

**GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA PARA FORTALECER EL PENSAMIENTO
VARIACIONAL Y LOS SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS**

**GEOGEBRA AS A TOOL TO STRENGTHEN VARIATIONAL THOUGHT AND
ALGEBRAIC AND ANALYTICAL SYSTEMS**

Martha Ligia Díaz Torres

Estudiante de Maestría en Educación, Universidad Autónoma de Bucaramanga (UNAB), Especialista en Gerencia Informática, Corporación Remington, Licenciada en Matemáticas e Informática Educativa, Universidad de Pamplona, Docente Institución Educativa Nuestra Señora de las Angustias, Labateca, Norte de Santander.

E-mail: mdiaz727@unab.edu.co

RESUMEN

Este artículo resume los aspectos más importantes de una experiencia investigativa que tuvo como fin, fortalecer el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, mediante el software Geogebra. Se trabajó con los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Nuestra Señora de las angustias del municipio de Labateca; surge como una alternativa para el replanteamiento de la metodología utilizada, puesto que al realizar el análisis de las pruebas saber en el área de matemáticas, se ha encontrado que en los últimos tres años hay un mayor porcentaje de estudiantes en el nivel mínimo, de igual manera al realizar el comparativo del ISCE (2015-2016) se observa una baja notoria en el indicador relacionado con el tema tratado, es por ello que se incluyen las TIC como un medio para

mejorar el aprendizaje en los estudiantes e iniciar un proceso que permita potenciar sus capacidades, aprovechando los medios tecnológicos con que cuenta la institución.

Este trabajo se realizó bajo un enfoque de investigación acción, tomando como base teórica la propuesta por Carlson et al (2003) sobre los niveles de covariación. La intervención se dio por medio de la planeación, el diseño, la estructuración y la implementación de una unidad didáctica, que permitió ir llevando a la mayoría de los participantes de tal manera, que fueron avanzando de un nivel de razonamiento a otro de forma muy natural; la secuencia que se dio a las guías, la interacción con Geogebra y planteamiento de una propuesta diferente permitió que muchos estudiantes pudieran comprender y encadenar los conocimientos que ya poseían con los nuevos que se fueron introduciendo, especialmente el de función lineal y todos sus componentes; logrando en gran medida los objetivos propuestos.

Palabras clave: *Geogebra, Pensamiento variacional, Unidad Didáctica, Función Lineal.*

ABSTRACT

This investigative experience had as a goal strengthening the variation thought, at the same way the algebraic and analytical systems of the Nuestra Señora of the Angustias Second School's ninth students of Labateca town, by means of the software GeoGebra, Which tries to include the TIC in the mathematics, taking into account that the students are focused in using these tools in all the aspects of life. At the same way, increasing the academic performance of them and looking for the failings of their low qualifications in the tests to know of the ninth degree.

This work was carried out under a focus of the action research, taking as a theoretical basis the proposal by Carlson et al (2003) about the levels of covariation. The intervention was given by means of the planning, the design, the structure and the implementation of a didactic unit, which let to go taking the majority of the participants of such a way, who were advancing from a level to other of reasoning in very natural form; the sequence was given to the guides, the interaction with Geogebra and exposition of a different offer allowed that many students should understand and join the knowledge that already they were possessing with the new that were interfering, especially of linear function and all its components; achieving to a great extent the proposed aims.

KEY WORDS: *GeoGebra, variational thought, didactic unit, linear function.*

1. INTRODUCCIÓN

Teniendo en cuenta que el aprendizaje de la matemática es secuencial, se hace necesario enfatizar en los temas del grado noveno pues son prerrequisito para el aprendizaje de la trigonometría, el cálculo y preparación para los contenidos universitarios más avanzados.

Se diseña e implementa una unidad didáctica apoyada en las TIC, en especial el software Geogebra, para fortalecer el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, con el fin de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje en el área de matemática en los estudiantes del grado noveno en la Institución Educativa Nuestra Señora de Las Angustias (COLNUESA).

