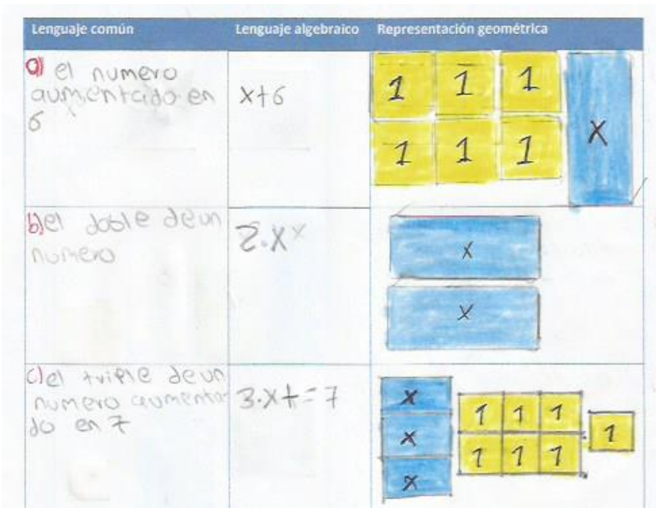



*Figura 31. Representación geométrica y Algebraica del Lenguaje Común Realizada por el Participante N°5*

Por otra parte, algunos participantes confundieron la representación geométrica de la $x$, con la representación geométrica de la unidad y con la representación geométrica de $x^2$, sin embargo, esto se aclaró en la puesta en común al finalizar la actividad. A manera de ejemplo, la figura 32 corresponde a la producción realizada por el participante N°6, se evidencia que utiliza erróneamente la baldosa que representa la variable $x^2$ para representar a un número cualesquiera.

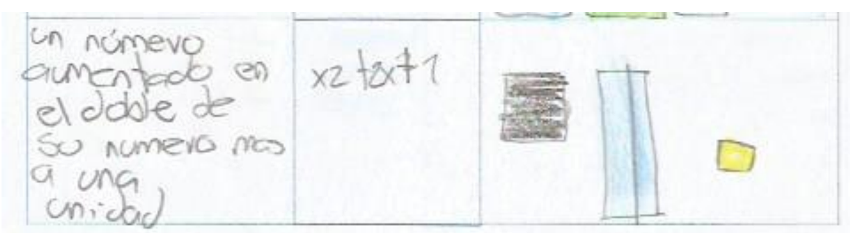



*Figura 32. Representación Geométrica y Algebraica del Lenguaje Común Realizado por el Participante N°6*

En contraste se encuentra un grupo numeroso de participantes, quienes asimilaron muy bien las instrucciones que se les dio y lograron obtener un desempeño superior en la totalidad de los ejercicios propuestos en la actividad. En la figura 32 se presenta el excelente trabajo realizado por el participante N°30, quien representó las expresiones en los tres sistemas semióticos, logrando transitar de un sistema a otro sin ninguna dificultad. En el desempeño del participante se evidencia que asigna correctamente la variable a las situaciones que se le plantearon alcanzando el indicador: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas de la subcategoría Expresiones algebraicas Equivalentes (EAE).

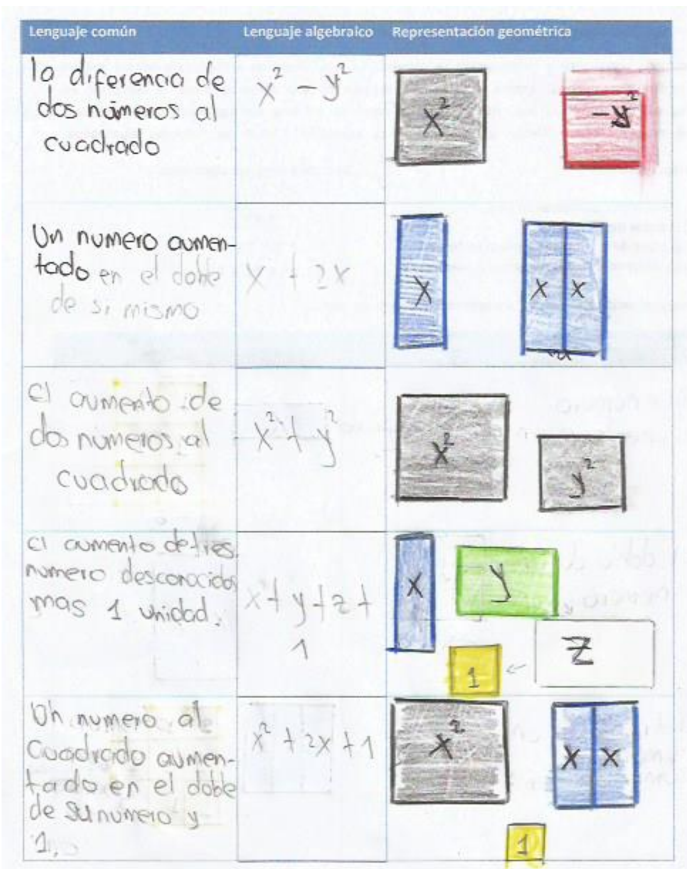



*Figura 33. Representación Geométrica y Algebraica del Lenguaje Común Realizado por el Participante N°30*

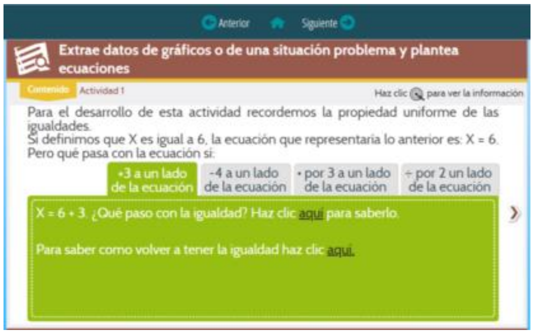



*Figura 34. Imagen de la Cápsula Educativa Digital Sobre Ecuaciones*

Durante este encuentro un grupo numeroso de participantes lograron resolver ecuaciones de la forma: $\mathrm{x} + \mathrm{b} = \mathrm{c}$, y de la forma: $a\mathrm{x} + \mathrm{b} = \mathrm{c}$, donde $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{Z}$ utilizando las baldosas algebraicas, los manipuladores virtuales y mediante procesos algebraicos inferidos de los modelos geométricos. No obstante, existe un grupo grande de participantes que tan solo resolvieron ecuaciones de la forma: $x + b = \mathrm{c}$, donde $\mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{Z}$.

En la figura 35 se puede observar los procedimientos que utilizó el participante N°35 para resolver dos ecuaciones: una ecuación de la forma: $x + b = c$ y la otra de la forma: $ax + b = c$, se destaca el buen desempeño que presentó el participante durante los ejercicios propuestos, el participante logró asimilar el procedimiento sugerido en el manipulador virtual MVU Algebra Tiles, para resolver este tipo de ecuaciones utilizando un modelo geométrico. Claramente, el participante cumple con el indicador: soluciona ecuaciones de primer grado utilizando modelos geométricos o algebraicos, perteneciente al subcategoría Ecuaciones (E).

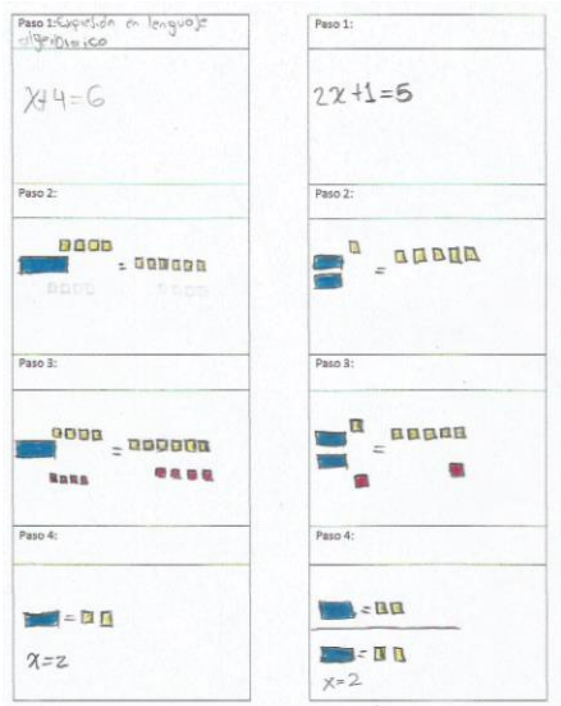



*Figura 35. Solución de Ecuaciones Mediante un Modelo Algebraico Realizado por el Participante N°35*

Por otro lado, existe un pequeño grupo de estudiantes que no evidencian haber logrado el aprendizaje de resolución de ecuaciones de la forma: $ax + b = c$ utilizando modelos geométricos, únicamente evidencian correctos procedimientos en la resolución de ecuaciones de la forma: $x + b = c$. La figura 36, corresponde al procedimiento empleado por el participante N°7, para resolver es tipo de ecuaciones utilizando modelos geométricos. Aunque el procedimiento está bien elaborado, no se puede afirmar que el participante cumpla con el indicador: soluciona ecuaciones de primer grado utilizando modelos geométricos o algebraicos.

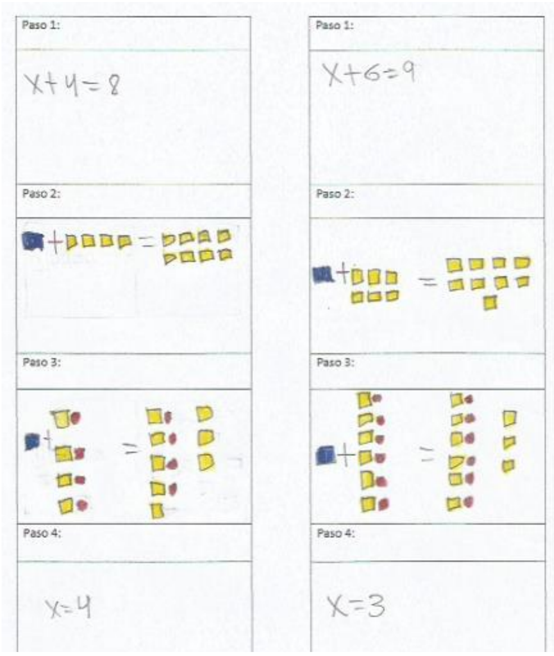



*Figura 36. Solución de Ecuaciones Mediante un Modelo Algebraico Realizado por el Participante N°7*

**Actividad de aplicación encuentros del ocho al dieciséis**

La figura 37, corresponde a un mapa de conceptos durante la actividad de aplicación. En él se observa la manera como las baldosas algébricas y el aplicativo MVU Algebra Tiles, facilitaron el desarrollo de pensamiento variacional. El material concreto y el aplicativo virtual, motivaron a los participantes para que entendieran las operaciones de adición sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios, realizando modelos geométricos. Posteriormente, los participantes identificaron invariantes en las respuestas de algunas identidades, conduciendo de esta manera a fórmulas generales para la multiplicación y la descomposición factorial de trinomios.

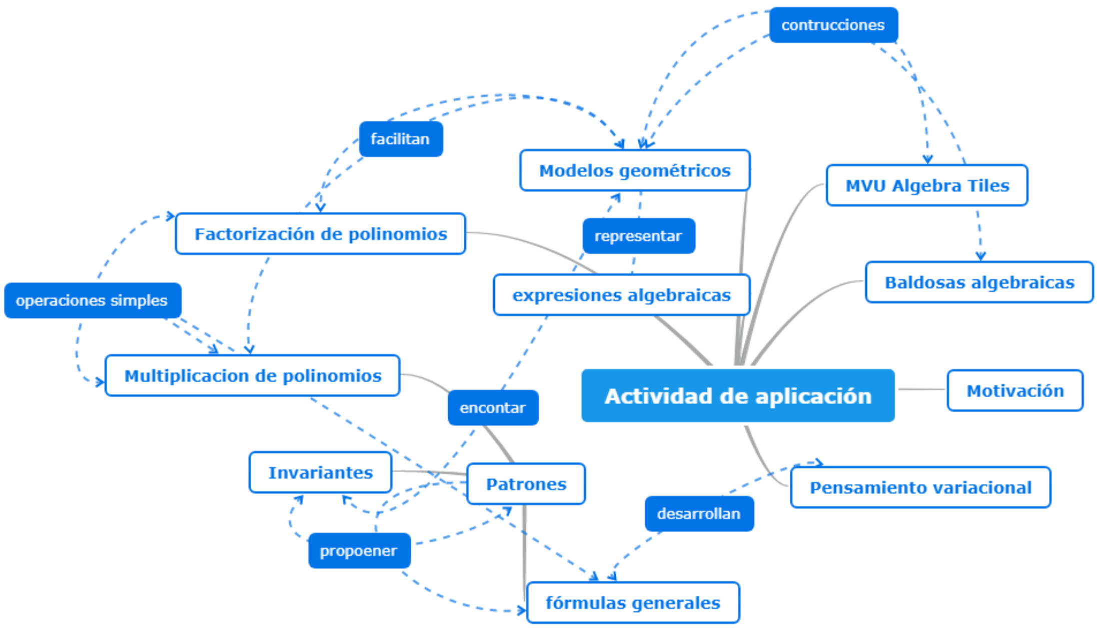



*Figura 37. Mapa de Conceptos, Actividad de Aplicación. Fuente: Elaboración Propia*

*Figura 38.Imagen de la Capsula Educativa Digital Sobre Expresiones Algebraicas*

En el encuentro 8 se planteó el propósito de clasificar las expresiones algebraicas de acuerdo a su número de términos. Hasta este punto los participantes vienen construyendo el concepto de variable y entendiendo la utilidad de las baldosas para representar las variables lineales y cuadráticas. Durante este encuentro, los participantes teorizaron nociones de expresión algebraica, lenguaje algebraico, términos y grado de una expresión. El maestro investigador dirigió un conversatorio sobre algunas limitaciones de las baldosas algebraicas para representar cualesquier expresión algebraica.

En la figura 39 se presenta las producción del participante N°3, quien realiza una buen desarrollo de la actividad y demuestra solidez al representar expresiones algebraica utilizando modelos geométricos cumpliendo con el indicador : utiliza modelos geométricos o algebraicos para representar expresiones algebraicas perteneciente a la subcategoría: expresiones algebraicas equivalentes (EAE), de manera similar en la misma producción se evidencia la apropiación del concepto de variable y su utilidad para representar cantidades desconocidas, cumpliendo con el indicador: representa cantidades desconocidas con variables perteneciente a la subcategoría Ecuaciones (E) y por ultimo da indicios de entender que las baldosas algebraicas no pueden representar geométricamente cualesquier expresión algebraica.

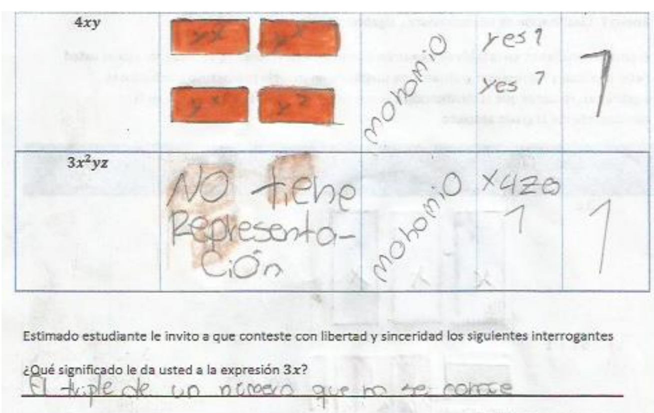



*Figura 39.Producción del Participante N°3 Encuentro 8*

No obstante, existe un grupo de participantes que están construyendo el concepto de variable, utilizando las baldosas algebraicas para representarla. En la figura 40 se puede observar la producción del participante N°24, quien  representa bien monomios utilizando baldosas algebraicas, es decir, cumple con el indicador: representa cantidades desconocidas con variables perteneciente a la subcategoría Ecuaciones (E). Pero, cuando se le pide el concepto de $3x$, utiliza como recurso la forma geométrica de la baldosa equis. Por último, también da muestras de entender que las baldosas algebraicas son útiles para representar expresiones algebraicas lineales y cuadráticas.

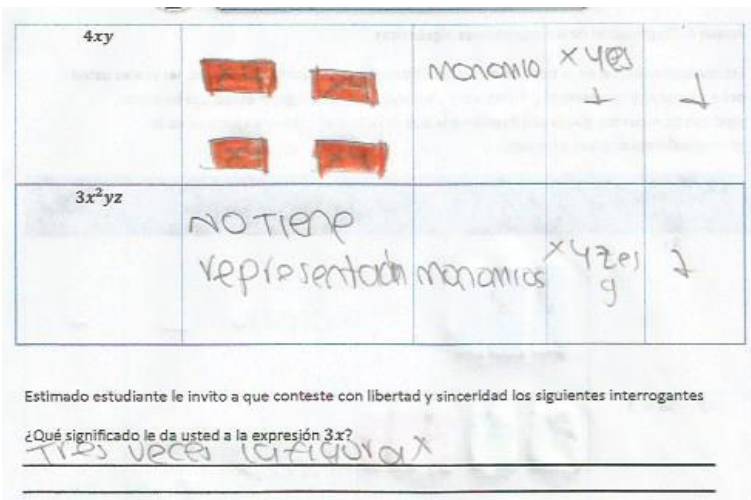



*Figura 40. Producción del Participante N°24 Encuentro 8*

En este sentido, existe un grupo de participantes que aunque hace buen uso de las baldosas algebraicas para representar las expresiones algebraicas, cumpliendo con el indicador: utiliza modelos geométricos o algebraicos para representar expresiones algebraicas perteneciente a la subcategoría: expresiones algebraicas equivalentes (EAE), no contestan los interrogantes que se les planteó, lo cual dificulta poder determinar si el participante interpreta el concepto de la variable, o no lo hace. Para ejemplificar lo anterior se presenta la figura 41 que corresponde a la producción del participante N°35.

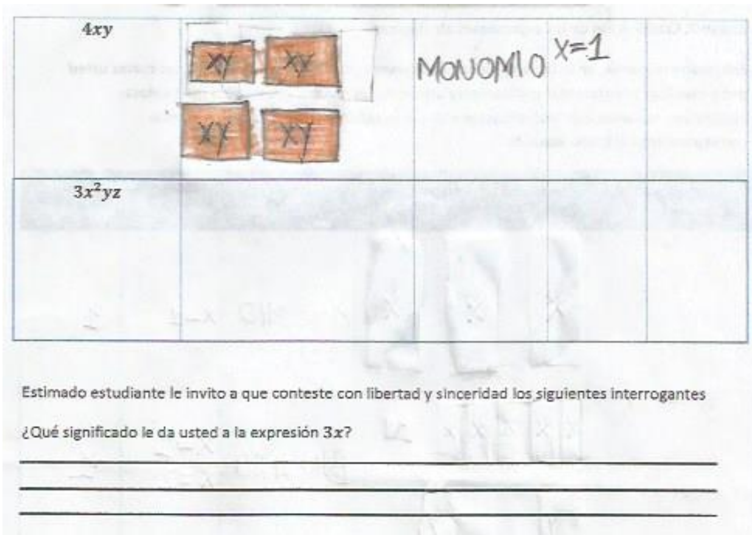



*Figura 41. Producción del Participante N°35 Encuentro 8*

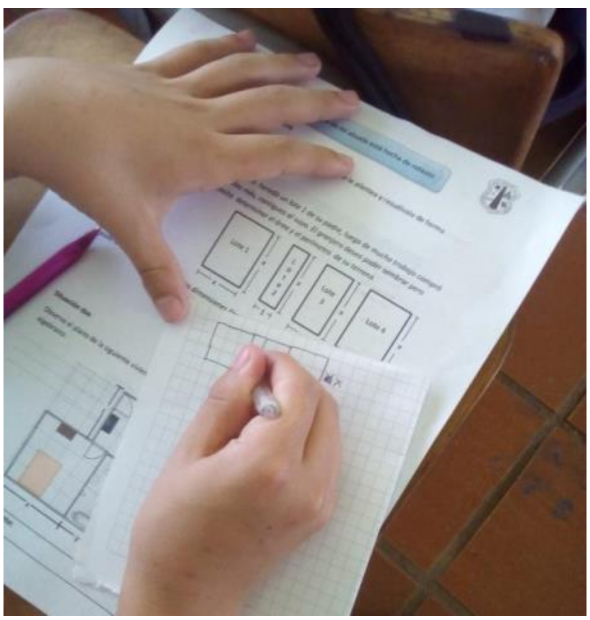


*Figura 42.Fotografía de un Participante Resolviendo una Situación Contextualizada de Perímetros Encuentro 9*

Durante este encuentro, en las producciones de los estudiantes no se evidencia un buen desempeño. El encuentro tenía como propósito, extrapolar un procedimiento para adicionar y sustraer expresiones algebraicas, para lograr este objetivo, se plantearon dos situaciones contextualizadas al cálculo de perímetros de rectángulos. En este sentido, la mayoría de estudiantes tuvo problemas para calcular los perímetros, algunos plantearon bien las expresiones algebraicas pero no lograron realizar la operación de suma que se requería y un pequeño grupo tuvo problemas para plantear la expresión algebraica. A continuación se presentan algunas de las producciones de los participantes.

La figura 43 corresponde a la producción realizada por el participante N°33, quien resuelve la actividad acertadamente, proponiendo un procedimiento para calcular los perímetros. En primer lugar, plantea expresiones algebraicas de la información que se le da y posteriormente reduce los términos semejantes de la expresión obtenida. El participante cumple con los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para sumar o restar expresiones algebraicas y utiliza un modelo geométrico o algebraico para reducir términos semejantes en una expresión algebraica pertenecientes a la subcategoría, operaciones con expresiones algebraicas (OCEA), adicionalmente cumple con los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas y resuelve problemas y los justifica algebraicamente perteneciente a la subcategoría expresiones algebraicas equivalentes (EAE).

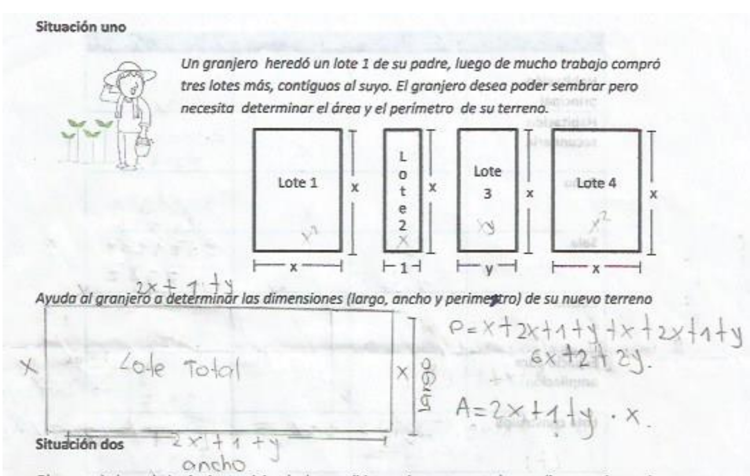



*Figura 43. Producción del Participante N° 33 Durante el Encuentro 9*

En el mismo material el participante 33 describe con sus palabras el procedimiento que utilizó para llegar a solucionar el problema de la situación uno. La figura 44, corresponde a la producción del participante N° 33, se evidencia la habilidad matemática y el dominio conceptual que está logrando durante la intervención.

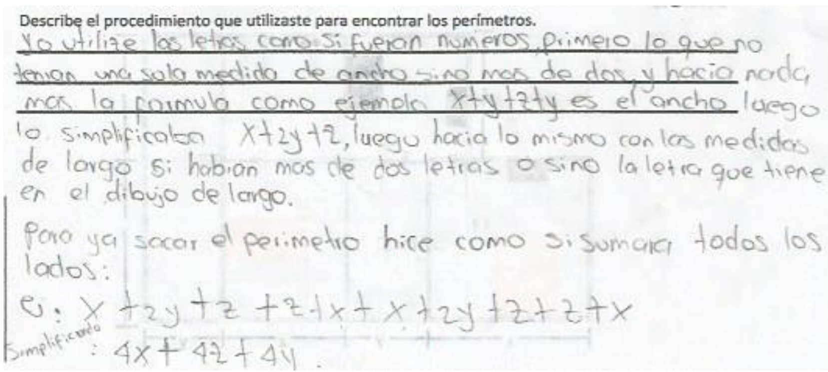



*Figura 44. Descripción del Procedimiento que Utilizó el Participante 33 Durante el Encuentro 9*

La figura 45 corresponde a la producción realizada por el participante N° 18, el estudiante plantea una expresión algebraica para representar el ancho y el largo del rectángulo, sin embargo, no reduce los términos semejantes porque no los identifica. Si bien plantea la expresión algebraica, cumpliendo con el indicador: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría expresiones algebraicas equivalentes (EAE), no da solución a la situación problema.

