FORTALECIMIENTO DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE UNA UNIDAD DIDÁCTICA DISEÑADA CON BALDOSAS ALGEBRAICAS Y MANIPULADORES VIRTUALES[1]

Strengthening the development of variational thinking through a didactic unit designed with algebraic tiles and virtual manipulators

Fortalecimento do desenvolvimento do pensamento variacional através de uma unidade didática projetada com telhas algébricas e manipuladores virtuais

Odair Ordoñez Ortega[2]
Élgar Gualdrón Pinto[3]

RESUMEN

El presente artículo es el resultado de una investigación de enfoque cualitativo; tipo investigación acción, se desarrolló con los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa la Garita del municipio de Los Patios. El propósito fue potenciar el desarrollo del pensamiento variacional.

Se aplicó una prueba diagnóstica para evaluar el desempeño de los estudiantes en los pensamientos variacional y geométrico. Partiendo de los resultados, se intervino al grupo con una unidad didáctica diseñada bajo un enfoque constructivista, utilizando material concreto y manipuladores virtuales.

Durante el proceso se observó que las estrategias implementadas motivaron a los estudiantes para lograr avanzar en los objetivos de este estudio, de manera similar, se evidenció mejoras en el desarrollo del pensamiento variacional.

Palabras clave: Algebra, trinomios cuadráticos, estrategia didáctica, material concreto, MVU Algebra Tiles.

---

[1] Este artículo fue un producto de una investigación desarrollada para la Universidad Autónoma de Bucaramanga UNAB en la I.E La Garita.

[2] Maestrante de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, docente de aula de la I.E La Garita. Contacto: odairordonez@gmail.com

[3] Profesor del Departamento de Matemáticas: Universidad de Pamplona, Pamplona-Colombia. Director del grupo de investigación EDUMATEST de la Universidad de Pamplona. Contacto: egualdron@unipamplona.edu.co

ABSTRACT

The present article is the result of a qualitative research; type investigation action, was developed with the eighth grade students of the La Garita Educational Institution of the municipality of Los Patios. The purpose was to promote the development of variational thinking.
A diagnostic test was applied to evaluate the students' performance in the variational and geometric thoughts. Based on the results, the group was intervened with a didactic unit designed under a constructivist approach, using concrete material and virtual manipulators.

During the process it was observed that the implemented strategies motivated the students to achieve the objectives of this study, in a similar way, improvements in the development of variational thinking were evidenced.

Keywords: Algebra, quadratic trinomies, didactic strategy, concrete material, MVU Algebra Tiles.

RESUMO

O presente artigo é o resultado de uma pesquisa qualitativa; tipo ação de investigação, foi desenvolvido com os alunos da oitava série da Instituição Educacional La Garita do município de Los Patios. O objetivo era promover o desenvolvimento do pensamento variacional.

Um teste diagnóstico foi aplicado para avaliar o desempenho dos alunos nos pensamentos variacionais e geométricos. Com base nos resultados, o grupo foi interveio com uma unidade didática projetada sob uma abordagem construtivista, utilizando material concreto e manipuladores virtuais.

Durante o processo observou-se que as estratégias implementadas motivaram os alunos a alcançar os objetivos deste estudo, de forma semelhante, evidenciaram-se melhorias no desenvolvimento do pensamento variacional.

Palavras-chave: Álgebra, trinomias quadráticas, estratégia didática, material concreto, MVU Algebra Tiles.

INTRODUCCIÓN

Las baldosas algebraicas y los manipuladores virtuales son una herramienta que facilitan la construcción del concepto matemático como la variable, las opresiones con variables, el trabajo con polinomios.

La propuesta de intervención pedagógica que se aplicó con los estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa la Garita se basó en la manipulación de material concreto y virtual como soporte que favorecen la enseñanza de la adición, sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios, a partir de representaciones geométricas, que permiten hacer la transición entre los sistemas semióticos, pasando del lenguaje natural, al algebraico y geométrico, buscando que los estudiantes tengan un aprendizaje significativo.

Esta estrategia es una herramienta que permite al docente apartarse de la enseñanza tradicional del algebra y se convierte en una alternativa para construcción de los conceptos abstractos de las matemáticas.

Durante su desarrollo se aplicó la metodología de investigación acción con enfoque cualitativo, partiendo de un diagnóstico, diseñando una estrategia a partir de una unidad didáctica y evaluando los resultados mediante el analices de las producciones de los estudiantes que mostraron avances significativos en el desarrollo del pensamiento variacional.

MARCO TEÓRICO

La Enseñanza de la Matemática en Entornos Educativos

Cuando se prepara una clase de matemática, una de las preocupaciones principales radica en cómo mantener a los estudiantes interesados en el tema que se va a desarrollar. Más aún, cómo estructurar el discurso didáctico para atraer y mantener la atención de los estudiantes. Después de todo, “el docente de matemática tiene, por lo general, el estigma de ser el profesor de una materia difícil y aburrida”, así lo señala Gardner, H (1995, p.67).

Por otra parte, es labor del docente de matemáticas buscar estrategias que motiven al estudiante. Son muchos los esfuerzos que se han planteado a través del tiempo, pero el que mejor plantea la posibilidad de motivar a los educandos, es presentar clases dinámicas, donde todos tengan la oportunidad de participar e interactuar de manera agradable y divertida. La unidad didáctica como estrategia metodológica permite presentar al estudiante temas de matemáticas interesantes para ellos, que al estar fuera del currículo formal del curso, se libera al estudiante de la preocupación de tener que aprenderlo y se convierten en un entretenimiento y por tanto una actividad de carácter lúdico que potencia el aprendizaje.

Las prácticas que se desarrollan en la escuela para el estudio del conocimiento matemático, dentro del currículo de la enseñanza obligatoria, se consideran como un aporte fundamental del saber que todo ciudadano debe tener como contenido mínimo; por tanto, su tratamiento debe estar dirigido fundamentalmente al estudio comprensión e intervención en su entorno cotidiano.