Esta unidad didáctica cuenta con guías y talleres sobre la función lineal, para el grado noveno, según el plan de área, apoyados en las TIC, por medio de la plataforma Edmodo se

interactúa con los participantes, se entregan y reciben las actividades; y la aplicación GeoGebra, la cual se instala en las tabletas y los computadores de la institución educativa para que los estudiantes puedan desarrollar las actividades de una forma práctica y sencilla, que les permita visualizar de manera gráfica los diferentes cambios que se presentan en los temas propuestos en los talleres y guías, y de esta forma tener un aprendizaje significativo y duradero, pues su participación activa dentro del proceso le permitirá apropiarse mejor del conocimiento.

Se espera que el desarrollo de las actividades de la unidad de enseñanza permitan un aprendizaje sistemático y significativo en los estudiantes, fortaleciendo el pensamiento variacional y esto se verá reflejado en el mejoramiento de los resultados de las pruebas saber, que posicionarán en un mejor nivel a COLNUESA y, a su vez, los estudiantes podrán asumir con mejores fundamentos su formación en la media técnica y posteriormente la universitaria.

2. MATERIALES Y METODO

2.1. Elementos teóricos

La investigación usó GeoGebra como una herramienta didáctica con el fin de estimular el pensamiento variacional, se consideró como objeto matemático de estudio la función lineal. A continuación se hace una breve descripción de estos conceptos y otros relacionados que contribuyeron de forma relevante, al igual que algunas teorías pedagógicas como:

Piaget (1978) “la idea de desarrollo cognoscitivo”; Vigotsky (1978) “La Zona de Desarrollo Próximo”; Ausubel (1983) “El factor más importante que influye en el aprendizaje

es lo que el alumno ya sabe. Averigüese esto y enséñese consecuentemente”. Estas contribuyen de manera fundamental al fortalecimiento de la práctica educativa.

Según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas “como su nombre lo indica, el Pensamiento Variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” MEN (2006). Según el Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje (V2) y de las Mallas de Aprendizaje para el área de Matemáticas, en la tabla número uno presenta la covariación como un eje de complejidad conceptual del pensamiento variacional; es por esto que se hace necesario definirlo.

Según la definición de Carlson et al, (2003), “El Razonamiento Covariacional son las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra”. Se presentan una serie de acciones mentales (**AM**), las cuales permiten clasificar a los participantes en un determinado nivel de razonamiento Covariacional, estas aparecen en la siguiente tabla:

ACCIÓN MENTAL	DESCRIPCIÓN DE LA ACCIÓN MENTAL	COMPORTAMIENTO
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios de x)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio de valor de salida mientras se consideran cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos

	del cambio en la variable de entrada	uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consecuencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos)

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación. Tomado de Carlson et al (2003, p. 128)



Figura 1. Niveles de Razonamiento. Recuperado de: Revista EMA. 2003. Vol. 8, N°2.

Con relación a la inclusión de las TIC se toma como referente teórico Humanos-con-medios, Borba y Villarreal (2005) señalan que “los medios empleados para comunicar, representar y producir ideas matemáticas, condicionan el tipo de matemáticas que son construidas y el tipo de pensamiento a ser desarrollado en esos procesos”. Para Borba y Villarreal (2005) “la experimentación-con-tecnología, aunado con la modelación se convierte en un ambiente en el que se promueve la formulación de conjeturas, su discusión y prueba”.

De igual manera como herramienta mediadora se usa Geogebra, que es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo. Lo ha

elaborado Markus Hohenwarter junto a un equipo internacional de desarrolladores, para la enseñanza de matemática escolar; por las características, herramientas y además por tratarse de un software libre se decide trabajar con este.¹

El objeto de estudio fue la Función Lineal, “En geometría analítica y algebra elemental, una función lineal es una función polinómica de primer grado; es decir, una función cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta”.²

Los objetos matemáticos no existen en el mundo físico sino en el mundo de las ideas; para poder interactuar con ellos y comunicar dichas ideas, se deben representar estos objetos. “Un sistema de representación semiótica es entendido como un sistema de signos que tiene como función principal la comunicación” Duval (1999).