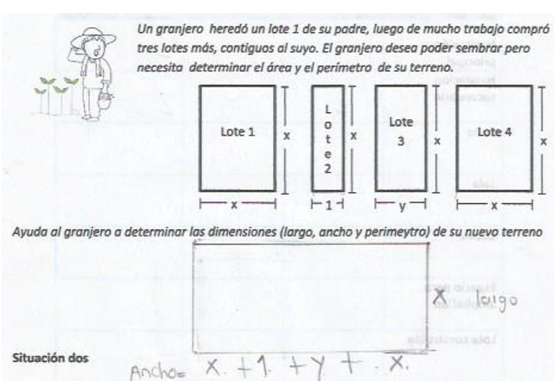



*Figura 45. Producción del Participante N°18  Durante el Encuentro 9*

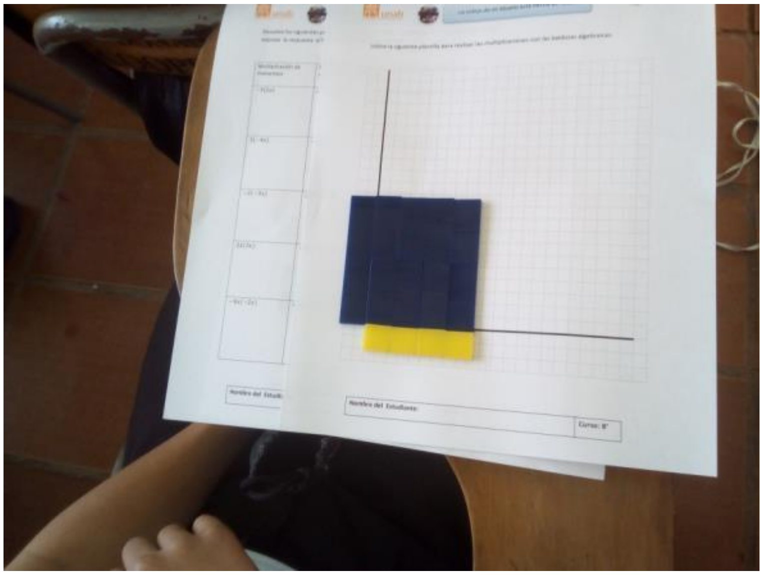
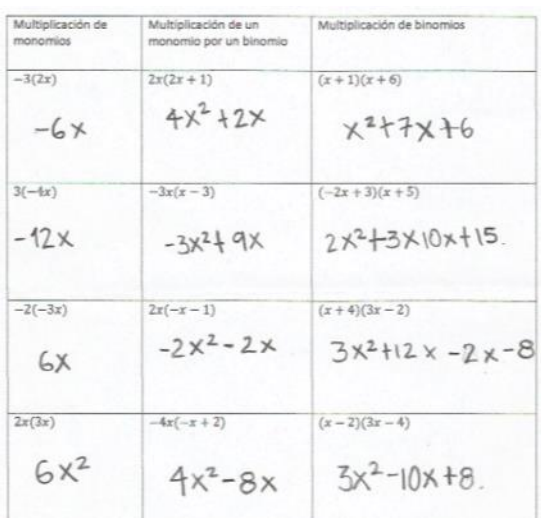


*Figura 46. Multiplicación de dos Monomios Representada con Baldosas Algebraicas*

En consecuencia a los bajos resultados obtenidos por la mayoría los participantes durante el encuentro anterior, el maestro investigador realizó una socialización para aclarar las dudas que surgieron, los participantes despejaron las dudas que tenían referente a la reducción de términos semejantes y consolidaron algunos saberes.

Los participantes se mostraron receptivos y participativos, cuando se les indagó sobre los valores que puede tomar la variable $x$ participaron con las siguientes intervenciones: el participante N° 9, mencionó que la equis es una cosa o cantidad desconocida, el participante N° 17, dijo que la equis es un número cualesquiera; como 5 o 3. El participante N° 13 afirmó que la equis podría ser la distancia entre dos puntos. En las intervenciones de los participantes se puede corroborar que se está cumpliendo y afianzando el indicador: representa cantidades desconocidas con variables, perteneciente a la subcategoría ecuaciones (E).

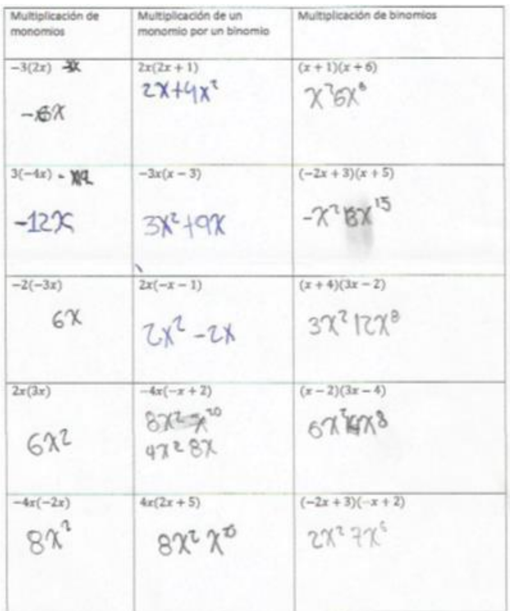
Por otro lado, la figura 47 corresponde a la producción realizada por el participante N°32, en su trabajo se puede observar como el estudiante realiza correctamente multiplicaciones entre dos monomios, entre binomios y entre un monomio por un binomio, con términos positivos. Sin embargo, cuando alguno de los términos es negativo el estudiante comete errores menores de signo, mas no de magnitud ni de grado. Se puede inferir que el participante N°32 está cumpliendo con los indicadores: Utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de un monomio por un binomio y utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de dos binomios, pertenecientes a la subcategoría transformar expresiones algebraicas (TEA).



| Multiplicación de monomios | Multiplicación de un monomio por un binomio | Multiplicación de binomios |
|---|---|---|
| $-3(2x)$<br>$-6x$ | $2x(2x+1)$<br>$4x^2+2x$ | $(x+1)(x+6)$<br>$x^2+7x+6$ |
| $3(-4x)$<br>$-12x$ | $-3x(x-3)$<br>$-3x^2+9x$ | $(-2x+3)(x+5)$<br>$2x^2+3x10x+15.$ |
| $-2(-3x)$<br>$6x$ | $2x(-x-1)$<br>$-2x^2-2x$ | $(x+4)(3x-2)$<br>$3x^2+12x-2x-8$ |
| $2x(3x)$<br>$6x^2$ | $-4x(-x+2)$<br>$4x^2-8x$ | $(x-2)(3x-4)$<br>$3x^2-10x+8.$ |

*Figura 47. Multiplicaciones Realizadas por el Participante N°32*

La figura 48 corresponde a la producción realizada por el participante N°17, al realizar el análisis de su trabajo, se evidencia que el estudiante realiza multiplicaciones entre monomios y algunas multiplicaciones entre un monomio y un binomio, pero comete errores de signos y algo que llama la atención es que no separa los términos con la operación correspondiente de adición o sustracción. El participante no cumple con los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de dos binomios y utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de un monomio por un binomio.



| Multiplicación de monomios | Multiplicación de un monomio por un binomio | Multiplicación de binomios |
|---|---|---|
| $-3(2x)$ $-6x$ | $2x(2x+1)$ $2x+4x^2$ | $(x+1)(x+6)$ $x^2 6x^6$ |
| $3(-4x)$ $-12x$ | $-3x(x-3)$ $3x^2+9x$ | $(-2x+3)(x+5)$ $-x^2 8x^{15}$ |
| $-2(-3x)$ $6x$ | $2x(-x-1)$ $2x^2-2x$ | $(x+4)(3x-2)$ $3x^2 12x^8$ |
| $2x(3x)$ $6x^2$ | $-4x(-x+2)$ $8x^2 x^{20}$ $4x^2 8x$ | $(x-2)(3x-4)$ $6x^2 4x^8$ |
| $-4x(-2x)$ $8x^2$ | $4x(2x+5)$ $8x^2 x^{20}$ | $(-2x+3)(-x+2)$ $2x^2 7x^6$ |

*Figura 48. Multiplicaciones Realizadas por el Participante N°17*

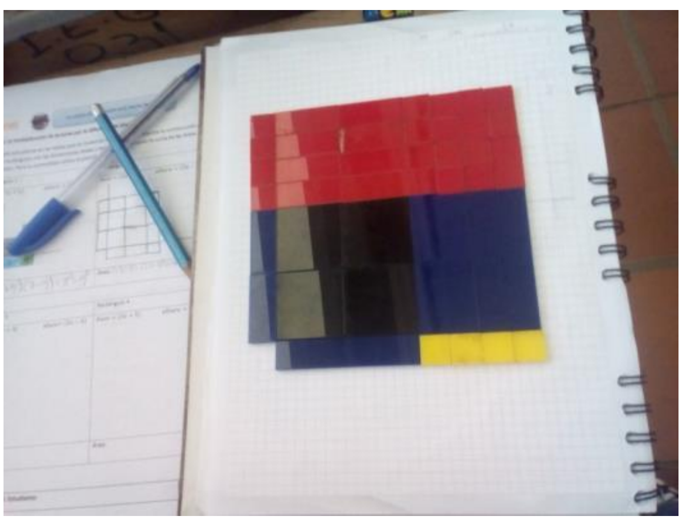


*Figura 49.Multiplicación de la suma por la Diferencia de dos Binomios*

El desempeño de los participantes durante este encuentro fue destacable, la mayoría de participantes no tuvo inconvenientes al representar gráficamente las multiplicaciones de los binomios, los estudiantes recordaron sin dificultad la propiedad uniforme de las igualdades y la aplicaron en la solución de los ejercicios propuestos. Algo para resaltar en este encuentro fue la competencia que se generó alrededor de las construcciones, un grupo numeroso de participantes compitió entre ellos para ver quien terminaba primero la actividad, en medio de esa competencia el participante N°38 comenta "profe y eso que decían que el álgebra era difícil, le meten miedo desde sexto y mire, es fácil" el participante N° 32 le replica "es fácil porque estamos trabajando con las baldosas". En la intervención del participante N°38, N°32 y en torno a la sana competencia que se generó, se evidencia la categoría Motivación (M), los participantes realizaron las actividades con agrado.

En este sentido, los participantes socializaron sus construcciones, proyectándolas al grupo con ayuda del aplicativo MVU Algebra Tiles. El software ha permitido que se realice la retroalimentación de una manera más eficiente, porque el aplicativo da la posibilidad de valorar las construcciones que se hacen y presenta las representaciones geométricas en lenguaje algebraico. La figura 50 corresponde a la socialización que realiza el participante N°32 de sus construcciones. Se observa la atención que prestan sus compañeros a la explicación y la motivación que esto generó.

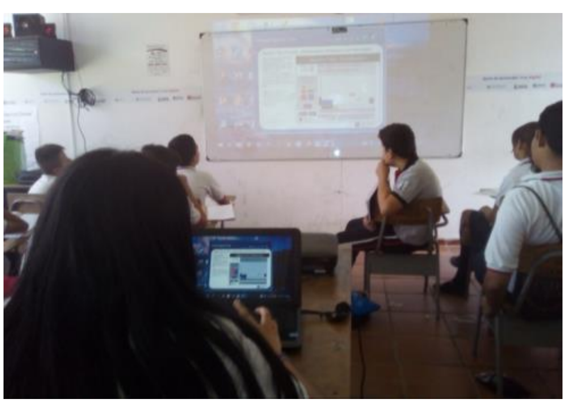


*Figura 50.Socialización Realizada por el Participante 32 Encuentro 11*

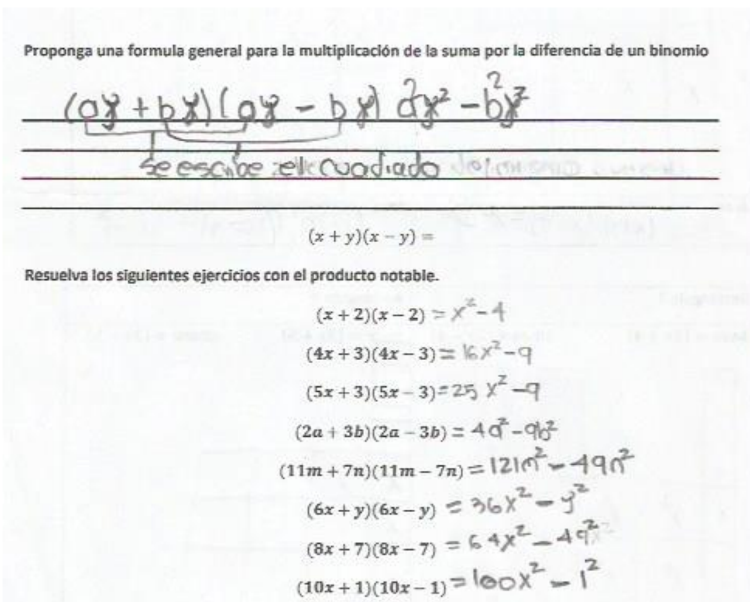
En términos generales se puede afirmar que el propósito planteado se cumplió satisfactoriamente. A continuación se presentan algunas de las producciones realizadas por los participantes.

La figura 51 corresponde a la producción realizada por el participante N°14, se observa que representa el producto utilizando un modelo geométrico, de manera similar aplica la propiedad uniforme de las igualdades y por último encuentra el producto de los binomios expresándolo en lenguaje algebraico. Se evidencia en la producción, que el participante cumple con los indicadores Utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación de dos binomios, pertenecientes a las subcategorías expresiones algebraicas equivalentes (EAE) y transformar expresiones algebraicas (TEA).


*Figura 51. Producción del Participante N°14 Multiplicación de la suma por la Diferencia de dos Binomios.*

El mismo participante encuentra algunos invariantes y propone una fórmula general para encontrar el producto de la suma por la diferencia de dos binomios, aunque los invariantes son acertados, la propuesta de la fórmula general presenta algunos errores gramaticales, el participante no expone con claridad su idea, sin embargo, escribe en lenguaje algebraico una fórmula acertada para encontrar el producto.

La figura 52 corresponde a la producción realizada por el participante N°31. Aunque no realiza una descripción escrita, en su producción se observa una propuesta de la fórmula general completa. En esta misma ilustración, se puede identificar la aplicación de la fórmula general en el desarrollo de 8 ejercicios sin la necesidad de utilizar un modelo geométrico con baldosas algebraicas. En las producciones del participante N°31se evidencian los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación de dos binomios, pertenecientes a las subcategorías expresiones algebraicas equivalentes (EAE) y transformar expresiones algebraicas (TEA).



**Proponga una formula general para la multiplicación de la suma por la diferencia de un binomio**

$(ax+bx)(ax-bx)\ a^2x^2-b^2x^2$

se escribe el cuadrado

$(x+y)(x-y) =$

**Resuelva los siguientes ejercicios con el producto notable.**

$(x+2)(x-2) = x^2-4$

$(4x+3)(4x-3) = 16x^2-9$

$(5x+3)(5x-3) = 25\ x^2-9$

$(2a+3b)(2a-3b) = 4a^2-9b^2$

$(11m+7n)(11m-7n) = 121m^2-49n^2$

$(6x+y)(6x-y) = 36x^2-y^2$

$(8x+7)(8x-7) = 64x^2-49$

$(10x+1)(10x-1) = 100x^2-1^2$

*Figura 52.Producción del Participante N° 31 Encuentro 11*

El desempeño del participante N°4 llamó la atención del maestro investigador, porque sin utilizar las baldosas algebraicas realizaba correctamente las construcciones geométricas, cuando se le indagó como lo realizaba, el participante respondió “imagino las baldosas en la mente y hago el dibujo”. En el desempeño del participante N°4, se evidencia los indicadores utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación de dos binomios, pertenecientes a las subcategorías expresiones algebraicas equivalentes (EAE) y transformar expresiones algebraicas (TEA).

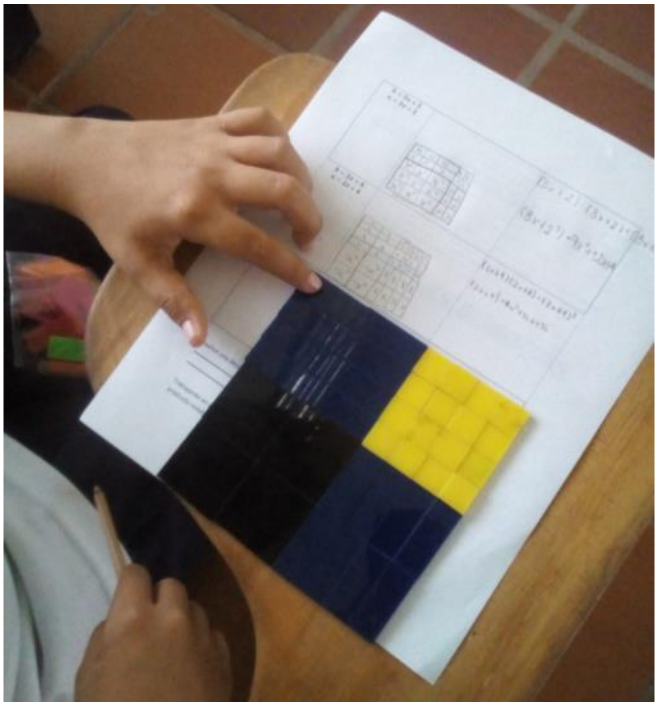


*Figura 53.Fotografia del Encuentro 12*

En el encuentro 12 se planteó como propósito, utilizar un modelo geométrico o algebraico para representar la identidad: $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2+2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$ y la identidad: $(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2-2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$, posteriormente proponer en plenaria una fórmula general para encontrar el producto notable en las situaciones que se propongan. La mayoría de participantes representan los productos con las baldosas algebraicas, realizan la representación geométrica y expresan el producto en lenguaje algebraico. No obstante, existe un pequeño grupo de participantes que les cuesta representar algebraicamente el producto de la identidad $(\mathrm{a}\pm\mathrm{b})^2$. A continuación se presentan algunas de las producciones de los estudiantes.

La figura 54 corresponde a la producción del participante N°2, en su trabajo se observa que realiza acertadamente las representaciones geométricas de los productos, al inicio comete un error al escribir en lenguaje algebraico la operación del producto, posteriormente, escribe correctamente los productos. Por otro lado, el participante encuentra algunos invariantes, afirma: que los productos siempre son positivos, que el producto es un trinomio y que el primer término del trinomio es el cuadrado del primer término del binomio. En las producciones del participante se pueden evidenciar los indicadores: utiliza modelos geométricos o algebraicos para representar la identidad $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, utiliza modelos geométricos o algebraicos para representar la identidad $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ pertenecientes a la subcategoría transformar expresiones algebraicas (TEA) y el indicador utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas perteneciente a la subcategoría Expresiones algebraicas equivalentes. (EAE).

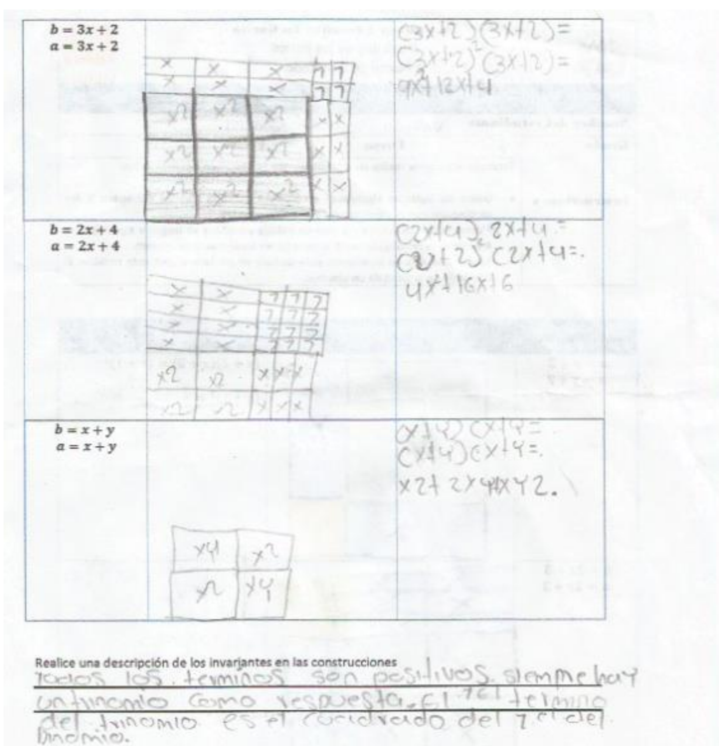



*Figura 54. Producción del Participante N°2 Encuentro 12*

La figura 55 corresponde a la producción realizada por el participante N°34, en su trabajo se observa una adecuada representación geométrica del producto, escribe correctamente el producto en lenguaje algebraico y encuentra cuatro invariantes. El participante 34 afirma “el primer término del trinomio es elevado al cuadrado, el segundo término del trinomio es negativo, el 1° y 3° término del trinomios son positivos y el segundo término del trinomios de la respuesta es el resultado de la multiplicación del 1° y 2° término del binomio”.

El participante aunque comete un error en el invariante del segundo término del trinomio, demuestra en su producción los indicadores: utiliza modelos geométricos o algebraicos para representar la identidad: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, utiliza modelos geométricos o algebraicos para representar la identidad: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas. (TEA).

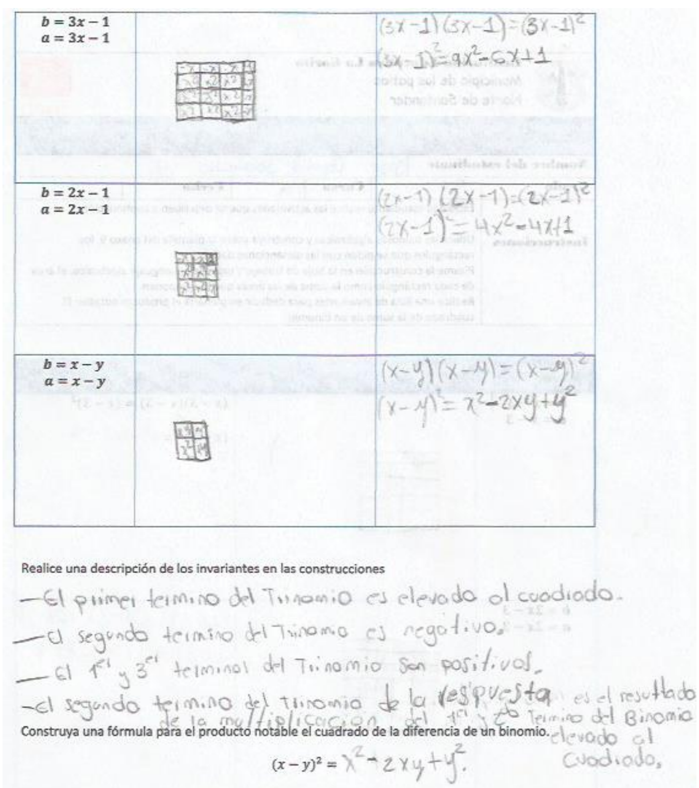


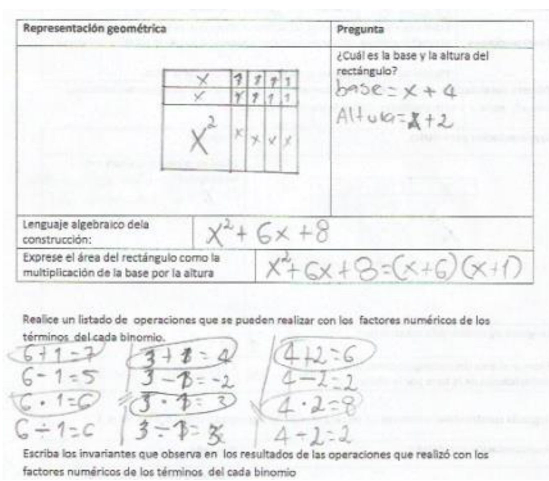

*Figura 55. Producción Realizada por el Participante N° 34 Encuentro 12*

*Figura 56. Fotografía del Encuentro 13*

En el encuentro se planteó como propósito descomponer en factores trinomios de la forma $x^2 + bx + c, donde\ b, c \in \mathbb{Z}^+$. El procedimiento que se utilizó fue construir un rectángulo con los términos del trinomio, posteriormente encontrar la base y la altura de rectángulo y expresar la factorización del trinomio como la multiplicación de la base por la altura. La mayoría de los participantes no realizaron correctamente la primera construcción, construyeron rectángulos, pero no utilizaban todas las baldosas algebraicas, fue necesario que el maestro investigador realice una aclaración general.