Por consiguiente, la enseñanza de la matemática es, según Gallego (2007), “un proceso didáctico de aspectos lógicos y analíticos, a través de los cuales el estudiante debe aprender a pensar y razonar" (p.76). De allí que, los estudiantes aprenden su aplicación en la práctica cotidiana, su relación con otras asignaturas y las ventajas futuras. En el mismo orden de ideas, Aja (2001), refiere que el aprendizaje está "considerado como un proceso psico-cognítivo fuertemente influenciado por factores motivacionales y actitudinales del estudiante" (p.339).

Es así que, el docente juega un papel protagónico en el sentido de generar las motivaciones y actitudes positivas hacía el área de matemáticas, planeando los procesos de enseñanza y aprendizaje desde un enfoque constructivista, separándose de los enfoques tradicionalistas, memorísticos y pasivos como es el conductismo, para así, afectar positivamente los resultados del aprendizaje.

De esta manera, el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas impone en el quehacer del docente, un análisis que brinda salidas eficientes desde una posición didáctica en la cual se seleccionan objetivos, contenidos, métodos y evaluación apropiada; dando lugar a la planificación como herramienta indispensable para el análisis de los diferentes aspectos vinculados con los contenidos escolares, es decir, aclara qué, cómo y para qué se lleva a cabo la tarea de enseñar.

Con respecto a la planificación, Antúnez (2002) la define como: "proceso reflexivo sobre la práctica, reporta calidad a la enseñanza, facilita la autonomía pedagógica al aumentar su capacidad de decisión e investigación de lo que acontece en el aula, debe ser flexible, contextualizada y completa" (p.76). Es decir, que puede ser visto como un camino mediante el cual se determinan las metas y se establecen los requisitos para lograrlas de la manera más eficiente y eficaz posible. En ese proceso se trata de racionalizar la acción en una pauta temporal, en función del logro de fines bien definidos que se consideran valiosos.

Por consiguiente, el docente debe ser cuidadoso en el diseño de la misma, indagando información significativa para el estudiante, con el fin de ser innovador y creador de su praxis pedagógica. Además, el docente de matemáticas debe reflexionar sobre cada uno de los siguientes aspectos: a) conocimiento socio-cultural del grupo, b) contenidos matemáticos explícitos en el programa en curso, c) recursos materiales disponibles (texto, biblioteca, aula de informática, lúdicas entre otros), d) estrategias metodológicas a emplear, e) qué, cómo y cuándo evaluar; así lo afirma el autor antes señalado.

Por otra parte, la enseñanza de esta asignatura según Gutiérrez (2000), debe estar enfocada en tres tópicos: uno, utilizar la matemática conocida como herramienta para resolver problemas cotidianos; otro, aprender a enseñar matemáticas, lo cual provee al estudiante herramientas necesarias para solucionar problemas nuevos y al mismo tiempo mantiene vivo su saber; por último, crear matemática novedosa, adoptando modelos conocidos a las necesidades del estudiante, de modo que los apliquen en situaciones nuevas.

Ante lo planteado por el autor, el aprendizaje debe tener lugar en ambientes reales dentro y fuera del aula, vinculando las actividades seleccionadas con las experiencias vividas por el estudiante; en otras palabras, incluir la actividad (ejercitación), concepto (conocimiento) y cultura (contexto). Es así que el docente debe esforzarse en obtener aprendizajes significativos basados en la experiencia, analizando junto con los estudiantes, las respuestas que han dado a las actividades programadas y relacionar sus conocimientos previos con los contenidos, esto para dar lugar al aprendizaje de los nuevos conocimientos, desde la memoria inicial hasta la formación de conceptos, teniendo en cuenta el estilo de aprendizaje de cada uno.

En este mismo sentido, para hacer que las matemáticas cumplan con su papel de contribuir al desarrollo del pensamiento, el docente debe propiciar al estudiante actividades en las que pueda: explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre su quehacer, al respecto De Guzmán (2007) expone:

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces. Se trata de considerar como lo más importante que el estudiante: a) manipule los objetos matemáticos, b) active su propia capacidad mental, c) ejercite su creatividad, d) reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, e) haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, de ser posible, f) adquiera confianza en sí mismo, g) e divierta con su propia actividad mental, h) se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana y i) se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia. (p.17).

En síntesis, es necesario reconceptualizar el rol del docente e identificar las habilidades que debe poseer, como ser: un investigador capaz de diseñar y evaluar estrategias que le permitan resolver los problemas de la realidad, planificar la acción pedagógica, prever los recursos disponibles, aplicar motivación apropiada, explorar conocimientos previos, contenidos y recursos para construir nuevos conocimientos y lograr aprendizajes efectivos.

Con el propósito de cumplir con lo expuesto anteriormente, en el presente artículo se exponen y discuten los resultados de la aplicación de una unidad didáctica, la cual sirvió como una herramienta metodológica de enseñanza aprendizaje, donde el docente deja a un lado su papel protagónico y el estudiante asume su proceso de aprendizaje desde un enfoque innovador, lúdico, donde puede manipular objetos reales, ejercitar su pensamiento matemático, construir las nociones y hacer trasferencia hacia los conceptos más abstractos de las matemáticas del grado octavo.

Pensamiento Variacional

De acuerdo a Vasco (2002)“El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.” Las operaciones del pensamiento variacional se pueden describir como: Manejo de lo desconocido, particularización, reversibilidad, conjeturar, abstracción y generalización. (p.63)

Según el Ministerio de Educación Nacional MEN (2006). “como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos". (p. 66).