Según Escamilla, (1993) “La unidad didáctica es una forma de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significatividad”, fue la estrategia didáctica utilizada en el trabajo de investigación.

2.2. Desarrollo de la investigación

La población de esta investigación son los 28 estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora de las Angustias (COLNUESA) que es un establecimiento oficial, de carácter mixto; que incluye educación preescolar, básica y media técnica en la modalidad agropecuaria.

¹ Recuperado de: <https://www.geogebra.org/m/mkpQq6np>

² Función Lineal. (s.f). Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_lineal

El proceso de investigación se desarrolla mediante la aplicación de una prueba diagnóstica inicial, después de realizar un barrido en las redes de información se decide realizar una selección de preguntas de los cuadernillos de pruebas, ejemplo de preguntas, Saber 9 Matemáticas, ICFES 2012-2015 y se organiza un documento con diez preguntas tipo ICFES. Las preguntas seleccionadas se basan en el componente numérico variacional, teniendo en cuenta las diferentes competencias que se deben desarrollar en el mismo; seguidamente se diseña e implementa una unidad didáctica que tiene como objeto de estudio la función lineal, sus características y propiedades; se presentan una serie de guías a los participantes para su lectura, análisis y desarrollo de actividades tanto de forma manual y mediante el software GeoGebra, al culminar se aplica una prueba final para verificar los avances de los participantes y así confirmar la pertinencia de la unidad didáctica desarrollada en cuanto al fortalecimiento del pensamiento variacional; en concordancia con la prueba diagnóstica a fin de comparar los resultados y ver la evolución de los estudiantes, se realiza una selección de preguntas de los cuadernillos de pruebas, ejemplo de preguntas, saber 9 Matemáticas, ICFES 2012-2015 y se organiza un documento con diez preguntas tipo ICFES.

2.3. Aspectos metodológicos

La investigación acción se define como “un estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de la acción dentro de la misma” Elliott (1990); por ello fue la base para este proceso de investigación debido a que se contribuye a la construcción del conocimiento, gracias a la conducta observable y el comportamiento de las personas que intervienen en el mismo.

La formulación de categorías para el análisis de la información se realiza con base en la propuesta realizada por Carlson et al, (2003); donde propone unas acciones mentales que permiten clasificar a los participantes en un determinado nivel de Razonamiento Covariacional; pues facilitan al investigador observar los avances durante las etapas de la implementación de la unidad didáctica, de tal manera que se pueda verificar el logro de los objetivos propuestos; esta información se organizó en la siguiente tabla:

Macro Categorías	Categorías	Subcategorías	Descriptorios
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos	Razonamiento	N0 (Nivel Cero)	Reconocimiento de las variables
		N1 (Nivel Uno) Coordinación	AM1 (Acción Mental 1) Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.
		N2 (Nivel Dos) Dirección	AM2 (Acción Mental 2) Coordinación de la dirección de cambio de una variable con los cambios de la otra.
		N3 (Nivel Tres) Coordinación Cuantitativa	AM3 (Acción Mental 3) Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.
		N4 (Nivel Cuatro) Razón promedio	AM4 (Acción Mental 4) Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.
		N5 (Nivel Cinco) Razón Instantánea	AM5 (Acción Mental 5) Coordinación de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente.

Tabla 2. Formulación de Categorías para el Análisis de la Información. Fuente: Carlson et all (2003).

2.4. Actividad desarrollada

La unidad didáctica desarrollada en esta investigación tiene como objeto matemático la función lineal, ya que “El aprendizaje de la función lineal hace grandes aportes al desarrollo

del pensamiento variacional que a su vez resulta fundamental en procesos de generalización y desarrollo del pensamiento abstracto” (Roldán, 2013.p 9).

La presentación de las guías que conforman la unidad didáctica fueron estructuradas teniendo en cuenta el programa todos a aprender y los referentes de calidad como son los Estándares Básicos de Aprendizaje, Derechos Básicos de Aprendizaje, matriz de Referencia y Orientaciones Pedagógicas del Área de Matemáticas del grado noveno, emanados por el Ministerio de Educación Nacional.