Las producciones de los estudiantes mejoraron con la explicación del maestro, la mayoría logró el propósito, representaron los trinomios utilizando un modelo geométrico, identificaron la base y la altura del rectángulo, expresaron en lenguaje algebraico los trinomios como el producto de la base por la altura, encontraron algunos invariantes y participaron en la construcción de la fórmula general de la descomposición de trinomios de la forma $x^2 + bx + c, donde\ b, c \in \mathbb{Z}^+$ . A continuación se presentan algunas de las producciones de los participantes.

La figura 57 corresponde a la producción realizada por el participante N° 27, en su trabajo se evidencia que representa correctamente el trinomio utilizando un modelo geométrico, encuentra la base y la altura del rectángulo, expresa el trinomio como el producto de la base por la altura y descubre dos invariantes. El participante nota en las operaciones de adición y multiplicación que hay coincidencias y las encierra con una línea. En la producción del participante se evidencian los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático perteneciente a la subcategoría transformar expresiones algebraicas (TEA) y utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría expresiones algebraicas equivalentes (EAE).



| Representación geométrica | Pregunta |
|---|---|
| | ¿Cuál es la base y la altura del rectángulo? base = x + 4 Altura = x + 2 |
| Lenguaje algebraico dela construcción: | $x^2 + 6x + 8$ |
| Exprese el área del rectángulo como la multiplicación de la base por la altura | $x^2 + 6x + 8 = (x+6)(x+1)$ |

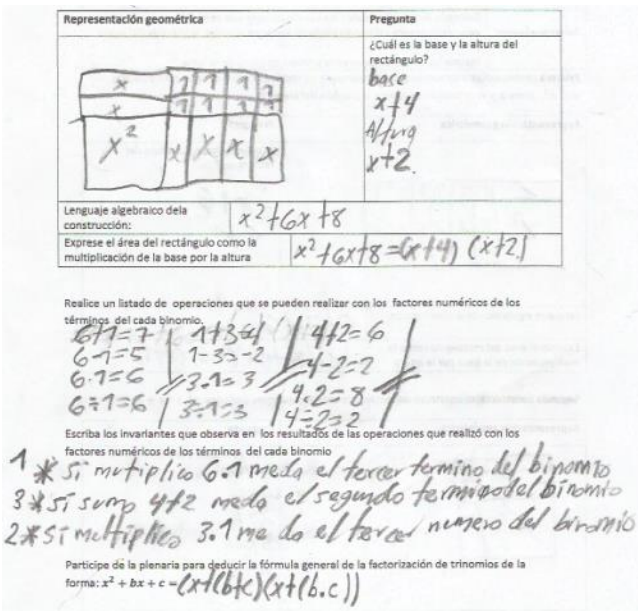
Realice un listado de operaciones que se pueden realizar con los factores numéricos de los términos del cada binomio.

| | | |
|---|---|---|
| 6 + 1 = 7 | 3 + 1 = 4 | 4 + 2 = 6 |
| 6 − 1 = 5 | 3 − 1 = −2 | 4 − 2 = 2 |
| 6 · 1 = 6 | 3 · 1 = 3 | 4 · 2 = 8 |
| 6 ÷ 1 = 6 | 3 ÷ 1 = 3 | 4 ÷ 2 = 2 |

Escriba los invariantes que observa en los resultados de las operaciones que realizó con los factores numéricos de los términos del cada binomio

*Figura 57.Producción Realizada por el Participante 27 Encuentro 13*

En este mismo sentido, la figura 58 corresponde a la producción realizada por el participante N°13, en su trabajo se observa que el participante, representa acertadamente los trinomios utilizando un modelo geométrico, encuentra la base y la altura del rectángulos y encuentra unos invariantes para un caso en particular, el participante da cuenta que al multiplicar y sumar los segundos términos de los binomios, estos resultados son iguales a los coeficientes del segundo y tercer término del trinomio. En la producción del estudiante se evidencian los indicadores Utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas (TEA) y el indicador, utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas perteneciente a la subcategoría, expresiones algebraicas equivalentes (EAE).



| Representación geométrica | Pregunta |
|---|---|
| | ¿Cuál es la base y la altura del rectángulo? base $x+4$ Altura $x+2$ |
| Lenguaje algebraico dela construcción: | $x^2+6x+8$ |
| Exprese el área del rectángulo como la multiplicación de la base por la altura | $x^2+6x+8=(x+4)(x+2)$ |

Realice un listado de operaciones que se pueden realizar con los factores numéricos de los términos del cada binomio.

$6+1=7$, $6-1=5$, $6\cdot1=6$, $6\div1=6$ | $1+3=4$, $1-3=-2$, $3\cdot1=3$, $3\div1=3$ | $4+2=6$, $4-2=2$, $4\cdot2=8$, $4\div2=2$

Escriba los invariantes que observa en los resultados de las operaciones que realizó con los factores numéricos de los términos del cada binomio

1 * si mutiplico 6.1 me da el tercer termino del binomio
3 * si sumo 4+2 me da el segundo termino del binomio
2 * si multiplico 3.1 me da el tercer numero del binomio

Participe de la plenaria para deducir la fórmula general de la factorización de trinomios de la forma: $x^2+bx+c$ = $(x+(b+c))(x+(b.c))$

*Figura 58. Producción del Participante N° 13 Encuentro 13*

Encuentro 14 Factorización de trinomios de la forma $\mathrm{ax^2+bx+c}$

En el encuentro 14 se planteó como propósito, descomponer en factores trinomios cuadráticos de la forma $\mathrm{ax^2+bx+c}$ utilizando modelos geométricos o algebraicos. El procedimiento que se utilizó para factorizar los trinomios fue el mismo utilizado en el encuentro anterior. Sin embargo, en este tipo de trinomios no se pueden encontrar los invariantes de la misma manera. La mayoría de estudiantes resolvieron las actividades sin ningún inconveniente, representaron geométricamente los trinomios, encontraron las bases y la altura de los rectángulos y expresaron el trinomio como el producto de la base por la altura. A continuación se presentan las construcciones de los participantes.

La figura 59, corresponde a la producción realizada por el participante N°35, en su trabajo se observa que representa correctamente los trinomios, encuentra la base y la altura de los rectángulos, expresa el trinomio como el producto de la base por la altura, realiza un lista de operaciones que se pueden realizar con los segundos términos de los binomio y encuentra un invariante; multiplica  los segundos términos de los binomios y afirma que es posible encontrar el tercer término del trinomio con el producto de los segundos términos de los binomios . Es su producción se evidencian los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría, expresiones algebraicas equivalentes (EAE) y el indicador utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas. (TEA).

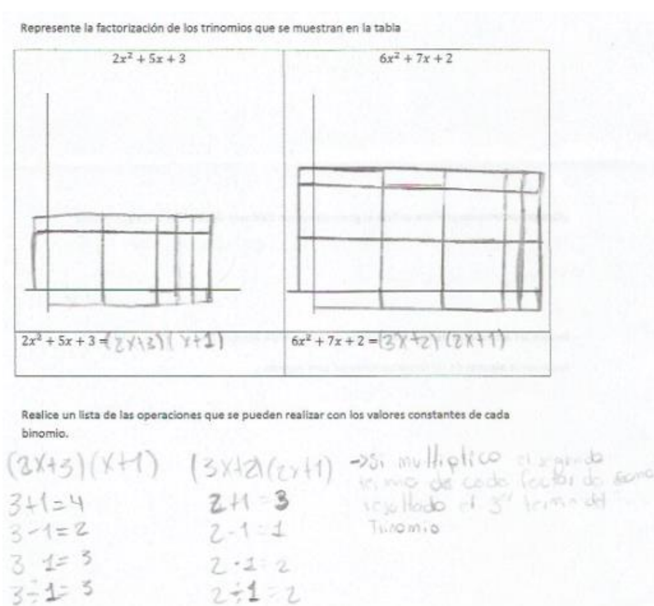



*Figura 59.Producción del Participante N° 34 Encuentro 13.*

La figura 60, corresponde a la producción realizada por el participante N°33 quien representa adecuadamente los trinomios utilizando un modelo geométrico con baldosas algebraicas, encuentra la base y la altura del rectángulo y expresa en lenguaje algebraico el trinomio como la producto de la base por la altura. En su producción se evidencian los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría, expresiones algebraicas equivalentes (EAE) y el indicador utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático, perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas (TEA).

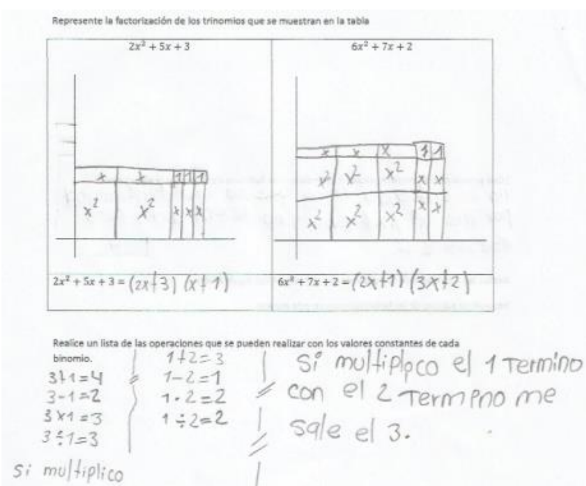
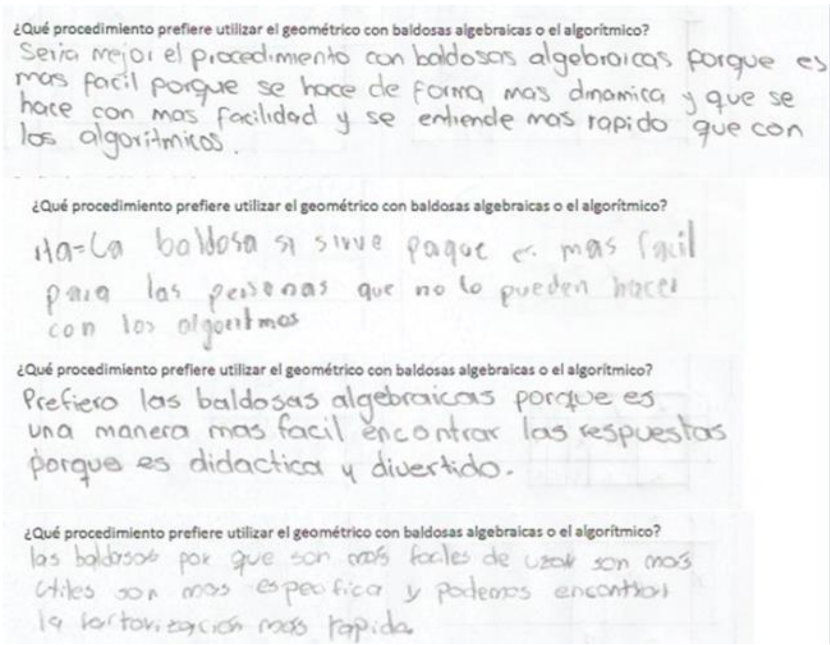



*Figura 60.Producción realizada por  el Participante N°33 Encuentro 13*

Por otro lado, la mayoría de participantes manifestaron por escrito que el trabajo con las baldosas algebraicas se caracteriza lo siguiente: genera motivación para el estudio de las matemáticas y facilita la comprensión de la multiplicación y la descomposición factorial de polinomios. A continuación se presentan algunas producciones:

La figura 54 corresponde a la apreciación de los participantes N° 32, N°17, N°33 y N°3 respectivamente a la pregunta ¿Qué procedimiento prefiere utilizar para descomponer polinomios el geométrico con baldosas algebraicas o el algorítmico?


¿Qué procedimiento prefiere utilizar el geométrico con baldosas algebraicas o el algorítmico?

Seria mejor el procedimiento con baldosas algebraicas porque es mas facil porque se hace de forma mas dinamica y que se hace con mas facilidad y se entiende mas rapido que con los algoritmicos.

¿Qué procedimiento prefiere utilizar el geométrico con baldosas algebraicas o el algorítmico?

Ha-La baldosa si sirve poque es mas facil para las personas que no lo pueden hacer con los algoritmos

¿Qué procedimiento prefiere utilizar el geométrico con baldosas algebraicas o el algorítmico?

Prefiero las baldosas algebraicas porque es una manera mas facil encontrar las respuestas porque es didactica y divertido.

¿Qué procedimiento prefiere utilizar el geométrico con baldosas algebraicas o el algorítmico?

las baldosas por que son mas faciles de usar son mas utiles son mas especifica y podemos encontrar la factorización mas rapida.

*Figura 61. Respuestas de los Participantes N° Encuentro 13*

En el encuentro 15 se planteó como propósito descomponer trinomios cuadrado perfectos utilizando modelos geométrico o algebraicos, la mayoría de estudiantes logró alcanzar el objetivo, realizaron correctamente la representación geométrica de los trinomios utilizando las baldosas algebraicas, encontraron las bases y las alturas de los rectángulos y expresaron en lenguaje algebraico el trinomio como el producto de la base por la altura.

En este sentido, la mayoría de participantes reconocen que este tipo de trinomios se factorizan como el producto de dos binomios iguales y que se puede utilizar la propiedad de la potenciación “producto de bases iguales” para simplificar la descomposición factorial del trinomio. Algunos participantes encontraron invariantes como que la descomposición es un binomio elevado al cuadrado y que el primer y tercer término del trinomio es un término cuadrado. A continuación se presentan algunas de las producciones de los participantes.

La figura 62 corresponde a la producción del participante N° 32, el participante representa el trinomio adecuadamente utilizando un modelo geométrico, encuentra la base y la altura del rectángulo, expresa en lenguaje algebraico la factorización del trinomio como el producto de la base por la altura, aplica la propiedad de la potenciación potencia de bases iguales y encuentra algunos invariantes. En la producción del participante se evidencian los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría, expresiones algebraicas equivalentes (EAE) y el indicador, utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático, perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas (TEA).

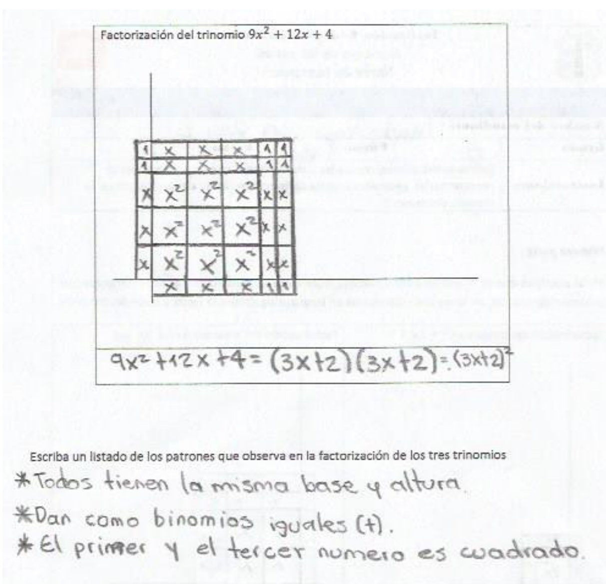



*Figura 62.Producción del Participante N° 32 Encuentro 15*

La figura 63 corresponde a la producción del participante N°22, se observa que el participante utiliza adecuadamente las baldosas algebraicas para representar el trinomio con un modelo geométrico, encuentra la base y la altura del rectángulo, escribe en lenguaje algebraico la descomposición factorial del trinomio como el producto de la base por la altura y propone algunos invariantes. Sin embargo, el participante realiza una afirmación ambigua, escribe que para encontrar los términos del trinomio se multiplica. En la producción del participante se evidencian los indicadores: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría, expresiones algebraicas equivalentes y el indicador, utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático, perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas (TEA).

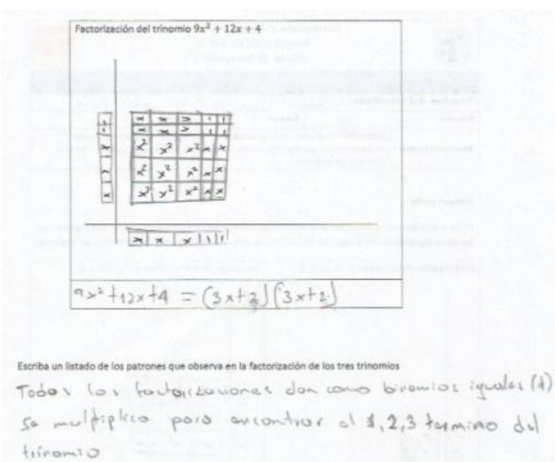



*Figura 63.Producción del Participante N° 22 Encuentro 15*

En el encuentro 16 se plateo como propósito utilizar modelos geométricos o algebraicos para representar la identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. La mayoría de participantes demostraron destreza al representar los binomios utilizando baldosas algebraicas, recordaron la propiedad uniforme de las igualdades, lograron construir rectángulos agregando baldosas algebraicas y respetando la propiedad uniforme, encontraron las bases y las alturas de los rectángulos, escribieron el lenguaje algebraico la descomposición factorial de la diferencia de cuadrados como el producto de la base por la altura y encontraron algunos invariantes para deducir la fórmula general de la diferencia de cuadrados. A continuación se presentan algunas de las construcciones.

La figura 64, corresponde a la producción del participante N°14, en su trabajo se observa que el estudiante representa adecuadamente el binomio utilizando un modelo geométrico, agrega baldosas algebraicas para construir un rectángulo respetando la propiedad uniforme de las igualdades, expresa en lenguaje algebraico el binomio como el producto de la base por la altura y propone algunos invariantes. En la producción del participante se evidencian los indicadores, utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría, expresiones algebraicas equivalentes y el indicador, utiliza modelos geométricos o algebraicos para representar identidad: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas (TEA).

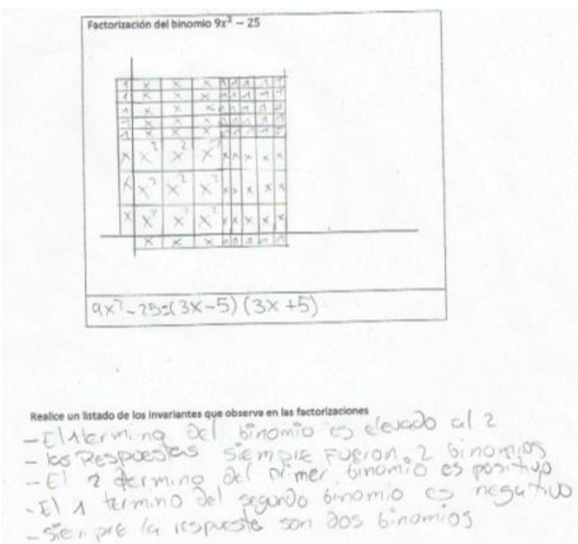



*Figura 64.Producción del Participante N°14 Encuentro 16*

La figura 65, corresponde a la producción realizada por el participante N°22, en su trabajo se observa que el participante representa correctamente el binomio utilizando un modelo geométrico, expresa la descomposición factorial del binomio como el producto de la base y la altura y propone invariantes para deducir la fórmula general de la factorización de la diferencia de cuadrados. En la producción del participante se evidencian los indicadores, utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, perteneciente a la subcategoría, expresiones algebraicas equivalentes y el indicador, utiliza modelos geométricos o algebraicos para representar identidad: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas (TEA).

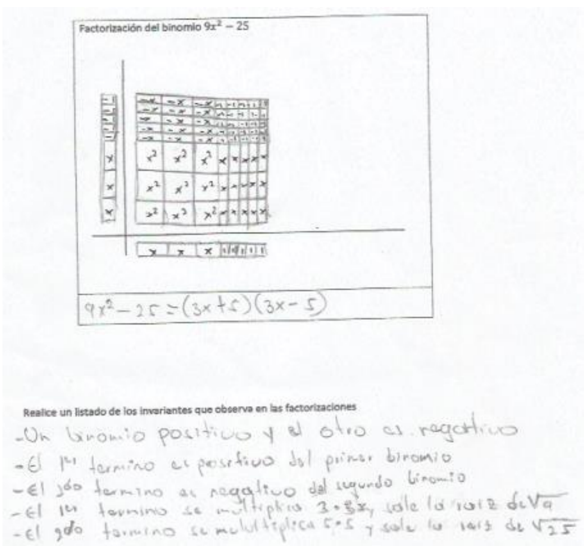



*Figura 65.Producción del Participante N° 22 Encuentro 16*

# 4 PROPUESTA PEDAGÓGICA

A continuación, se presenta la unidad didáctica “La cobija de mi abuelo está hecha de retazos” como propuesta de intervención pedagógica para fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional, utilizando baldosas algebraicas y manipuladores virtuales, en la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios, en los estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa La Garita.

## Justificación

El aprendizaje de las matemáticas en el grado octavo es un proceso progresivo, la mayoría de estudiantes lo realizan a lo largo de su ciclo escolar, aunque para alcanzarlo, algunos presentan mayores dificultades que otros. Por otro lado, existe un grupo de estudiantes que no lo desarrollan durante su formación secundaria y deciden formarse profesionalmente en carreras que no exijan el uso de las matemáticas. Es frecuente escuchar frases como: quiero estudiar algo que no tenga matemáticas, sin embargo, las matemáticas permean directa o indirectamente todas las áreas del conocimiento. Al realizar una reflexión sobre la idea errónea que los estudiantes se han formado de las matemáticas, encontramos en la teoría que es a causa de lo abstracto de sus objetos de conocimiento. La presente propuesta plantea una alternativa de enseñanza aprendizaje de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios incorporando material concreto y software matemático en las prácticas de aula para construir e interpretar los conceptos abstractos como el de variable y las operaciones con ellas. De esta manera se romperá el paradigma negativo de las matemáticas.

De acuerdo a lo anterior, se hace necesario que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios se revolucione, aprovechando el potencial de las TIC y las herramientas didácticas que se han creado para tal fin. Por consiguiente, el presente estudio se justifica por la necesidad de fortalecer el aprendizaje en el área de matemática, ya que los requisitos en la vida laboral y en la participación ciudadana en el mundo contemporáneo, incluyen la flexibilidad para razonar sobre la información cuantitativa y utilizarla adecuadamente. La comprensión, formulación y comprobación como estructura del pensamiento es necesario desarrollarlas para enfrentarse a nuevos problemas y contextos.

En consecuencia, la presente propuesta de intervención resignifica las prácticas pedagógicas, dando herramientas didácticas a docentes y estudiantes para desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje en ambientes de aula ricos en estrategias metodológicas, permitiendo que los educandos rompan con la rutina de las clases magistrales, caracterizadas por la utilización del lápiz y el papel y despierten su interés por las matemáticas, entendiendo y aplicando los conceptos construidos por ellos mismos con la supervisión y el acompañamiento del docente.

## Metodología

La metodología planteada para el desarrollo de la propuesta de intervención pedagógica se organiza en tres momentos:

Momento de inicio: durante este momento se dan las orientaciones generales para que el estudiante pueda resolver las actividades planteadas.

Momento de desarrollo: durante este momento se presentan situaciones en las cuales el estudiante debe realizar construcciones o representaciones geométricas con las baldosas algebraicas o con el manipulador virtual, posteriormente, el estudiante debe observar sus construcciones y encontrar invariantes para descubrir un patrón

Momento de cierre: durante este momento los estudiantes con ayuda del maestro investigador proponen fórmulas generales para las identidades partiendo de la identificación de los invariantes.

## Fundamento pedagógico

De acuerdo al Proyecto Educativo Institucional PEI, (2016), la Institución Educativa la Garita, acordó el modelo pedagógico constructivista para fundamentar todo el proceso educativo, este concibe el aprendizaje como resultado de un proceso de construcción personal-colectiva de los nuevos conocimientos, actitudes y vida, a partir de los ya existentes y en cooperación con los compañeros y el docente, Por lo tanto, este modelo le da el fundamento pedagógico a la presente propuesta. En este sentido, las teorías que soportaran este proceso corresponde a:

La teoría del aprendizaje significativo: el aprendizaje tiene que ser lo más significativo posible; es decir, que la persona-colectivo que aprende tiene que atribuir un sentido, significado o importancia relevante a los contenidos nuevos, y esto ocurre únicamente cuando los contenidos y conceptos de vida, objetos de aprendizaje puedan relacionarse con los contenidos previos del educando.