El desarrollo del pensamiento variacional es un proceso que requiere de los conocimientos y la relación de los pensamientos numérico, geométrico y métrico por parte de los estudiantes y de estrategias didácticas por parte del docente, dado a que es "lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre las variables" (Ministerio de Educación Nacional MEN, 2006, p.68)

El objetivo central del pensamiento variacional es la modelación matemática, los ejercicios que se les proponen a los estudiantes deben convertirse en retos o desafíos, que requieran de la realización de un modelo para su solución y no solo la simple realización de ejercicios rutinarios que se resuelven repitiendo algoritmos. (Vasco, 2002, p.64).
En este sentido Vasco (2002) propone esquematizarlo en momentos así: "momento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece, momento de creación de un modelo mental, momento de echar a andar el modelo, momento de comparar los resultados con el proceso modelado, momento de revisión del modelo". (p.64)

De esta manera, el pensamiento variacional está ligado con la identificación y la caracterización de lo que cambia y de lo que permanece constante, la generación de modelos, las posibles formas de representación, graficas, verbales o algebraicas. En este sentido, Posada y Obando (2006) afirman que el desarrollo de este pensamiento se da mediante:

El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación - gráficos, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión. (p.16).

El pensamiento variacional se desarrolla con el pensamiento numérico, con el pensamiento espacial, con el pensamiento métrico, con el pensamiento proporcional, con las representaciones gestuales, con reinterpretaciones de representaciones las gráficas y tabulares, con representaciones sagitales, entre otras. (Vasco, 2002, p.65).

Desde el MEN (1998) se viene proponiendo la inclusión en las aulas de clase de matemáticas del desarrollo del pensamiento variacional, en relación al: “reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como lo son su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”. (p.73).

En este sentido, en el presente artículo se plantea una propuesta para potenciar los registros semióticos, verbales, algebraicos y geométricos. Así mismo, construir modelos geométricos de expresiones algebraicas, identificar invariantes, lo que no varía y proponer fórmulas generales, utilizando para este fin materiales concretos y virtuales.
Cuando se trata de proponer fórmulas generales, se requiere la búsqueda de patrones que definen los invariantes, esta representación se puede realizar a través de esquemas, diagramas, entre otras, en este sentido, “la matemática es esencialmente un pensamiento diagramable” (Peirce, cit. por. Otte, M. 2006, p.14). La presente propuesta se sustenta bajo este principio, utilizar un medio de representación geométrico para potenciar la conceptualización. Al respecto (Duval, 1999) afirma:

En efecto, en los diferentes niveles de enseñanza de las matemáticas, se puede observar la persistencia de un encerramiento entre representaciones que no proviene del mismo sistema semiótico. El pasaje de un sistema de representación a otro, o la movilización simultanea de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual, fenómenos tan familiares y tan frecuentes en la actividad matemática, para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos. (p.16). A manera de ejemplo observemos la siguiente situación que se muestra en tres representaciones semióticas. Para este estudio se utilizará las representaciones que se presenta en la figura 1.

Lenguaje natural	**Lenguaje algebraico**	**Representación geometrica**
Una cantidad aumentada en uno	$x + 1$	

Figura 1. Representaciones semióticas

Al respecto los autores Socas, Camacho, Palarea, y Hernández (1989), afirman:

El uso de más de un lenguaje para representar un concepto favorece la abstracción del concepto, ya que tenemos más puntos de referencia y permiten establecer así más relaciones. Por otro lado, el hecho de presentar un concepto de formas diversas hace que a este se le conozca en más facetas de las que normalmente se le considera cuando se hace el aprendizaje con un solo lenguaje. (p.116)

En el ejemplo de representación semiótica de la figura 1, se puede evidenciar las bondades de un sistema o de otro, en lenguaje natural, una cantidad aumentada en uno, puede que para algunos estudiantes no represente mucho, sin embargo, al observar un rectángulo azul junto con un cuadrado amarillo cuya área es: x y 1 unidades cuadradas respectivamente, permite potenciar su representación mental, al punto que el observador realiza las asignaciones presentadas en la figura 2 para realizar una mejor interpretación.

Figura 2.Representaciones Mentales

Expresiones Algebraicas

En la literatura existen diferentes definiciones de lo que es una expresión algebraica, los libros de texto escolar la definen como la combinación de letras con o sin números reales, relacionados unos con otros por medio de las operaciones de adición, sustracción, producto, división y potenciación de exponente racional.

Una expresión algebraica es un lenguaje simbólico para representar el lenguaje natural en lenguaje algebraico. Puig, L (2003) dice, "Es un tópico referirse a las expresiones algebraicas como "lenguaje simbólico", por ejemplo, cuando se habla de poner un problema en ecuaciones, se describe usualmente como "paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico".(p.7)
Las expresiones algebraicas tienen su papel preponderante en el aprendizaje de las matemáticas escolares en la medida que se establezcan relaciones entre unas y otras, estas relaciones pueden ser: operaciones entre expresiones algebraicas, transformaciones, representaciones, planteamiento de ecuación e inecuaciones.

De acuerdo a Nemirovsky y Janvier, (1996) las expresiones algebraicas:
Cobran realmente su dimensión matemática cuando se relacionan y operan, produciendo ecuaciones, inecuaciones y nuevas expresiones algebraicas. En el surgimiento de estos objetos algebraicos aparece el problema de la producción de significado de estos constructos.

Esto ha sido ampliamente debatido por distintos investigadores, quienes sustentan la necesidad de trabajar con los estudiantes diversas aproximaciones, por ejemplo, al concepto de ecuación para que ellos las puedan significar. Citado por Torres, L., Valoyes, E., y Malagón, R. (2002, p. 230)

Operaciones entre expresiones algebraicas y Descomposición Factorial.