Cada una de las Guías se divide en tres momentos pedagógicos distribuida así:

Exploremos: En esta fase se sensibiliza y reconocen los saberes previos de los participantes y se motivan hacia un nuevo aprendizaje.

Estructuremos: Construcción de conceptos con los estudiantes.

Practiquemos: Son acciones de aprendizaje, donde se proponen actividades concretas a través de las cuales los participantes pueden alcanzar los aprendizajes que se han propuesto.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La prueba diagnóstica fue aplicada a 27 de los 28 participantes que conforman el grupo de investigación, se puede observar que los estudiantes tienen un buen nivel en cuanto a la mayoría de las competencias matemáticas evaluadas, como planeamiento y resolución de problemas, comunicación, representación y modelación; (nivel alto y superior 51.85%) por ello podemos afirmar que los estudiantes en gran medida pueden resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales, interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación, establecer relaciones entre

propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas; en un nivel medio (Básico 25.93%) están en capacidad de identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan, resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos; sin embargo presentan un bajo nivel en la competencia razonamiento (Insuficiente 22.22%), lo cual indica que tienen dificultades para reconocer las propiedades y las relaciones de los números reales; este análisis nos da un punto de partida y las suficientes herramientas para iniciar un trabajo consciente sobre cuáles son los principales temas a trabajar en la unidad didáctica a desarrollar.

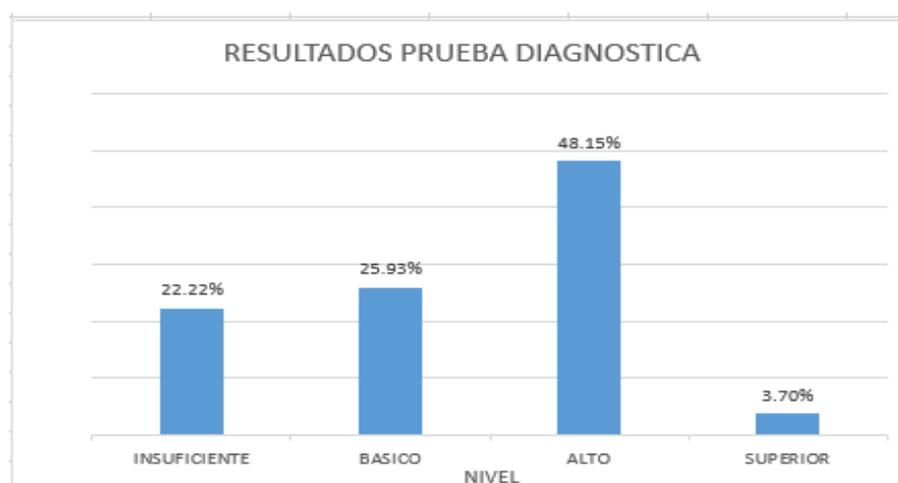


Figura 2. Resultados prueba diagnóstica. Elaboración Propia.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica se pudo observar que la mayoría de los participantes realizaron las actividades para el desarrollo del pensamiento covariacional, así:

En la guía uno, se realizó un acercamiento de los participantes al software Geogebra, descargado e instalado previamente en los computadores de la institución y se llevó a cabo una exploración libre de las herramientas que posee el software, conociendo su ambiente

gráfico. La mayoría de los participantes realiza los ejercicios de forma correcta, teniendo en cuenta las indicaciones dadas, “*reconocen las variables*”, podemos ubicarlos en el nivel cero (*N0*) de razonamiento, dado que pueden ubicar puntos correctamente en un sistema de coordenadas cartesianas.