La teoría del Aprendizaje por descubrimiento: no hay forma única de resolver los problemas. Antes de plantear a los estudiantes soluciones, los docentes deben explorar con ellos diferentes maneras de enfrentar el mismo problema; pues no es pertinente enseñar cosas acabadas, sino los métodos para descubrirlas.

La teoría de la Ecología de la educación: Con el cambio se hará necesario adaptar ciertos elementos, en estos es el ambiente de aprendizaje, la organización y tipo de contenidos, las secuencias de actividades, la toma de decisiones sobre el proceso a seguir, la interacción metodológica, los recursos y las técnicas de trabajo individual, entre otros más. Todo ello es conocido como ecología de la educación.

# La cobija de mi abuelo está hecha de retazos

| | |
|---|---|
| Área | Matemáticas grado Octavo |
| Contenidos | Expresiones algebraicas, ecuaciones de primer grado, polinomios y sus operaciones (suma, resta, multiplicación) y descomposición factorial. |
| Objetivos de | Construir expresiones algebraicas a partir de información obtenida de diversos textos y plantear métodos de solución de dichas expresiones.<br><br>Identificar expresiones algebraicas, plantear ecuaciones de primer grado y sus métodos de solución.<br><br>Representar expresiones algebraicas utilizando modelos geométricos (baldosas algebraicas). |
| DBA | Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.<br><br>Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.<br><br>Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos. |

Desempeños

El estudiante construye expresiones algebraicas partiendo del lenguaje común o natural.

Utiliza representaciones geométricas para formular y solucionar problemas de tipo algebraico.

Utiliza representaciones geométricas o algebraicas para sumar, restar, multiplicar y descomponer en factores expresiones algebraicas.

Solucionar ecuaciones de primer grado utilizando modelos geométricos o algebraicos.

Organiza previamente las ideas que desea exponer y se documenta para sustentarlas.

Presentación

Esta unidad didáctica fue elaborada tomando como modelo las secuencias didácticas para los grados 8° y 9° del Ministerio de Educación Nacional Plan Nacional de Lectura y Escritura. 2017.

Tiene como propósito que el estudiante utilice el material concreto (baldosas algebraicas) y manipuladores virtuales para representar las expresiones algebraicas con un modelo geométrico y de esta manera potenciar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial, al igual que resolver ecuaciones de primer grado con una variable.

Tiempo de

16 encuentros presenciales de 100 minutos

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Conociendo el material | | |
| **Desempeño** | Reconoce las baldosas algebraicas como figuras geométricas planas. | | |
| **Encuentro** | Construcciones iniciales | | |

**Inicio**

**Motivacion**

El docente iniciará presentando una cobija hecha de retazos, invitará a los estudiantes a realizar un conversatorio sobre la cobija, preguntará si han visto una similar y preguntará por el nombre de las figuras geométricas con las que está hecha la cobija. Posteriormente hará una presentación en diapositivas de la unidad didáctica y motivará a los estudiantes para que participen con responsabilidad de las actividades propuestas.

**Desarrollo**

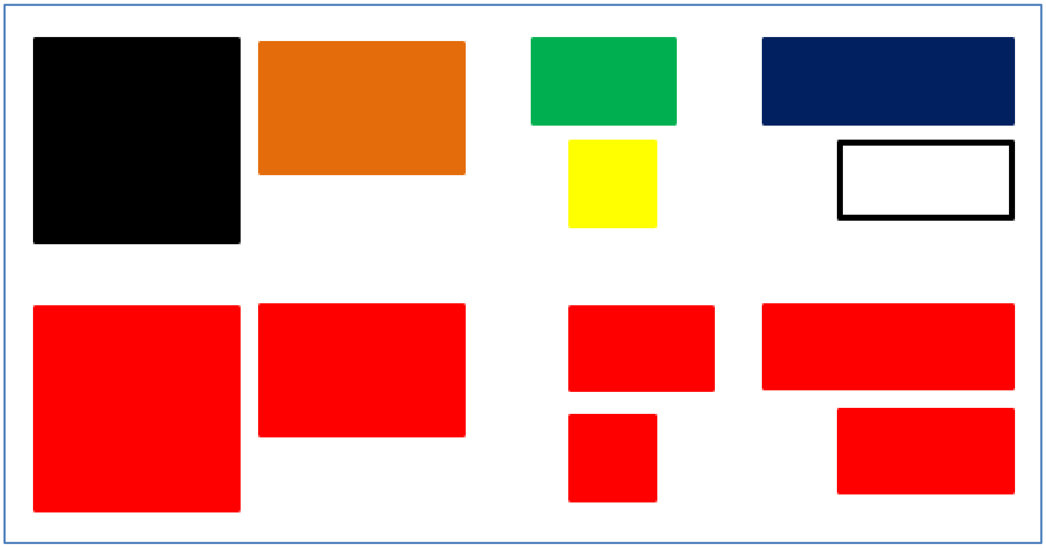
**Desarrollo de habilidades**

El docente pedirá a los estudiantes que se ubiquen en herradura y que se venden los ojos, luego pasará por cada uno de los puestos y repartirá el material concreto (baldosas algebraicas). Solicitará que realicen una representación mental del contenido de la bolsa, para eso pueden abrir la bolsa y realizar un reconocimiento táctil de las piezas entregadas. Realizará preguntas del contenido de la bolsa como: ¿cuál es la forma y el nombre de las baldosas que tienen entre sus manos?, ¿Qué argumentos tengo para confirmar mi pensamiento?

Pasados unos minutos solicitará que abran la bolsa y miren su contenido, posteriormente se propondrá que de manera libre y espontánea construyan diferentes figuras geométricas (regulares e irregulares) con el material acrílico entregado. Las construcciones deben ser consignadas (**ver en el anexo 1). Se** hará hincapié que no hay respuestas correctas ni incorrectas, todas serán estudiadas y analizadas

El docente pasará por los puestos de trabajo y conversará con los estudiantes sobre las construcciones que están realizando, aclarará dudas y orientará en caso de ser necesario

El docente orientador utilizara el siguiente material acrílico, el cual está conformado por seis piezas diferentes y cada una de ellas se presenta en dos colores, donde las piezas de color rojo se tomarán para representar cantidades negativas y los otros colores las cantidades positivas



## Cierre

### Socialización y evaluación

En este momento de la actividad, el docente hace una revisión de cada uno de los trabajos realizados por los estudiantes.

Los estudiantes entregan sus producciones al profesor, para evaluar el desempeño alcanzado durante la el encuentro

Teniendo en cuenta los resultados de la actividad, se procederá a realizar una retroalimentación en un conversatorio en el próximo encuentro.

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Construcción de rectángulos y cuadrados | | |
| **Desempeño** | Construye figuras geométricas regulares con las baldosas algebraicas. | | |
| **Encuentro 2** | Construcción de rectángulos y cuadrados | | |

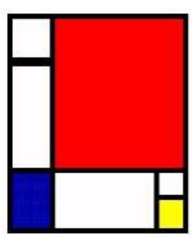
## Inicio

### Motivacion

El docente iniciará el encuentro entregando a cada estudiante el anexo 1 diligenciado en el encuentro anterior, solicitará que formen equipos de cuatro estudiantes, nombren un relator, intercambien sus trabajos y realicen un conversatorio sobre sus construcciones realizadas. A la vez pedirá que realicen un conversatorio de los hallazgos encontrados.

## Desarrollo

### Desarrollo de habilidades



El docente solicitará a los equipos de trabajo que plasmen en un pliego de papel bond una construcción geométrica creada con las baldosas algebraicas. El docente hará un recorrido por los grupos y aclarará las dudas o ideas erróneas que surgieran de la actividad, en caso de presentar inconsistencias indicará porque las construcciones las presentan y sugerirá que se realicen los ajustes pertinentes.

## Cierre

### Socialización y evaluación

El relator de cada grupo pasará al frente y expondrá la cartelera. El docente aclarará dudas y orientará la exposición.

La actividad finalizará recogiendo las carteleras para decorar un telón en el salón de clases.

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Nombre de las baldosas algebraicas | | |
| **Desempeño** | Aplico el concepto de área de los rectángulos y cuadrdos para nombrar las baldosas algebraicas. | | |
| **Encuentro 3** | Acercamiento al nombre de las baldosas algebraicas | | |

**Inicio**

**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro solicitando a los estudiantes que se formen en grupos de dos integrantes y diligencien el anexo 2. Para alcanzar el éxito en esta actividad, se solicitará que realicen una lista de las propiedades de las figuras geométricas que se pueden construir con las baldosas (cuadrados y rectángulos), como por ejemplo: número de lados, de ángulos, medidas de sus lados, entre otras.

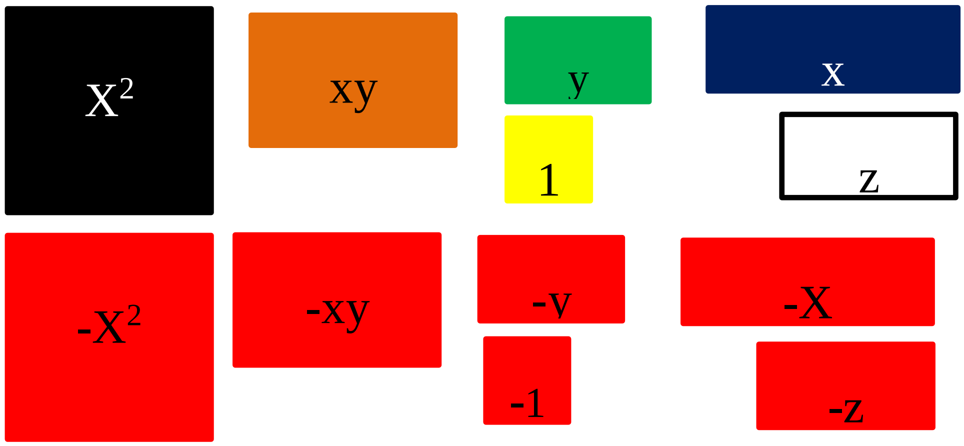
**Desarrollo**

**Desarrollo de habilidades**

El docente solicitará a los grupos que le den un nombre a cada baldosas algebraicas, con el fin de poderlas diferenciar en futuras construcciones.

El docente orientará a los grupos y aclarará las dudas al seleccionar nombres para las fichas. En caso de ser necesario el docente dará pistas, formulará preguntas como: cuándo no se conoce la dimensión de un objeto ¿qué símbolos matemáticos se acostumbran utilizar?, ¿cuál es la fórmula del área del rectángulo y del cuadrado?

Posteriormente el docente realizará una presentación utilizando el software Geogebra para nombrar las baldosas algebraicas, el software será utilizado para facilitar el cálculo de las áreas y la medición de la base y la altura de cada rectángulo. El docente enfatizará que el nombre que se le dará a cada figura es producto del concepto geométrico área de los cuadrados y rectángulos.




Nombre sugerido para cada baldosa algebraica

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El docente cerrará el encuentro, solicitando a los estudiantes que consulten en internet, el material concreto y virtual que existente para la enseñanza del algebra.

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Manipuladores virtuales | | |
| **Desempeño** | Elaboro cuadros comparativos de los manipuladores virutales | | |
| **Encuentro 4** | Manipuladores virtuales | | |

**Inicio**

**Motivacion**

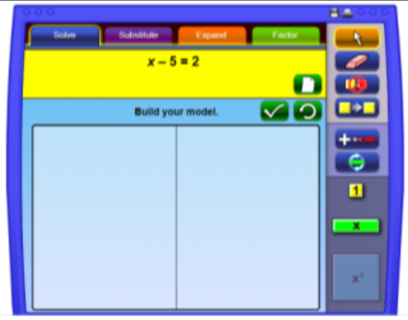
El docente iniciará el encuentro fomentando una reflexión sobre el nombre de las baldosas algebraicas, con el fin de despejar las dudas que pudieron haber surgido. Recalcará que el nombre que se le dará a cada una de las ellas, es producto de su área, partiendo que el cuadrado amarillo tiene como lado 1 unidad y que el resto de baldosas guardan un lado en común con al menos otra baldosa.

**Desarrollo**

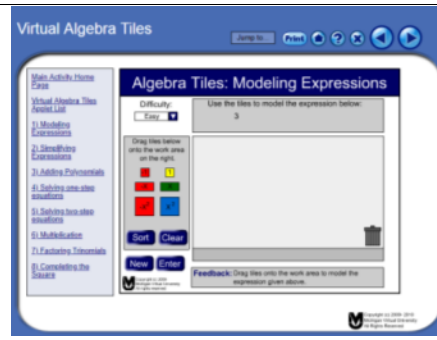
**Desarrollo de habilidades**

El docente continuará realizando una tormenta de ideas, en el tablero consignará el nombre de los materiales que encontraron los estudiantes y los buscará en internet para presentarlos al grupo.
El docente solicitará a los estudiantes que formen equipos de dos integrantes y se familiaricen con los manipuladores virtuales, para esto los estudiantes deberán ingresar a los links que se presentan a continuación:
Se aclara que el uso de estos aplicativos es con carácter educativo no son utilizados con ánimo de lucro.

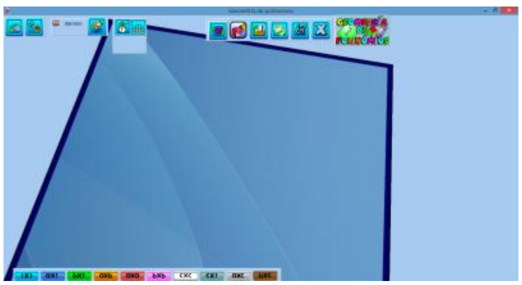
.



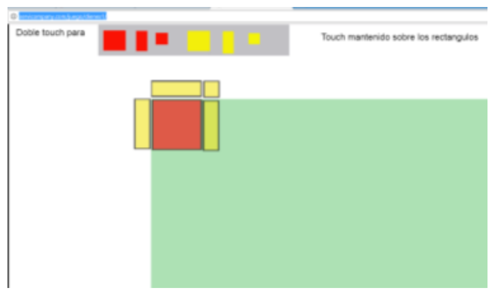

http://bit.ly/2jkiwSk




https://bit.ly/1dNKGxz



Geometría de polinomios




http://servicompany.com/juego/dienes1/

Interface de los manipuladores virtuales

Los estudiantes en equipo deberán diligenciará el anexo 3. En la tabla se deberá consignar la información relevante del software como: ¿cuál es el nombre que se le dan a las figuras?, ¿su tamaño es fijo o puede ser modificado?, ¿qué actividades se pueden desarrollar en el software?, ¿se requiere conexión a internet?, el docente aclara dudas sobre el nombre de las figuras que se les da en cada manipulativo.

## Cierre

### Socialización y evaluación

El encuentro se cerrará realizando una demostración de la utilización de los manipuladores virtuales por parte de los estudiantes y el docente.

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Expresiones algebraicas | | |
| **Desempeño** | Identifico palabras del lenguaje común con su equivalente en lenguaje matemático. | | |
| **Encuentro 5** | Lenguaje común y lenguaje algebraico | | |

**Inicio**

**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro solicitando a los estudiantes visitar los links recomendados que se presentan en la parte inferior y una lectura general de los títulos y subtítulos que se encuentran en las páginas y en el video.

Links recomendados

https://bit.ly/2JrepQW
https://bit.ly/2JsOHvn
https://bit.ly/2Hud9Qk

**Desarrollo**

Posteriormente el docente a los estudiantes formar equipos de cuatro estudiantes, nombrar un relator y realizar una cartelera en un pliego de papel bond con relación a los tips para pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico. El docente pasará por los equipos de trabajo y orientará la construcción de la cartelera.

El docente pedirá a los relatores que expongan la cartelera a los diferentes grupos. Al terminar cada las exposición el docente realizará una puesta en común para aclarar dudas

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El docente cerrará el encuentro realizando una lista de los tips a tener en cuenta para pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico, luego se pedirá a un grupo voluntario que realicen una cartelera con la información del tablero la cual será pegada en un lugar visible del salón de clase, para ser consultada cuando se requiera.

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Expresiones algebraicas | | |
| **Desempeño** | Construyo expresiones algebraicas del lenguaje común y las represento con modelos geométricos. | | |
| **Encuentro 6** | Lenguaje común, algebraico y su representación geométrica | | |

**Inicio**

**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro realizando un conversatorio sobre la comunicar de ideas matemáticas a través de un lenguaje propio y la necesidad de expresar el lenguaje común en el lenguaje algebraico y en el aporte de la representación geométrica para realizar la transición.

El docente explicará la actividad a realizar en el anexo 5.

**Desarrollo**

Posteriormente el docente solicitará a los estudiantes que de manera individual y utilizando las baldosas algebraicas, resuelvan las actividades propuestas en el anexo 4. El docente pasará por los puestos orientando el diligenciamiento de la tabla, los estudiantes se apoyarán consultando la cartelera que contiene los tips para pasar del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Por ejemplo:

| Lenguaje común | Lenguaje algebraico | Representación geométrica |
|---|---|---|
| **Un número disminuido en dos.** | $x - 2$ |  |

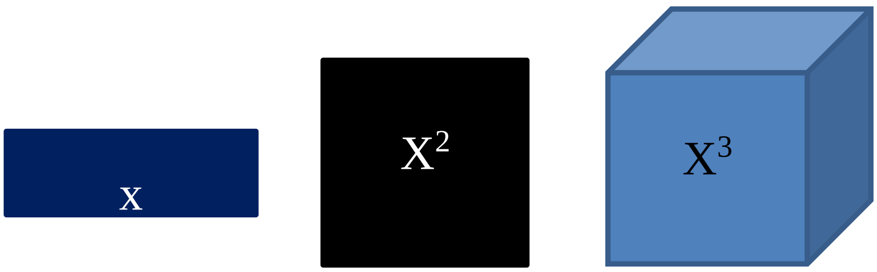
El docente invitará a algunos estudiantes para que utilicen el manipulador virtual y realicen una demostración en público, proyectando el desarrollo del anexo 5. El resto del grupo seguirá las instrucciones de sus compañeros en los computadores dispuestos para ese fin.

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El docente cerrará el encuentro realizando un conversatorio sobre el alcance y limitaciones del material (baldosas algebraicas y manipuladores virtuales) para representar geométricamente las expresiones algebraicas.

El docente dejará en claro que una expresión como: $x^4$ 0 $x^5$ no se puede representar geométricamente con las baldosas algebraicas dado a que se está utilizando un modelo de áreas, es decir, con las baldosas algebraicas es posible representar las siguientes expresiones:



| | |
|---|---|
| **Institución Educativa la Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | |
| **Docente:** | |
| **Grado:** | Octavo — Fecha: |
| **Tema** | Expresiones algebraicas |
| **Desempeño** | Resuelvo ecuaciones de primer grado con una incognita utilizando modelos geométricos o algebraicos |
| **Encuentro 7** | Ecuaciones de primer grado con una incógnita |

**Inicio**

**Motivacion**

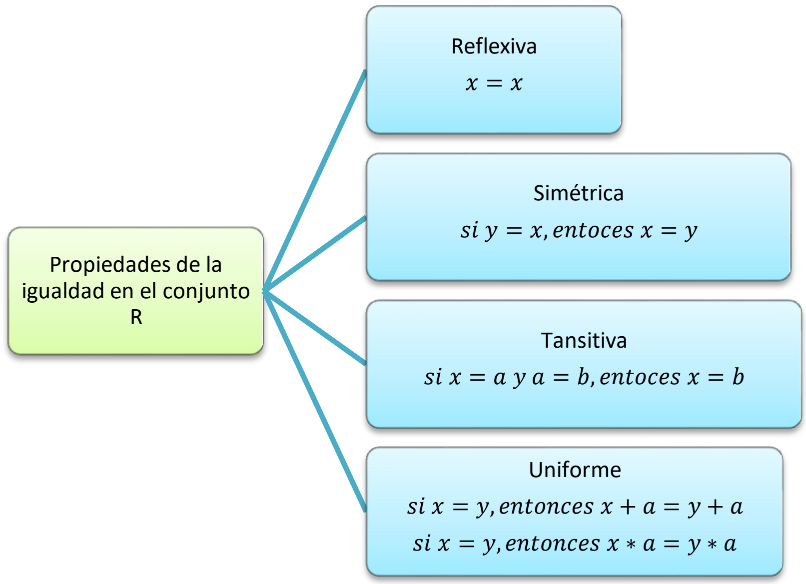
El docente iniciará el encuentro presentando el video resolución de situaciones problemas que involucren plantear y resolver ecuaciones, colgado en la página del portal colombiaaprende y disponible para ser descargado y utilizado por los establecimientos educativos del país.


Link: https://bit.ly/2HtKWta

**Desarrollo**

A continuación, el docente hará un repaso sobre las propiedades de la igualdad, haciendo hincapié sobre la utilidad de la propiedad uniforme para resolver ecuaciones.

**Propiedades de la igualdad**




Posteriormente el docente demostrará como se resuelven ecuaciones lineales con una sola incógnita utilizando las baldosas algebraicas y el manipulador virtual.

El procedimiento que se propone fue elaborado a partir de una adaptación de la propuesta sugerida en el aplicativo Algebra Tiles Virtual. Este procedimiento clasifica las ecuaciones en aquellas que se pueden realizar en un paso y aquellas que se pueden realizar en dos pasos. A continuación se describe el procedimiento.

Ecuaciones de un paso o de la forma $x + a = b, donde\ a\ y\ b\ \in \mathbb{Z}$
Este tipo de ecuaciones se resuelven con una operación matemática.

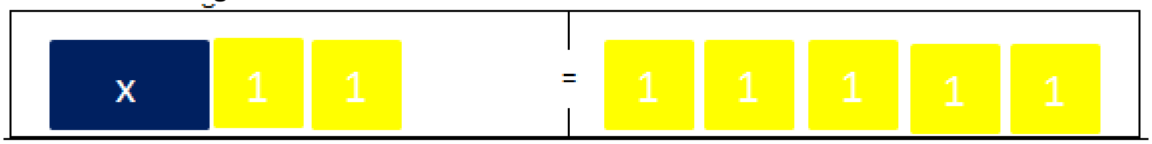
Procedimiento sugerido:

1) Expresar la ecuación utilizado un lenguaje algebraico.
2) Representar la situación mediante un modelo geométrico.
3) Adicionar o sustraer o multiplicar o dividir el mismo número a ambos miembros de la igualdad.
4) Simplificar a ambos lados utilizando la propiedad del inverso aditivo o el inverso multiplicativo.

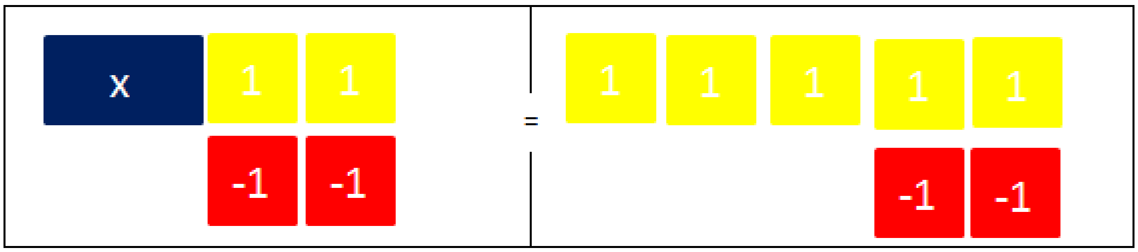
Ejemplo: Resuelva la ecuación utilizando un modelo geométrico
Un número aumentado en dos es igual a cinco

Paso 1: lenguaje algebraico $x + 2 = 5$

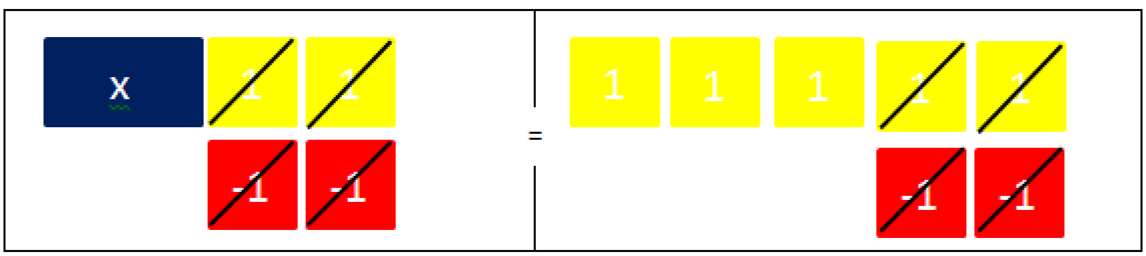
Paso 2: Modelo geométrico



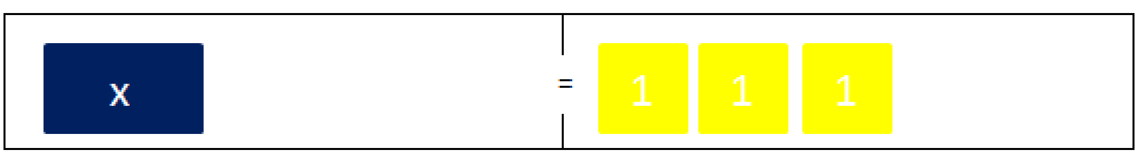

Paso 3: adicionar $-2$ a ambos lados de la igualdad




Paso 4: Simplificar, aplicar el inverso aditivo




Respuesta: $x = 3$




Ecuaciones de dos pasos o de la forma $ax + b = c, donde\ a, b, c\ \in \mathbb{Z}$

Este tipo de ecuaciones se resuelven utilizando dos operaciones matemáticas.