Al ser una expresión algebraica una extensión de la aritmética es aceptable afirmar que se pueden operar de una manera equivalente a los números reales, es decir, la adición, sustracción, multiplicación, división de expresiones algebraicas se realiza respetando las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales. En este sentido Socas, Camacho, Palarea, y Hernández, (1989) afirman "Todo calculo algebraico se construyen a partir de las cinco propiedades características del sistema numérico: la conmutativa y la asociativa de la suma y el producto, y la distributiva del producto respecto de la suma" (p.23)

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times b = b \times a$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

METODOLOGÍA

Este trabajo es de enfoque cualitativo, tipo investigación acción, porque se centra en la reflexión de un problema práctico, cotidiano, experimentado por los profesores y estudiantes en las aulas de clase de grado octavo. Se requiere de contacto directo con el entorno o ambiente donde se sitúa la investigación, permitiendo que se desarrolle un proceso de retroalimentación constante entre el investigador y el individuo que forman parte de la realidad estudiada, donde no interesa dimensionar magnitudes, sino explorar naturalezas, las cuales se conciben desde múltiples perspectivas, apoyándose en los diferentes métodos cualitativos pertinentes como vía de obtención de conocimientos.

En este sentido, Elliot (1993) expresa: “podemos definir la investigación acción como el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma” (p.88). En este sentido, se entiende la investigación acción, como la reflexión sobre las situaciones vividas por los docentes en el entorno educativo y tiene como objetivo realizar una comprensión de sus problemas y de encaminar acciones que modifiquen o den solución a la situación experimentada. Para el desarrollo de la presente investigación se tomará como documento orientador, el ciclo de la investigación acción presentado en la figura 3.

Figura 3. Ciclo de Investigación Acción, Fuente Adaptación al ciclo Citado por Latorre (2005)

Fases de la investigación

Fase de Planificación

En la planificación se encontró material teórico que sugirió el diseño de una unidad didáctica como estrategia metodológica y lúdica, de manera que se adecue el conocimiento matemático al contexto de los educandos, se estructure el proceso de enseñanza aprendizaje y se evite la improvisación.

Fase de acción

Se intervino al grupo con una unidad didáctica titulada “La cobija de mi abuelo está hecha de retazos”, la intervención se realizó en dieciséis encuentros durante ocho meses. Los encuentros buscaron en primer lugar, dotar a los estudiantes de herramientas conceptuales y actitudinales para potenciar el aprendizaje, en segundo lugar, desarrollar las bases teóricas para generar los conceptos matemáticos y por último, aplicar el conocimiento adquirido en la comprensión o formulación de las cinco propiedades características del sistema numérico descritas en el marco teórico.

Fase de observación

En esta fase, se utilizó el diario pedagógico para registrar las actitudes, habilidades, destrezas y conocimientos de los estudiantes observados en las intervenciones, de manera que suministraran información relevante susceptible de ser analizada. Al igual, se recogieron las producciones realizadas por los estudiantes durante los encuentros, con el fin de realizar una comparación y reflexión a la luz de las categorías, subcategorías e indicadores de análisis.

Fase de reflexión

Esta fase estuvo dirigida a la generación de espacios de reflexión, para fortalecer las prácticas pedagógicas de aula, a través de los hallazgos encontrados en los registros de los diarios pedagógicos y las producciones de los estudiantes, que permitieron realizar una comprensión de la problemática planteada y la propuesta de una alternativa de solución, con el fin de potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa La Garita.

Categorías de análisis

Para el diseño de las categorías de análisis se tuvieron en cuenta documentos como: Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencia, Derechos Básicos de Aprendizaje las Mallas de Aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional. Es así que para el presente estudio se plantean las siguientes categorías iniciales; es importante aclarar que pueden surgir otras, pero esas se visualizan a partir de la reflexión de las categorías iniciales.

En la tabla 2 se presentan las categorías de análisis y sus subcategorías mostrando los indicadores para evaluar las producciones de los estudiantes en las intervenciones pedagógicas.

Tabla 1.
Categorías de análisis

Categorías	Subcategorías	Indicadores
Pensamiento variacional	Operaciones con expresiones algebraicas (OEA)	Utiliza un modelo geométrico o algebraico para sumar o restar expresiones algebraicas.
		Utiliza un modelo geométrico o algebraico para reducir términos semejantes en una expresión algebraica.
	Transformar expresiones algebraicas (TEA)	Utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de un monomio por un binomio.
		Utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva en la multiplicación de dos binomios.
		Identifica las multiplicaciones de expresiones algebraicas que no pueden representarse con modelos geométricos.
		Utiliza modelos geométricos o algebraico para representar la identidad: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
		Utiliza modelos geométricos o algebraico para representar la identidad: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
		Utiliza modelos geométricos o algebraico para representar identidad: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
		Utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un monomio
		Utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático.
	Expresiones algebraicas equivalentes (EAE)	Utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas.
		Resuelve problemas y los justifica algebraica o geométricamente.
	Ecuaciones (E)	Utiliza un lenguaje algebraico para plantear ecuaciones de primer grado de acuerdo a la situación enunciada.
		Representa cantidades desconocidas con variables. Soluciona ecuaciones de primer grado mediante un modelo geométrico o algebraico

Pensamiento geométrico	Nociones básicas	Encuentra el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
		Calcula áreas y volúmenes a través de la composición y descomposición de figuras.
Motivación (M)	Actitud	Realiza las actividades con motivación propia
		Demuestra interés por realizar las actividades propuestas.
	Emociones	Manifiesta conductas de ansiedad o temo

Fuente: Adaptación de los Derechos Básicos de Aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional de Colombia 2016.

Resultados y discusión

Prueba diagnostica

Al analizar la totalidad de las producciones realizadas por los estudiantes durante la prueba diagnóstica, se evidenciaron los siguientes hallazgos: a) la gran mayoría de los estudiantes desconocen las fórmulas básicas de geometría para el cálculo de las áreas de regiones planas y de volúmenes; b) los estudiantes asignan un valor numérico a las variables para poder realizar los cálculos aritméticos; c) los estudiantes memorizan las fórmulas de áreas de regiones planas y volúmenes, pero no las aplican en contextos algebraicos; d) la gran mayoría de los estudiantes desconocen la utilidad de las letras en situaciones problemas, no dan significado a la variable y no la tienen en cuenta para realizar las operaciones de suma, resta y multiplicación.