En la guía dos los participantes tuvieron claridad en las diferentes formas de representar las funciones, ello les ayudó a formar un mejor concepto de estas y con la ayuda de Geogebra lograron el nivel de razonamiento deseado, alcanzando un mejor nivel de razonamiento, “*Coordinan el valor de una variable con los cambios en la otra*”, lo cual corresponde a la acción mental uno (*AM1*) y por ello los podemos ubicar en el nivel uno (*N1*). Identificando funciones a través de representaciones, como tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

En la guía tres, la comparación entre el procedimiento que hicieron en el cuaderno y lo realizado en Geogebra permitió que se dieran cuenta de lo que realmente representa la pendiente y llegar al concepto de ésta de una forma definitiva, que es la razón de cambio de la función lineal, la cual se entiende como la razón entre la elevación y el avance. “*Coordinación de la dirección de cambio de una variable con los cambios de la otra*”, lo que corresponde a la acción mental dos (*AM2*) y se pueden clasificar en el nivel dos (*N2*) de razonamiento.

En la guía número cuatro los participantes observaron que la gráfica de una función lineal se considera como la representación geométrica de la misma, es importante debido a la posibilidad de análisis y la observación de atributos de la función como son la pendiente (inclinación), interceptos con los ejes, los puntos (pares ordenados), aspectos que fueron estudiados y analizados en las guías anteriores, gracias a esto los participantes pudieron

realizar con mayor facilidad las actividades prácticas donde debían graficar funciones lineales; por ejemplo debían pasar los enunciados propuestos a lenguaje matemático, es decir, plantear las ecuaciones para poder tabular y graficar, inicialmente lo hacen en el cuaderno, de la siguiente manera:

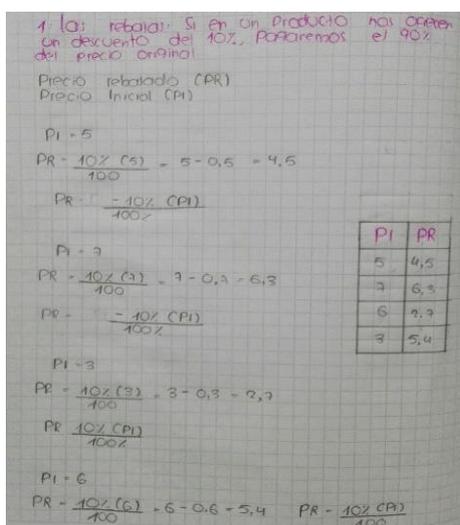


Figura 3. Actividad en el cuaderno (Guía 4. Participante E26)

Para poder llegar a la ecuación tuvieron que hacerlo primero con algunos casos particulares, con los cuales elaboraron la tabla de valores por ejemplo lo realizado por el participante E26. Para llevarlos a Geogebra y poder graficar así como lo realizado por el participante E19:

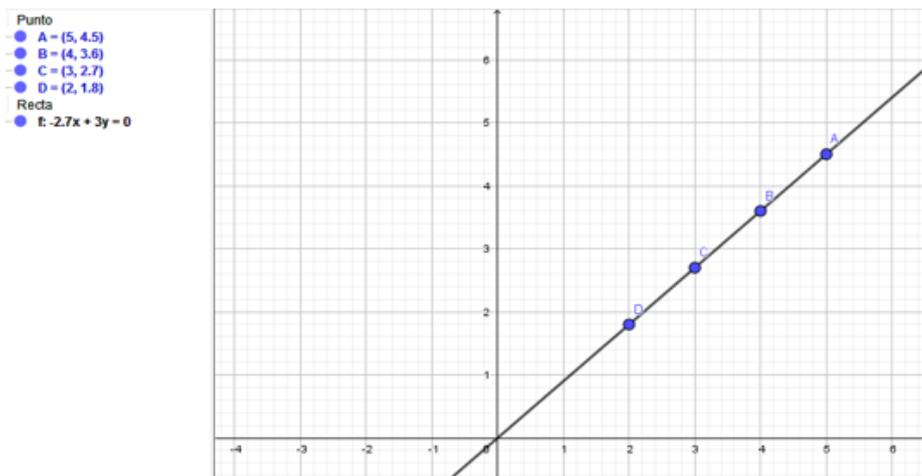


Figura 4. Actividad en Geogebra (Guía 4. Participante E19)

De esta manera podemos observar que “*coordinaron la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra*”, lo que corresponde a la acción mental tres (**AM3**), demostrando así que han alcanzado el nivel de razonamiento esperado, por ello se clasifican en el nivel tres (**N3**).