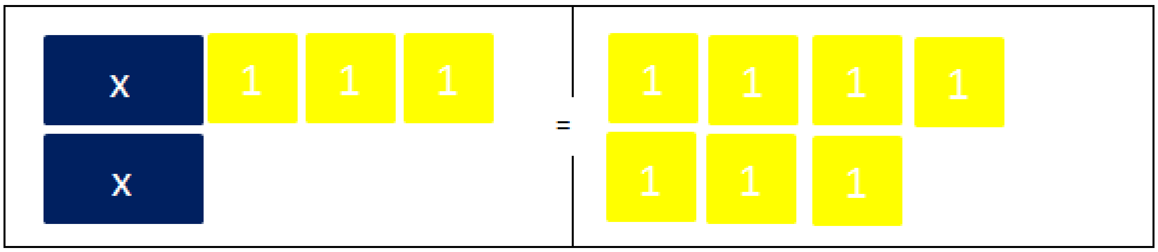
El procedimiento sugerido es el siguiente:

1) Expresar la ecuación utilizado un lenguaje algebraico.
2) Representar la situación mediante un modelo geométrico.
3) Adicionar o sustraer el mismo número a ambos miembros de la igualdad y simplificar.
4) Multiplicar o dividir el mismo número a ambos lados de la igualdad y simplificar.

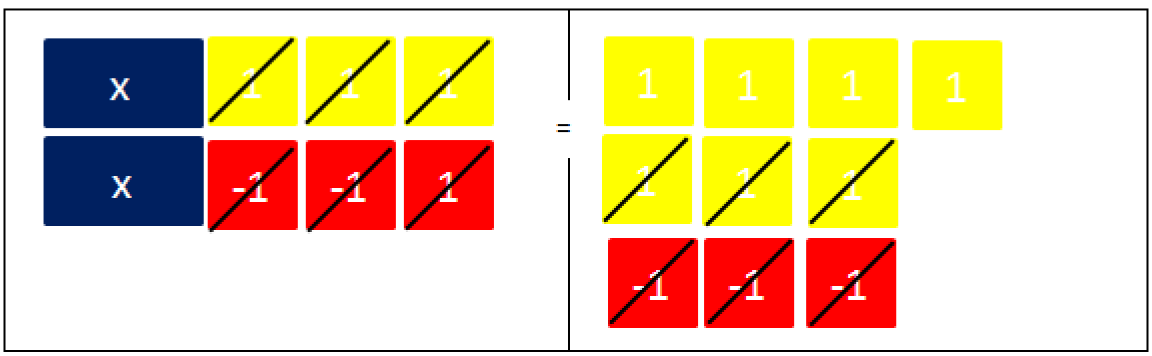
Ejemplo: Resuelva la ecuación utilizando un modelo geométrico
El doble de un número aumentado en 3 es igual a 7.

Paso 1: lenguaje algebraico $2x + 3 = 7$

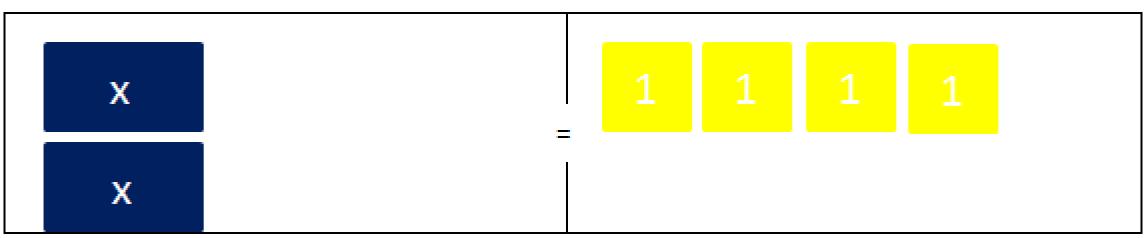
Paso 2: modelo geométrico



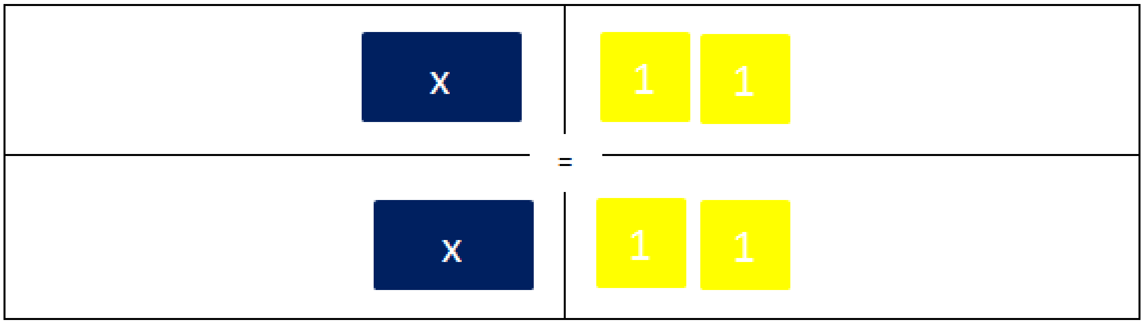

Paso 3: Sustraer $-3$ a ambos lados de la igualdad




Simplificar aplicando la propiedad del inverso aditivo




Paso 4: Dividir por el mismo número a ambos lados de la igualdad. En este caso consiste en formar tantos grupos como variables existan, con igual cantidad de elementos.




Respuesta: como se pueden formar dos grupos de dos elementos, la solución al sistema es $x = 2$ no porque hayan dos grupos, sino porque a cada grupo le corresponden dos elementos.

Una vez terminada la explicación el docente entregará a cada estudiante el anexo 6, Taller sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita.

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El docente terminará el encuentro dejando como compromiso las actividades disponibles en los siguientes links:
https://bit.ly/1KOY3gp
https://bit.ly/245a4vf

| | |
|---|---|
| **Institución Educativa la Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | |
| **Docente:** | |
| **Grado:** | Octavo \| Fecha: |
| **Tema** | Expresiones algebraicas |
| **Desempeño** | Clasifico expresiones algebraicas de acuerdo a sus términos |
| **Encuentro 8** | Clasificación de las expresiones algebraicas |

**Inicio**

**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro proyectando el video Construcción de expresiones algebraicas equivalentes al hallar áreas o volúmenes. Video disponible para su descarga desde el portal colombiaaprende


Link: https://bit.ly/2r0fMhP

**Desarrollo**

A continuación el docente realizará una exposición de expresiones algebraicas utilizando el recurso en línea CIIEA.


Link: https://bit.ly/2qZKFTv

Posteriormente el docente pedirá a los estudiantes que de forma grupal diligencien el anexo 7. Clasificación de expresiones algebraicas, los estudiantes utilizarán el material “Baldosas algebraicas” o el software Algebra Tiles, con el fin de facilitar la representación geométrica. El docente pasará por los puestos de trabajo aclarando dudas y despejando interrogantes, Formulará preguntas orientadoras como: ¿qué interpretación le da usted a un término de primer grado, de segundo, de tercero y de cuarto o quinto? ¿Qué significado le da usted a la letra $x$?

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El docente finalizará la sesión realizando una puesta en común donde se permitirá a los estudiantes, confrontar y profundizar la idea del grado de los términos y la representación de expresiones algebraicas utilizando modelos geométricos. Se hará claridad en que no todas las expresiones algebraicas pueden representarse utilizando modelos geométricos.

| **Institución Educativa la Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Operaciones con expresiones algebraicas | | |
| **Desempeño** | Utilizo un modelo geométrico o algebraico para sumar o restar expresiones algebraicas.<br>Utilizo un modelo geométrico o algebraico para reducir términos semejantes en una expresión algebraica | | |
| **Encuentro 9** | Adición y sustracción de expresiones algebraicas, reducción de términos semejantes. | | |

**Inicio**

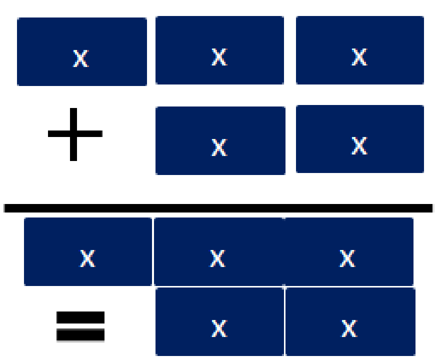
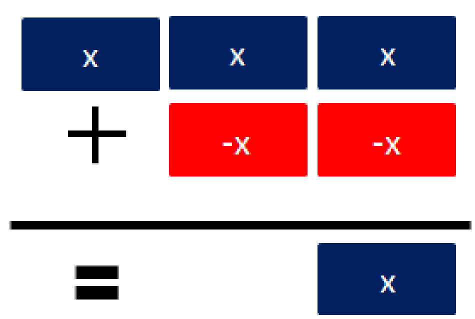
**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro proyectando el anexo 8 Los lotes de un granjero. Los estudiantes resolverán de manera autónoma las actividades que se les plantean, el docente pasará por los puestos de trabajo orientando el proceso.

**Desarrollo**

A continuación el docente socializará el desarrollo de las situaciones que se presentaron en el anexo 8 y realizará una presentación de la clasificación de los polinomios de acuerdo a sus términos al igual que las operaciones de adición y sustracción de polinomios algebraicas utilizando el recurso en línea CIIEA.

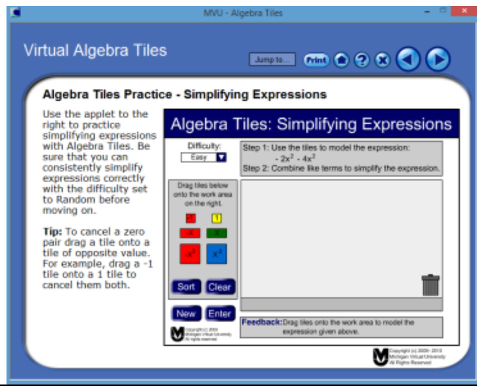
Las operaciones de adición y sustracción el docente las explicará utilizando las baldosas algebraicas de la siguiente manera:

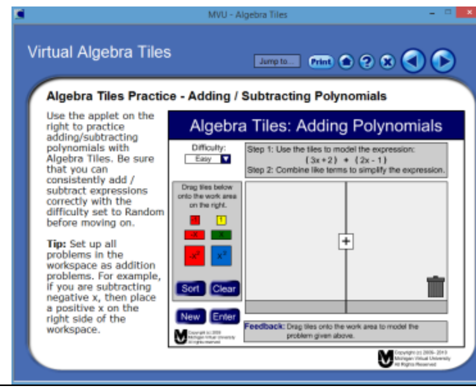
| Adición de monomios utilizando baldosas algebraicas | Sustracción de monomios utilizando baldosas algebraicas |
|---|---|
| Ejemplo: A 3x aumentarle 2x<br>$3x + 2x$ | Ejemplo a 3x disminuirle 2x<br>$3x - 2x = 3x + (-2x)$ |
|  |  |

## Cierre

### Socialización y evaluación

El encuentro se terminará realizando las actividades de reducción de términos semejantes y adición de la aplicación Virtual algebra tiles.



| | | | |
|---|---|---|---|
| **Institución Educativa la Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | |
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Operaciones de expresiones algebraicas | | |
| **Desempeño** | Utilizo un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de un monomio por un binomio.<br>Utilizo un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de dos binomios. | | |
| **Encuentro 10** | Multiplicación de monomios, de un monomio por un binomio y de dos binomios. | | |

**Inicio**

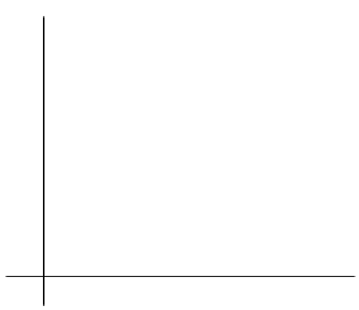
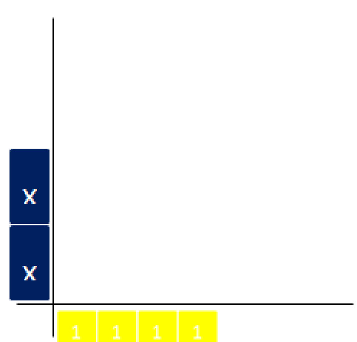
**Motivacion**

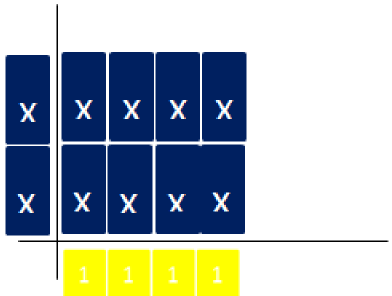
El docente iniciará el encuentro diciendo a los estudiantes que con ayuda de las baldosas algebraicas, se va a explicar una manera de representar la multiplicación de polinomios utilizando un modelo geométrico. Las multiplicaciones que se mostrarán son: multiplicación de dos monomios, de un monomio por un binomio y de dos binomios, se utilizará el procedimiento utilizando en la aplicación MVU *Virtual Algebra Tiles.*

**Desarrollo**

Los estudiantes seguirán los pasos que se presentan en el anexo 9. Multiplicación de dos monomios, multiplicación de un monomio por un binomio y multiplicación de dos binomios. El procedimiento consiste en construir un rectángulo que tenga como dimensiones los términos a multiplicar. Este procedimiento es útil para polinomios de grado 1. El docente orientará a los estudiantes durante la construcción de los rectángulos. El procedimiento sugerido para representar la multiplicaciones con baldosas algebraicas es el siguiente:

**Multiplicación de monomios**

| | |
|---|---|
| Paso 1: dibujar unas líneas guías para representar la multiplicación.<br> | Paso 2: colocar debajo de la línea horizontal, las baldosas necesarias que representen uno de los dos monomios, y a la izquierda de la línea vertical, las baldosas que representan el otro monomio.<br> |

| Paso 3: construir un rectángulo con las baldosas algebraicas necesarias hasta cubrir el área total. | Paso 4: contar las baldosas que se emplearon en la construcción. |
| --- | --- |
|  | En este caso se utilizaron ocho $x$<br><br>Por lo tanto el producto entre $2x\ y\ 4\ es\ igual\ a\ 8x$<br><br>En lenguaje algebraico sería<br>$4(2x) = 8x$ |

El docente orientará a los estudiantes mientras realizan las construcciones de los ejercicios propuestos en el anexo 9.

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

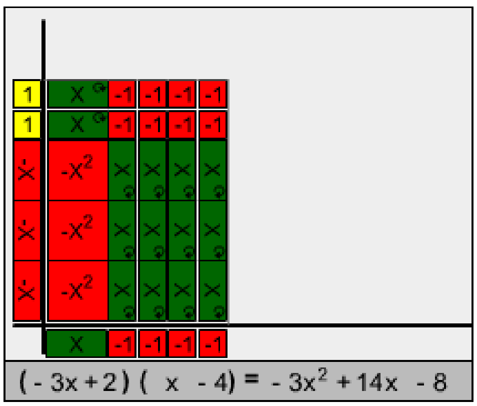
La actividad finalizará socializando las construcciones de los estudiantes en el tablero.

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Operaciones de expresiones algebraicas | | |
| **Desempeño** | Utilizo un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de dos binomios $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ | | |
| **Encuentro 11** | Multiplicación de la suma por la diferencia de dos binomios | | |

**Inicio**

**Motivacion**

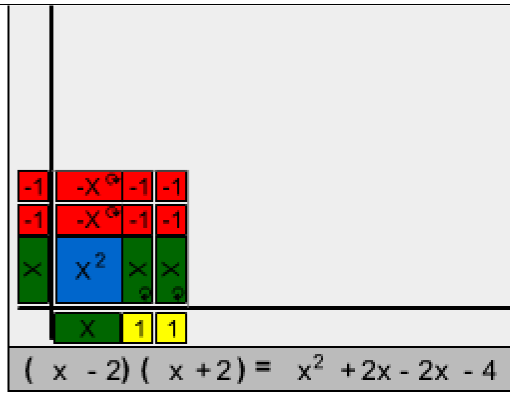



El docente iniciará solicitando a los estudiantes construir de manera individual utilizando las baldosas algebraicas, cuatro rectángulos con las siguientes dimensiones:
Rectángulo 1: $ancho=(x+1)$ y de $largo=(x-1)$.
Rectángulo: 2 $ancho=(2x+3)$ y $largo=(2x-3)$.
Rectángulo 3: $ancho=(2x+4)$ y de $largo=(2x-4)$
Rectángulo 4 $ancho=(3x+5)$ y de $largo=(3x-5)$.

**Desarrollo**

Posteriormente, los estudiantes deberán diligenciar el anexo 10, expresando en lenguaje algebraico, el área de rectángulo como la suma de las áreas de que lo componen, reducirán los términos semejantes cuando sea posible, teniendo en cuenta la propiedad inverso aditivo de los números reales.

Se pedirá a los estudiantes que escriban las expresiones obtenidas en el anexo 10, encuentren patrones e invariantes, y que participen en la formulación de una regla general que se pueda aplicar a este caso.




El docente pedirá a los estudiantes que se organicen para una plenaria y junto con los ellos escribirán una lista de los invariantes en el tablero, hasta llegar a la construcción de la fórmula del producto notable de la multiplicación de la suma por la diferencia de binomios.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El docente finalizará el encuentro proponiendo la realización de algunos ejercicios en el cuaderno utilizando el producto notable.

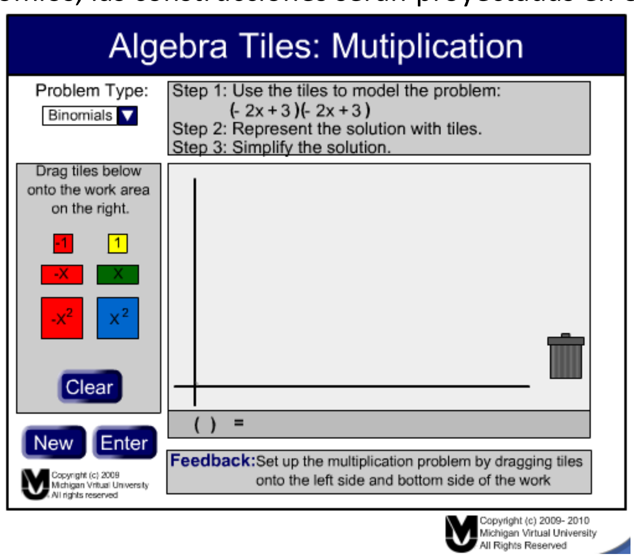
$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

| **Institución Educativa la Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Expresiones algebraicas | | |
| **Desempeño** | Utiliza modelos geométricos o algebraico para representar la identidad: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$<br>Utiliza modelos geométricos o algebraico para representar la identidad: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | | |
| **Encuentro 12** | El cuadrado de la suma y la diferencia de un binomio. | | |

**Inicio**

**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro realizando un ejercicio de retroalimentación del encuentro anterior. Solicitará a los estudiantes que realicen algunos de los ejercicios propuestos en el aplicativo Algebra Tiles referentes a la multiplicación de la suma por la diferencia de dos binomios, las construcciones serán proyectadas en el video Beam.



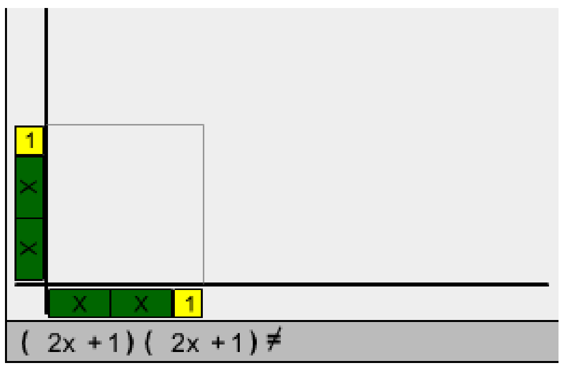

**Desarrollo**

El docente continuará explicando la primera parte del anexo 11 Productos notables, solicitará a los estudiantes que realicen las construcciones que se piden. El docente orientará para que realicen la actividad de manera autónoma e independiente.

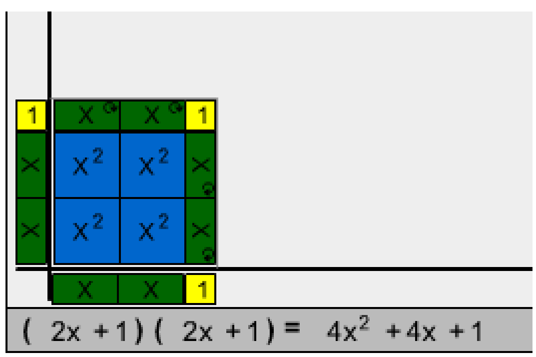
**Productos notables primera parte:** El cuadrado de la suma de un binomio

**El procedimiento sugerido es el siguiente:** Ejemplo: Encontrar el producto de $(2x + 1)(2x + 1)$

Paso 1: representar la multiplicación como la el producto de la base por la altura, utilizando baldosas algebraicas.




Paso 2: Formar un rectángulo con baldosas algebraicas hasta cubrir el área demarcada.




Paso 3: Expresar el área del rectángulo como la suma de las áreas que componen el rectángulo, simplificando los términos semejantes.

$$(2x + 1)(2x + 1) = x^2 + 4x + 1$$

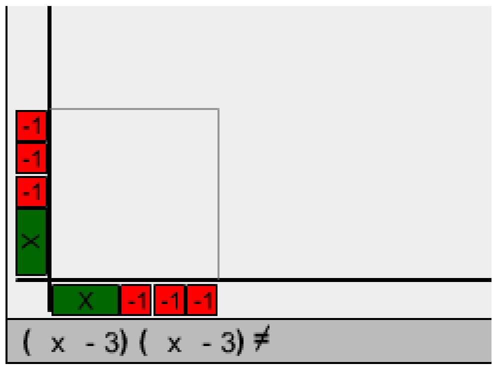
Una vez los estudiantes terminen las construcciones, el docente fomentará una reflexión escribiendo los patrones e invariantes que se encontraron y concluirá el ejercicio generalizando el producto notable el cuadrado de la suma de un binomio.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

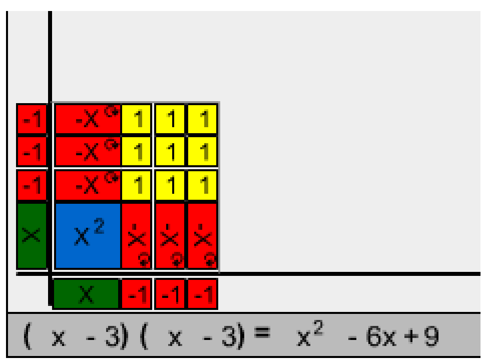
**Productos notables segunda parte:** El cuadrado de la diferencia de un binomio

El docente entregará la segunda parte del anexo 11 y solicitará que de manera similar a la anterior se realicen las construcciones que en él se piden.
**El procedimiento sugerido es el siguiente:** Ejemplo: Encontrar el producto de $(x - 3)(x - 3)$

Paso 1: representar la multiplicación como la el producto de la base por la altura, utilizando baldosas algebraicas.




Paso 2: Formar un rectángulo con baldosas algebraicas hasta cubrir el área demarcada.




Paso 3: Expresar el área del rectángulo como la suma de las áreas que componen el rectángulo, simplificando los términos semejantes.

$$(x - 3)(x - 3) = x^2 - 6x + 9$$

El docente invitará a un estudiante para que muestre las construcciones a sus compañeros y fomentará una reflexión escribiendo los patrones e invariantes que se observan. Por último se pedirá que de manera individual se generalice el producto notable, cuadrado de la diferencia de un binomio.

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El encuentro se finalizará dejando unos ejercicios para la casa.