A manera de ejemplo se presentan algunas de las producciones de los estudiantes. En la figura 4 se observa la producción del participante N° 31, él divide el cuadrado I en rectángulos de tamaño similar al cuadrado II, pero se da cuenta que no se puede dividir en partes iguales, el participante agrega: “con la ayuda de una regla lo podría solucionar”.

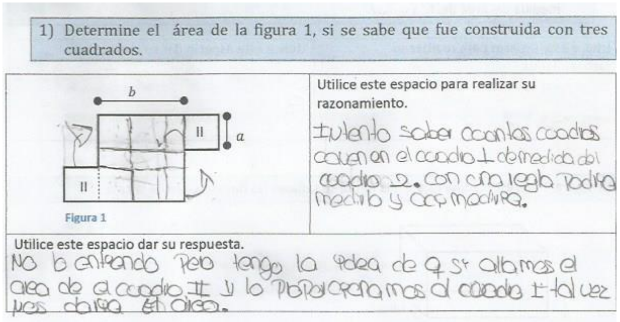

Figura 4.Respuesta del Participante N° 31, Prueba Diagnóstica

La figura 5 corresponde a la producción del participante N° 23, el participante asigna valores numéricos a las letras (a y b) con el fin de poder operar numéricamente. Se observa como el participante intenta resolver la situación con operaciones aritméticas, asignando un valor arbitrario a las letras y las operándolas de una manera incorrecta, con el propósito de dar una respuesta numérica.

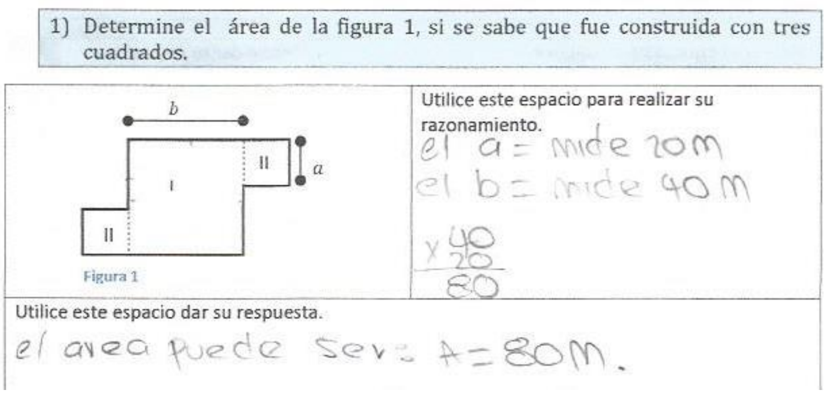

Figura 5.Respuesta del Participante N° 23, Prueba Diagnóstica

Intervenciones pedagógicas

En esta sección se presentarán las producciones realizadas por los estudiantes durante la intervención, la cual se dividió en tres actividades: a) Actividad de inicio, b) Actividad de desarrollo y c) Actividad de aplicación. En este sentido, se hará un recorrido mostrando el avance que fueron consiguiendo los estudiantes a medida que se intervenía al grupo con la unidad didáctica, se mostrará un análisis descriptivo de las producciones de los estudiantes, durante algunos encuentros, que evidencien el cumplimiento de los indicadores de las subcategorías de análisis.

Actividad de inicio

En la figura 6 se presenta un mapa de conceptos que resume los hallazgos encontrados durante la actividad de inicio, se puede observar como el material concreto despertó la curiosidad y la sorpresa en los estudiantes sirviendo como detonante de la motivación, la cual permitió desarrollar construcciones con creatividad e ir construyendo una noción de variable y activando los conocimientos previos.

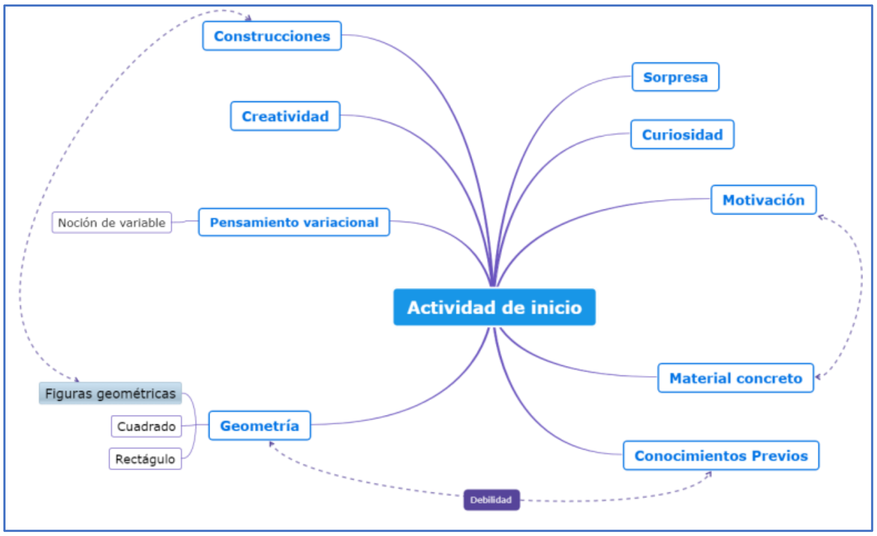

Figura 6. Mapa de Conceptos Actividad de Inicio. Fuente: Elaboración Propia

En la figura 7 se puede observar las representaciones que realizó el participante N°5 en el paso de un sistema de representación semiótica a otro: pasó del lenguaje natural al lenguaje algebraico, realizando su representación geométrica. El estudiante interpreta que un número cualesquiera puede ser representado con una letra del alfabeto, utiliza la letra x para referirse a un número cualesquiera. De manera similar interpreta palabras claves que sugieren operaciones como: duplo, triple, doble, entre otras. En la producción del participante N°5 se cumplió con el indicador: utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas de la subcategoría Expresiones algebraicas Equivalentes (EAE)