En las guías cinco y seis, luego de haber trabajado secuencialmente con conceptos fundamentales, la función y los componentes de la función lineal como son la pendiente, la gráfica, la ecuación general y canónica, se pudo observar que el modelo matemático lineal planteado por la gran mayoría de los participantes se presenta como una expresión algebraica correcta y se ajusta perfectamente a las situaciones problema planteadas, esto lo corroboraron los mismos participantes al realizar las actividades en Geogebra, observando la gráfica y en la vista aritmética, pues allí pueden cambiar la ecuación de la recta de forma general a canónica y viceversa, además se pueden establecer relaciones entre dos rectas analizando sus diferentes componentes, de esta manera las rectas pueden ser secantes, paralelas o perpendiculares; se observa que presentan buena “*coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada*”, lo cual corresponde a la acción mental cuatro (**AM4**), por este motivo se pueden ubicar estos participantes en el nivel cuatro de razonamiento (**N4**).

Como resultado de la aplicación de la unidad didáctica se pudo observar que la presentación, estructura de las guías y el uso de herramientas tecnológicas como Geogebra ayudó a que los participantes de grado noveno estuvieran motivados al desarrollo de las mismas. El trabajo individual, grupal y colaborativo facilitó el proceso aprendizaje ya que

unos se colaboraban con otros, cumplían responsabilidades y compartían sus conocimientos haciendo el aprendizaje más dinámico. Las prácticas en el cuaderno y el computador permitieron la observación, exploración, indagación y experimentación mejorando de esta manera en el razonamiento covariacional y por ende en el pensamiento variacional.

Para culminar la etapa de intervención se realizó una prueba final que fue analizada con respecto a la prueba diagnóstica aplicada al inicio; esta prueba final fue aplicada a los 28 estudiantes que conforman el grupo de investigación, se puede observar que los estudiantes tuvieron un buen nivel en cuanto a la mayoría de las competencias matemáticas evaluadas, como planeamiento y resolución de problemas, comunicación, representación y modelación; (nivel alto y superior que pasó de 51.85 a 67.86%) por ello podemos afirmar que son más los participantes en gran medida pueden resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales, interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación, establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas; en un nivel medio (Básico se mantuvo en 25 %) están en capacidad de identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan, resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos; presentan una mejoría notoria a nivel de la competencia razonamiento (Insuficiente pasó de 22.22 a 7.14%), lo cual indica que son menos los participantes que tienen dificultades para reconocer las propiedades y las relaciones de los números reales; este análisis permite concluir que al realizar la comparación con la prueba diagnóstica se puede observar que hubo avances notorios en la gran mayoría de participantes, en la competencia de razonamiento que es la base de nuestro

estudio y éste mismo contribuyó de manera favorable al mejoramiento en las otras competencias.



Figura 5. Resultados Prueba Final. Fuente: Elaboración Propia.

CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones resultantes del proceso investigativo e implementación de la propuesta pedagógica realizada; la trayectoria seguida integra las bases teóricas, la práctica docente, el enfoque investigativo a nivel metodológico según la investigación acción y las experiencias pedagógicas propias del contexto educativo, estas enriquecieron en gran medida la propuesta realizada y condujeron a la consolidación de diferentes aspectos concluyentes según los objetivos planteados:

Fue fundamental iniciar con la identificación de los conocimientos previos que poseían los participantes; fortalecer y nivelar aquellos aspectos que requerían mayor atención, para que de esta manera pudieran asimilar el tema central expuesto en la unidad didáctica y junto con las actividades prácticas como refuerzo fuera más fácil encadenar lo nuevo con lo que ya sabían.