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

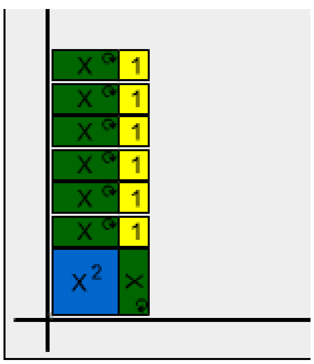
| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Factorización de trinomios | | |
| **Desempeño** | Factorizo trinomios cuadráticos utilizando modelos geométricos o algebraicos | | |
| **Encuentro 13** | Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ | | |

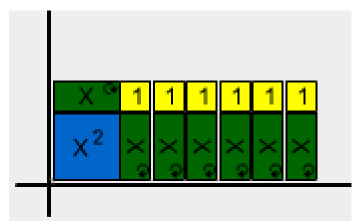
## Inicio

**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro solicitando a los estudiantes construir un rectángulo con las siguientes baldosas, $una\ x^2$, $siete\ x\ y\ seis\ unidades$, la construcción deberán plasmarla en el anexo 12.

Se espera que los estudiantes realicen una construcción como las siguientes:

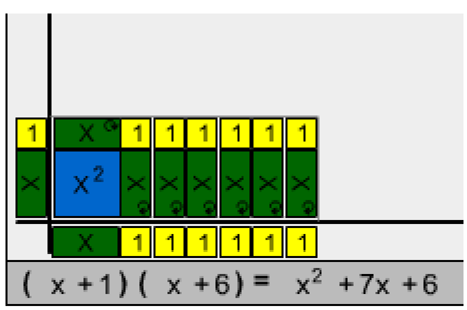




El docente socializará las dos construcciones, expresará que las dos construcciones son válidas y equivalentes porque cumplen la propiedad conmutativa de la multiplicación.

## Desarrollo

Después de la reflexión anterior, el docente pedirá a los estudiantes que encuentren la base y la altura del rectángulo y que expresen el área del rectángulo como el producto de la base por la altura.



$$x^2 + 7x + 6 = (x + 6)(x + 1)$$

Afirmará que este producto corresponde a la factorización del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
El proceso se repetirá para los siguientes trinomios:

$$x^2 + 4x + 3$$
$$x^2 + 6x + 8$$

Luego el docente invitará a realizar una lista de operaciones entre las constantes de cada binomio. Por ejemplo:

$$6 \div 1 = 6$$
$$6 * 1 = 6$$
$$6 - 1 = 5$$

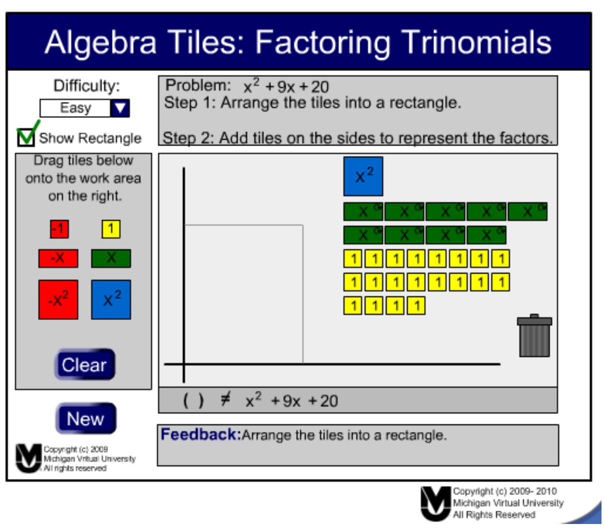
Este listado se hará con los tres polinomios de las construcciones. El docente orientará la búsqueda de los patrones e invariantes con el fin de llegar a la formula convencional de la factorización de un trinomio de la forma:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$
$$donde, m + n = b \;\; y \;\; m * n = c$$

## Cierre

### Socialización y evaluación

El encuentro se cerrará realizando los ejercicios propuestos en el aplicativo MVU Algebra tiles.



**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Factorización de trinomios | | |
| **Desempeño** | Factorizo trinomios cuadráticos utilizando modelos geométricos o algebraicos | | |
| **Encuentro 14** | Factorización de trinomios de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ | | |

**Inicio**

**Motivacion**

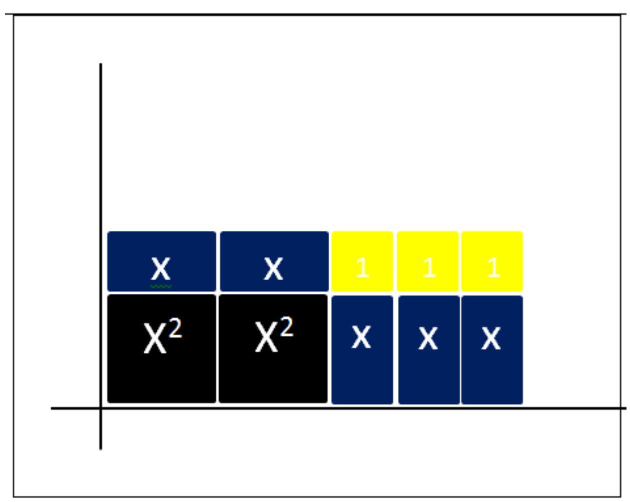
El docente iniciará el encuentro realizando un concurso de factorización de trinomios de la forma $\boldsymbol{x^2+bx+c}$ **.**
Los estudiantes resolverán los ejercicios propuestos por el docente de forma mental, aplicando el patrón encontrado en el encuentro anterior.

**Desarrollo**

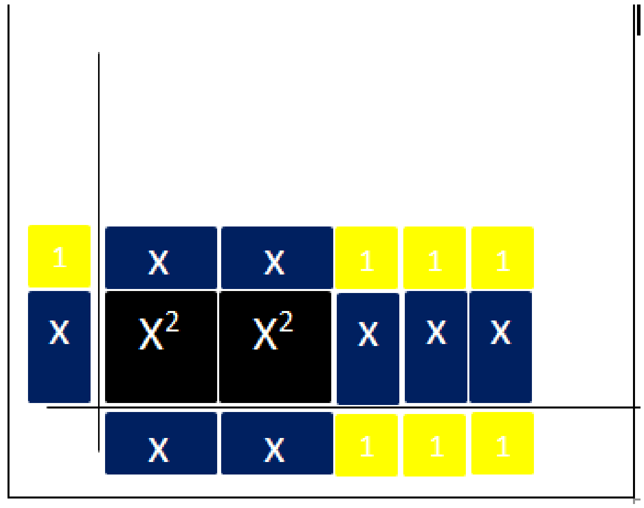
**Desarrollo de habilidades**

Posteriormente el docente propondrá construir rectángulos pero esta vez con trinomios de la forma $ax^2+bx+c$ y encontrar la base y la altura de cada rectángulo.

Ejemplo: factorizar el trinomio $2x^2+5x+3$
Procedimiento sugerido utilizando las baldosas algebraicas
Paso 1: Formar un rectángulo con las baldosas $2x^2+5x+3$



Paso 2: Encontrar la base y la altura del rectángulo y expresar el trinomio como el producto de la base por la altura.




$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

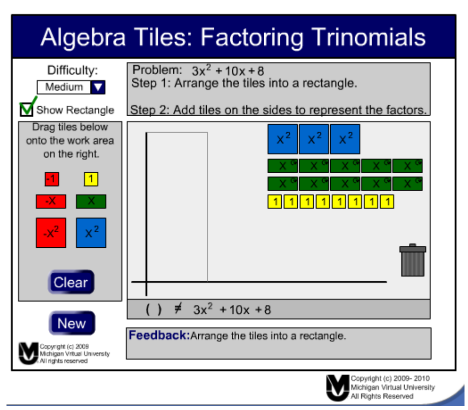
El docente solicitará que realicen las construcciones que se piden y que diligencien en el anexo 14

Posteriormente, el docente orientará una discusión para determinar los patrones y encontrar una fórmula para factorizar este tipo de trinomios.

## Cierre

### Socialización y evaluación

El encuentro finalizará el encuentro proponiendo la realización de los ejercicios que se encuentran en el aplicativo MVU Algebra Tiles referente a la factorización de trinomios de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$



**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Factorización de trinomios | | |
| **Desempeño** | Factorizo trinomios cuadráticos utilizando modelos geométricos o algebraicos | | |
| **Encuentro 15** | Factorización de un trinomio cuadrado perfecto | | |

**Inicio**

**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro proponiendo a los estudiantes que construyan un rectángulo con las siguientes baldosas: una $x^2, dos \ \ x\, y \, una \ unidad.$ Luego se les dirá que encuentren las dimensiones de sus lados y expresen el área del rectángulo como el producto de la base por la altura. La construcción debe quedar plasma en el anexo 14.

**Desarrollo**

Posteriormente el docente pedirá que realicen una nueva construcción con las siguientes baldosas $cuatro \ x^2$ , $ocho \ x \ y \ cuatro \ unidades$. También deben expresar el área como la multiplicación de la base por la altura. Los estudiantes deberán plasmar sus construcciones en el anexo 14

Por último se pedirá que realicen la última construcción con las siguientes fichas:
$nueve \ x^2 \ doce \ \ x \ y \ cuatro \ unidades$ para realizar está construcción se pueden unir en grupos.
El docente pasará por los puestos de trabajo y orientará la construcción.

El docente invitará a un estudiante para que realice la construcción en el aplicativo MVU Algebra Tiles y la proyecte a sus compañeros. Una vez se tengan las construcciones proyectadas, el docente escribirá en lenguaje algebraico las expresiones de las áreas en el tablero e invitará a hacer una búsqueda de los patrones e invariantes que hay en las tres expresiones. El objetivo es llegar a la generalización de la siguiente manera:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y) = (x + y)^2$$

Luego el docente con ayuda de los estudiantes escribirán la fórmula convencional de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

El docente entregará la segunda parte del anexo 12 y pedirá que de manera individual construyan un rectángulo con las siguientes baldosas:

$una\ x^2, dos\ \ x\ negativas\ y\ una\ unidad,$ Los estudiantes deberán expresar el área como el producto de la base por la altura.
Posteriormente el docente pedirá que construyan un rectángulo con las siguientes baldosas $cuatro\ x^2$ , $ocho\ x\ negativas\ y\ cuatro\ unidades$ Los estudiantes deberán expresar el área como el producto de la base por la altura.

Por último el docente pedirá que realicen un rectángulo con las siguientes baldosas $una\ 9x^2, seis\ \ x\ negativas\ y\ una\ unidad.$ Los estudiantes deberán expresar el área como el producto de la base por la altura.

El docente invitará a hacer una búsqueda de los patrones e invariantes que hay en las tres expresiones. El objetivo es llegar a la generalización de la siguiente manera:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)(x-y) = (x-y)^{\,2}$$

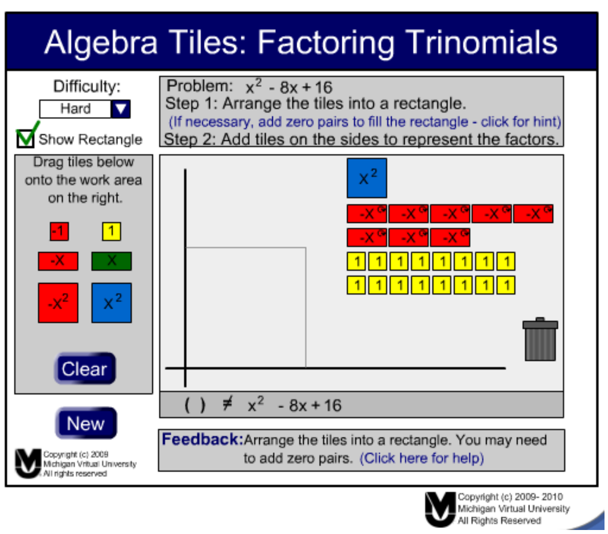
Luego el docente con ayuda de los estudiantes escribirá la formula convencional.

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2$$

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El docente finalizará el encuentro proponiendo la realización de los ejercicios del aplicativo MVU Algebra Tiles referentes a la factorización de trinomios cuadrados perfectos.



**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Docente:** | | | |
| **Grado:** | Octavo | Fecha: | |
| **Tema** | Expresiones algebraicas | | |
| **Desempeño** | Utilizo modelos geométricos o algebraico para representar identidad: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ | | |
| **Encuentro 16** | Factorización de una diferencia de cuadrados | | |

## Inicio

**Motivacion**

El docente iniciará el encuentro realizando una retroalimentación de la propiedad uniforme de la igualdad.

Propiedad Uniforme

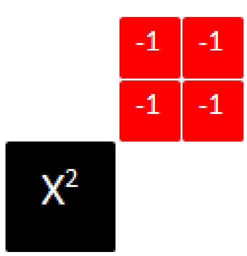
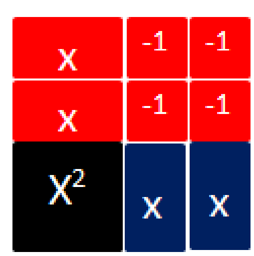
- $si\ x = y,\ entonces\ x + a = y + a$
- $si\ x = y,\ entonces\ x * a = y * a$

Socializará la propiedad a través de la realización de ejercicios en el tablero.

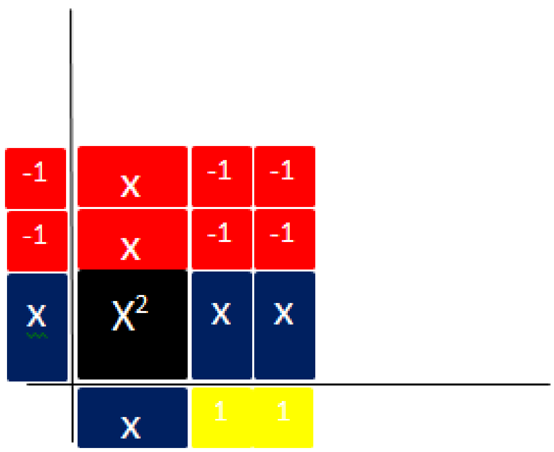
## Desarrollo

Posteriormente, el docente solicitará a los estudiantes que realicen una construcción de un rectángulo con las siguientes baldosas: $una\ x^2, y\ 4\ unidades\ negativas$. Después de permitir que los estudiantes lo intenten, el docente preguntará ¿por qué la construcción no es posible?, ¿qué baldosas hacen falta para poder construir el rectángulo?. El docente orientará la discusión recordando que las baldosas están diseñadas de tal manera que la dimensión del cuadrado $x^2$ no es múltiplo de la dimensión de la unidad, a la vez retomará la propiedad uniforme de las ecuaciones diciendo que si les hacen falta baldosas las pueden incluir siempre y cuando se respete la propiedad uniforme.

La construcción que se espera es la siguiente:

| Construcción esperada | Construcción agregando baldosas dos $x$ y dos $-x$, respetando la propiedad uniforme. |
|---|---|
|  |  |

Luego se le pedirá que encuentren la base y la altura de la figura y expresen el área como el producto de la base por la altura.

| Procedimniento para encontrar la base y la altura | Área del rectángulo expresada como el producto de la base por la altura. |
| --- | --- |
|  | $x^2 + 2x - 2x - 4 = (x + 2)(x - 2)$<br>Propiedad inverso aditivo<br>$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$<br>Factorización de la diferencia de cuadrados<br>$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ |

Los estudiantes deberán consignar en el anexo 15 las construcciones para los binomios siguientes:

$$\boldsymbol{x^2 - 9}$$
$$\boldsymbol{4x^2 - 9}$$
$$4\boldsymbol{x^2 - 16}$$
$$\boldsymbol{9x^2 - 25}$$

Una vez los estudiantes terminen sus construcciones, el docente pedirá a uno de ellos que escriba las factorizaciones de los 4 ejercicios en el tablero y promoverá una discusión para buscar los patrones e invariantes hasta llegar a la fórmula convencional de la factorización de una diferencia de cuadrados.

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

**Cierre**

**Socialización y evaluación**

El docente finalizará el encuentro proponiendo la realización de ejercicios en el aplicativo MVU Algebra Tiles referentes a la factorización de una diferencia de cuadrados.

# Material del estudiante


| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Institución Educativa la Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
| **Anexo 1: Construcciones iniciales** | | | | | |
| **Nombre del estudiante** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, utilice el material entregado para realizar diferentes construcciones geométricas, regulares e irregulares.<br>Plasme sus creaciones en tabla teniendo en cuenta las siguientes indicaciones: En la primera columna, grafique su construcción, en la segunda columna, si es una figura regular escriba su nombre y si es irregular, sólo escriba irregular. Utilice la tercera columna para cuantificar el material empleado en la construcción, puede hacerlo utilizando dibujos. | | | | |

| Construcción | Figura geométrica | Cantidad de material utilizado |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

| Institución Educativa la Garita<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Anexo 2: Nombre propuestos para las figuras** | | | | | |
| **Nombre del estudiante** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, utilice los espacios de las tablas para proponer un nombre que usted considera apropiado para cada una de las figuras.<br><br>Para asignar un nombre tenga presente que el nombre debe ser general y debe identificar alguna propiedad de la figura geométrica nombrada.<br>Tenga en cuenta las fórmulas del área del rectángulo y del cuadrado para asignar los nombres. | | | | |

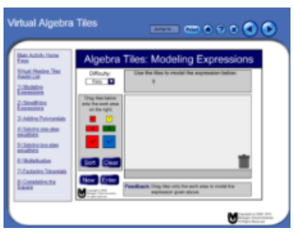
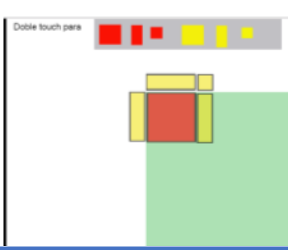
| **Figura** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre propuesto** | | | | | |

| **Figura** | | | |
|---|---|---|---|
| **Nombre propuesto** | | | |

**Institución Educativa la Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

## Anexo 3: Tabla comparativa de los manipuladores virtuales

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre del estudiante** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, utilice los espacios de las tablas para consignar la información relevante que describa cada una de las aplicaciones, además describa las actividades que se pueden desarrollar en ellas, escriba también el nombre de las baldosas que se le dan en cada aplicativo y si el tamaño de la baldosa es modificable. | | | | |

| Manipulador | Descripción | Actividades |
|---|---|---|
| **MVU Algebra Tiles**   | | |
| **Algebra Tiles**  | | |
| **Geometría de polinomios**  | | |
| **Bloques de Dienes**   | | |

<table>
<tr><td colspan="6">Institución Educativa la Garita<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander</td></tr>
<tr><td colspan="6">Anexo 4: Representación geométrica y algebraica del lenguaje común</td></tr>
<tr><td>Nombre del estudiante</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Grado</td><td></td><td>Curso</td><td></td><td>Fecha</td><td></td></tr>
<tr><td>Instrucciones</td><td colspan="5">Estimado estudiante, a continuación se presentarán 4 expresiones en lenguaje común y 4 en lenguaje algebraico.<br>• Diligencie la tabla escribiendo en la primera columna, la expresión en lenguaje común, en la segunda columna, la expresión en lenguaje algebraico y en la tercera columna, la representación geométrica de la expresión.<br>• Utilice las baldosas algebraicas.</td></tr>
</table>

Lenguaje común

a) Un número aumentando en 6.
b) El doble de un número.
c) El triple de un número aumentado en 7
d) La diferencia de dos números al cuadrado.

Lenguaje algebraico.
a) $x + 2x$
b) $x^2 + y^2$
c) $x + y + z + 1$
d) $x^2 + 2x + 1$epresentación geométrica y algebraica del lenguaje común

| Lenguaje común | Lenguaje algebraico | Representación geométrica |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

| **Institución Educativa La Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Anexo 5: Taller sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita** | | | | | |
| **Nombre del estudiante** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante lea detenidamente las situaciones que se le presenta a continuación, plantee una ecuación que represente la situación y soluciónela mediante un modelo geométrico utilizando las baldosas algebraicas. Tenga presente las propiedades de las ecuaciones y la explicación realizada por el docente. | | | | |

A continuación encontrará el procedimiento sugerido para resolver ecuaciones.

**Ecuaciones de un paso**

- Paso 1: Expresar la ecuación utilizado un lenguaje algebraico.
- Paso 2: Representar la situación mediante un modelo geométrico.
- Paso 3: Adicionar o sustraer o multiplicar o dividir el mismo número a ambos miembros de la igualdad.
- Paso 4: Simplificar a ambos lados utilizando la propiedad del inverso aditivo o el inverso multiplicativo.

**Ecuaciones de dos pasos**

- Paso1: Expresar la ecuación utilizado un lenguaje algebraico.
- Paso 2: Representar la situación mediante un modelo geométrico.
- Paso 3: Adicionar o sustraer el mismo número a ambos miembros de la igualdad y simplificar.
- Paso 4: Multiplicar o dividir el mismo número a ambos lados de la igualdad y simplificar.

Encuentre el número en cada situación que hace verdadera la afirmación.

a) Un número aumentado en 4 es igual a 6.
b) Un número aumentado en 2 es igual a -1.
c) Un número disminuido en dos unidades es igual a dos.
d) Si a un número se le agrega una unidad resultan cinco unidades.
e) Si a un número se le quitan tres unidades se obtiene menos tres unidades.
f) El doble de un número aumentado en uno es igual a cinco.
g) Si al doble de un número se le quita una unidad resultan menos cinco unidades negativas.
h) Si al triplo de un número se le adicionan dos unidades se obtiene cinco unidades.

Utilice la siguiente plantilla como guía para organizar el desarrollo de las ecuaciones

| | |
|---|---|
| Paso 1: | Paso 1: |
| | |
| Paso 2: | Paso 2: |
| | |
| Paso 3: | Paso 3: |
| | |
| Paso 4: | Paso 4: |
| | |

| | |
|---|---|
| **Institución Educativa La Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | |

**Anexo N°6: Clasificación de las expresiones algebraicas**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre del estudiante** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, en la tabla se presentan diferentes expresiones algebraicas, las cuales usted debe clasificar y representar gráficamente utilizando un modelo geométrico con baldosas algebraicas, recuerde que la clasificación a la que se refiere el presente ejercicio, es la correspondiente al número de términos de la expresión. | | | | |

| Expresión algebraica | Representación geométrica | Clasificación | Grado | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Relativo | Absoluto |
| $3x$ | | | | |
| $2y - 5x + 1$ | | | | |
| $2x^2 + y$ | | | | |
| $5x^2 + 3y^3 + z + 1$ | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $4xy$ | | | | |
| $3x^2yz$ | | | | |

Estimado estudiante le invito a que conteste con libertad y sinceridad los siguientes interrogantes

¿Qué significado le da usted a la expresión $3x$?

¿Qué significado le da usted a la expresión $2y-5$?

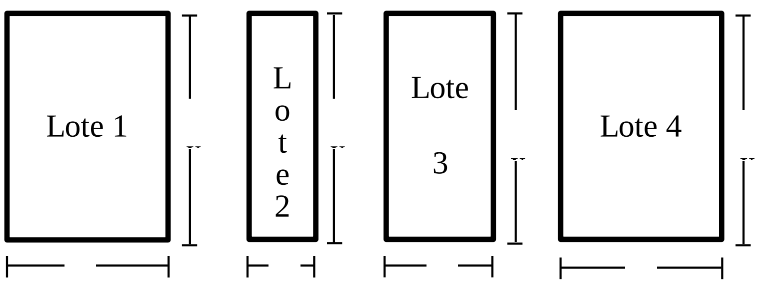
¿Qué significado le da usted a la expresión $5x^2+3y^3+z+1$?

¿Por qué no fue posible utilizar un modelo geométrico para representar todas las expresiones algebraicas?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Institución Educativa La Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
| **Anexo 7: Los lotes de un granjero** | | | | | |
| **Nombre del estudinate** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante lea con atención las situaciones que se le plantean y resuélvalas de forma individual. | | | | |

**Situación uno**

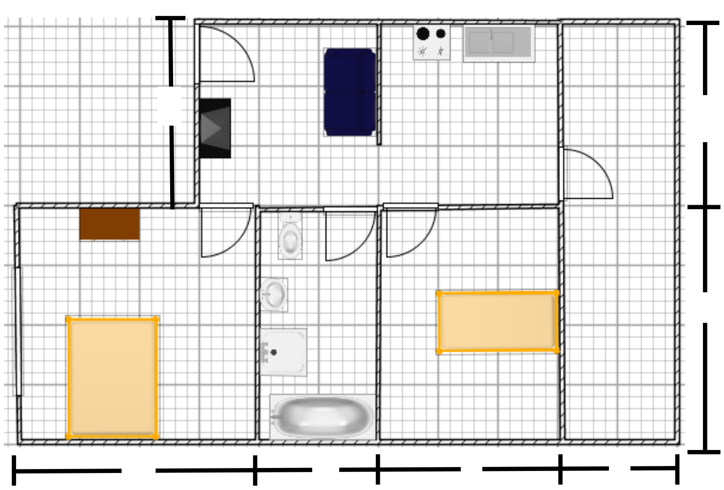
*Un granjero heredó un lote 1 de su padre, luego de mucho trabajo compró tres lotes más, contiguos al suyo. El granjero desea poder sembrar pero necesita determinar el área y el perímetro de su terreno.*




*En este espacio ayuda al granjero a determinar las dimensiones (largo, ancho y perímetro) de su nuevo terreno*

**Situación dos**

Observa el plano de la siguiente vivienda, las medidas están representadas mediante un lenguaje algebraico.