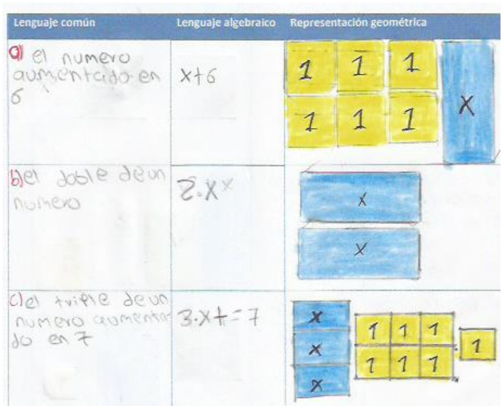

Figura 7. Representaciones semióticas Realizada por el Participante N°5

Actividad de desarrollo

La figura 8 corresponde a un mapa de conceptos de la actividad de desarrollo. En él se puede observar el papel preponderante que tienen las baldosas algebraicas y los manipuladores virtuales, primero para mantener la motivación de los participantes y segundo para desarrollar las nociones matemáticas. Los modelos geométricos que se construyeron durante la actividad de desarrollo, permitieron ampliar el registro de representaciones semióticas y transitar desde el lenguaje algebraico, al natural y a la representación geométrica, además el manejo del material favorece la construcción de la noción de variable, la resolución de ecuaciones y el paso de la aritmética al algebra, dando indicios del desarrollo del pensamiento variacional.

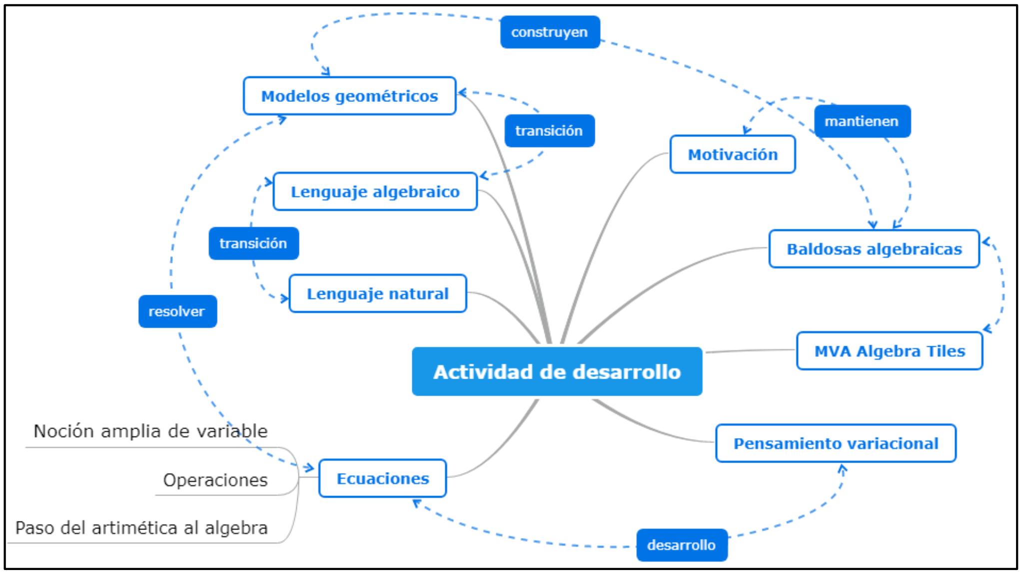

Figura 8.Mapa de Conceptos Actividad de desarrollo. Fuente: Elaboración Propia

Resolución de ecuaciones

En la figura 9 se puede observar los procedimientos que utilizó el participante N°35 para resolver dos ecuaciones: una ecuación de la forma: $x + b = c$ y la otra de la forma: $ax + b = c$, se destaca el buen desempeño que presentó el participante durante los ejercicios propuestos, el participante logró asimilar el procedimiento sugerido en el manipulador virtual MVU Algebra Tiles para resolver este tipo de ecuaciones, utilizando un modelo geométrico. Claramente el participante cumple con el indicador: soluciona ecuaciones de primer grado utilizando modelos geométricos o algebraicos, perteneciente al subcategoría Ecuaciones (E).

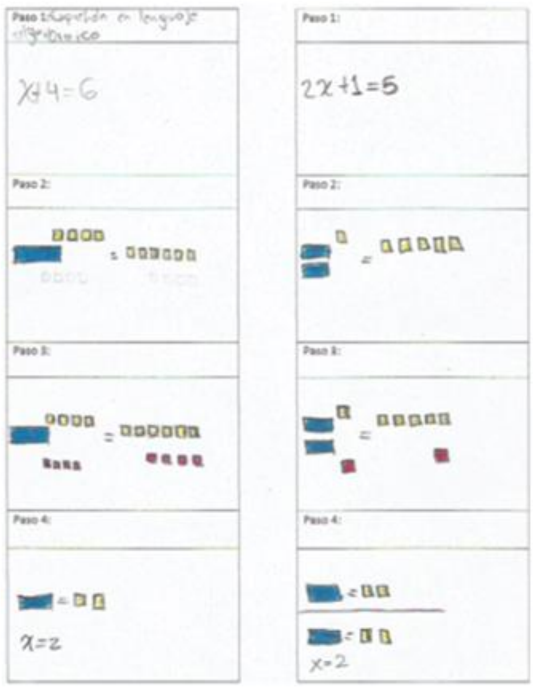

Figura 9.Producción el participante N°35 para resolver dos ecuaciones

Actividad de aplicación

La figura 10 corresponde a un mapa de conceptos durante la actividad de aplicación. En él se observa la manera como las baldosas algébricas y el aplicativo MVU Algebra Tiles, facilitaron el desarrollo de pensamiento variacional. El material concreto y el aplicativo virtual, motivaron a los participantes para que entendieran las operaciones de adición sustracción, multiplicación y descomposición factorial de polinomios, realizando modelos geométricos. Posteriormente, los participantes identificaron invariantes en las respuestas de algunas identidades, conduciendo de esta manera a fórmulas generales para la multiplicación y la descomposición factorial de trinomios.