El análisis permitió ver que uno de los aspectos más importantes del trabajo de investigación fue la planeación, el diseño y la estructuración de la unidad didáctica, debido a la secuencia que se dio a las guías fue clave, ya que permitió ir llevando a la mayoría de los participantes de tal manera, que fueron avanzando de un nivel de razonamiento a otro de forma muy natural, pues al iniciar la intervención se observó que la muchos de los participantes no alcanzaban siquiera el nivel cero (*N0*) de razonamiento y con la guía número seis se verificó que la mayoría de los participantes pudieron llegar hasta el nivel de razonamiento cuatro (*N4*), de esta manera se fortaleció el razonamiento covariacional y por ende el Pensamiento Variacional, objetivo principal de esta investigación.

La inclusión de la tecnología fue muy positiva, pues fue evidente la facilidad que poseen los participantes en su manejo, la forma en que después de una corta introducción, tutoría y exploración, se apropiaron de muchos de los elementos y herramientas del software GeoGebra, pudieron comparar las situaciones que se hicieron de manera manual y de esta forma hacer más significativo su aprendizaje, pues podían dedicar más tiempo al análisis y no a otros aspectos que dispersaban su atención; de igual forma esto contribuyó al fortalecimiento del aprendizaje autónomo por parte de los mismos.

AGRADECIMIENTOS

A la Institución Educativa Nuestra Señora de las Angustias, donde laboro y donde se desarrolló este estudio de investigación. Al Dr. Élgar Gualdrón, Director del Proyecto, por sus orientaciones. A la Universidad Autónoma de Bucaramanga (UNAB), por la formación recibida, Al Ministerio de Educación Nacional (MEN), mediante el programa Becas para la Excelencia Docente se me dio la oportunidad de formarme como magister.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carlson et all. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), pp. 121-156.

Piaget, J. (1978). *La Equilibración de las estructuras cognitivas. Problema Central del desarrollo*, España, Editorial siglo XXI

Teoría de Vigotsky. Recuperado de:

http://cmapspublic3.ihmc.us/rid=1255310670296_1234418443_9821/TEORIA%20SOCIOCULTURAL.cmap?rid=1255310670296_1234418443_9821&partName=htmljpeg
<https://psicologiaymente.net/desarrollo/teoria-sociocultural-lev-vygotsky>.

Teoría Ausubel. Recuperado de: [http://1.bp.blogspot.com/-](http://1.bp.blogspot.com/-dxnhY3IJRXI/TfzG_XP1UiI/AAAAAAAAAGY/OLV6JoEucro/s1600/significativo.gif)

[dxnhY3IJRXI/TfzG_XP1UiI/AAAAAAAAAGY/OLV6JoEucro/s1600/significativo.gif](http://1.bp.blogspot.com/-dxnhY3IJRXI/TfzG_XP1UiI/AAAAAAAAAGY/OLV6JoEucro/s1600/significativo.gif).

Ministerio de educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de competencias en*

Matemáticas. Recuperado de: <https://bit.ly/2tOnn7P>.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*, Editado por Ministerio de Educación Nacional Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Cartilla Diez: Aprendizajes en matemáticas para grados 8 y 9*, Versión preliminar conjunta V2.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Orientaciones Pedagógicas, Matemáticas 3°, 5°, 9°, V2*, Reporte de la Excelencia.

Carlson et all. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio*. Revista EMA, 8(2), pp. 121-156.

Villa-Ochoa, Jhony y Borba, Marcelo C. (2011). Humans-with-Media en la producción de conocimiento matemático. El caso de Geogebra. En García, Gloria (Ed.), *Memorias del 12° encuentro colombiano de Matemática Educativa* (pp. 667-673). Bogotá: Grupo Editorial Gaia.

Hohenwater M y Hohenwather J. (2009). *Documento de Ayuda de GeoGebra, Manual oficial de la versión 3.2* (pág. 13.). Rescatado de www.geogebra.org.

Concepto Función Lineal. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_lineal

Duval, R., y Vega, R. M. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Escamilla, A. (1995). *Unidades didácticas una propuesta de trabajo en el aula*. Editorial EDELVES.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2012-2016). *Cuadernillo de prueba, Ejemplo de preguntas, Saber 9° Matemáticas*.

Elliot, J. (1990). *La Investigación-Acción en educación*, Primera Edición, Madrid, España, Ediciones Morata.

Roldan, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*, (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, San José de Bogotá.