Diligencia la tabla teniendo en cuenta las medidas de las divisiones de la vivienda.

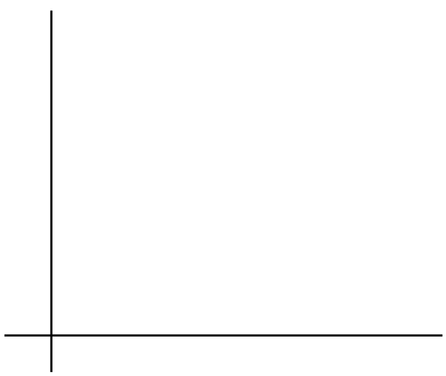
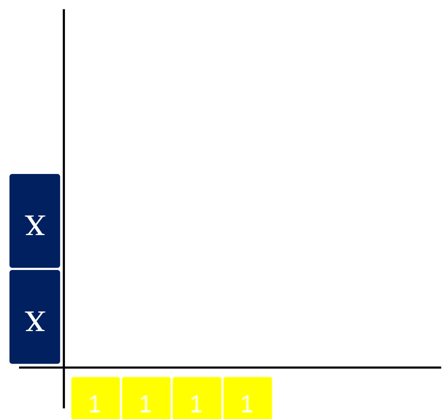
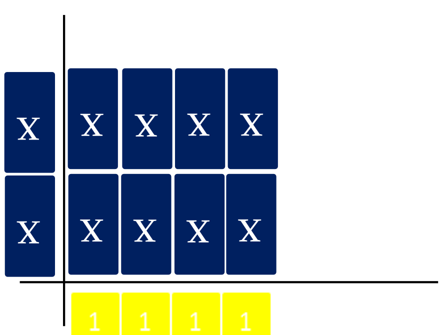
| | Ancho | Largo | Perímetro |
|---|---|---|---|
| **Habitación principal** | | | |
| **Habitación secundaria** | | | |
| **Baño** | | | |
| **Sala** | | | |
| **Cocina** | | | |
| **Espacio para ampliación** | | | |
| **Lote construido** | | | |

Describa el procedimiento que utilizó para encontrar los perímetros.

Participe de la plenaria para determinar los procedimientos para sumar expresiones algebraicas.

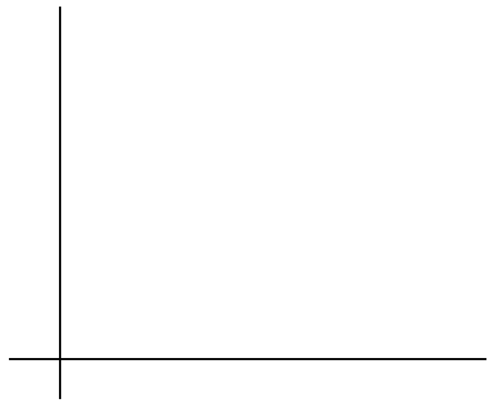
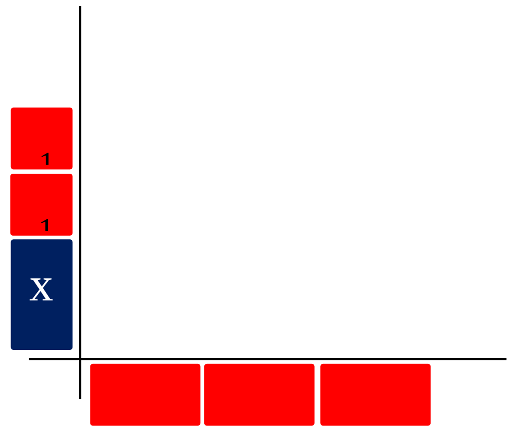
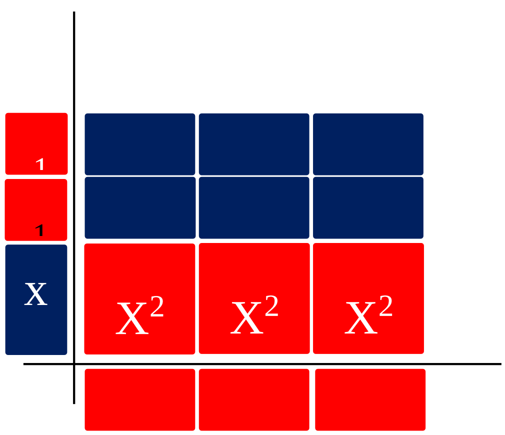
| Institución Educativa La Garita<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Anexo 8: Multiplicación de polinomios** | | | | | |
| **Nombre del estudinate** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, a continuación encontrará tres ejemplos de multiplicaciones entre polinomios, utilizando un modelo geométrico con las baldosas algebraicas. Siga los pasos que se presentan en las tablas para resolver los ejercicios planteados. | | | | |

**Multiplicación de dos monomios**

<table>
<tr>
<td>Paso 1: dibujar unas líneas guías para representar la multiplicación.<br></td>
<td>Paso 2: colocar debajo de la línea horizontal, las baldosas necesarias que representen uno de los dos monomios, y a la izquierda de la línea vertical, las baldosas que representan el otro monomio.<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Paso 3: construir un rectángulo con las baldosas algebraicas necesarias hasta cubrir el área total.<br></td>
<td>Paso 4: contar las baldosas que se emplearon en la construcción.<br><br>En este caso se utilizaron ocho $x$<br><br>Por lo tanto el producto entre $2x\ y\ 4\ es\ igual\ a\ 8x$<br><br>En lenguaje algebraico sería<br>$4(2x) = 8x$</td>
</tr>
</table>

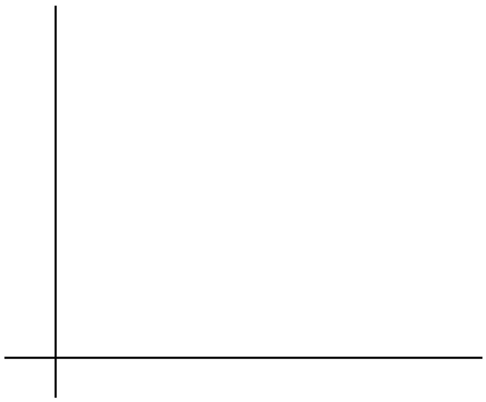
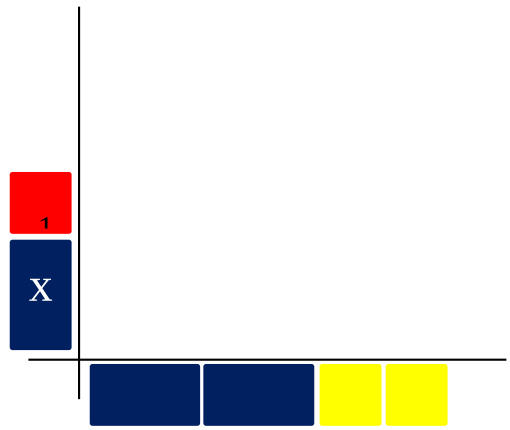
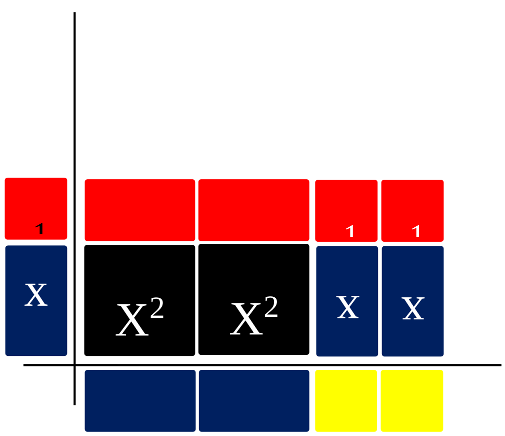
**Multiplicación de un monomio por un binomio**

Ejemplo: $Multiplicar\ -3x(x-2)$

| | |
|---|---|
| Paso 1: dibujar unas líneas guías para representar la base y la altura del rectángulo, que se obtienen al multiplicar los binomios.<br> | Paso 2: colocar debajo de la línea horizontal, las baldosas necesarias que representen uno de los dos polinomios y a la izquierda de la línea vertical, las baldosas que representan el otro polinomio.<br><br> |
| Paso 3: construir un rectángulo con las baldosas algebraicas necesarias hasta cubrir el área total.<br><br> | Paso 4: contar las baldosas que se emplearon en la construcción, concatenándolas con el signo de suma cuando sean diferentes.<br><br>En este caso hay $-3x^2 + 6x$<br><br>Por tanto el producto que se obtiene al multiplicar $(-3x)\ y\ (x-2)$ es igual a $-3x^2 + 6x$<br><br>En lenguaje algebraico sería<br>$(-3x)(x-2) = -3x^2 + 6x$ |

**Multiplicación de dos binomios**

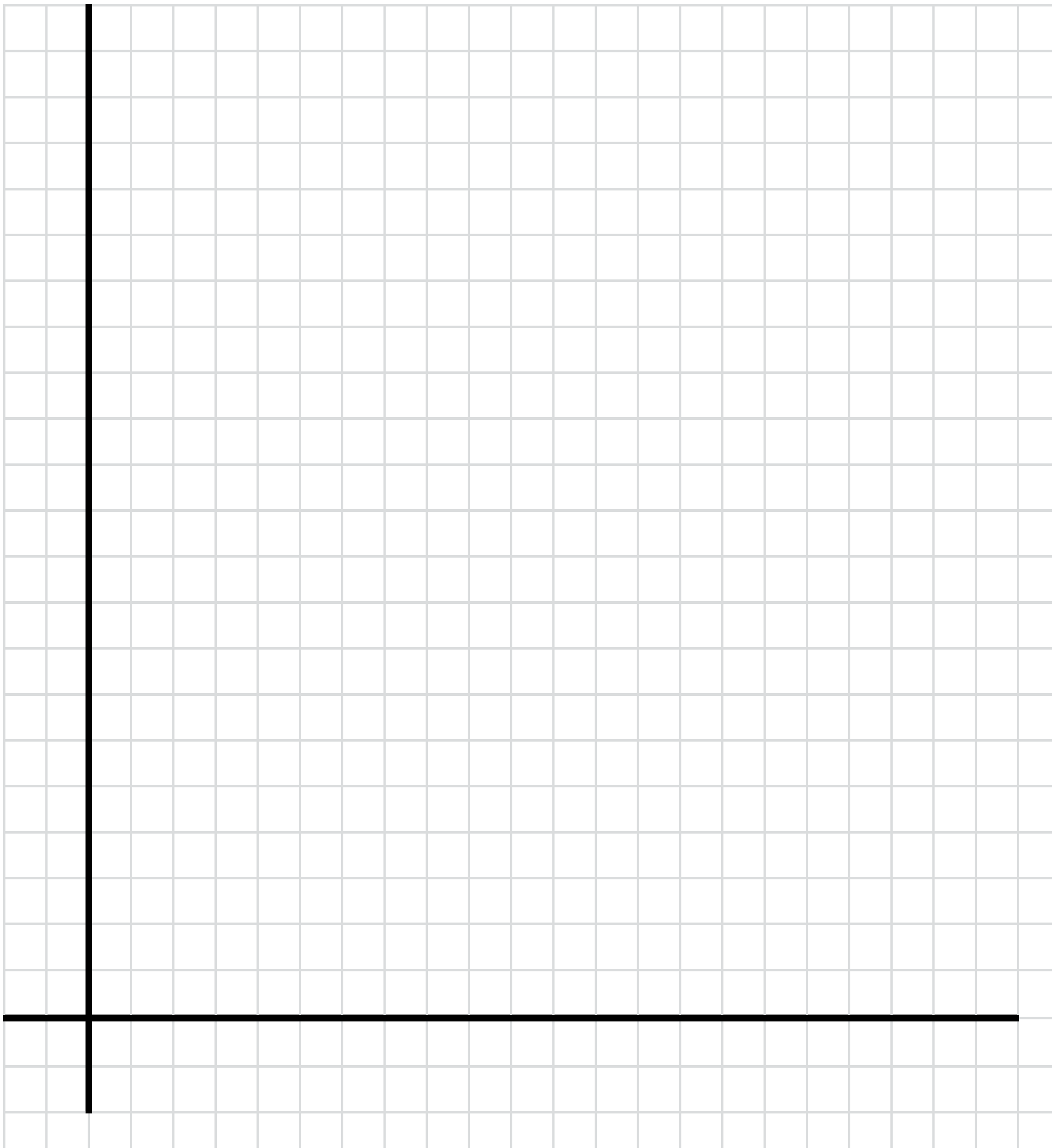
$Multiplicar\ (2x+2)(x-1)$

| | |
|---|---|
| Paso 1: dibujar unas líneas guías para representar la base y la altura del rectángulo, que se obtienen al multiplicar los binomios.<br> | Paso 2: colocar debajo de la línea horizontal, las baldosas necesarias que representen uno de los dos polinomios, y a la izquierda de la línea vertical, las fichas que representan el otro polinomio.<br> |
| Paso 3: construir un rectángulo con las baldosas algebraicas necesarias hasta cubrir el área total.<br> | Paso 4: contar las baldosas que se emplearon en la construcción, concatenándolas con el signo de suma cuando sean diferentes.<br><br>En este caso hay $2x^2+2x+(-2x)+(-2)$ Reducir términos semejantes y eliminar el paréntesis.<br><br>$2x^2-2$<br><br>Por tanto el producto que se obtiene al multiplicar $(2x+2)$ $con$ $(x-1)$ es igual a $2x^2-2$<br><br>En lenguaje algebraico sería<br>$(2x+2)(x-1)=2x^2-2$ |

Resuelva los siguientes productos utilizando un modelo geométrico con baldosas algebraicas y exprese la respuesta  al frente o debajo de cada ejercicio.

| **Multiplicación de monomios** | **Multiplicación de un monomio por un binomio** | **Multiplicación de binomios** |
|---|---|---|
| $-3(2x)$ | $2x(2x+1)$ | $(x+1)(x+6)$ |
| $3(-4x)$ | $-3x(x-3)$ | $(-2x+3)(x+5)$ |
| $-2(-3x)$ | $2x(-x-1)$ | $(x+4)(3x-2)$ |
| $2x(3x)$ | $-4x(-x+2)$ | $(x-2)(3x-4)$ |
| $-4x(-2x)$ | $4x(2x+5)$ | $(-2x+3)(-x+2)$ |

Utilice la siguiente plantilla para realizar las multiplicaciones con las baldosas algebraicas.



| Institución Educativa La Garita<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Anexo 9: Multiplicación de la suma por la diferencia de dos binomios** | | | | | |
| **Nombre del estudinate** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante en las tablas que se presentan a continuación, plasme la construcción de cuatro rectángulos con las dimensiones dadas y exprese el área como la suma de las áreas que lo componen. Para su comodidad utilice la plantilla del anexo 8. | | | | |

| Rectángulo 1 | Rectángulo 2 |
|---|---|
| $base = (x + y)$ $altura = (x - y)$ | $base = (2x + y)$ $altura = (2x - y)$ |
| Área: | Área. |

| Rectángulo 3 | Rectángulo 4 |
|---|---|
| $base = (2x + 4)$ altura= $(2x - 4)$ | $base = (3x + 5)$ $altura = (3x - 5)$. |
| Área: | Área: |

**Realice un listado de los invariantes que observa en las respuestas del área.**

**Proponga una formula general para la multiplicación de la suma por la diferencia de un binomio**

$$(x+y)(x-y)=$$

**Resuelva los siguientes ejercicios con el producto notable.**

$$(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})$$

$$(\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})$$

$$(\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3})(\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})$$

$$(\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\mathbf{3}\boldsymbol{b})(\mathbf{2}\boldsymbol{a}-\mathbf{3}\boldsymbol{b})$$

$$(\mathbf{11}\boldsymbol{m}+\mathbf{7}\boldsymbol{n})(\mathbf{11}\boldsymbol{m}-\mathbf{7}\boldsymbol{n})$$

$$(\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\mathbf{6}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

$$(\mathbf{8}\boldsymbol{x}+\mathbf{7})(\mathbf{8}\boldsymbol{x}-\mathbf{7})$$

$$(\mathbf{10}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\mathbf{10}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Institución Educativa La Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
| **Anexo N°11: Primera parte, Productos notables El cuadrado de la suma de un binomio** | | | | | |
| **Nombre del estudinate** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante realice las actividades que se describen a continuación:<br><br>Utilice las baldosas algebraicas y construya sobre la plantilla del anexo 9, los rectángulos que se piden con las dimensiones dadas.<br>Plasme la construcción en la hoja de trabajo y exprese en lenguaje algebraico, el área de cada rectángulo como la suma de las áreas que lo componen.<br>Realice una lista de invariantes para deducir en plenaria el producto notable: El cuadrado de la suma de un binomio. | | | | |

| Dimensiones Base: b y altura: a | Construcción geométrica | Área |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{b = x + 2}$<br>$\boldsymbol{a = x + 2}$ | | $(x+2)(x+2) = (x+1)^2$<br><br>$(x+1)^2 =$ |
| $\boldsymbol{b = 2x + 3}$<br>$\boldsymbol{a = 2x + 3}$ | | |

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{b = 3x + 2}$<br>$\boldsymbol{a = 3x + 2}$ | | |
| $\boldsymbol{b = 2x + 4}$<br>$\boldsymbol{a = 2x + 4}$ | | |
| $\boldsymbol{b = x + y}$<br>$\boldsymbol{a = x + y}$ | | |

Realice una descripción de los invariantes en las construcciones

Trabajando en plenaria con el docente y los demás estudiantes, construir una fórmula para el producto notable, el cuadrado de la suma de un binomio.

$$(x + y)^2 =$$

| Institución Educativa La Garita<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Anexo N°11: Segunda parte, Productos notables El cuadrado de la diferencia de un binomio** | | | | | |
| **Nombre del estudinate** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante realice las actividades que se describen a continuación:<br><br>Utilice las baldosas algebraicas y construya sobre la plantilla del anexo 9, los rectángulos que se piden con las dimensiones dadas.<br>Plasme la construcción en la hoja de trabajo y exprese en lenguaje algebraico, el área de cada rectángulo como la suma de las áreas que lo componen.<br>Realice una lista de invariantes para deducir en plenaria el producto notable: El cuadrado de la suma de un binomio. | | | | |

| Dimensiones<br>Base: b y altura: a | Construcción geométrica | Área |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{b = x - 3}$<br>$\boldsymbol{a = x - 3}$ | | $(x-3)(x-3) = (x-3)^2$<br><br>$(x-3)^2 =$ |
| $\boldsymbol{b = 2x - 3}$<br>$\boldsymbol{a = 2x - 3}$ | | |

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{b = 3x - 1}$<br>$\boldsymbol{a = 3x - 1}$ | | |
| $\boldsymbol{b = 2x - 1}$<br>$\boldsymbol{a = 2x - 1}$ | | |
| $\boldsymbol{b = x - y}$<br>$\boldsymbol{a = x - y}$ | | |

Realice una descripción de los invariantes en las construcciones

Construya una fórmula para el producto notable el cuadrado de la diferencia de un binomio.

$$(x - y)^2 =$$

| | |
|---|---|
| | **Institución Educativa La Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander |

**Anexo N°12: Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre del estudinate** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, realice las construcciones que se le piden, represente geométricamente utilizando baldosas algebraicas sobre la plantilla del anexo 9. Plasme las construcciones en la primera columna de la tabla. | | | | |

**Primera construcción: r**epresente geométricamente un rectángulo con las siguientes baldosas, $una\ x^2$, $siete\ x\ y\ seis\ unidades$. Utilice la plantilla del anexo 9.

| Representación geométrica | Pregunta |
|---|---|
| | ¿Cuál es la base y la altura del rectángulo? |
| Lenguaje algebraico dela construcción: | |
| Exprese el área del rectángulo como la multiplicación de la base por la altura | |

**Segunda construcción:** construya un rectángulo con las siguientes baldosas: $x^2 + 4x + 3$

| Representación geométrica | Pregunta |
|---|---|
| | ¿Cuál es la base y la altura del rectángulo? |

| | |
|---|---|
| Lenguaje algebraico dela construcción: | |
| Exprese el área del rectángulo como la multiplicación de la base por la altura | |

**Tercera construcción:** construya un rectángulo con las siguientes baldosas, $x^2 + 6x + 8$

| **Representación geométrica** | **Pregunta** |
|---|---|
| | ¿Cuál es la base y la altura del rectángulo? |
| Lenguaje algebraico dela construcción: | |
| Exprese el área del rectángulo como la multiplicación de la base por la altura | |

Realice un listado de operaciones que se pueden realizar con los factores numéricos de los términos del cada binomio.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

Escriba los invariantes que observa en los resultados de las operaciones que realizó con los factores numéricos de los términos del cada binomio

Participe de la plenaria para deducir la fórmula general de la factorización de trinomios de la forma:
$\boldsymbol{x^2 + bx + c =}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Institución Educativa La Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
| **Anexo N°13: Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$** | | | | | |
| **Nombre del estudiante** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, realice las construcciones que se le piden, puede representarlas geométricamente utilizando baldosas algebraicas sobre la plantilla del anexo 9. | | | | |

Represente la factorización de los trinomios que se muestran en la tabla

| $2x^2 + 5x + 3$ | $6x^2 + 7x + 2$ |
|---|---|
| $2x^2 + 5x + 3 =$ | $6x^2 + 7x + 2 =$ |

Realice un lista de las operaciones que se pueden realizar con los valores constantes de cada binomio.

¿Por qué los términos $\boldsymbol{b\ y\ c}$ no se pueden encontrar de la misma forma como se encontraban en los trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$?

Realice una consulta en internet de la forma como se factorizan los trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$, socialice los resultados con el docente y los demás compañeros.

¿Qué procedimiento prefiere utilizar el geométrico con baldosas algebraicas o el algorítmico?