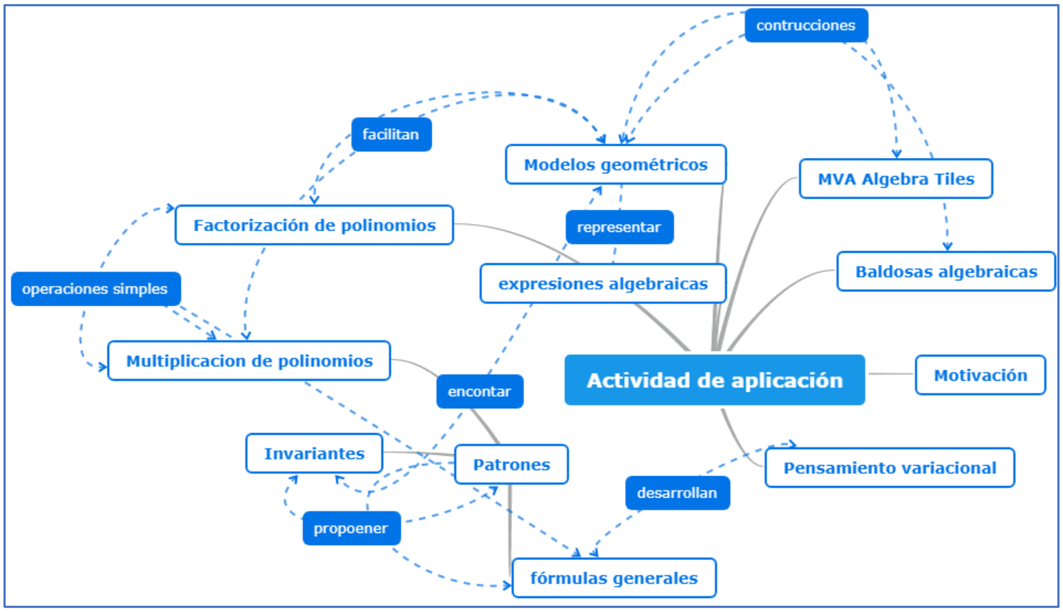

Figura 10. Mapa de Conceptos Actividad de Aplicación

Multiplicación de la suma por la diferencia de binomios $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

El desempeño de los participantes durante este encuentro fue destacable, la mayoría de participantes no tuvo inconvenientes al representar gráficamente las multiplicaciones de los binomios, los estudiantes recordaron sin dificultad la propiedad uniforme de las igualdades y la aplicaron en la solución de los ejercicios propuestos. Algo para resaltar en este encuentro fue la competencia que se generó alrededor de las construcciones, un grupo numeroso de participantes compitió entre ellos para ver quien terminaba primero la actividad, en medio de esa competencia el participante N°38 comenta “profe y eso que decían que el álgebra era difícil, le meten miedo desde sexto y mire, es fácil” el participante N° 32 le replica “es fácil porque estamos trabajando con las baldosas”. En la intervención del participante N°38, N°32 y en torno a la sana competencia que se generó, se evidencia la categoría Motivación (M), los participantes realizaron las actividades con agrado.

En este sentido, los participantes socializaron sus construcciones, proyectándolas al grupo con ayuda del aplicativo MVU Algebra Tiles. El software ha permitido que se realice la retroalimentación de una manera más eficiente, porque el aplicativo da la posibilidad de valorar las construcciones que se hacen y presenta las representaciones geométricas en lenguaje algebraico. La figura 11 corresponde a la socialización que realiza el participante N°32 de sus construcciones. Se observa la atención que prestan sus compañeros a la explicación y la motivación que esto generó.

En términos generales se puede afirmar que el propósito planteado se cumplió satisfactoriamente. A continuación se presentan algunas de las producciones realizadas por los participantes.

La figura 11 corresponde a la producción realizada por el participante N°14, se observa que representa el producto utilizando un modelo geométrico, de manera similar aplica la propiedad uniforme de las igualdades y por último encuentra el producto de los binomios expresándolo en lenguaje algebraico. Se evidencia en la producción, que el participante cumple con los indicadores Utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas, utiliza un modelo geométrico o algebraico para aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación de dos binomios, pertenecientes a las subcategorías expresiones algebraicas equivalentes (EAE) y transformar expresiones algebraicas (TEA).

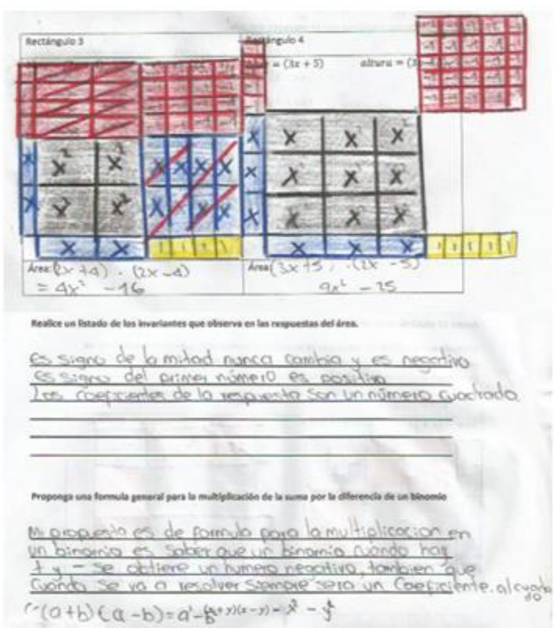

Figura 11. Producción del Participante N°14 Multiplicación de la suma por la Diferencia de dos Binomios.

El mismo participante encuentra algunos invariantes y propone una fórmula general para encontrar el producto de la suma por la diferencia de dos binomios, aunque los invariantes son acertados, la propuesta de la fórmula general presenta algunos errores gramaticales, el participante no expone con claridad su idea, sin embargo, escribe en lenguaje algebraico una fórmula acertada para encontrar el producto.

Descomposición factorial de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

En este mismo sentido, la figura 12 corresponde a la producción realizada por el participante N°13, en su trabajo se observa que el participante, representa acertadamente los trinomios utilizando un modelo geométrico, encuentra la base y la altura del rectángulos y encuentra unos invariantes para un caso en particular, el participante da cuenta que al multiplicar y sumar los segundos términos de los binomios, estos resultados son iguales a los coeficientes del segundo y tercer término del trinomio. En la producción del estudiante se evidencian los indicadores Utiliza un modelo geométrico o algebraico para descomponer en factores un trinomio cuadrático perteneciente a la subcategoría, transformar expresiones algebraicas (TEA) y el indicador, utiliza un modelo geométrico o algebraico para representar expresiones algebraicas perteneciente a la subcategoría, expresiones algebraicas equivalentes (EAE).

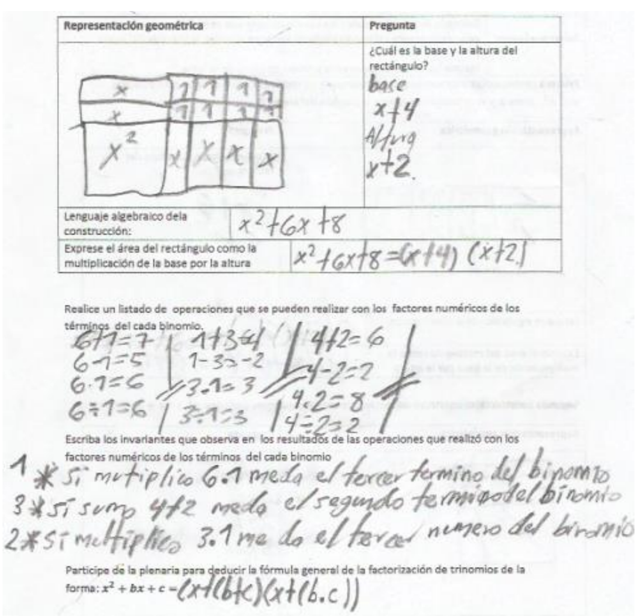

Figura 12. Producción del Participante N° 13

CONCLUSIONES

La mayoría de los estudiantes desconocen las fórmulas básicas de geometría para el cálculo de las áreas y volúmenes, los estudiantes asignan arbitrariamente un valor numérico a las variables para poder realizar cálculos aritméticos, los estudiantes memorizan las fórmulas de áreas de regiones planas y volúmenes, pero no las aplican en contextos algebraicos, la mayoría de los estudiantes desconocen la utilidad de las variables en situaciones problemas, no dan significado a la variable y no la tienen en cuenta para realizar operaciones.

La incorporación de la unidad didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje le permitió a los estudiantes abordar los objetos matemáticos abstractos de una manera significativa, ya que el material concreto y el aplicativo MVU Algebra Tiles sirven de puente entre la construcción del conocimiento y los estudiantes, potenciando el desarrollo de los conceptos matemáticos abstractos a través de la manipulación de objetos a los cuales les pueden asignar un significado real.

La unidad didáctica impactó positivamente sobre la concepción que tienen los estudiantes de las matemáticas, generando en ellos motivación intrínseca, que permite abordar las abordar las diferentes temáticas desde una mirada lúdica, emocionante, inquietante y alcanzable, para todos. Por otro lado, la unidad didáctica potenció la construcción del concepto de variable, lo cual permitió identificar invariantes y proponer fórmulas generales.

BIBLIOGRAFÍA

Aja, Y. (2001). *Manual de la educación.* Madrid: Grupo editorial Oceano.

Antúnez, S. (2002). *Claves para la Organización de Centros Escolares.* Barcelona: Horson.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano registros semiótiocs y aprendizaje intelectuales.* Santiago de Cali: Artes Gráficas Univalle.

Elliot, J. (1993). *Investigacion- Accion* . Madrid: Morata.

Gallego, M. (2007). *La Enseñanza de la Matemática.* Madrid: Mc Graw Hill.

Gardner , H. (1995). *Inteligencias Múltiples. La teoria a la práctica.* Barcelona: Paidós Ibérica, S.A.

Gutierrez, H. (2000). *Resolución de problemas en Matemática.* Buenos Aires: Planeta.

Guzmán, D. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Iberoamericana de Educación*, 19-58.

Latorre, A. (2005). *Investigación-acción conocer y cambiar la practica educativa.* Barcelona: Editorial Graó, de IRIF, S.L.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Otte, M. (2006). *Mathetical epistemology from a Peircean semiotic point of view.* Holanda: Educational studies in mathematics.

Posada Balvin, F. A., & Obando, G. (2006). *Pensmiento Variacional y Razonamiento Algebraico.* Medellin: Artes y Letras Ltda.

Puig, L. (2003). *Signos,textos y sistemas matematicos de signos* . Mexico: Univesitat de Valencia.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1989). *Iniciación al algebra.* Madrid: Sintesis S.A.

Torres, L., Valoyes, E., & Malagón, R. (2002). Situaciones de generalizacion y uso de modelos en la iniciacion al algebra escolar. *EMA*, 227 - 246.

Vasco, C. (2003). *El pensamiento varacional, la modelacion y las nuevas tecnologias.* Bogota: Congreso internacional sobre tecnologias en el curriculo de matematicas .