Realice las actividades de factorización del aplicativo MVU Algebra Tiles

Represente algunas de las factorizaciones en este espacio.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Institución Educativa La Garita**<br>Municipio de los patios<br>Norte de Santander | | | | | |
| **Anexo N°14: Factorización de un trinomios especial de la forma $ax^2 + bx + c$** | | | | | |
| **Nombre del estudiante** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, realice las construcciones que se le piden, puede representarlas geométricamente utilizando baldosas algebraicas sobre la plantilla del anexo 9. | | | | |

**Primera parte**

En las plantillas que se presentan a continuación, represente las construcciones de rectángulos con baldosas algebraicas, en la segunda fila escriba en lenguaje algebraico la factorización del trinomio

| Factorización del trinomio $x^2 + 2x + 1$ | Factorización del trinomio $4x^2 + 8x + 4$ |
|---|---|
| $x^2 + 2x + 1 =$ | $4x^2 + 8x + 4 =$ |

Factorización del trinomio $9x^2 + 12x + 4$

Escriba un listado de los patrones que observa en la factorización de los tres trinomios

Participe de la plenaria para deducir la fórmula general de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 2xy + y^2 =$$

**Segunda parte:** En las plantillas que se presentan a continuación, represente las construcciones de rectángulos con baldosas algebraicas, en la segunda fila escriba en lenguaje algebraico la factorización del trinomio.

| Factorización del trinomio $x^2 - 2x + 1$ | Factorización del trinomio $x^2 - 4x + 4$ |
|---|---|
| | |

| Factorización del trinomio $9x^2 - 12x + 4$ |
|---|

Escriba un listado de los invariantes que observa en la factorización de los tres trinomios

Participe de la plenaria para deducir la fórmula general de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 2xy + y^2 =$$

**Institución Educativa La Garita**
Municipio de los patios
Norte de Santander

**Anexo N°15: Factorización de la diferencia de cuadrados**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre del estudiante** | | | | | |
| **Grado** | | **Curso** | | **Fecha** | |
| **Instrucciones** | Estimado estudiante, realice las construcciones que se le piden, puede representarlas geométricamente utilizando baldosas algebraicas sobre la plantilla del anexo 9.<br><br>Aplique la propiedad de uniformidad de las ecuaciones de ser necesario.<br><br>Puede agregar más baldosas siempre y cuando tenga presente que por cada baldosa positiva debe agregar una negativa. | | | | |

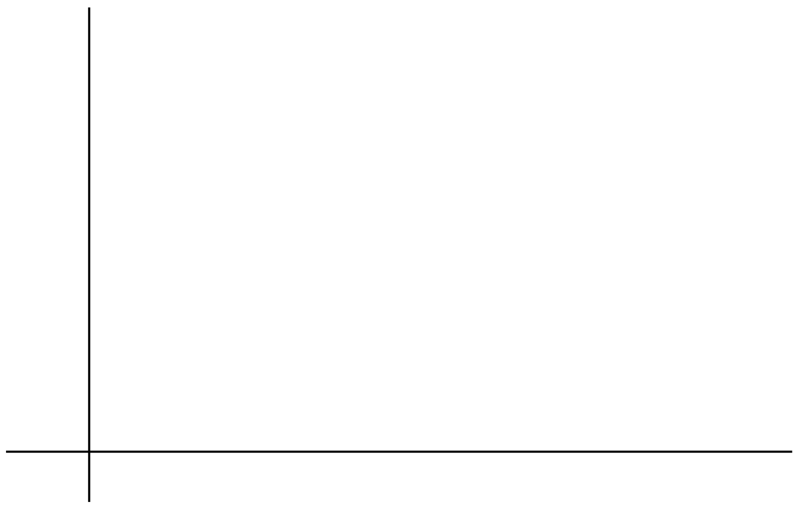
En la siguiente plantilla representa la construcción de un rectángulo con las siguientes baldosas, $una\ x^2, y\ 4\ unidades\ negativas.$

| |
|---|
| Factorización del binomio $x^2 - 4$ |
| |

Factorización del binomio $4x^2 - 9$

Construcción de un rectángulo con las baldosas $4x^2 - 16$

Factorización del binomio $9x^2 - 25$



Realice un listado de los invariantes que observa en las factorizaciones

Participe de la plenaria para deducir la fórmula general de la factorización de la diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 =$$

## CONCLUSIONES

Una vez realizada la discusión y el análisis de los resultados, se considera oportuno presentar las conclusiones a las que se llegó, después de haber culminado el presente trabajo investigativo, sin embargo, cabe destacar que estas conclusiones no son generalizables a todos los docentes y estudiantes.

Con relación al objetivo, identificar el desempeño de los estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa La Garita en el pensamiento variacional, se concluye lo siguiente: a) La mayoría de los estudiantes desconocen las fórmulas básicas de geometría para el cálculo de las áreas y volúmenes, b) Los estudiantes asignan arbitrariamente un valor numérico a las variables para poder realizar cálculos aritméticos, c) Los estudiantes memorizan las fórmulas de áreas de regiones planas y volúmenes, pero no las aplican en contextos algebraicos y d) La mayoría de los estudiantes desconocen la utilidad de las variables en situaciones problemas, no dan significado a la variable y no la tienen en cuenta para realizar operaciones.

Con relación al objetivo, diseñar e implementar una unidad didáctica fundamentada con baldosas algebraicas y manipuladores virtuales, en la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios, en los estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa La Garita, se concluye lo siguiente: la incorporación de la unidad didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje le permitió a los estudiantes abordar los objetos matemáticos abstractos de una manera significativa, ya que el material concreto y el aplicativo MVU Algebra Tiles sirven de puente entre la construcción del conocimiento y los estudiantes, potenciando el desarrollo de los conceptos matemáticos abstractos a través de la manipulación de objetos a los cuales les pueden asignar un significado real.

Con relación al objetivo, evaluar el impacto que tiene la unidad didáctica en el desarrollo del pensamiento variacional, en los estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa La Garita, se concluye: la unidad didáctica impactó positivamente la concepción que tienen los estudiantes de las matemáticas, generando en ellos motivación intrínseca, que permite abordar las matemáticas desde una mirada lúdica, emocionante, inquietante y alcanzable, para todos. Por otro lado, la unidad didáctica potenció la construcción del concepto de variable, lo cual permitió identificar invariantes y proponer fórmulas generales.

En cuanto a las prácticas pedagógicas, se considera conveniente resaltar, la relevancia de la unidad didáctica, como una herramienta para que los docentes organicen, planeen, sistematicen las actividades de enseñanza y evalúen los procesos de aprendizaje de los estudiantes mediante el análisis de los diarios pedagógicos.

Con las diferentes actividades académicas se logró mejorar el ambiente en el entorno escolar manteniendo la motivación y el interés por la asignatura. También se evidenció el cambio de actitud viéndose reflejada en el empoderamiento de los acuerdos de pactos de aula que son importantes para desarrollar un aprendizaje significativo.

# RECOMENDACIONES

Después de analizar los resultados obtenidos, a partir del desarrollo del proceso investigativo y teniendo como finalidad potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado octavo de las instituciones educativas rurales oficiales del país, se presentan las siguientes recomendaciones:

En cuanto a las prácticas pedagógicas de aula, se recomienda a los docentes incorporar la unidad didáctica “La cobija de mi abuelo está hecha de retazos” en la planeación curricular y desarrollarla en el proceso de enseñanza aprendizaje de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios, que con seguridad permitirán: en primer lugar, motivar a los estudiantes para que desarrollen los procesos de aprendizaje de manera autónoma, en segundo lugar, facilitará el trabajo de aula de los docentes y, por último, potenciará el desarrollo del pensamiento variacional.

En cuanto al material didáctico, se recomienda a los consejos directivos de las instituciones educativas, asignar un rubro para la compra, desarrollo, creación, innovación de material didáctico, concreto y virtual, que favorezca el aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque activo donde el eje central del proceso de enseñanza aprendizaje sea el estudiante.

En cuanto a la continuidad del proceso investigativo, se recomienda y alienta a los investigadores que deseen continuar este trabajo, para que mejoren la unidad didáctica, incluyendo actividades para la solución de ecuaciones de segundo grado con una variable, la división de polinomios y las operaciones con fracciones algebraicas.

# BIBLIOGRAFÍA


Aja, Y. (2001). *Manual de la educación.* Madrid: Grupo editorial Oceano.

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcaráte, A., Dozagart, J., Gutierrez, S. y Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algefra.* Madrith: Sintesis.

Antúnez, S. (2002). *Claves para la Organización de Centros Escolares.* Barcelona: Horson.

Ballén Novoa, J. O. (2012). *El álgebra geometrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

Bonilla, E., y Rodriguez , P. (1997). *Mas alla del dilema de los metodos:la investigacion en ciencias sociales* . Bogota: Norma.

Calvo, G. (2008). *Estrategias Motivacionales y de Evaluación para la Enseñanza de la Matemática en Educación Básica.* Rubio: Universidad Nacional Abierta.

Cano de Faroh, A. (2007). Cognición en el adolescente segun Piaget y Vygotski ¿Dos caras de la misma moneda? *Academia Paulosta de Psicología*, 148-166.

Carmona, N. L., y Jaramillo, D. C. (2010). *El razonamiento en el desarrollo del pensamiento lógico a través de una unidad didáctica en el enfoque de resolución de problemas.* Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Carretero, M. (1997). *Constructivismo y Educación.* Progreso, S.A.DE C.V.

Castro, A. (2007). *Estrategias de Enseñanza.Aprendizaje de la Matemática de )° grado en la U.E. El Guayabo.* Rubio: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituo Pedagógico Gervasio Rubio.

Chadwick, C. B. (1999). *Teorias del aprendizaje.* Santiago: Tecla.

Costitucion Politica. (1991). *Costitucion Politica de Colombia.* Bogota: Congreso de la Republica de Colombia.

Dewey, J. (1989). *Como pensamos: Nuevo ezposicion de la relacion entre pensamineto y proceso educativo.* Universidad de Barcelona: Paidos.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano registros semiótiocs y aprendizaje intelectuales.* Santiago de Cali: Artes Gráficas Univalle.

Elliot, J. (1993). *Investigacion- Accion* . Madrid: Morata.

Gallego, M. (2007). *La Enseñanza de la Matemática.* Madrid: Mc Graw Hill.

Gardner , H. (1995). *Inteligencias Múltiples. La teoria a la práctica.* Barcelona: Paidós Ibérica, S.A.

Godino, J. D., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

González, A. (2001). *Propuesta para mejorar la calidad del personal docente que desempeña cargos directivos.* Maturín: Universidad de Maturín.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y Actividades Para Enseñar Algebra.* Madrid: Sintesis.

Gutierrez, H. (2000). *Resolución de problemas en Matemática.* Buenos Aires: Planeta.

Guzmán, D. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Iberoamericana de Educación*, 19-58.

Latorre, A. (2005). *Investigación-acción conocer y cambiar la practica educativa.* Barcelona: Editorial Graó, de IRIF, S.L.

Ley N°115. (1994). *Ley General de Educacion.* Bogota: Congreso de la Republica de Colombia .

Matamala, R. (2005). *Las estrategias metodológicas utilizadas por el profesor de matemáticas en la enseñanza media y su relación con el desarrollo de habilidades intelectuales de orden superior en sus alumnos y alumnas.* Santiago: Universidad de Chile.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Monsalve, A., y Perez, E. (2012). El diario pedagogico como herramineta para la investigacion. *Bonaventuriana*, 117-128.

Olabuénaga, J. (1999). *Metologia de Investigacion Cualitativa.* Bilvao: Universidad de Deusto Bilvao.

Otte, M. (2006). *Mathetical epistemology from a Peircean semiotic point of view.* Holanda: Educational studies in mathematics.

Posada Balvin, F. A., y Obando, G. (2006). *Pensmiento Variacional y Razonamiento Algebraico.* Medellin: Artes y Letras Ltda.

Prada, R., Fernandez , C., y Ramirez, P. (2016). Comprension de nocion de funcion y la articulacion de los registros semioticos que la representan entre estudinates que ingresan a un pograma de ingenieria . *cientifica* , 188-205.

Puig, L. (2003). *Signos,textos y sistemas matematicos de signos* . Mexico: Univesitat de Valencia.

Quintero, E. A. (2014). *Dificultades que identifican los estudiantes a través de la Metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria.* Manizales: Universidad Autonoma de Manizales.

Rodriguez , G., Gil, J., y Garcia, E. (1996). *Metologia de la Investigacion Cualitativa* . Malaga: Aljibe.

Rojas S, S. J., Suárez, S. R., y Parada, S. E. (2014). *Presaberes matemáticos con los que ingresas estudiantes a la universidad.* Cúcuta: Universidad Francisco de Paula Santander.

Rojas, P., Rodriguez, J., Romero, J., Castillo, E., y Mora, L. (1999). *Transicion arimetrica algebra.* Bogota: Grpo editorial Gaia.

Rueda , F. (2006). *la enseñanza de la matematica. proposiciones didacticas para evaluar* . Aragua: Fedupel.

Ruiz, J. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matematicas. *Ibeoreamericana de Educacion* , 1.

Salvador, C. C. (1990). Constructivismo y educación: la concepción cosntructivista de la enseñanza y del aprendizaje. *Desarrollo psicológico y educación*, 157-188.

Sánchez, J. (2001). *Aprendizaje visible, tecnología invisible.* Santiago: Alianza.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M., y Hernández, J. (1989). *Iniciación al algebra.* Madrid: Sintesis S.A.

Tapia, J. R., y Pulla, O. G. (2011). *Metodologias para el desarrollo del pensamiento multidimensional y el apredndizaje significativo de las matemáticas y geometria, en los estudiantes de educación básica del Colegio Agronómico Salesiano de Paute, durante el año lectivo 2010-2011.* Quito.

Torres, L., Valoyes, E., y Malagón, R. (2002). Situaciones de generalizacion y uso de modelos en la iniciacion al algebra escolar. *EMA*, 227 - 246.

Vasco, C. (2003). *El pensamiento varacional, la modelacion y las nuevas tecnologias.* Bogota: Congreso internacional sobre tecnologias en el curriculo de matematicas .

Villarroel, J. M. (2014). *Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica "caja de polinomios", en estudiantes de grado octavo de la I.E. Marías Cano* . Medellin: Universidad Nacional de Colombia.

# ANEXOS

Anexo 1 Prueba diagnostica

REPÚBLICA DE COLOMBIA DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
MUNICIPIO LOS PATIOS
**INSTITUCION EDUCATIVA LA GARITA**
RESOLUCION DE APROBACION No.03826 DE 30 OCTUBRE 2017

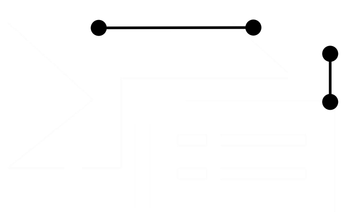
## PRUEBA DIAGNÓSTICA
## PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

FORTALECIMIENTO DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE UNA UNIDAD DIDÁCTICA DISEÑADA CON BALDOSAS ALGEBRAICAS Y MANIPULADORES VIRTUALES

| **Nombre del Estudiante:** | **Curso: 8°** | D | M | AA |
|---|---|---|---|---|
| **Tema:** Sustitución de variables, planteamiento de ecuaciones, representaciones geométricas y expresiones algebraicas. | | | | |

Estimado estudiante, el siguiente material será utilizado con fines investigativos, por tal motivo se le invita a que conteste el cuestionario con toda la sinceridad y libertad posible.

1) Determine el área de la figura 1, si se sabe que fue construida con tres cuadrados.

| | |
|---|---|
|  Figura 1 | Utilice este espacio para realizar su razonamiento. |
| Utilice este espacio dar su respuesta. | |

2) Con relación a la anterior figura, si se sabe que la longitud del lado $\boldsymbol{a}$, no es divisor de la longitud del lado b. Es posible cubrir el área de 1 con figuras iguales a 2.

| | |
|---|---|
| Utilice este espacio para realizar su razonamiento. | Utilice este espacio dar su respuesta. |

3) Observa la figura 2 que se presenta a continuación y represente el área del triángulo mediante una expresión

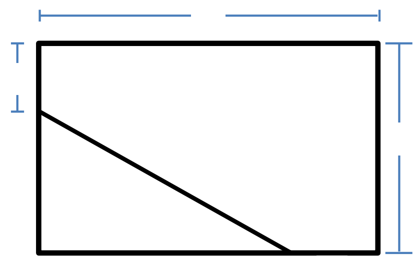


Figura 2

Utilice este espacio para realizar su razonamiento.

Utilice este espacio dar su respuesta.

4) Si las medidas del triángulo de la figura 2, son base = 7m y alto = 6m. ¿Cuál es la medida del área del triángulo?

| Utilice este espacio para realizar su razonamiento. | Utilice este espacio dar su respuesta. |
|---|---|
| | |

La figura 3 representa una caja. En la figura se señalan las dimensiones de la caja.

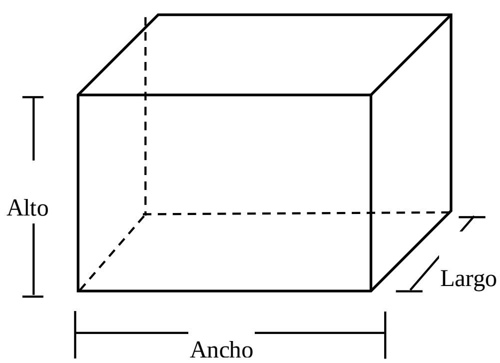


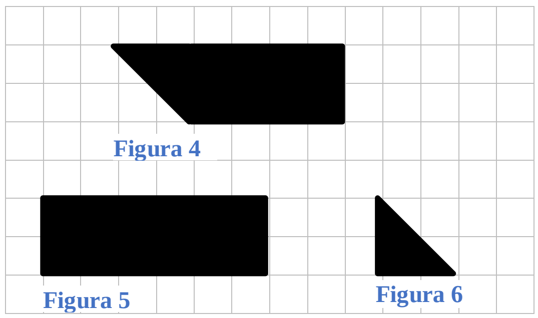

Figura 3

5) ¿Cuál de los siguientes procedimientos permiten hallar el volumen de la caja?

A. Sumar el largo, el ancho y el alto de la caja.
B. Multiplicar por 3 el alto de la caja.
C. Multiplicar el largo por el ancho y por el alto.
D. Sumar el largo con el ancho, y multiplicar por el alto.

6) Suponga que las longitudes de sus dimensiones son: ancho=a, largo=b y alto=c. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área de la tapa frontal?
A. $2a + 2c$
B. $2a \times 2c$
C. $a \times c$
D. $2a + 2b + 2c$

Observa las figuras dibujadas sobre la cuadrícula.




7) El área de la figura 4 es igual a:
A. El área de la figura 5 menos el área de la figura 6.
B. Tres veces el área de la figura 6.
C. El área de la figura 5 más el área de la figura 6.
D. 6 veces el área de la figura 6.

En una feria se juega tiro al blanco: por cada acierto se ganan \$3.000 y por cada desacierto se pierden \$1.000.

8) Arturo Lanzó tres veces y acertó una vez en el blanco. ¿Cuánto dinero ganó o perdió al final de los tres lanzamientos?
A. Ganó \$1.000
B. Ganó \$3.000
C. Perdió \$2.000
D. No ganó pero tampoco perdió.

Cuando en un grupo cada persona abraza a otra del grupo una sola vez, el número total de abrazos, $\boldsymbol{a}$, se calcula mediante la expresión, $a = \frac{n(n-1)}{2}$ donde n es el número de personas en el grupo.

9) ¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{a}$ para un grupo de 5 personas?
A. 3

B. 5
C. 10
D. 15

Lee cuidadosamente cada una de las situaciones que están a continuación y marca, en cada caso, la alternativa que muestra la relación aritmética entre los datos.

10. Una compañía ha decidido donar el doble de dinero que logren reunir sus empleados en una campaña solidaria.

$E$: dinero reunido por los empleados
$C$: dinero que aportará la compañía.

A. $C = E + 2$
B. $C = 2 * E$
C. $E = 2 + C$
D. $E = C + C$

11. ¡Súper oferta! En todos los productos lácteos "Pague 1 lleve 3."

$P$: productos pagados
$L$: productos llevados

A. $L = P * 3$
B. $P = L * 3$
C. $L = P + 2$
D. $L = P - 2$

12. Para preparar el jugo, mezcle 1 litro de agua con ½ litro de pulpa.

$J$: litros de jugo
$A$: litros de agua
$P$: litros de pulpa

A. $A = J + P$
B. $P = J + A$
C. $J = A + \frac{1}{2}P$
D. $J = P + A$

Anexo 2 Diario pedagógico

| **Encuentro 1 conociendo el material** | **Fecha:** |
|---|---|
| **Descripción** | **Análisis** |
| Inicié el encuentro mostrando una cobija hecha por una campesina de 70 años de edad, pregunté si conocían esas cobijas artesanales. La sorpresa fue grande pues no sólo, las conocían sino que algunos de los estudiantes las tenían en sus casas. El participante N° 38 dijo que ella las sabía hacer a mano, pasó al frente de la clase y dio una explicación del proceso de elaboración.<br><br>Posteriormente, pregunté: ¿Qué observan en la cobija? ¿Por qué consideran que la traje al salón de clases?. La respuesta al unísono fue: “cuadrados, geometría”. Comenté, “yo también veo en ella cuadrados y rectángulos, pero cuando la vi por primera vez pensé en el álgebra”.<br><br>Continúe la actividad realizando la exposición dela Unidad Didáctica, “La cobija de mi abuelo está hecha de retazos”. Mostré los objetivos, las evidencias de aprendizaje y los contenidos.<br><br>Les dije que para desarrollar la actividad con éxito necesitábamos unas condiciones básicas y el participante N° 30 dijo “disciplina”, exactamente repliqué. Comenté que me proponía realizar las matemáticas con sentido que respondan a las necesidades del contexto, sin descuidar el saber disciplinar.<br><br>Luego solicité qué se vendaran los ojos y afinaran sus sentidos. Unos compañeros de un grado inferior me colaboraron y entregaron una bolsa que contenía el material concreto | Los estudiantes realizaron la actividad con una buena disposición, se veían motivados, al darse cuenta que en una cobija, un objeto real, de uso cotidiano se presentan las matemáticas, pudieron entender que las matemáticas no son tan abstractas, como se cree.<br><br>En las intervenciones y las producciones de los participantes se evidencian algunos presaberes, no obstante, los conceptos que poseen no son claros y en la mayoría de ellos se deben fundamentar mejor.<br><br>**Reflexión**<br><br>El objetivo de despertar la curiosidad por aprender matemáticas para la vida se consiguió, lo estudiantes se mostraron atentos, la mayoría cumplieron con las instrucciones que se les dio. No obstante hay un pequeño grupo de estudiantes que no plasmaron sus construcciones en la hoja diseñada para ese fin.<br><br>Por otro lado, debo mostrar que el material didáctico no es un juego para pasar el tiempo, que la riqueza de la actividad está es servir de puente entre lo real y lo abstracto. |

| | |
|---|---|
| “baldosas algebraicas”, la instrucción fue que sin usar el sentido de la vista realizaran una imagen mental del posible contenido, las respuesta automáticas fueron: “Fichas” pero insistí que fueran más allá, que las imaginaran en su mente, que podían abrir la bolsa pero no quitarse la venda, las respuestas continuaron: “fichas geométricas”. Sin embargo, el participante N° 7 dijo “en mi mano tengo un cuadrado y un rectángulo” le dije que muy bien pero cómo sabía que exactamente eran lo que afirmaba. Él respondió: “puedo tocar sus bordes y mis manos me dicen que son un cuadrado y un rectángulo”. El participante N° 13 dijo “son figuras sólidas” y el participante N° 30 dijo “son las mismas figuras que hay en la cobija”.<br><br>Solicité que se quitaran las vendas y que las miraran, le pregunté al participante número N°7 una vez más, cómo hizo para darse cuenta que en sus manos tenía un cuadrado y un rectángulo sin medirlas, él respondió “calculando”. Repliqué ¿sin utilizar una regla se puede medir? él dijo “si, calculando”, le dije que estaba de acuerdo y continué la actividad.<br><br>Solicité que realizaran construcciones libres con el material, y que diligenciaran sus construcciones en el anexo 1. Pedí que las construcciones sean figuras geométricas.<br><br>Pasé por los puestos aclarando dudas sobre las construcciones.<br><br>Al terminar, cuando estaba recogiendo las producciones de los participantes, el participante N° 11se acercan y me dice “ Profe traiga todos los días las fichas, así es más bacano” | |

Anexo 3 Consentimiento Informado

| | | | |
|---|---|---|---|
| unab Universidad Autónoma de Bucaramanga | | REPÚBLICA DE COLOMBIA DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER<br>MUNICIPIO LOS PATIOS<br>**INSTITUCION EDUCATIVA LA GARITA**<br>RESOLUCION DE APROBACION No.03826 DE 30 OCTUBRE 2017 | |

**Consentimiento informado para participar en el proyecto:**

Fortalecimiento del desarrollo del pensamiento variacional mediante una unidad didáctica diseñada con baldosas algebraicas y manipuladores virtuales

**Responsable:** Odair Ordoñez Ortega
Estudiante de la Maestría en Educación
Universidad Autónoma de Bucaramanga

Cordial saludo,

El presente documento tiene como objetivo solicitar a usted la aprobación para que su hijo o hija _______________________________________________ participe del trabajo investigativo que se desarrollará en el primer semestre del año en curso.

Con la firma de este consentimiento usted autoriza:

1. Aplicar los cuestionarios para recoger información sobre su desempeño en los pensamientos variacional y geométrico-métrico.
2. Diseñar y aplicar unidades didácticas para fortalecer los pensamientos variacional y geométrico-métrico.
3. Implementar actividades pedagógicas para el fortalecimiento de los pensamientos geométrico-métrico.
4. Tomar las evidencias fotográficas de su hijo o hija durante la realización del estudio y publicarlas en los informes o presentaciones del proyecto.

Se aclara que:

a) La aplicación de los cuestionarios contará con total confidencialidad, sólo serán de conocimiento y manejo de la persona responsable del proyecto y utilizados como insumo para realizar el trabajo investigativo.

b) El participar en el proyecto no genera riesgos, costos, ni efectos indeseados para su hijo o hija.

Si está de acuerdo con lo informado, por favor firmar.

______________________________ ________________________

Nombre completo Firma
CC: