

APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS COMO ESTRATEGIA PEDAGOGICA PARA  
MEJORAR EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN LOS ESTUDIANTES DE SEXTO C  
DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO MUNICIPAL MARÍA CONCEPCIÓN  
LOPERENA DEL MUNICIPIO DE SAN JOSÉ DE CÚCUTA



OLGA CECILIA BAUTISTA MONSALVE

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA-UNAB

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

PROGRAMA BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE

CÚCUTA, 2018

APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS COMO ESTRATEGIA PEDAGOGICA  
PARA MEJORAR EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN LOS ESTUDIANTES DE  
SEXTO C DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO MUNICIPAL MARÍA  
CONCEPCIÓN LOPERENA DEL MUNICIPIO DE SAN JOSÉ DE CÚCUTA

OLGA CECILIA BAUTISTA MONSALVE

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de:

Magíster en Educación

Asesor:

MG. JAMES VELASCO MOSQUERA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA-UNAB

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

PROGRAMA BECAS PARA LA EXCELENCIA DOCENTE

CÚCUTA, 2018

## **Dedicatoria**

Mi trabajo lo dedico con amor y emoción A:

A Dios por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante mis estudios.

A Ramón, mi esposo, acompañante en este proceso, por su colaboración, presencia e impulso que con paciencia, amor y compromiso incondicional me apoya a alcanzar este triunfo cumpliendo mi sueño que hoy veo cristalizado.

A Lina Marcela porque su presencia en mi vida me fortalece y me inspira a ser mejor cada día.

A Andrés Felipe por salvar mi alegría y ser el estímulo para continuar cosechando triunfos.

A mi madre, por preservar mi fe, y que, con su ejemplo e impulso continuo, me siguen animando y apoyando en esta misión trascendente y loable de educar.

A las Matemáticas, que me seducen y me retan...

A todos aquellos que con dedicación y esfuerzo ayudan a construir un mañana mejor para una Colombia más grande y justa

## **Agradecimiento**

Agradezco a todas las personas que de una u otra manera coadyuvaron para alcanzar este triunfo, en especial a:

A la Universidad UNAB que, en convenio con el MEN, me acogió y me brindó la oportunidad de formarme como profesional competente en el campo de la educación.

A mi director de proyecto, Mg. James Velasco Mosquera por su interés, dedicación y profesionalismo en el acompañamiento de tan fructífero trabajo.

A los profesores que creyeron en mí y me motivaron a alcanzar los logros, gracias por confiar en mis capacidades y brindarme la oportunidad de empezar este proceso investigativo.

A la Institución Educativa Colegio Municipal María Concepción Loperena porque me brindó la oportunidad de cualificarnos y representarla ante la comunidad educativa con orgullo y profesionalismo.

Al Sr. Rector Serafín Bautista Villamizar que me brindó la oportunidad y siempre estimuló para conseguir esta meta, dispuesto a brindar su colaboración.

A los Coordinadores y compañeros docentes de la Institución Educativa Colegio Municipal María Concepción Loperena por brindarme su apoyo incondicional.

A los queridos estudiantes de 6º grado C por haber participado activamente en el trabajo de investigación.

## Resumen

La presente investigación busca fortalecer el razonamiento geométrico en un grupo de estudiantes de Sexto grado de la Institución Educativa Colegio Municipal María Concepción Loperena de la ciudad de Cúcuta en el año 2017, a través de la implementación del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), utilizando el modelo de Van Hiele.

En este estudio cualitativo tipo investigación/acción, participaron un total de 33 estudiantes a través del Festival Mundialista de cometas Pigargo, una estrategia pedagógica cuyo objetivo es la construcción de la cometa más grande que vuele lo más alto, bajo el enfoque constructivista de Piaget y el modelo cognitivo social de Vigosky.

Además, utilizando el modelo teórico de Duval, se desarrollaron los procesos de visualización, razonamiento y construcción, de manera independiente a través del desarrollo de diferentes actividades geométricas con el objeto de lograr la coordinación de las diversas aprehensiones: perceptiva, discursiva y operativa.

**Palabras claves:** Razonamiento geométrico, Aprendizaje basado en Proyectos, unidades figurales, poliedros, transversalidad.

## **Abstract**

The present research seeks to strengthen the geometric reasoning in a group of Sixth grade students of the Municipal School María Concepción Loperena Educational Institution of the city of Cúcuta in 2017, through the implementation of Project Based Learning (PBL), using the Van Hiele model.

In this qualitative research / action study, a total of 33 students participated through the Pigargo World Comet Festival, a pedagogical strategy whose objective is the construction of the largest kite that flies the highest, under Piaget's constructivist approach. the social cognitive model of Vigosky.

In addition, using the theoretical model of Duval, visualization, reasoning and construction processes were developed independently through the development of different geometric activities in order to achieve the coordination of the different apprehensions: perceptive, discursive and operative.

**Keywords:** Geometric reasoning, Project-based learning, figural units, polyhedra, transversality.

## Contenido

	<b>pág.</b>
Introducción	15
Problema de la Investigación	17
1. Contextualización de la Investigación	17
1.1 Situación Problémica	30
1.1.2 Pregunta de investigación	32
1.1.3 Objetivos	32
1.1.3.1 Objetivo general	32
1.1.3.2 Objetivos específicos	32
1.2 Justificación	32
1.3 Contextualización de la Institución Educativa	37
2. Marco Referencial	43
2.1 Antecedentes	43
2.1.1 Internacionales	43
2.1.2 Nacional	46
2.2 Marco Teórico	47
2.2 Marco Teórico	75
2.3 Marco Legal	81
3. Diseño Metodológico	86
3.1 Tipo de Investigación	86
3.2 Proceso de Investigación	88
3.3 Población y Muestra	99

3.4 Instrumentos de Recolección de la Información	100
3.4.1 Cuestionarios	101
3.4.2 Encuesta	101
3.4.3 Indicadores de desempeño	109
3.4.4 Desarrollo de las actividades propuestas	169
3.5 Validación de los Instrumentos	109
3.6 Resultados y discusión	110
3.6.1 Etapa previa	110
3.7 Principios Éticos	153
4. Propuesta	154
4.1 Presentación	154
4.2 Justificación	154
4.3 Objetivos	156
4.4 Indicadores de desempeño	156
4.5 Metodología	156
4.6 Fundamento Pedagógico	158
4.7 Diseño de Actividades	161
4.8 Desarrollo de las Actividades Propuestas	166
5. Conclusiones y Recomendaciones	180
Referencias Bibliográficas	159
Anexos	195

## Lista de Tablas

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Índice sintético de calidad educativa (ISCE) 2016 de las dos instituciones	18
Tabla 2. Fortalezas y debilidades de los estudiantes por prueba en las competencias del área de matemáticas de las dos Instituciones	23
Tabla 3. Fortalezas y debilidades de los estudiantes por prueba en los componentes del área de matemáticas de las dos Instituciones	23
Tabla 4. Resultados pruebas saber 11 2016 – 2 de dos instituciones Educativas	26
Tabla 5. Niveles de desempeño en matemáticas de 2 instituciones en la prueba saber 11	26
Tabla 6. Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en matemáticas de la prueba saber 11 de dos instituciones educativas	28
Tabla 7. Descripción de competencias	89
Tabla 8. Codificación de los informantes claves	99
Tabla 9. Categorías de acuerdo con los objetivos	103
Tabla 10. Triangulación de categorías	
Tabla 10. Indicadores de desempeño	109
Tabla 11. Actividades propuestas	169
Tabla 12. Dificultades en la prueba diagnóstica del componente espacial métrico	114
Tabla 13. Nivel mínimo de la prueba saber grado 9 – 2015	140
Tabla 14. Clasificación de los poliedros según la forma de las caras	163
Tabla 15. Modelo Tabla de identificación de elementos de Poliedros	155
Tabla 16. Diseño de actividades	166

## Lista de Figuras

	<b>pág.</b>
Figura 1. Niveles de desempeño en matemáticas de 2 instituciones en la prueba saber 11	27
Figura 2. Colegio municipal María Concepción Loperena	39
Figura 3. Jardín de los poliedros	41
Figura 4. Modelo pedagógico Institución educativa	42
Figura 5. Habilidades de los niveles de Van Hiele según Hoffer	65
Figura 6. Estructura triádica del signo lingüístico según Platón	
Figura 7. Estructura triádica del signo lingüístico según Aristóteles	
Figura 8. Modelo de representación de Peirce	
Figura 7. Cono del aprendizaje según Dale	75
Figura 8. Poliedros regulares	78
Figura 9. Sólidos platónicos encontrados en un yacimiento neolítico en Escocia	79
Figura 10. Procesos cognitivos desarrollados durante la investigación de acuerdo con el modelo de representación de Duval	91
Figura 11. Marco referencial inicial y final	92
Figura 12. Clasificación de unidades figúrales	93
Figura 13. Representaciones gráficas de las formas de las cometas	94
Figura 14. Proceso de construcción del modelo de la cometa	95
Figura 15. Actividades festival de cometas	95
Figura 16. Representación y proceso de medición de las cometas	96
Figura 17. Estrategias para identificar unidades figúrales	97
Figura 18. Estrategias de evaluación	98

Figura 19. Identificación de las unidades figurales de la cometa que representó a Corea del Norte	99
Figura 20. Pregunta de la competencia comunicativa del componente Espacial Métrico	111
Figura 21. Pregunta competencia razonamiento del componente Espacial Métrico	112
Figura 22. Pregunta competencia resolución de problemas del componente Espacial Métrico	113
Figura 23. Identificación de la forma de la cometa	116
Figura 24. Clasificación de la cometa	117
Figura 25. Tamaño de la cometa	118
Figura 26. Altura de las cometas	119
Figura 27. Requisito de la cometa	120
Figura 28. Elevación del modelo de la cometa	122
Figura 29. Visita del escritor Serafín Bautista	123
Figura 30. Exposición de cometas	125
Figura 31. Retos pigargo	126
Figura 32. Premiación de ganadores	127
Figura 33. Proceso de identificación de los atributos en la representación de una cometa	129
Figura 34. Representación gráfica no congruente con la cometa	130
Figura 35. Proceso operacional para el cálculo del tamaño de la cometa por proporcionalidad	130
Figura 36. Existe alguna relación entre el área y el perímetro de las cometas	132
Figura 37. Existen cometas que tienen la misma área	133
Figura 38. Existen cometas que tengan el mismo perímetro	133

Figura 39. Qué influye para que la cometa vuele lo más alto posible	134
Figura 40. Criterios para ordenar cometas con igual perímetro	135
Figura 41. Ejemplo de respuestas de los estudiantes	138
Figura 42. Modelo Instructivos De Van Hiele	158
Figura 43. Modelo de dodecaedro en software Poly pro	164

## Lista de Anexos

	<b>pág.</b>
Anexo 1. Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE) 2016 de dos instituciones.	196
Anexo 2. Porcentaje de estudiantes por niveles y grados en las pruebas saber de las instituciones	197
Anexo 3. Prueba diagnóstica competencia comunicativa	198
Anexo 4. Dificultades de la prueba de la competencia comunicativa	199
Anexo 5. Prueba competencia razonamiento	200
Anexo 6. Dificultades en la prueba de la competencia razonamiento	201
Anexo 7. Prueba competencia resolución	203
Anexo 8. Dificultades de la prueba de la competencia resolución	204
Anexo 9. Resumen de dificultades en las pruebas diagnósticas por competencias y componentes	205
Anexo 10. Prueba diagnóstica de geometría	206
Anexo 11. Tabla resultados prueba diagnostico geometría	208
Anexo 12. Folleto instructivo festival de cometas	209

## Introducción

La presente investigación, utiliza el Aprendizaje Basado en Proyectos, como estrategia pedagógica para lograr el fortalecimiento del pensamiento geométrico utilizando el modelo instruccional de Van Hiele, con estudiantes de 6° C de la Institución Educativa Colegio Municipal María Concepción Loperena.

Así mismo, tiene como objeto de estudio el proceso de aprendizaje de 33 estudiantes de un total de 136 en sexto grado comprendidos entre edades de 11 a 14 años en la sede principal de la institución educativa, para lo cual, se utilizó como instrumentos de recolección de información los resultados históricos de las 2 instituciones que se fusionaron para conformar la nueva institución educativa (2017) con su respectivo análisis, prueba diagnóstica, observación directa, diario pedagógico y entrevista a padres de familia.

Del mismo modo, teniendo en cuenta que los resultados de las dos instituciones en quinto grado del año 2016 no evidenciaron resultados contundentes, se programaron 3 pruebas internas al inicio del año escolar para identificar con claridad el componente y la competencia con mayor debilidad.

Según el marco del modelo pedagógico cognitivo de Vigotsky, propuesto por la institución, que considera al maestro un facilitador del desarrollo de estructuras mentales en el estudiante para que pueda construir aprendizajes más complejos y enfatiza la importancia de la interacción social, considerando que el estudiante aprende más eficazmente, y la teoría del desarrollo del pensamiento

espacial de Piaget, según la edad de los estudiantes se fundamentó la presente investigación cualitativa, tipo investigación acción.

Según Freudental, la Geometría es “agarrar el espacio.... ese espacio donde el niño vive, respira y se mueve. El espacio que el niño debe aprender a mover, explorar, conquistar para vivir, respirar y moverse mejor en él” (NTCM, 1989) y una de las formas que permite la formación intelectual de los estudiantes mediante temas accesibles que posibilitan el desarrollo de capacidades: desarrollo de la capacidad espacial, la intuición y del gusto por la belleza, según Miguel de Guzmán.

La revisión de la práctica docente, exige proponer nuevas experiencias que le permita al estudiante utilizar los conceptos geométricos en una situación real y cotidiana como es la construcción de una cometa para la participación de un festival cuyo propósito es escoger la más grande que vuele más alto.

La introducción del signo “Pigargo” (águila de gran tamaño que vive la mayor parte del tiempo en Rusia) como instrumento de aprendizaje, permitió transformar un objeto de conocimiento en uno cultural, donde cada cometa representaba un país correspondiente a un equipo del mundial de fútbol, logrando una transversalidad con otras áreas del conocimiento como Lenguaje, Sociales y Naturales.

Adicionalmente, exigió el uso de representación de la cometa que permitiera la comparación de sus atributos en las variaciones visuales después del festival, que a través de la percepción los

estudiantes lograron identificar las unidades figurales que la componen, para lo cual se tuvo en cuenta la teoría de representación de Rymond Duval como instrumento de interpretación.

El presente trabajo está organizado en 6 capítulos de la siguiente manera: el primero dedicado a la contextualización de la investigación, la descripción de la situación problemática de las dos instituciones que se fusionaron para conformar la nueva institución y los objetivos; el segundo capítulo presenta los planteamientos teóricos que fundamenta la propuesta; el tercer capítulo, la metodología para alcanzar los objetivos; el cuarto capítulo la propuesta que consiste en la secuencia didáctica sobre la construcción de la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas; el quinto capítulo presenta el análisis y resultados de las actividades realizadas y para finalizar las conclusiones y recomendaciones

## **1. Problema de Investigación**

### **1. Contextualización de la Investigación**

La presente investigación se llevó a cabo en el segundo semestre del año 2017 en el Colegio Municipal María Concepción Loperena, institución creada a finales del año 2016 por políticas de racionalización para responder a cobertura de dos instituciones de la ciudad de Cúcuta: Colegio Municipal de Bachillerato, actual sede principal, y el CASD María Concepción Loperena, desplazada a la actual sede principal, relativamente cercanas entre sí, que en común acuerdo crearon el nombre de la nueva institución.

Por lo anterior, se procede a hacer un análisis de los resultados de las pruebas censales de dichas instituciones del año 2016. Se refiere que a partir del 2017 se viene rediseñando el Proyecto Educativo Institucional PEI, con base en los existentes priorizados en el momento un modelo pedagógico cognitivo social para unificar criterios dados anteriormente por cada una de las instituciones anteriores y así configurar un nuevo PEI.

Desde el punto de vista pedagógico, se adoptó el modelo cognitivo-social donde el desarrollo de la mente es el propósito central y la mediación curricular se canaliza involucrando lo social, orientado a formar ciudadanos líderes creativos, responsables y emprendedores.

Los resultados del Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE) de cada una de las instituciones fusionadas en los diferentes niveles para el año 2016, se analizaron en el Día “E” en

el año 2017 en sus respectivos componentes [Desempeño (D), Progreso (P), Eficiencia (E) y Ambiente(A)]. (Ver Anexo 1)

En la Tabla 1 se objetiviza en el nivel básica Primaria los estudiantes que llegaron a la institución matriculados en sexto grado, sujetos cognoscentes, presentaron los siguientes resultados:

**Tabla 1. Índice sintético de calidad educativa (ISCE) 2016 de las dos instituciones**

<b>BASICA PRIMARIA</b>													
	<b>COLEGIO MUNICIPAL DE BACHILLERATO</b>							<b>COL. TECNICO MARIA CONCEPCION LOPERENA</b>					
<b>AÑO</b>	<b>D</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>A</b>	<b>ISCE</b>	<b>MMA</b>		<b>D</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>A</b>	<b>ISCE</b>	<b>MMA</b>
2018						4,89							5,67
2017	2,68	1,62	0,94	0,75	5,98	4,65		2,80	2,50	0,94	0,75	6,98	5,44
2016	2,62	1,64	0,97	0,74	5,96	4,47		3,19	3,14	0,99	0,74	8,06	5,27
2015	2,61	9,19	0,86	0,75	4,41			2,67	0,88	0,93	0,73	5,22	

Fuente: ISCE Colegio Municipal de Bachillerato. ISCE Col Técnico María Concepción Loperena

En el Colegio Municipal de Bachillerato, el histórico de los años en el Índice Sintético de calidad ISCE fue de 4,41, 5,96 y 5,98, correspondientes a los años 2015, 2016 y 2017 respectivamente. Se observa un aumento continuo en todos los componentes hasta el año 2017, motivo que lo hizo merecedor de una nota de felicitación por parte del Área de Calidad de la

Secretaría de Educación Municipal y a su vez recibir el incentivo económico correspondiente por parte del Ministerio de Educación Nacional.

En el Instituto Técnico María Concepción Loperena, los resultados en el mismo nivel fueron de 5,22, 8,06 y 6,98, correspondientes al mismo periodo de tiempo. Este, muestra una disminución respecto al año anterior.

Continuando con el informe histórico de las dos instituciones fusionadas, se observa que el Colegio Municipal de Bachillerato en el área de Matemáticas presenta en tercer grado en el año 2015, el 2% en el nivel insuficiente y en el 2016 16%, mostrando un aumento del 14%. Del mismo modo, en el nivel mínimo en el 2015 obtuvo 23% y se mantuvo en el mismo porcentaje en el 2016. En el nivel Satisfactorio pasó del 30% en el 2015 al 37% en el 2016, evidenciando un aumento del 7%. Igualmente en el nivel Avanzado en el 2015 fue del 44% y en el 2016 del 23%, mostrando una disminución del 21%.

En el Instituto Técnico CASD María Concepción Loperena en el área de Matemáticas presenta en tercer grado en el año 2015, el 0% en el nivel insuficiente y en el 2016, el 17%, mostrando un aumento considerable del 17%. Del mismo modo, en el nivel mínimo en el 2015 obtuvo 0% en el nivel insuficiente y en el 2016 el 19%, mostrando un aumento considerable del 19%. En el nivel Satisfactorio pasó del 5% en el 2015 al 31% en el 2016, evidenciando un aumento considerable del 26%. Igualmente en el nivel Avanzado en el 2015 fue del 95% y en el 2016 del 33%, mostrando una disminución considerable del 62%.

De igual manera, el Colegio Municipal de Bachillerato en el área de Matemáticas presenta en Quinto grado en el año 2015, el 10% en el nivel insuficiente y en el 2016 el 13%, mostrando un aumento del 3%. Del mismo modo, en el nivel mínimo en el 2015 obtuvo 29% en el nivel

insuficiente y en el 2016 28%, mostrando una leve disminución del 1%. En el nivel Satisfactorio pasó del 30% en el 2015 y permaneció con el mismo resultado en el 2016. Igualmente en el nivel Avanzado en el 2015 fue del 31% y en el 2016 del 30 %, mostrando una leve disminución del 1%.

En el Instituto Técnico CASD María Concepción Loperena en el área de Matemáticas presenta en Quinto grado en el año 2015, el 12% en el nivel insuficiente y en el 2016 2%, mostrando una disminución considerable del 10%. Del mismo modo, en el nivel mínimo en el 2015 obtuvo 29% en el nivel insuficiente y en el 2016 el 12%, mostrando una disminución importante del 17%. En el nivel Satisfactorio pasó del 39% en el 2015 al 26% en el 2016, evidenciando una disminución importante del 13%. Igualmente en el nivel Avanzado en el 2015 fue del 21% y en el 2016 del 61 %, mostrando una aumento considerable del 40 %.

Igualmente el Colegio Municipal de Bachillerato en el área de Matemáticas presenta en Noveno grado en el año 2015, el 21% en el nivel insuficiente y en el 2016 el 9%, mostrando una disminución importante del 12%. Del mismo modo, en el nivel mínimo en el 2015 obtuvo 59% en el nivel insuficiente y en el 2016 40%, mostrando una disminución importante del 19%. En el nivel Satisfactorio pasó del 20% en el 2015 al 47% en el 2016, mostrando un aumento considerable del 27%. En el nivel Avanzado en el 2015 fue del 1% y en el 2016 del 4%, mostrando un leve aumento del 3%.

El Instituto Técnico CASD María Concepción Loperena en el área de Matemáticas presenta en Noveno grado en el año 2015, el 11% en el nivel insuficiente y en el 2016 15%, mostrando un aumento 4%. Del mismo modo, en el nivel mínimo en el 2015 obtuvo 57% en el nivel insuficiente y en el 2016 el 55%, mostrando una disminución del 2%. En el nivel Satisfactorio pasó del 29%

en el 2015 al 27% en el 2016, evidenciando una disminución del 2%. Igualmente en el nivel Avanzado en el 2015 fue del 3%, permaneciendo en el mismo porcentaje para el año 2016.

En general, el reporte de la excelencia en el 2016 del área de matemáticas en el componente progreso, muestra la necesidad de disminuir el porcentaje de estudiantes con nivel bajo en quinto y onceavo grado, y aumentar el porcentaje del nivel avanzado en estudiantes de grado noveno, otros como lo evidencia el Anexo 2

De otra parte, teniendo en cuenta el informe de las pruebas Saber 2016 en los resultados del informe por colegio que el Ministerio de Educación Nacional presenta anualmente, el Colegio Municipal de Bachillerato presenta debilidades en Lenguaje y Matemáticas. Específicamente en Matemáticas el 28% en la competencia comunicativa, el 32% en la competencia Razonamiento y el 35% en la competencia resolución de problemas de los estudiantes, no contestaron correctamente las preguntas correspondiente a la prueba y en el I.T. María Concepción Loperena 27%, 40% y 40% respectivamente.

En general, el informe muestra que los estudiantes de las dos instituciones, en el grado 5, presentan dificultad en la competencia comunicativa principalmente en: Identificar unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones ni establece relaciones entre ellas, reconocer e interpretar números naturales y fracciones en diferentes contextos.

Así mismo, en la competencia razonamiento, presentan dificultad principalmente en: Establecer el número de elementos de un conjunto en un contexto aleatorio mediante combinaciones y permutaciones, comparar y clasificar objetos tridimensionales y figuras bidimensionales, justificar y generar equivalencias entre expresiones numéricas, reconocer

nociones de paralelismo y perpendicularidad en diferentes contextos y usarlos para construir y clasificar figuras planas y sólidos, describir y argumentar acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas cuando una de las magnitudes se fija, reconocer y predecir patrones numéricos, conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano.

De igual manera, en la competencia Resolución de problemas presentan dificultad principalmente en resolver problemas que requieren representar datos relativos al entorno usando una o diferentes representaciones, utilizar relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición.

De otro lado, analizando los resultados de las pruebas saber 3°, 5° y 9° orientan las acciones de los procesos educativos en dirección al fortalecimiento de las competencias del área de Matemáticas respecto a otras instituciones con promedio similares al grado evaluado. De ahí la necesidad de evaluar los resultados para favorecer el desarrollo de actividades pedagógicas que

logren superar los niveles inferiores de desempeño en el área y que permitan llegar a niveles superiores.

Las Tabla 2 y Tabla 3 resumen los resultados de dichas pruebas teniendo en cuenta las competencias y componentes del área de matemáticas de tal manera que las celdas coloreadas de verde representan las fortalezas y las celdas en rojo las debilidades.

**Tabla 2. Fortalezas y debilidades de los estudiantes por prueba en las competencias del área de matemáticas de las dos Instituciones**

COLEGIO MUNICIPAL DE BACHILLERATO				I.T. MARIA CONCEPCION LOPERENA			
	Comunicación	Razonamiento	Resolución		Comunicación	Razonamiento	Resolución
3°	Verde	Rojo	Rojo	3°	Verde	Verde	Rojo
5°	Rojo	Verde	Verde	5°	Rojo	Verde	Verde
9°	Verde	Blanco	Rojo	9°	Verde	Rojo	Rojo

Fuente: Informe Institucional del ISCE del Colegio Municipal de Bachillerato y Col Técnico María Concepción Loperena

**Tabla 3. Fortalezas y debilidades de los estudiantes por prueba en los componentes del área de matemáticas de las dos Instituciones**

COLEGIO MUNICIPAL DE BACHILLERATO				I.T. MARIA CONCEPCION LOPERENA			
	Numérico Variacional	Geométrico Métrico	Aleatorio		Numérico Variacional	Geométrico Métrico	Aleatorio
3°	Verde	Blanco	Rojo	3°	Verde	Rojo	Verde
5°	Rojo	Blanco	Verde	5°	Verde	Blanco	Rojo
9°	Blanco	Verde	Rojo	9°	Verde	Blanco	Rojo

Fuente: Informe Institucional del ISCE del Colegio Municipal de Bachillerato y Col Técnico María Concepción Loperena

Al observar los resultados de las pruebas saber de las dos instituciones Colegio Municipal de Bachillerato, el I.T. María Concepción Loperena, se puede hacer las siguientes consideraciones:

En tercer grado, el Colegio Municipal de Bachillerato, presenta un promedio similar a los establecimientos educativos de nivel municipal y nacional, con fortalezas en el componente numérico Variacional en las competencias comunicación, representación y modelación; y debilidades en el componente Geométrico – Métrico en las competencias de razonamiento, argumentación, planteamiento y resolución de problemas. Del mismo modo, el I.T. María Concepción Loperena, presenta promedio similar a establecimientos educativos de nivel municipal y nacional, con fortalezas en el componente numérico variacional en las competencias comunicación, representación y modelación, razonamiento, argumentación, y debilidades en el componente Geométrico – Métrico en la competencia planteamiento y resolución de problemas respecto a las instituciones con promedios similares al área y grado evaluados.

En grado 5°, el promedio del Colegio Municipal de Bachillerato es superior a las instituciones de nivel municipal y nacional, con fortalezas en el componente Aleatorio en las competencias de Resolución y Razonamiento; y debilidades en el Componente numérico Variacional en las competencias de comunicación, representación y modelación respecto a las instituciones con promedios similares al área y grado evaluados. Por otro lado, el I.T. María Concepción Loperena, el promedio es superior a las instituciones de nivel municipal y nacional, con fortalezas en el componente Numérico Variacional en las competencias de Razonamiento y argumentación, planteamiento y resolución de problemas y debilidades en el Componente Aleatorio en la

competencia de comunicación, representación y modelación respecto a las instituciones con promedios similares al área y grado evaluados.

En grado 9°, el Colegio Municipal de Bachillerato presenta promedio similar a establecimientos educativos de nivel municipal y nacional, con fortalezas en el componente Geométrico Métrico en las competencias comunicación, representación y modelación; y debilidades en el componente Aleatorio en las competencias de razonamiento, argumentación, respecto a las instituciones con promedios similares al área y grado evaluados. Así mismo, el I.T. María Concepción Loperena, presenta promedio similar a establecimientos educativos de nivel municipal y nacional, con fortalezas en el componente Numérico Variacional en las competencias comunicación, representación y modelación y debilidades en el componente Aleatorio en las competencias de razonamiento, argumentación, planteamiento y resolución de problemas, respecto a las instituciones con promedios similares al área y grado evaluados.

Por otro lado, en el año 2016, presentaron la prueba Saber 11, un total de 99 estudiantes por parte del colegio Municipal de Bachillerato con un promedio de 263 con una desviación de 38, y

143 estudiantes por la I.T. María Concepción Loperena con un promedio de 260 con una desviación de 39 como muestra la tabla 3:

**Tabla 4. Resultados pruebas saber 11 2016 – 2 de dos instituciones Educativas**

<b>Colegio Municipal de Bachillerato</b>			<b>I.T. María Concepción Loperena</b>		
99 estudiantes			143 estudiantes		
<b>Pruebas</b>	<b>Prom.</b>	<b>Desv.</b>	<b>Pruebas</b>	<b>Prom.</b>	<b>Desv.</b>
Lectura Crítica	54	8	Lectura Crítica	52	9
Matemáticas	56	8	Matemáticas	53	9
Sociales y Ciudadanas	53	9	Sociales y Ciudadanas	50	10
Ciencias N.	57	7	Ciencias N.	53	8
Inglés	51	9	Inglés	53	9

Fuente: Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2017

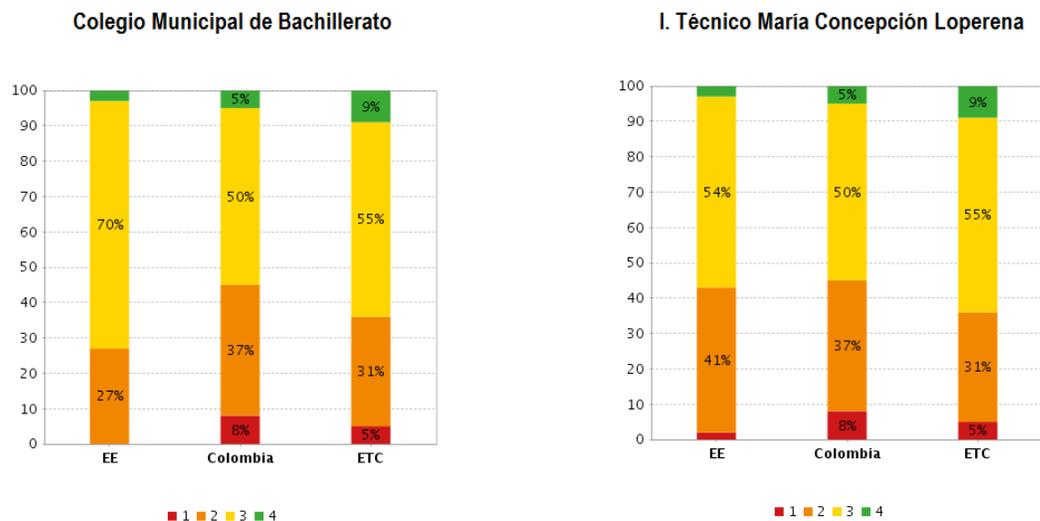
Los resultados por niveles en el área de matemáticas presentan una diferencia significativa en los desempeños 2 y 3 y una debilidad comparativa respecto a nivel municipal y nacional de los resultados de las dos instituciones respecto al nivel 4 o mayores desempeños de la prueba.

**Tabla 5. Niveles de desempeño en matemáticas de 2 instituciones en la prueba saber 11**

Instituciones Educativas	1	2	3	4
Col. Municipal de Bto.	0 %	27 %	70 %	3 %
I.T. María Concepción L.	2 %	41 %	54 %	3 %
Entidad Territorial Certificada	5 %	31 %	55 %	9 %
Colombia	8 %	37 %	50 %	5 %

Fuente: [www.icfes.gov.co](http://www.icfes.gov.co)

La Figura 1, detalla de manera gráfica la información resumida en la tabla 4:



Fuente: Informe Institucional del ISCE del Colegio Municipal de Bachillerato y Col Técnico María Concepción Loperena

**Figura 1. Niveles de desempeño en matemáticas de 2 instituciones en la prueba saber 11**

En general, ambas instituciones presentan comportamientos similares en las pruebas censales y saber 11 con la necesidad de disminuir el porcentaje de estudiantes en nivel mínimo (1) y aumentar el porcentaje de estudiantes en nivel superior (4); además, los resultados muestran que el Colegio Municipal de Bachillerato estaba mejorando sus procesos de manera continua los últimos años en todos sus niveles, mientras que el I.T. María Concepción Loperena, tenía grandes fortalezas principalmente en la Básica Primaria como se evidencian en el ISCE.

En éste mismo sentido y observando los resultados en el Área de matemáticas, se destaca que, aunque el porcentaje promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje evaluado descubre fortalezas comparativas respecto a nivel local y nacional, es indispensable la implementación de

prácticas pedagógicas que le permitan al estudiante un desarrollo potencial de sus capacidades, necesarias en un mundo cada vez más competitivo.

**Tabla 6. Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en matemáticas de la prueba saber 11 de dos instituciones educativas**

<b>Aprendizaje</b>	<b>EE1</b>	<b>IE2</b>	<b>COL.</b>	<b>ETC</b>
Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática, presentada en distintos formatos	47 %	50 %	54 %	48 %
Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas	39 %	44 %	46 %	40 %
Frente a un problema que involucra información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas	48 %	51 %	53 %	47 %

Fuente: [www.icfes.gov.co](http://www.icfes.gov.co)

Es importante exponer la idea de que se hizo necesario el análisis de los resultados de las pruebas en diferentes niveles, dado que el proceso del desarrollo matemático y geométrico es secuencial y progresivo y de las diferencias que queden en los grados iniciales se pueden evidenciar en grados posteriores, que se evidencian en los informes entregados por el MEN

Teniendo en cuenta que los resultados de las pruebas saber de las dos instituciones en quinto de primaria del año 2016 no evidenciaron resultados contundentes, se programaron 3 pruebas internas al inicio del año escolar para identificar con claridad el componente y la competencia de

mayor dificultad en estudiantes de sexto grado para identificar el objeto de la presente investigación.

Se realizaron 3 pruebas utilizando una por cada competencia: Comunicación, representación y modelación (Anexo 3-10 Preguntas), razonamiento y argumentación (Anexo 4-10 Preguntas) y resolución de problemas (Anexo 5-12 Preguntas). Al mismo tiempo, cada prueba evaluaba las competencias (C, R, RE) y los componentes: Numérico Variacional (N), Espacial Métrico (E) y Aleatorio (A), para identificar las debilidades en el área de matemáticas la prueba saber de 5° grado del año 2015

Debido a los resultados obtenidos en las tres pruebas diagnósticas, (Ver anexo 6), se elige el componente Métrico Espacial como tema de estudio en la presente investigación en la competencia razonamiento y argumentación.

Así mismo, se realizó una entrevista a los padres de los estudiantes tomados en la muestra para realizar un análisis del acceso a tecnologías de la información con el que cuenta los estudiantes, como medio de comunicación, del cual se extrajo información relevante importante para la implementación de la propuesta de investigación.

Los resultados evidencian poca o escaso acceso de herramientas tecnológicas, puesto que 14 de los estudiantes no tienen computadoras o tabletas en sus hogares, es decir, solamente en la institución manejan éste tipo de tecnología. Así mismo 12 estudiantes tienen acceso a internet y

acceden a través de computadores o Tabletas generalmente para hacer consultas académicas y tareas escolares.

Adicionalmente, el uso de la plataforma institucional se maneja semanalmente por 11 padres de familia, mientras 13 expresan que nunca utilizan ésta herramienta, quienes consideran muy importante el uso de la tecnología en el proceso educativo de sus hijos, pero los costos de poseerla son superiores a sus capacidades económicas.

La nueva Institución Colegio Municipal María Concepción Loperena, tiene el compromiso de adaptarse a las circunstancias actuales, analizando las debilidades y apoyando las fortalezas para trazar un nuevo rumbo con trabajo colectivo que conlleve a una ruta de mejoramiento que promueva la paz y la sana convivencia.

### **1.1 Situación Problemática**

**Formulación del problema.** Teniendo en cuenta que la institución fue creada por la fusión de 2 instituciones con identidades diferentes, resultados históricos similares y estudiantes nuevos, se hizo necesario realizar una prueba diagnóstica, que consistía en 3 pruebas y por competencia que evaluara los componentes del área de matemáticas, utilizando preguntas de la prueba saber 2015 de grado quinto.

Al analizar los resultados del diagnóstico, se evidencia las dificultades en el Componente Espacial métrico en la competencia razonamiento, lo cual motiva a desarrollar una investigación teniendo en cuenta las directrices propuestas por el MEN a través de los estándares, DBA, matriz

de referencia, los lineamientos curriculares y el PEI de la institución, que responda a las necesidades locales, regionales y nacionales

Por tal motivo, se requiere desarrollar una estrategia que permita que los estudiantes de sexto grado utilicen todas sus potencialidades en el componente métrico espacial para cumplir con un reto utilizando una metodología activa que desarrolle el razonamiento teniendo en cuenta los conocimientos previos, el contexto socio-cultural en el que vivimos, en especial, el espacio donde

el estudiante vive, respira y se mueve como la excusa perfecta para “vivir, respirar y moverse mejor en él” (Freudental en el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, 1989, p.48)

**1.1.2 Pregunta de investigación.** ¿Cómo fortalecer el pensamiento geométrico en los estudiantes de 6° del Colegio Municipal María Concepción Loperena?

**1.1.3 Objetivos.** Se ven a continuación:

**1.1.3.1 Objetivo general.** Fortalecer el Razonamiento geométrico en estudiantes de 6° mediante la implementación de una propuesta pedagógica utilizando el Aprendizaje basado en proyectos.

**1.1.3.2 Objetivos específicos.** Diagnosticar las competencias matemáticas de los estudiantes de 6° grado del Colegio Municipal María Concepción Loperena.

Aplicar una propuesta pedagógica utilizando del modelo instructivo de Van Hiele.

Evaluar los resultados de la propuesta pedagógica, que evidencie el mejoramiento cognitivo en geometría

## **1.2 Justificación**

De acuerdo a los Estándares Básicos, el desarrollo de competencias matemáticas requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos puesto que no se alcanzan por generación espontánea, motivo por el cual se ha querido promover un proyecto en el que a través del Aprendizaje Basado en Proyectos, se desarrollen las competencias matemáticas

orientadas al desarrollo del razonamiento geométrico, despertando el interés por las Matemáticas, la creatividad, y la transversalidad con otras áreas del conocimiento.

Los estudios en Educación Matemática, según UNESCO (1986) que todavía siguen vigente, muestran que generalmente, en la educación básica, se presta mayor atención en la enseñanza de la aritmética que a la geometría, y en los currículos que desarrollan las actividades geométricas, muestran poca conexión con el mundo espacial fuera del aula, desconectada de la realidad, originando poco interés en su aprendizaje (Bishop,1986).

Según Freudental, (citado por Guzmán, 1989) la Geometría es “agarrar el espacio.... ese espacio donde el niño vive, respira y se mueve. El espacio que el niño debe aprender a mover, explorar, conquistar para vivir, respirar y moverse mejor en él” (p.15). y una de las formas que permite la formación intelectual de los estudiantes mediante temas accesibles que permitan desarrollar capacidades: Desarrollo de la capacidad espacial, la intuición y del gusto por la belleza,

De otro modo, Font, Godino, Planas & Acevedo (sf) expresan sobre el discurso matemático que el objeto “metáfora” está presente como “objetos con propiedades” en el discurso matemático y facilita el paso de la representación de un objeto a un objeto ideal.

De ahí que, la importancia de utilizar la forma como los estudiantes ven la realidad utilizando una “metáfora” llamada “Pigargo” (Águila más grande del mundo que vive en su mayoría en Rusia) como signo de representación para identificar las unidades figurales de un objeto cotidiano (cometa) que se convierte en un objeto de conocimiento a través de un reto propuesto en la

estrategia “Festival Mundialista de Cometas Pigargo” que le permita ver el mundo espacial de una manera real y le permita desarrollar procesos de razonamiento.

Así mismo, la mayoría de los estudios de la didáctica de la matemática, evidencian el papel de la semiótica cuyo representante Rymond Duval (1993) expone que no puede haber aprendizaje en matemática si no hay representación y en el caso de la geometría, se debe con mayor razón, distinguir un objeto de su representación.

Por lo tanto, el desarrollo del aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus “traducciones mutuas”, favorece la coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes que no resulta de los aprendizajes clásicos centrados en los contenidos de la enseñanza.

Por tal motivo, urge realizar actividades que exija el uso de la representación que les permita a los estudiantes contrastar sobre un soporte material homogéneo los atributos que se destaquen en el campo perceptivo de tal manera que forme una mancha visible susceptible a variaciones visuales que puedan compararse y agruparse para poder definir los elementos constitutivos de una figura.

Este salto cualitativo en el desarrollo de las “competencias” y los “desempeños”, aparecen ligados a la coordinación de sistemas semióticos en los estudiantes que constata una completa modificación de las iniciativas y en las “demarches” (procedimiento, todo lo que alguien hace para

llegar a un resultado) de los estudiantes para efectuar las transformaciones matemáticas, para controlarlas y para que la ejecución sea más rápida.

Adicionalmente, el Ministerio de Educación Nacional, plantea el desarrollo del razonamiento lógico apoyado en contextos y materiales físicos y manipulativos que permitan percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones, competencias necesarias en la toma de decisiones que como todo ciudadano debe afrontar en situaciones de la vida diaria.

Por otro lado, la Geometría ha demostrado ser una herramienta indispensable en el desarrollo de los pueblos como los egipcios en la construcción de las pirámides de Gizeh y Abuzir en el imperio antiguo (2660-2180 a. de C. ), y su enseñanza presenta cierto nivel de dificultad que conlleva a la reflexión continua de mejorar su comprensión a través de una didáctica acorde a los intereses de los estudiantes y las expectativas de una sociedad moderna desde una visión científica, cultural y tecnológica comprometida con el medio ambiente y la convivencia pacífica con sus semejantes, como lo expresa la misión de la institución.

Para el desarrollo del pensamiento geométrico los lineamientos de Matemáticas proponen, el modelo educativo de Van Hiele, quien afirma que “la consecución de niveles constituye la garantía de que el proceso de aprendizaje tendrá resultados duraderos” (1957, pág. 89) y pretende describir con mayor exactitud la evolución de los niveles de razonamiento a través de 5 fases: Visualización, Análisis, deducción informal, deducción formal y rigor, que abarcan 2 aspectos, según Jaime

(1993): Afirma que, Descriptivo, mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de éstos.

Instructivo, que marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

El modelo se centra en el proceso del razonamiento en el aprendizaje de la geometría de una manera secuencial, ordenada y sin saltar ningún nivel, donde el estudiante adquiere una nueva red de relaciones mentales más amplia que la anterior, completándola y reformulándola.

Adicionalmente, la teoría de las inteligencias múltiples de Howard Gardner plantea que el pensamiento espacial a través de representación y manipulación de información en la resolución de problemas, es una de las inteligencias indispensable para el desarrollo del pensamiento científico que se evidencia en la mayoría de profesiones científicas y técnicas tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación y otras disciplinas científicas como la química, física, matemáticas. Porque como dice Bachellard (sf) “Tornar geométrica la representación, vale decir dibujar los fenómenos y ordenar en serie los acontecimientos decisivos de una experiencia; he ahí la primera tarea en la que se funda el pensamiento científico” (p.25).

Así mismo, Melina Furman propone en su libro “mentes curiosas”, el modelo de buenas prácticas como una de las formas de enseñar el pensamiento científico, integrado por: La contextualización del aprendizaje, la participación de prácticas auténticas de indagación y de

diseño y la necesidad de ofrecer espacios de intercambio y reflexión para hacer el pensamiento visible.

De igual manera y en concordancia con los resultados de los estudiantes en las pruebas saber de 5° grado analizados, en la contextualización de la institución y al diagnóstico realizado, el razonamiento es la competencia con mayor dificultad en el componente Espacial Métrico (Anexo)

El reto del docente es propiciar el desarrollo de capacidades a través de la intuición directa de lo concreto en la manipulación de objetos y en experiencias interesantes de acuerdo con la cultura, que conlleve a un acercamiento al conocimiento matemático utilizando el razonamiento como la mejor estrategia para encontrar utilidad en lo que aprende, reflexione y tenga la oportunidad de desarrollar la imaginación y la capacidad para resolver problemas dentro y fuera del aula de clase.

Se espera con el desarrollo del proyecto, no solamente fortalecer el razonamiento geométrico a través de la transversalidad del conocimiento sino también, el desarrollo del pensamiento científico, competencias ciudadanas, culturales y laborales necesarias para la educación del hombre en la sociedad del conocimiento, acorde con la formación humanista y laboral propuesta por la institución educativa para el año 2020

### **1.3 Contextualización de la Institución Educativa**

El departamento Norte de Santander se encuentra ubicado al noroeste del país sobre la región Andina con grandes recursos naturales, pero con una deficiente prestación de servicios públicos sociales (educación, salud, vías, etc.), consecuencia del escaso desarrollo socioeconómico cuya

economía es fluctuante y presenta alta dependencia de la situación fronteriza (República Bolivariana de Venezuela).

Debido a dicha dependencia, lo ha hecho un departamento vulnerable en el manejo económico a nivel nacional, a tal punto que el cierre de la frontera ha incidido notablemente en el aumento del desempleo, la inseguridad, cobertura en salud y educación, generando un desgaste económico por la falta de políticas migratorias que afronten la situación actual en beneficio de la comunidad regional.

Cúcuta, su capital, es la ciudad que concentra la mayor parte del poder económico y político de la región, denominada la Perla del Norte y en el año 2014 considerada como la segunda ciudad del país en donde el viento sopla con mayor fuerza en el mes de agosto.

El Colegio Municipal María Concepción Loperena (Colmumacol) es una institución ubicada en la comuna 2 Centro Oriental de la ciudad de Cúcuta, creada por políticas de racionalización fusionando 2 instituciones de la ciudad, según resolución # 0274 del 13 de febrero del 2017, con el propósito de responder a las necesidades de una comunidad educativa y cuya planta física ofrece oportunidades de aprendizaje en ambientes naturales que actualmente se están adecuando

según las condiciones dadas, rodeado en su mayoría por centros de salud, clínicas, el hospital universitario, universidades y pequeños comercios, y familias ubicadas en barrios y condominios.



**Figura 2. Colegio municipal María Concepción Loperena**

Fuente: Elaboración propia

La presente investigación se desarrolla en la sede principal ubicada en Avenida 11E No. 2N – 117 del barrio Quinta Oriental, y se distingue por su amplia planta física, por sus extensas zonas verdes y excelentes campos deportivos, con un área aproximada de 30.000 m<sup>2</sup>.

Cuenta con 3 sedes, distantes entre sí: La sede 1 María Ofelia Villamizar está ubicada en la Calle 16 KN N° 13A-61 en el barrio Esperanza Martínez, (Avenida Las Américas), la sede 2 Domingo Sabio 2000, ubicada en la Calle 16 HN n° 15-96 en el Barrio Brisas del Aeropuerto y la sede 3 Colegio Básico Guaimaral N° 25, ubicado en la avenida 12 E # 9 BN – 49 del barrio Ciudad Jardín.

Actualmente ofrece educación formal en los niveles de pre-escolar, Básica primaria, Básica secundaria y Media Técnica, con proyectos flexibles en alfabetización y educación formal de

adultos según resolución de aprobación # 2446 del 6 de noviembre de 2017 con 9 especialidades en convenio con el Sena y la Universidad de Pamplona (Unipamplona)

La institución se propone como misión, ofrecer una educación integral para la paz y la sana convivencia con una propuesta pedagógica y técnica atractiva para el desarrollo de competencias que favorezcan el proyecto de vida de los estudiantes, teniendo como ruta de calidad, la excelencia.

Adicionalmente hacia el año 2020 la Institución espera, se consolide como una institución oficial reconocida a nivel nacional por su compromiso con la formación humanista y laboral para la paz y la sana convivencia de los educandos, capaces de ser líderes comprometidos con la transformación de su entorno social con una identidad propia a través de espacios físicos como el jardín de los poliedros, único en el ciudad, donde el estudiante interactúa dinámicamente y de

manera natural con 3 de los 5 poliedros regulares, ofreciendo ventajas visuales y cognitivas en el manejo del espacio.



**Figura 3. Jardín de los poliedros**

Fuente: Elaboración propia

Los estudiantes en su mayoría no solo provienen de los barrios cercanos, sino de diferentes barrios de la ciudad atraídos por los bajos costos educativos, la ubicación geográfica del colegio, teniendo en cuenta que las vías de acceso son excelentes y permiten desde cualquier punto del área metropolitana llegar hasta la institución es una ventaja, a esto se suma el servicio de restaurante escolar y la calidad educativa que se imparte.

En general, las familias de los estudiantes son disfuncionales por múltiples motivos: situación económica difícil, ausencia de canales de comunicación, inestabilidad emocional, bajo nivel de tolerancia, traumas en su infancia, irresponsabilidad, agresividad física y psicológica, manejo equivocado del conflicto, entre otros aspectos, hacen de nuestros estudiantes, personas vulnerables

y muchas veces conflictivas, con bajos niveles de tolerancia, lo que genera agresiones físicas y verbales dentro y fuera del aula, situaciones que inciden en nivel de educación de los estudiantes.



**Figura 4. Modelo pedagógico Institución educativa**

Fuente: Proyecto educativo institucional, 2018

El presente proyecto, pretende aplicar el modelo cognitivo social, planteando una situación problemática real, con el objeto de que el estudiante desarrolle su pensamiento reflexivo, analítico, gracias a la interacción con sus compañeros, el acompañamiento y orientación del docente en busca de su desarrollo integral.

## 2. Marco Referencial

### 2.1 Antecedentes

**2.1.1 Internacionales.** La tesis doctoral: De Macías Sánchez (2016) “Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos” de la Universidad Complutense de Madrid, cuestiona la causa de los errores y dificultades de los estudiantes a la hora de comprender y estudiar matemáticas, centrando su atención en qué tipo de situaciones se pueden diseñar y plantear de manera que se favorezca el trabajo y conversión entre los diferentes registros de representación semióticos.

El estudio, se compone por 5 capítulos con una completa y exhaustiva revisión de las teorías de representación semiótica y situaciones didácticas y su relación con el quehacer matemático en su primer capítulo, seguido de un análisis del marco curricular respecto a la legislación educativa española de las 4 leyes: LOGSE, LOCE, LOE y LOMCE y manuales escolares con el propósito de evaluar la importancia de los registros de representación semiótica en la educación secundaria.

Además, en el tercer capítulo, realiza un estudio de las principales evaluaciones de diagnóstico, tanto a nivel internacional (TIMMS y Pisa) como a nivel nacional a través de la evaluación general de diagnóstico, continúa con la propuesta de una ingeniería didáctica para el trabajo con los registros de representación enmarcado dentro de la denominada didáctica fundamental y apoyado en la teoría de los Registros de representación semióticos de Rymond Duval y la teoría de

situaciones de Guy Brousseau, finalizando en el último capítulo con las conclusiones respecto a las hipótesis planteadas inicialmente.

La investigación aporta al presente trabajo, información relevante sobre las acciones cognitivas de la competencia de representación en el proceso de matematización que hace parte del marco teórico tanto de la prueba pisa como de la prueba TIMMS y el análisis de algunos ítems que evalúa la prueba en la subcompetencia de representación.

Castillo Pérez (2015) La tesis de maestría secuencia didáctica para contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud con estudiantes de educación primaria, de la Universidad Católica del Perú mediante el manejo de aspectos de la ingeniería didáctica, se elaboró 2 secuencias de actividades que contribuyan a la construcción del concepto de área como una magnitud relacionada con la unidad de medida elegida, para superar el tratamiento que dicho concepto es utilizado durante la educación primaria, con 4 estudiantes de sexto grado de educación primaria, de 11 años de edad de una Institución Educativa Estatal ubicada en Lima

Quesada Villella (2014) La tesis de Doctorado: Análisis de la coordinación entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento en la resolución de problemas en Geometría de para optar el título de Doctor en la Universidad de Alicante en el año 2014, tiene el propósito de “ identificar características de la coordinación de los procesos cognitivos que los estudiantes evidencian cuando resuelven problemas de geometría “ en cuya investigación propone un modelo general de la coordinación de dichos procesos.

El trabajo, resalta que los procesos de visualización en geometría, están ligados a los procesos de razonamiento a través de 3 tipos de aprehensiones en la resolución de problemas y propone una clasificación tanto para los razonamientos en discursivo natural y discursivo teórico, como para

los comportamientos del individuo ante la tarea de resolver un problema en ingenuos y matemáticos.

El trabajo ha permitido a la presente investigación, interpretar las respuestas de los estudiantes al evaluar el nivel de razonamiento geométrico a través del “cambio dimensional” definido por el autor del trabajo, como el “proceso de identificación de configuraciones de dimensión diferente a la inicial”, indispensable en el desarrollo de capacidades geométricas

Gualdrón Pinto (2011) La tesis doctoral: “Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas” de la Universidad de Valencia, tiene como objetivo “caracterizar los elementos del desarrollo profesional del docente ante el proceso de enseñanza/aprendizaje de los estudiantes en situaciones matemáticas escolares del tema de semana de figuras planas que son nuevas para él”

El trabajo de investigación, propone el diseño e implementación de una práctica instruccional para que los docentes adapten e incluyan nuevas propuestas curriculares utilizando el modelo educativo de Van Hiele con el objeto de desarrollar la visualización a través de diversas formas de razonamiento y el uso de contenidos previos en estudiantes de grado 9.

Además, presenta los principales elementos de visualización que integran la solución de una tarea en actividades matemáticas tanto de docentes como de estudiantes siguiendo los estudios de

Presmeg, indispensable para orientar los procesos de interpretación en cualquier trabajo del desarrollo del pensamiento geométrico.

Las actividades propuestas son clasificadas según el tipo de representación en 3 categorías: Lenguaje natural, figurativo o simbólico y según el tipo de problema y/o ejercicio en 4 categorías: Cálculo, identificación de relaciones, de construcción y de demostración.

El trabajo es un referente a la presente investigación orientando las pautas para que los docentes orienten a los estudiantes en el desarrollo y mejoramiento de su nivel de razonamiento y sobre los resultados encontrados en estudiantes de edades comprendidas entre 14 – 16 años, quienes se ubican en su mayoría en el segundo nivel de razonamiento en el concepto de semejanza.

**2.1.2 Nacional.** Julio Barrera Lady Johana (2014) La tesis de maestría: Las transformaciones en el plano y nociones de semejanza por de la Universidad Nacional de Colombia, establece las relaciones entre las transformaciones geométricas en el plano y la noción de semejanza. Haciendo uso de estos resultados y de la tecnología se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la noción de semejanza a través de las transformaciones geométricas dirigida a estudiantes de grado séptimo. Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

La tesis de maestría desarrollada por Fuentes Hernandez y Portillo Wilches (2015) “Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele en estudiantes de séptimo grado de la Institución educativa San José de Carrizal”, del Sistema de Universidades Estatales del caribe Colombiano SUE Caribe, ilustra cómo las metodologías activas en los procesos de

enseñanza aprendizaje inciden positivamente en la capacidad de retención y el aprendizaje basado en el “saber hacer” más que en el “simple saber”.

## **2.2 Marco Teórico**

Al hacer revisión de la enseñanza de la geometría, podemos encontrar el aporte tanto de la escuela Piagetiana como de los esposos Van Hiele cuyos componentes principales del modelo son su teoría de los niveles de razonamiento, que explica cómo se produce el desarrollo en la calidad de razonamiento geométrico de los estudiantes cuando éstos estudian geometría, y las fases de aprendizaje, que constituye su propuesta didáctica para la secuenciación de actividades de enseñanza-aprendizaje en el aula, con el objeto de facilitar el ascenso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

### **Teoría de Piaget:**

De acuerdo con Piaget (1973), el intelecto humano avanza desde lo sensoriomotor hasta lo conceptual lógico en la constitución de estructuras mentales; pero este proceso no se circunscribe a ninguno de los dos factores, pues el conocimiento no se manifiesta en etapas, sino que es integral, holístico, no obstante, la posibilidad de que, a veces, prevalezca uno sobre el otro, otros a través de manifestaciones más o menos caracterizadas e identificables en sus elementos.

En uno de los experimentos, Piaget & Inhelder (1967) pedían a los niños palpar, con los ojos cerrados (percepción háptica), algunos sólidos geométricos y luego escoger, entre un conjunto de sólidos, aquel que fuera igual al que exploraban manualmente. Según estos investigadores, los niños diferenciaban los objetos inicialmente con base en propiedades que Piaget e Inhelder denominaban topológicas, tales como: Cerradura, continuidad o conectividad. Después, podían

diferenciar los objetos con base en propiedades de sus caras o lados, que los investigadores calificaban como proyectivas, como la rectilinealidad o curvilinealidad. Finalmente, la diferenciación se hacía teniendo en cuenta propiedades que denominaron euclídeas, como el paralelismo o perpendicularidad de los lados y la congruencia de los lados o los ángulos.

El conocimiento resulta epistemológicamente de la relación sujeto cognoscente-objeto de conocimiento, la cultura es la encrucijada que no se puede soslayar porque allí se conecta el ser humano con su propia realidad cognitiva.

Quien saca provecho de esta mirada es Bruner (1989), cuyo interés se centra en la representación en tres niveles: Enactivo, icónico y simbólico que, en grosso modo, corresponderían a las fases preoperatoria, de las operaciones concretas y de las operaciones lógicas propuestas por Piaget, tomando el individuo como ser biológico y psíquico con la realidad social; en ese entronque la persona se subjetiviza de múltiples maneras, formando una tríada donde se operan múltiples transformaciones que afectan a cada cual en particular. Por ejemplo, el sujeto cognoscente asume el objeto de conocimiento, incorporándolo a su mente y transformándolo cognitivamente, pero ese objeto de conocimiento asumido, asimilado ya no es el objeto real, físico y concreto, externo e independiente del sujeto; a la vez, el sujeto cognoscente conceptúa el objeto de conocimiento pero, además, posee capacidades para sentirlo, desearlo, imaginarlo, soñarlo (Cárdenas Páez, 2018).

En este proceso, se transforma el sujeto cognoscente que, en última instancia, al enfrentar o al confrontar su saber con el de la sociedad, se diversifica y sufre una nueva transformación que no solo adapta su conocimiento, sino que adopta el conocimiento social, abriendo un campo donde juegan dos vertientes poderosas: La racional y la imaginaria, colectivas ambas pero cimentadas en ese complejo enfrentamiento sujeto cognoscente -objeto de conocimiento, en el que se pone en

evidencia el hombre en sus aristas como ser biológico, psíquico, cultural, histórico y social. Esa relación entre lo biológico y lo psíquico, a la luz de la racionalización empírica de la actividad del niño, lleva a Piaget a plantear que el desarrollo mental del niño avanza desde estructuras reflejas innatas hasta estructuras lógicas mentales (Piaget & Inhelder, 1976), a través de una serie de etapas sucesivas, que partiendo de lo biológico llegan a lo lógico. Sin embargo, falta la integración de las demás facetas que apenas quedan enunciadas. Por tanto, Piaget (1975, 1991; 1977) señala que, en el proceso de evolución mental del niño, se da la tendencia a no diferenciar entre el yo y el mundo exterior (Cárdenas Páez, 2018).

El conocimiento espacial de la teoría Piagetiana se centra en 3 aspectos fundamentales:

El espacio no viene dado “a priori” sino que se construye poco a poco, principalmente debido a la percepción y dependiendo de la actividad del sujeto después de una larga construcción evolutiva que comienza con el nacimiento y no termina hasta la adolescencia, que a diferencia de Kant es una categoría fundamental innata.

Existen 3 clases de relaciones espaciales: Las topológicas que tienen en cuenta el espacio dentro de un cuerpo o figura particular; las proyectivas que considera los objetos y sus representaciones teniendo en cuenta las relaciones entre esos objetos con ejes coordenados

(espacio euclidiano o métrico) y se desarrollan paralelamente con las euclidianas (Ramirez Navarrete, 2012).

El conocimiento espacial se desarrolla con 3 grandes períodos o estadios: Sensoriomotor, de las operaciones concretas y de las operaciones formales.

En nuestro caso, nos centramos en el período de las operaciones concretas puesto que la mayoría de los estudiantes tienen entre 11 y 12 años donde el niño está construyendo progresivamente las relaciones proyectivas y euclidianas, debido a que su pensamiento operatorio le facilita la flexibilización y reversibilidad en el espacio

### **Teoría de Conceptos Figurales de Fishbein**

Asumir el estudio de la geometría, desde la perspectiva de la concreción visual, implica reconocer la importancia de esta, por ello, es necesario adentrarse en las acciones inherentes a su estudio y como dichos elementos, son el fundamento, para la concreción de evidencias reales, al respecto Murillo (2015) señala que:

Como resulta evidente, la geometría está íntimamente ligada con las representaciones gráficas que se utilizan no sólo para ejemplificar algunas proposiciones (axiomas, teoremas, etcétera), sino también para representarlas, al igual que a los objetos manejados. Incluso algunos geómetras, como Félix Klein, expresaron la necesidad de utilizar dibujos o diagramas para el estudio de la geometría. (p. 101)

Con base en lo anterior, Maracci (2001) señala que: “Los objetos geométricos y sus combinaciones, que llamamos construcciones geométricas o figuras geométricas, no sólo son objetos con propiedades conceptuales que rigen de una manera lógica su comportamiento y sus relaciones” (p. 73). De igual manera, este autor considera que: “Sino también están íntimamente

ligados con su representación, que puede estar en un nivel mental (una imagen) o plasmada en un medio físico (hoja de papel o pantalla de una computadora)". (p.73)

Aunado a lo anterior, se presenta lo expuesto por Fischbein (1993) quien hace referencia a que: "Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño). Al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (p. 143). De igual manera este autor refiere que:

Comúnmente las propiedades espaciales en los alumnos incluyen también consideraciones; por ejemplo, el tamaño de la representación gráfica (es decir, el de la mancha que representa a un punto), o la posibilidad de considerar a los objetos geométricos como objetos reales, y así "tomarlos" y manipularlos. Hay que decir que en estos casos se confunde lo que es el objeto matemático con su representación. (p.36)

De acuerdo con lo anterior, se hace necesario el establecimiento de ciertas diferencias que permiten evidenciarse en las figuras, al respecto Laborde & Capponi (1994) quienes refieren:

El dibujo es una representación gráfica y material, como los trazos sobre un papel o los píxeles en una pantalla. Hace referencia a un objeto geométrico, que funge como su referente teórico y está restringido o "controlado" por las definiciones y limitantes lógicas. Un dibujo incluye información figural que ocasionalmente puede resultar innecesaria: Desde los elementos que no tienen relación con el objeto geométrico, y sí con el aspecto general (color, grosor), hasta los que pueden influenciar en la apreciación del dibujo (por ejemplo, la orientación). Ahora bien, debido a que no se puede acceder directamente a los objetos geométricos, se les representa por medio de dibujos a los que se asignan significados, entendidos como las relaciones que el individuo establece entre el objeto y su representación. (p. 92)

Con atención en lo anterior, es necesario reconocer que el dibujo, es un elemento de orden gráfico, en el cual, se consideran evidencias que son el fundamento de desarrollo de la visión, por ello, es necesario comprender el objeto geométrico, desde su referente teórico y de esta manera

lograr un impacto adecuado a las demandas del objeto en la realidad, al respecto, Fischbein (1993) señala que:

Estos significados corresponden, por un lado, a la noción de concepto figural, ya que en ella se entrelazan los aspectos figurales que están relacionados con los dibujos atribuidos a una figura geométrica en particular, junto con los limitantes conceptuales dados por el objeto geométrico desde su naturaleza teórica. (p. 99)

Además de ello, Fischbein et. al. (sf) señala: "El representante de una clase de objetos que comparten el conjunto de propiedades geométricas con el que se construyó la figura" (p. 31).

Adicionalmente Laborde & Capponi, (1994) señalan que:

Consiste en el emparejamiento de un referente dado a todos sus dibujos; es entonces definida como el conjunto de parejas formadas por dos términos: El primer término es el referente, el segundo uno de los dibujos que lo representan, tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente. (p. 168)

De igual manera, es necesario hacer mención a lo señalado por Goldenberg & Cuoco manifiestan su interés al respecto:

¿Por qué nos deberíamos preocupar por las taxonomías tripartitas y otras teorías de la mente? Por una cosa, los ambientes de Geometría Dinámica están contruidos con los mismos principios: El usuario específico a la computadora las relaciones subyacentes (los objetos matemáticos), y la computadora debe preservar ese objeto mientras que deja las características superficiales (el dibujo) completamente maleables. (p. 355)

A lo anterior, se le suma lo expuesto por Maracci (2001) quien señala: "Ambos aspectos ejercen una influencia en el individuo que está supeditada a su desarrollo cognitivo, por lo que no necesariamente se encuentra "balanceada" adecuadamente" (P. 94). Asimismo, sostiene que: "En efecto, si bien es pertinente que haya una fusión entre los aspectos figurales y conceptuales para que el manejo de los objetos geométricos sea apropiado, tal hecho sólo parece existir en una situación ideal y extrema" (p. 93). De igual manera Fischbein (1993) afirma: "Lo que sucede es

que las propiedades conceptuales y figurales permanecen bajo la influencia de los sistemas respectivos, el conceptual y el figural" (p. 150).

Una de la manera de sistematizar la anterior aseveración, es refiriendo, la clasificación de Maracci (2001):

- Un dibujo debería representar 'correctamente' la situación geométrica descrita en el problema; esto significa que la comprensión del estudiante de una situación dada y su interpretación del dibujo producido debería ser consistente.
- Un dibujo debe ser reconocido como suficientemente genérico (...).
- Un dibujo debería poseer una buena gestalt, debería satisfacer las leyes fundamentales que controlan los procesos básicos de percepción. (p. 481)

De acuerdo con lo anterior, un dibujo constituye el desarrollo de fenómenos que pueden ser asociados a la geometría, desde estas manifestaciones, es necesario indicar que las representaciones que de allí subyacen, se demuestran desde su comprensión por parte del estudiante, es decir, la interpretación del dibujo se caracteriza con énfasis en el desarrollo que el estudiante asuma. De igual manera, es necesario que el dibujo posea una naturaleza genérica, para de ese modo contribuir con el desarrollo del pensamiento, además de evidenciar un proceso complejo, como es el caso que el dibujo se demuestra como un todo, y es el estudiante el que debe comprender sus partes.

### **Procesos Cognitivos:**

Algunos conceptos empleados para caracterizar los procesos cognitivos que intervienen cuando se resuelven problemas de geometría que se utilizan en la didáctica de las matemáticas aparecen como: Visualización, razonamiento geométrico, capacidad espacial o visión espacial, se

fundamenta en el modelo teórico de Duval (1998), quien sitúa en el centro de la comprensión de las matemáticas en los procesos de representación y de visualización.

Así mismo, propone que la actividad geométrica compromete diferentes clases de procesos cognitivos:

En la visualización intervienen las representaciones espaciales.

Los procesos de razonamiento en relación con los procesos discursivos

Los procesos de construcción de modelos

Según Herskowitz, Parzysz & Van Dermolen (1996), entendemos visualización como “la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra” (p. 163)

Una figura (imagen mental de un objeto físico) se puede representar mediante una configuración geométrica (dibujo) y se compone de otras figuras mostradas por subconfiguraciones geométricas más simples, de dimensiones geométricas menor o igual que la original, las cuales también están vinculadas a afirmaciones matemáticas.

Tomando como referencia a Zazkis et al (1996) que describen la visualización como “el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos” (Castellanos Espinel, 2010). Los estudiantes que

intervienen en la presente investigación hacen el dibujo de su cometa, con el objeto de que logren una aprehensión perceptiva de un objeto real.

### **Procesos de Razonamiento:**

El abordaje del objeto de estudio se manifiesta en función de elementos que permiten asumir la geometría dentro de la enseñanza de la matemática como una ciencia, es así como se promueve la construcción de conocimientos que permiten la generación de una estructura cognitiva sólida para aquel que se interesa en los temas referentes a la geometría y su enseñanza, por ello, es fundamental asumir lo propuesto por Godino (2010):

Algunos piensan que la Educación Matemática existe como ciencia, se encuentran una variedad de definiciones diferentes, por ejemplo, el estudio de relaciones entre Matemática, individuo y sociedad, la reconstrucción de la Matemática actual a nivel elemental, el desarrollo y evaluación de cursos matemáticos, el estudio del conocimiento matemático, sus tipos, representación y crecimiento, el estudio del aprendizaje matemático de los niños, el estudio y desarrollo de las competencias de los profesores, el estudio de la comunicación e interacción en las clases, etc. (p. 99)

La asociación de la definición de la matemática con meros temas numéricos relacionados con los mismos, permiten asumir el hecho de que esta es una de las ciencias con mayor incidencia dentro de las demás ciencias, sin embargo, la matemática propiamente dicha se emplea en las diferentes actividades cotidianas, pero también en las acciones científicas que se desarrollan en torno al perfeccionamiento del conocimiento, de allí que el estudio de las mismas se torna complejo

debido al sinnúmero de elementos que se presentan dentro del manejo de las mismas no sólo para la formación integral de los individuos sino la formación integral de los mismos.

En la complejidad que las matemáticas demuestran se presenta, la geometría, dado que por su campo de acción abarca por lo menos cuatro disciplinas fundamentales en la formación de los sujetos, al respecto Higginson (2010) señala:

Conviene ubicar las cuatro disciplinas fundacionales de la geometría y la orientación que dan a preguntas básicas: Filosofía (porqué enseñar), Sociología (a quién y dónde enseñar), Matemática (qué enseñar) y Psicología (cuándo y cómo enseñar). Puede percibirse así la complejidad del concepto Educación Matemática. (p. 29)

Tal como se logra apreciar, las definiciones propias de la realidad se orientan desde la filosofía, la cual explica la finalidad de la enseñanza de la geometría, pero además de ello, es necesario manifestar la sociedad con la sociología, la cual permite determinar a quienes enseñar, aunado a ello, se presenta la geometría propiamente dicha, la cual otorga la infinidad de objetos de conocimiento que sirven de base para comprender cada uno de los elementos que se ubican dentro de la misma, de igual manera se establece el empleo de la psicología la cual refiere la noción de espacio-tiempo que debe existir en el desarrollo de los elementos que pertenecen a la enseñanza de la geometría.

Como se logra apreciar, la naturaleza epistemológica de la geometría se convierte en un elemento de orden complejo, donde se manifieste el compromiso por asumir perspectivas que dinamicen el conocimiento de la misma, al respecto Sierpinska & Lerman (2006) sostienen:

El análisis de su objeto, de sus métodos y su posible demarcación de otros campos de conocimiento, es un tema propio de la epistemología. Desde este punto de vista, tratar de situarla en el contexto de las disciplinas científicas en general y de las ciencias de la educación

en particular, puede significar, entre otras cosas, analizar la existencia de teorías específicas acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría. (p. 32)

Tal como se logra apreciar, la epistemología es una de las ciencias con mayor énfasis en el establecimiento de posibles interacciones con otros fenómenos, de allí la naturaleza científica de esta, porque dentro de su desarrollo se hace énfasis en el desarrollo de un sinnúmero de teorías que intervienen dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, por ello es que en la actualidad se adelantan una serie de investigaciones que inciden dentro de la administración de la misma en las aulas de clase, así lo establece Higginson (2010): “Se tienen por ahora, muchos resultados parciales sobre la base de supuestos teóricos externos (principalmente de la perspectiva psicológica), que tratan de orientar fundamentalmente, la acción en el aula” (p. 42).

El fortalecimiento de las disciplinas dentro de la científicidad de la geometría hacen que el conocimiento se torne dinámico, interactivo, con un enriquecimiento de los elementos que sirven de base para la comprensión del objeto de estudio, es necesario acotar lo referido por Sierpinski y Lerman (2006): “a) la especificidad del conocimiento geométrico, análisis epistemológico profundo de los conceptos geométricos; y, b) la dimensión social del conocimiento y las interacciones sociales en el proceso de enseñanza” (p. 132). tal como se demuestra en este caso se refiere la especificidad del conocimiento, no existe otra ciencia que sean tan específica como la matemática, pero además la valoración de las interacciones sociales, tal como se logra apreciar en Godino (2010):

Haciendo una distinción entre lo que se considera epistemología de la Matemática y epistemología de la Educación Matemática, el componente educativo en la Educación Matemática genera una perspectiva que está muy relacionada con los aspectos vinculados a la enseñanza y al aprendizaje y en contraste con una prescripción esencialmente conductista de

estos procesos, en las últimas décadas otros enfoques se han abierto camino en la Educación Matemática a nivel internacional. (p. 143)

A los efectos la situación que converge en el campo de la enseñanza de la geometría, se demuestra en función de situaciones específicas como es el caso de la enseñanza y el aprendizaje, es decir, se asumen ambos procesos en la descripción de la educación, sin lugar a duda en algunos momentos se desarrolló una enseñanza conductista, sin embargo, en estos momentos y por las diversas transformaciones que se hacen en el campo de la psicología, se manifiesta una óptica un tanto más flexible sobre todo en el campo de la enseñanza de la geometría, y así se incorporó a la misma la perspectiva constructivista, así lo propone Confrey (2007):

Perspectiva Constructivista: Emerge como el principal paradigma de investigación en Psicología de la Geometría y tiene en los escritos de Piaget su principal fuente; el énfasis está en el sujeto epistémico: El niño construye de un modo activo el conocimiento a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales, lo que se traduce en geometría en los siguientes términos: El profesor no transmite conocimiento, hace que el estudiante le enseñe cómo desarrollar su cognición. (p. 12)

En el caso de la perspectiva constructivista, se considera la construcción de conocimientos para de esa manera formar de autónomamente al sujeto, tal como se logra apreciar las interacciones del individuo con el medio permiten que este fortalezca su estructura cognitiva y así se logre la integración de conocimientos para la vida, donde se logre superar esa visión memorística que ha imperado en la enseñanza de la geometría, en esta perspectiva se hace énfasis en la importancia del objeto de conocimiento y para qué sirve este dentro de las interacciones sociales, es así como

los conocimientos que se manifiestan desde esta perspectiva son significativos en la medida en que el sujeto sea su propio protagonista.

Además de esta perspectiva constructivista, es necesario referir lo expuesto por Confrey (2007) quien señala:

Perspectiva Socioculturalista: Bajo esta perspectiva el énfasis debe estar en las dimensiones sociológicas. Toda alta función mental fue externa y social antes de ser interna. Fue primero una relación social entre dos personas (Castellanos Espinel, 2010). Por lo tanto, lo que constituye conocimiento geométrico es una norma social. (p. 13)

En esta perspectiva, se demuestra como la interacción del sujeto con el medio hace que el aprendizaje se vaya construyendo, es decir, mediante esa función social que trae consigo la enseñanza, es así como el conocimiento de la geometría se convierte en una norma social, desde siempre se ha manifestado que el desarrollo de competencias en geometría es necesaria para el comportamiento social de los individuos, sin embargo, debido a la visión conductista se había dejado de lado la posibilidad de consolidación del conocimiento, de manera que el entorno tiene mucho que ver con la construcción de estructuras cognitivas que promuevan en la persona una formación integral, aunada a la perspectiva previamente mencionada, Confrey (2007) continua describiendo:

Perspectiva Interaccionista: El interaccionismo puede considerarse como una aproximación a la teoría e investigación sobre el desarrollo que promueve una visión sociocultural sobre las fuentes y el crecimiento del conocimiento; su énfasis está en las interacciones entre sujeto y objeto, entre estudiante y profesor, lo relevante son las interacciones entre individuos de una cultura y se da un papel central al lenguaje. (p. 14)

La interacción que se desarrolla en los entornos sociales, se manifiesta en función de los lazos que se establecen en el desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje, es por ello que mediante la relación con el profesor, el estudiante va construyendo su propio aprendizaje, mediante la comprensión de aquellos elementos que considera realmente le sirven y aquellos que no, es así

como se logra demostrar que el conocimiento que emerge de la matemática, es dinámico y conduce al desarrollo de acciones, al respecto Godino (2010) sostiene: “Relacionado con esta actitud hacia el lenguaje está el postulado del carácter discursivo del conocimiento. Como un discurso: La geometría es un modo de ver al mundo, y pensar sobre él” (p. 49).

El conocimiento que el ser humano establezca permite la constitución de definiciones que sirven de base para reconocer el desarrollo propio del ser en su interrelación con el mundo y el pensamiento, de esta manera se concretan acciones que sirven de base para comprender los mecanismos de construcción del conocimiento, al respecto Confrey (2007) señala:

Como este universo es establecido por medio de la comunicación, el tipo de conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan depende de las características de las situaciones de comunicación en que ellos se desarrollan. Ahora bien, es necesario destacar además de las tres perspectivas que se han descrito hasta ahora, la importante reflexión epistemológica que se viene desarrollando en Francia desde el último tercio del siglo pasado, acerca de la Educación Matemática.

La naturaleza del conocimiento a nivel general, es muy dinámica, a este panorama no escapa la geometría, la cual se renueva día con día y de esta manera se logran asumir acciones que sirven de base para comprender el verdadero rol social que poseen las mismas dentro de la vida de cada uno de los estudiantes, pero también de cada uno de los profesores del área quienes se entregan

con pasión a su administración, pero que deben asumir con compromiso para que el conocimiento que de allí emerja sea realmente científico.

### **El modelo de Van Hiele:**

El modelo de Van Hiele es la propuesta recomendada por el Ministerio de Educación Nacional a través de los lineamientos curriculares para la construcción del pensamiento geométrico a través de 5 niveles que evidencian un modo de estructurar el aprendizaje desde lo más elemental, hasta lo más complejo, según investigaciones recientes, cada vez con mayor aceptación a nivel internacional.

El modelo de Van Hiele establece que la comprensión de la geometría pasa por cinco formas de ver los conceptos geométricos; formas que se denominan: Niveles de razonamiento.

En estudios anteriores a la lectura de su Tesis, Pierre Van Hiele menciona dos aspectos relacionados con la importancia de los niveles de pensamiento en la comprensión de la geometría: El primero hace referencia a los niveles de comprensión conceptual y el segundo está vinculado a los procesos de ordenación mental.

Teniendo en cuenta que el modelo de Van Hiele se enmarca en una concepción constructivista del aprendizaje informada por la Gestalt, Hoffer (1983) presenta los niveles de pensamiento comparando dicho aprendizaje con un proceso inductivo en el que va aumentando el grado de comprensión:

Los niveles de pensamiento que van unidos al aprendizaje de una materia particular son de naturaleza inductiva. En el nivel  $n-1$  lo estudiado son ciertas versiones limitadas de los objetos. Algunas relaciones entre los objetos están establecidas de manera explícita; sin embargo, existen otras relaciones posiblemente accesibles que no están explícitamente establecidas. En el nivel  $n$  los objetos estudiados son ahora los enunciados que fueron formulados explícitamente en el nivel  $n-1$ , además de aquellos enunciados que estaban solamente

implícitos en el nivel  $n-1$ . En efecto, los objetos que hay en el nivel  $n$  consisten en extensiones de los objetos del nivel  $n-1$ . (Hoffer, 1983, p. 206)

Con esta diferenciación de niveles se pretende identificar los obstáculos que tienen los alumnos tanto a nivel de conceptos como de lenguaje. Si un alumno que está pensando en el nivel  $n-1$  se enfrenta a un problema que requiere pensamiento del nivel  $n$ , será incapaz de comprenderlo. El progreso en la comprensión de los conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel, y de manera ordenada, a través de los niveles siguientes (Jaime, 1995). Para que los estudiantes se desempeñen adecuadamente en uno de los niveles avanzados deben haber dominado los niveles previos. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles ya que cada nivel lleva asociado un lenguaje y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y

pausada (Ramirez Navarrete, 2012). Una somera descripción de los niveles encontrada en Hoffer (1990) se presenta a continuación:

Nivel 1 (Reconocimiento). El estudiante aprende algo de vocabulario y reconoce una figura como un todo.

Nivel 2 (Análisis). El estudiante analiza las propiedades de las figuras.

Nivel 3 (Ordenamiento). El estudiante ordena lógicamente figuras y comprende la interrelación entre figuras y la importancia de definiciones exactas.

Nivel 4 (Deducción). El estudiante comprende el significado de la deducción y el papel de los términos indefinidos, postulados, teoremas y demostraciones.

Nivel 5 (Rigor). El estudiante comprende la importancia de la precisión cuando trata con las bases y las interrelaciones entre estructuras. Este nivel más avanzado se alcanza rara vez en los estudiantes escolares.

En su artículo Hoffer (1990) critica el hecho de que la enseñanza de la geometría enfatice desde su comienzo el desarrollo de la habilidad para hacer demostraciones formales, la que exige que la comprensión del individuo se ubique en un nivel alto de desarrollo mental. Por eso, propone que

la enseñanza de la geometría debe fomentar el desarrollo de otras habilidades que pueden ser más prácticas y que tienen una naturaleza claramente geométrica. Entre ellas destaca cinco, a saber:

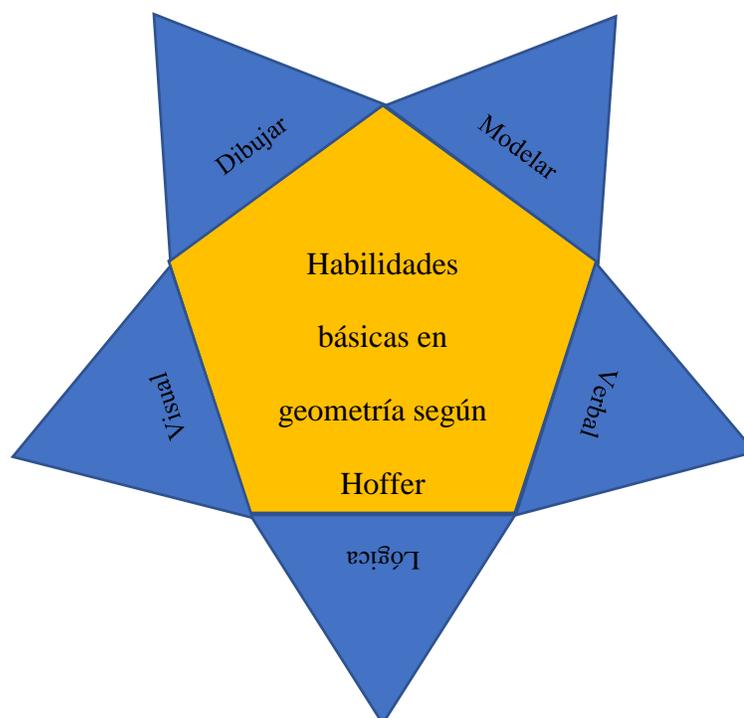
Habilidad visual. Hace referencia a la capacidad de obtener información a partir de lo que el estudiante observa, ya sean objetos reales o representaciones de éstos.

Habilidad verbal. Hace referencia a la capacidad para emplear apropiadamente el lenguaje de la geometría.

Habilidad para dibujar. Hace referencia a la capacidad para interpretar las ideas y representarlas a través de dibujos o esquemas.

Habilidad lógica. Hace referencia a la capacidad para armar argumentos que siguen las reglas de la lógica formal y para reconocer cuándo un argumento es válido o no lo es.

Habilidad para modelar. Hace referencia a la capacidad de describir y explicar fenómenos de la vida real por medio de modelos, entendiéndose por modelo una representación de algo.



**Figura 5. Habilidades de los niveles de Van Hiele según Hoffer**

Tales habilidades alcanzan un estado específico de desarrollo a través de los diferentes niveles del modelo de Van Hiele. Por ejemplo, la habilidad visual manifiesta características específicas para los niveles de reconocimiento, análisis, ordenamiento, deducción y rigor. En la siguiente tabla construida por Hoffer se describen las habilidades dentro de los niveles de Van Hiele.

Van Hiele explica, además, que la formación de la comprensión geométrica se produce por medio de tres estructuraciones: Perceptiva, lingüística y lógica. Estas facetas en parte se complementan, pero a lo largo del proceso consecutivo, la siguiente absorbe a la anterior. Se puede

afirmar que el lenguaje tiene la función de intermediario entre la estructuración perceptiva y la lógica (Van Hiele, 1957).

### **Teoría de la Representación**

La semiótica y la matemática nacieron y crecieron juntas, una al lado de la otra, ayudándose entre sí, a espaldas de todos, por mucho tiempo. La semiótica como disciplina científica es más reciente en el sentido que su carácter de ciencia fue reconocido y afirmado por la comunidad científica solamente a partir del Siglo XIX, pero sólo a partir de los años 90, llega con fuerza a la didáctica de la matemática, gracias a los problemas específicos que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática descubrió y lo sigue haciendo en las escuelas de todo el mundo.

La mayoría de los estudios de la didáctica de la matemática, evidencian el papel de la semiótica en el aprendizaje de la matemática. Duval (1993); Radford (1997), D'Amore (1998) & Godino (2002) son algunos expositores que han llevado a cabo investigaciones centradas en este tema.

Las primeras definiciones del término “semiótica” hacen referencia a una rama específica de la medicina, aquella que tiene como objeto de estudio los síntomas de las enfermedades, es decir, “aquella parte de la medicina que trata de los signos de las enfermedades”

En el diccionario editado por Charles Annandale (1983) los términos “semiología” y “semiótica” se definen ambos en términos en primer lugar, en términos de doctrina o ciencia de los signos ya “no naturalísticos” o médicos que de todas formas constituyen un segundo significado.

Para Platón, la matemática representa los objetos no temporales, ni espaciales los cuales existen independientemente de los seres humanos, asignándole un nombre y donde las ideas no

son concebidas como entes de la mente, sino como algo externo a donde sólo podemos acercarnos cada vez más a través de complejos procesos de conceptualización.

En otras palabras, los nombres tienen la capacidad de mostrar la naturaleza de las cosas nombradas, es decir, quien conoce los nombres, conoce también las cosas nombradas (Crátilo) ya que existe una correspondencia entre nombres (signos) y cosas (referentes)

Las cosas reales tienen una semejanza con las ideas, puesto que cuando se evoca, proporciona un nombre (sonido) llamado por Platón signo lingüístico con la siguiente estructura triádica.

Los nombres son representaciones parciales, incompletas, de la verdadera naturaleza de las cosas, en donde el conocimiento indirecto mediado por los nombres, es inferior al conocimiento directo de las cosas que puebla el mundo de las ideas.

Por otra parte, Aristóteles, distingue la dicotomía entre el concepto que representa o signo lingüístico (*symbolon*) y la relación inferencial que liga el signo natural al evento o signo no lingüístico (*semion*).

Tanto en Aristóteles como en los Estoicos, la distinción entre palabra y signo coinciden de manera general, pero los Estoicos evidencian 3 componentes en las expresiones lingüísticas: El significante o expresión pronunciada (fonética), el significado o contenido asociado a la expresión y el referente o realidad concreta a la cual se refiere la expresión, el cual representa un ente no corpóreo a diferencia de los anteriores.

Del libro “los Elementos” surge un amplio y articulado uso de diagramas (representaciones semióticas) a los cuales hace referencia como si fueran precisamente los objetos del discurso; no

ideas ni formas puras (el círculo, el triángulo, etc.) pero individuos particulares que son el resultado de definidas construcciones “ideales” de regla y compás”

Los conceptos se refieren directamente a las cosas y las palabras (términos), en un primer momento no son conexas a los conceptos; después, gracias a la intermediación intelectual, se conectan a las cosas, pero son impuestas directamente sobre las cosas y sobre el estado de las cosas.

Así mismo, la teoría de los signos de Peirce, considerado el más grande filósofo estadounidense fundador de la semiótica moderna, se basa en la idea de que la cognición, el pensamiento e incluso el ser humano tienen una naturaleza esencialmente semiótica, en donde los signos son medios para representar algo para alguien, son medios de pensamiento, de comprensión, de razonamiento, de aprendizaje.

Así mismo, sugiere un proceso de semiosis (acción de signos que se realiza en la formación de nuevas relaciones triádicas) potencialmente infinito, pero que, de alguna forma, las exigencias de la vida práctica inevitablemente interrumpen, en el cual, identifica tres tipos de interpretante: Inmediato, dinámico y final de acuerdo al efecto del signo sobre el intérprete.

Según la relación del representamen de un signo con el objeto, distingue tres tipos fundamentales de signo/representamen: Ícono, índice y símbolo

El ícono es un signo que posee cierta semejanza con un objeto y se pueden clasificar según el contexto en: Las imágenes que representan sus objetos por una semejanza cualitativa y ocupan el primer nivel de iconicidad, seguido por los diagramas que manifiestan una semejanza estructural con sus objetos y la metáfora exhiben una especie de tercer nivel para indicar la relación de

semejanza entre un representamen y un objeto que deriva un paralelismo con alguna otra cosa. (Peirce, 1902).

Font, Godino, Planas y Acevedo, expresan sobre el discurso matemático que el objeto metáfora está presente como “objetos con propiedades” en el discurso matemático y facilita el paso de la representación de un objeto a un objeto ideal

Por otro lado, el signo es un signo (representamen) que está influenciado por el objeto con el cual establece una relación y el símbolo es el resultado de una mediación entre íconos e índices y al mismo tiempo relaciona íconos e índices.

En síntesis, la relación que un signo puede tener con el objeto puede ser de tres tipos: relación de semejanza o icónica, relación eficaz de causa y efecto o idexical y relación por acuerdo o ley general, llamada simbólica.

Así mismo, una representación semiótica de un objeto matemático, posee siempre un componente icónico, un componente idexical y un componente simbólico, pero siempre con relación con el intérpreta y con su conocimiento colateral. ("Historia de la Semiótica. Homenaje a Umberto Eco.", 2016)

### **Aprendizaje basado en proyectos:**

Según el Diccionario de la Real Academia Española (2016) en su Diccionario de la Lengua Española, el concepto de proyecto se entiende como

Primer esquema o plan de cualquier trabajo que se hace a veces como prueba antes de darle la forma definitiva”, o “conjunto de escritos, cálculos y dibujos que se hacen para dar idea de

cómo ha de ser y lo que ha de costar una obra de arquitectura o de ingeniería (Guevara Álvarez, 2013).

Este concepto ha sido trasladado al campo educativo, donde adquiere una dimensión más amplia y connotaciones específicas. Así, desde un enfoque pedagógico, el concepto de proyecto, lo define Corredor (2014) como:

Un conjunto de diversas actividades relacionadas entre sí que sirven a una serie de intenciones u objetivos educativos. En un sentido amplio, se trata de proponer a los niños/as que se impliquen en la realización de proyectos que respondan a su interés y que tengan sentido para ellos.

Del mismo modo, es un proceso activo y participativo para dar solución una situación problemática social de gran interés para el estudiante, la cual, exige una organización del aprendizaje en la que maestros, estudiantes y familia trabajan colaborativamente para cumplir el objetivo propuesto.

Este tipo de metodología se origina en 1921 cuando su autor Kilpatrick (1871-1965) publicó el ensayo: “El método de proyectos” con el fin de que la actividad escolar tuviera sentido y utilidad, basado en la libertad de acción por parte del estudiante en la construcción de su propio conocimiento.

El papel del docente en ésta metodología es orientar al estudiante a tomar decisiones lógicas y desarrollar las actitudes sociales sobre las decisiones adoptadas donde se espera desarrollar una actividad dinámica en un ambiente social con un propósito específico, definido como: “Un plan de de trabajo libremente elegido con el objeto de realizar algo que nos interesa” (Fernández Martínez, 2016).

Se considera que los proyectos son actividades utilizadas por los pedagogos como procedimientos típicamente inteligentes, desarrollados para cualquier tipo de actividad humana sin barrera de edad o condiciones y que según Kilparick (1921) se pueden clasificar en cuatro tipos:

a) Proyecto de creación, de creatividad o de producción. b) Proyecto de apreciación, recreación o consumo. c) Proyectos de solución de problemas y d) Proyectos para la adquisición de un aprendizaje específico o adiestramiento.

Por otro lado, el pedagogo Decroly (1925) plantea el método de enseñanza basado en proyectos, en el descubrimiento de los intereses y necesidades del niño, de manera que pueda mantener su atención con el objeto de que busque el conocimiento por sí mismo y de ésta forma, la escuela prepare el niño para la vida social en un medio natural y humano en el que vive.

De acuerdo con Rodríguez y Rodríguez (1925) todo el procedimiento de los programas actuales, se reduce a tres tipos de ejercicios: observación mediante el cual, el niño se acerca al conocimiento orientado por el maestro mediante la observación del entorno; asociación para relacionar los conocimientos adquiridos por la observación y la expresión oral y gráfica que evidencien el nivel de adquisición de los conocimientos en el niño (Valenzuela, 2008)

El aprendizaje por proyectos permite la organización integral del conocimiento, explicadas como un conjunto de acciones planificadas estratégicamente que orienta, direcciona, organiza y monitorea el conocimiento de forma creativa y desde una perspectiva investigativa.

Además, éste tipo de aprendizajes se centra en la investigación acción, promoviendo el trabajo cooperativo basado en situaciones de la vida diaria que promueven acciones prácticas que transforman positivamente el ser humano en condiciones de vida, dándole sentido a lo que éste aprende (Reyes, 2011)

El aprendizaje por proyecto, según (Hidalgo, 2008), es una estrategia de planificación centrada en un tema y un tiempo determinado compuesto por un conjunto de procesos que relaciona la

enseñanza y el aprendizaje; con el objeto de desarrollar en los estudiantes y docentes sus competencias intelectuales, afectivas, sociales, éticas y corporales. De acuerdo con López & Lacueva (2007) la enseñanza por proyectos no es reciente, entre sus pioneros encontramos a Dewey y Kilpatrick, “es una propuesta que ha venido mejorándose mediante experiencias e incluso con otras denominaciones como “trabajo por tópicos” o “inmersión temática”.

El término proyecto, anticipa una intención de actuar que conlleva una representación para hacer alguna cosa, la elaboración de una óptica lo más amplia posible sobre el objeto de estudio, con la precaución de actuar de acuerdo a los objetivos propuestos con el fin de resolver un problema, producir o satisfacer alguna necesidad que conlleva a aprendizajes para el alumno desde una visión multidimensional.

No obstante, como bien reconoce Perrenoud (2004) ante la diversidad de discursos pedagógicos actuales, existen múltiples interpretaciones de cómo llevar al aula la metodología de proyectos, así como del conjunto de prácticas de enseñanza y aprendizaje que se insertan en la misma. El autor, considera que, en su versión más ambiciosa, de la cual es ejemplo la perspectiva de la educación progresista ya revisada, el proyecto es la espina dorsal del currículo y la enseñanza, la manera común de construcción de saberes en el aula. Pero en el otro extremo, es una actividad entre muchas más, a las cuales se yuxtapone con el propósito de hacer menos áridos los aprendizajes y de motivar a los alumnos.

Debido a que la escuela no logra la movilización de saberes en donde los alumnos se limitan a acumular información y aprobar exámenes, no consigue trasladar los conocimientos aprendidos a situaciones reales complejas, que el aprendizaje por proyectos puede lograr vinculando las

competencias ligadas a contextos culturales, escolares, profesionales, o a condiciones sociales particulares, que se establece con claridad en la siguiente cita (Perrenoud, el El, sf):

Para desarrollar competencias es preciso, antes que nada, trabajar por problemas o por proyectos, proponer tareas complejas y desafíos que inciten a los alumnos a movilizar sus conocimientos, y, en cierta medida, a completarlos. Eso presupone una pedagogía activa, cooperativa, abierta para la ciudad o el barrio, sea una zona urbana o rural [...] Enseñar hoy debería consistir en concebir, encajar y regular situaciones de aprendizaje según los principios activos constructivistas. (p.4)

En el caso concreto de la enseñanza y el aprendizaje en torno a proyectos, el autor plantea que son varias las competencias que desarrolla el alumno:

1. Competencias para la definición y afrontamiento de problemas "verdaderos", para la transferencia o movilización de los saberes que se poseen, así como para la toma de conciencia de lo que se sabe, y de la capacidad de utilizar y generar nuevos saberes.

2. Competencias para la cooperación y el trabajo en red: Saber escuchar, formular propuestas, negociar compromisos, tomar decisiones y cumplirlas; también enseña a ofrecer o pedir ayuda, a compartir saberes y preocupaciones, a saber, distribuir tareas y coordinarlas, a saber evaluar en común la organización y avance del grupo, a manejar en conjunto éxitos, fracasos, tensiones.

3. Competencias para la comunicación escrita (planes, protocolos de proyecto, memos, correspondencia, bocetos, pasos a seguir, informes, etc.) y oral (exposición oral, argumentación, animación, compartición y negociación de saberes).

4. Competencias para la autoevaluación espontánea o solicitada, para el análisis reflexivo de las tareas cumplidas, de los logros y las limitaciones personales y del grupo, para la elección de

ayudas remediales o de apoyos psicopedagógicos, para el establecimiento de nuevos planes de aprendizaje.

En tal sentido, lo importante es que los proyectos generen oportunidades de aprendizaje significativo para los alumnos, rescaten sus intereses y promuevan sus puntos fuertes. En este sentido, se puede afirmar que esta forma de trabajo, conducen al alumno al despliegue de un conjunto de habilidades. No menos importantes son la motivación intrínseca y la inventiva o la creación artística, el gusto estético que el alumno desarrolla en torno a lo que hace, individual, colectivamente.

### **Metodologías activas en los procesos de enseñanza aprendizaje:**

Según Gálvez (2013) son aquellas donde la labor del docente es la de mediador, guía y facilitador que diseña su clase tomando al estudiante como eje central del proceso en la construcción del conocimiento.

Por tal motivo, los estudiantes prefieren las clases que utilizan una metodología activa por encima de las metodologías tradicionales McKinney; Bonwell & Eison (1991) y el “cono del

aprendizaje” de Edgar Dale (Ver fig.), ilustra cómo se incrementa la capacidad de retención y el aprendizaje basado en el “saber hacer” más que en el simple “saber”

Después de dos semanas tendemos a recordar		Naturaleza de la actividad involucrada	
10% de lo que leemos	Lectura	Actividad verbal	Pasivo
20% de lo que oímos	Palabras oídas		
30% de lo que vemos	Dibujos observados		
50% de lo que oímos y vemos	Mirar una película Ir a una exhibición Ver una demostración Ver algo hecho en realidad	Actividad visual	Activo
70% de lo que decimos	Participar en un debate Tener una conversación	Actividad participativa y receptiva	
90% de lo que decimos y hacemos	Realizar una representación teatral Simular experiencias reales Hacer lo que se intenta aprender	Actividad pura	

**Figura 7. Cono del aprendizaje según Dale. Galvez (2013)**

## 2.2 Marco Teórico

La Geometría ha evolucionado a través de la historia de la humanidad, iniciando con las civilizaciones Mesopotámicas (3500 a.C), dedicadas a tomar datos en el conocimiento de las propiedades de los triángulos semejantes, como primer paso del método científico, siguiendo con los egipcios (1.600 a.C.), quienes trabajaron una Geometría práctica en su necesidad de calcular áreas de las tierras y volúmenes de los graneros, así como de las grandes construcciones que todavía se conservan de la época, aportaron principalmente la aproximación de la fórmula del área del círculo y la deducción de la regla para calcular el volumen de un tronco de pirámide.

Los Griegos (I a.C.) además del significado de la palabra Geometría que viene del griego **Geo** –tierra y **Metría** –medida-, se cree, inició con los trabajos del primer científico Griego Tales de Mileto (624 - 548 a.C. aprox.) considerado uno de los siete sabios de Grecia, cuyo principal aporte

fue introducir en la Geometría la noción de demostración y el teorema que lleva su nombre sobre semejanza de triángulos e históricamente recordado por su uso en la forma sencilla de medir la altura de una pirámide comparándola con la de su propia sombra, en el momento del día donde su altura era igual a la de su sombra y por lo tanto, la sombra de la pirámide, sería la altura de la pirámide; Siguiendo con Pitágoras (582-507 a.C.) a quien se le atribuye el estudio de los poliedros regulares (o pitagóricos) y el famoso Teorema que lleva su nombre, tan importante y utilizado en la solución de triángulos rectángulos y la construcción Geométrica de los números irracionales. De la misma manera que resultaron grandes aportes, surgieron “Los tres grandes problemas de la Geometría Griega” sin resolver: La duplicación del cubo, la cuadratura del círculo, y la trisección del ángulo, que, por su afán en resolverlos, contribuyó al progreso de la Geometría de la época, con el descubrimiento del número pi ( $\pi = 3, 1416\dots$ )

La primera geometría regular de la que se tiene noticia es el tetraedro encontrada en una excavación de la antigua ciudad de Ur, al sur de Irak y formaba parte de un juego de dados. La segunda figura, el cubo, apareció en Roma como la forma más popular para los dados alrededor del año 900 a.C. y luego en el mismo lugar encontraron un dado en forma de dodecaedro.

Pitágoras, filósofo y matemático griego (582-507) a.C.) agrupó los tres poliedros simétricos que se conocían hasta el momento como ejemplos de una especie común: La esfera de 12 pentágonos, como se llamó al dodecaedro y que asumió el significado espiritual de la secta

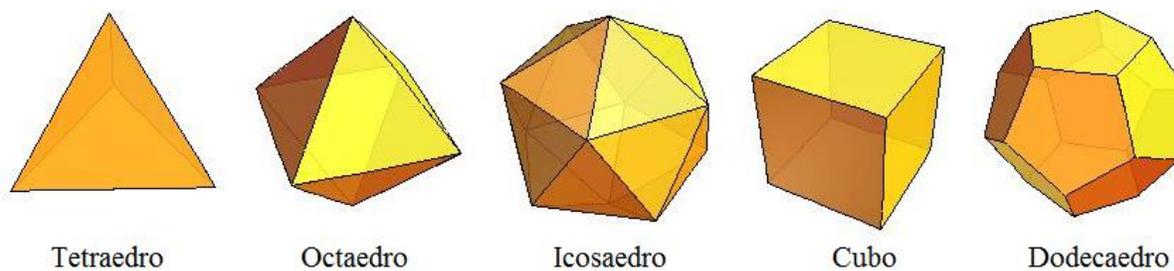
pitagórica; el cubo, compuesto de seis cuadrados y la pirámide de cuatro caras triangulares llamada tetraedro por los pitagóricos ya que tetra significa cuatro en griego.

Pitágoras no descubrió ningún otro sólido nuevo, lo cual demoró en descubrir otras dos figuras geométricas, debido a que los miembros de la secta juraban mantener en secreto sus ideas del mundo matemático.

Hacia los años 428-347 a.C. Platón recuperó el estudio de las figuras pitagóricas y junto a Teeteto quien estudió cómo para construir una figura tridimensional con las máximas simetrías, los polígonos bidimensionales tendrían que ser simétricos, y todas las caras del sólido debían tener la misma forma. Estas caras planas, también tendrían que encontrarse unas con otras siempre con la misma configuración y con este criterio, descubrió al octaedro y el icosaedro, demostrando que nunca podría encontrar una sexta manera de colocar juntas caras regulares para construir un nuevo tipo de poliedro regular convexo.

Para Platón, el tetraedro, la más puntiaguda y simple de las cinco, representaba el fuego; el icosaedro, la más redonda, representaba el agua; el octaedro, como una forma intermedia entre las dos anteriores, representaba el aire; el cubo una de las más estables, representaba la tierra y, por

último, la esfera, de 12 pentágonos, que Platón rebautizó como dodecaedro, representaba el universo.



**Figura 8. Poliedros regulares**

Fuente: Wolfram, 2018

Paralelamente a los descubrimientos en Roma y Grecia, se sabe que éstos poliedros ya eran conocidos por culturas anteriores, puesto que en 1850 se encontraron unas figuras de barro en un yacimiento neolítico en Escocia que corresponde a los 5 sólidos platónicos y que datan del 2000

a.C. Que indican claramente un grado de dominio de las matemáticas que hasta la fecha todo arqueólogo o historiador de la matemática, le había negado al hombre neolítico.



**Figura 9. Sólidos platónicos encontrados en un yacimiento neolítico en Escocia**

Más de 2000 años después, Johannes Kepler demostró que existían más figuras que cumplían con la definición de los sólidos regulares, aunque fueran cóncavos en vez de convexos como los sólidos platónicos y se conocen con el nombre de sólidos de Kepler-Poinsot (dodecaedro estrellado, icosaedro estrellado).

Una de las ecuaciones que cambiaron el mundo es la fórmula de Euler que relaciona de un modo sencillo el número de caras ( $c$ ), vértices ( $v$ ) y aristas ( $a$ ) de un poliedro, allanando el camino

para técnicas más generales y potentes y creando una rama nueva en las matemáticas como es la topología, considerada como la geometría de la lámina elástica. La fórmula se expresa como:

### **Ecuación 1. Ecuación de Euler para caras, vértices y aristas de un poliedro:**

Aunque Descartes fue el primero que la descubrió (1639), no la publicó por considerarla una curiosidad menor y se la entregó a Leonard Euler, el matemático más prolífico en la historia para probar y publicar esta relación, lo cual hizo en 1750.

La versión moderna de la expresión expresa que las caras (C) son polígonos de dimensión 2, las aristas (A) son líneas de dimensión 1 y los vértices (V) son puntos de dimensión 0. Los signos de la expresión alternan, + - +, con + asignada a las características de dimensión par y - a aquellas de dimensión impar. Esto implica que puedes simplificar un solo fusionando sus caras o eliminando sus aristas y vértices y éstos cambios no alteran el número  $C - A + V$  siempre que cada vez que elimines una cara, también elimines una arista o cada vez que elimines un vértice, también elimines una arista. Los signos que se alternan quieren decir que los cambios de éste tipo, se compensan.

### **Área y Perímetro:**

El perímetro y el área son magnitudes fundamentales en la determinación de una figura geométrica. Etimológicamente, perímetro, viene del griego peri que significa alrededor y metro que significa medida.

Así mismo, uno de los términos más trascendentales en la geometría, ha sido el definir el concepto de área, al cual se refieren como superficie o viceversa. Para algunos, el área es un número y para otros es algo distinto del número que la mide y cuyo significado puede variar para

referirse dependiendo del autor. Para Freudenthal (1983) “el área es una magnitud que mide objetos más variados que otras magnitudes y presuponen la elección de una unidad de medida”; Heraud (1989) considera el área como “el modelo empleado para la distinción entre el concepto físico de superficie (porción de espacio ocupada) y el concepto numérico de área”

La medición es un proceso por medio del cual se asigna un número al área como resultado de la comparación de la superficie con otra considerada como unidad.

### **2.3 Marco Legal**

Nuestro sistema educativo se basa en el marco del siguiente sistema de normas legales que soportan el presente trabajo:

La Constitución política colombiana: Define la educación como un derecho y un servicio público en su artículo 67 que tiene una función social para el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica y a los demás bienes y valores de la cultura.

La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente. El Estado, la sociedad y la familia son responsables de la educación, que será obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprenderá como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica. La educación será gratuita en las instituciones del Estado, sin perjuicio del cobro de derechos académicos a quienes puedan sufragarlos. Corresponde al Estado regular y ejercer la suprema inspección y vigilancia de la educación con el fin de velar por su calidad, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos; garantizar el adecuado cubrimiento del

servicio y asegurar a los menores las condiciones necesarias para su acceso y permanencia en el sistema educativo. La Nación y las entidades territoriales participarán en la dirección, financiación y administración de los servicios educativos estatales, en los términos que señalen la Constitución y la ley.

Ley General de Educación. Ley 115: Define la educación en su art. 1 como un proceso de formación permanente, en una concepción integral de la persona humana, y señala las normas generales para regular el servicio público de la educación que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad.

El artículo 23 propone para el logro de los objetivos de la educación básica, las áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y de la formación con un mínimo del 80% del plan de estudios, de acuerdo con el currículo y el proyecto educativo institucional. (Ministerio de Educación, 1994)

Decreto 1860 por el cual se reglamente parcialmente la ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales con el objeto según el art. 1 sea favorecer la calidad, continuidad y universalidad del servicio público, cuyo centro del proceso educativo es el educando

Decreto 1075 de 2015 por el cual se expide el decreto Único reglamentario del sector educación con el objeto de compilar normas reglamentarias preexistentes para que se ajuste a la

realidad institucional y a la normativa vigente, lo cual conlleva en aspectos puntuales, el ejercicio formal de la actividad reglamentaria.

Decreto 1290. En su art. 2 reglamenta la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes en los niveles de educación básica y media que deben realizar los establecimientos educativos

Ley 1098. Ley de infancia y adolescencia, cuya finalidad es garantizar a los niños, niñas y adolescentes su pleno y armonioso desarrollo para que crezcan en el seno de la familia y de la comunidad en un ambiente de felicidad, amor y comprensión bajo la influencia de la dignidad e igualdad humana sin discriminación alguna.

Lineamientos curriculares de matemáticas: El Ministerio de Educación Nacional presenta una propuesta en constante proceso de revisión y análisis, para posibilitar, promover y orientar los procesos curriculares que viven las instituciones en busca de lograr la calidad educativa matemática.

Adicionalmente, presenta los procesos generales del aprendizaje como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos los cuales deben posibilitar la aplicación de los conocimientos fuera del ámbito escolar donde el estudiante relacione los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambios de puntos de vista.

Plantean una estructura curricular agrupada en 5 pensamientos: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas

de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

El presente trabajo, se basa en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, considerado como una necesidad ineludible para recuperar el sentido espacial que permite que el estudiante construya y manipule las representaciones mentales de los objetos, las relaciones entre ellos, sus representaciones, sus diversas traducciones a representaciones materiales.

#### Estándares Básicos en competencia matemática: (EBC)

El MEN fija a través de los estándares criterios claros y públicos que permiten verificar si un estudiante o institución cumple con las expectativas comunes de calidad, respecto a lo que se espera que todos los estudiantes aprendan en cada una de las áreas a lo largo de su paso por la educación Básica y Media, especificando por grupos de grados (1 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9 y 10 y 11).

Estos estándares representan una guía para precisar los niveles de calidad de la educación, orientan la construcción y el diseño del currículo y el plan de estudios para producir o adoptar métodos, técnicas e instrumentos que permitan evaluar de manera interna y externa, si se alcanza o se supera esas expectativas de calidad, y al evaluar dichos procesos, posibilitan monitorear los avances en el tiempo y diseñar estrategias focalizadas de mejoramiento, acordes con las necesidades de las instituciones educativas y sus regiones. En éste sentido, la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y a la formación de

ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos.

1. Derechos Básicos de aprendizaje: (DBA) El documento plantea un conjunto de saberes y habilidades esenciales para orientar el proceso educativo desde grado primero a once, en relación con los lineamientos generales y los estándares básicos de competencia matemática se espera que cada estudiante aprenda al finalizar un grado.

Adicionalmente, plantea elementos para construir posibles rutas de aprendizaje año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes, alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados.

Matriz de referencia: Es un instrumento en forma de cuadro de doble entrada en concordancia entre las competencias y los componentes de las áreas que constituye un elemento para orientar procesos de planeación, desarrollo y evaluación formativa; además, presenta los aprendizajes que evalúa el ICFES en cada competencia relacionándolo con las evidencias de lo que debería hacer y manifestar un estudiante que haya logrado dichos aprendizajes en una competencia específica como insumo para las pruebas saber 3°, 5° y 9°.

### 3. Diseño Metodológico

#### 3.1 Tipo de Investigación

La presente investigación está enmarcada desde el enfoque cualitativo tipo de investigación acción.

Según Ruiz (1996) los métodos cualitativos parten del supuesto básico de que el mundo social es un mundo construido con significados y símbolos, lo que implica la búsqueda de esta construcción y de sus significados. Por tanto, su objeto de estudio es la sociedad; diversa, compleja y en constante evolución y cambio.

Según Rist (sf) la metodología cualitativa consiste en un modo de encarar el mundo empírico y Elliot propone la investigación acción como una solución que relaciona la teoría con la práctica que regularmente son elementos aislados de los procesos pedagógicos, pero que, si se generaliza, implicaría una contradicción con la práctica del docente en un contexto determinado.

Según Carr (sf) los objetos de la investigación acción en educación son las propias prácticas educativas y su entendimiento de dichas prácticas, así como de las situaciones en que se practican en donde el investigador no toma los objetos de investigación como fenómenos, ni las prácticas como tratamientos desde un punto de vista meramente técnico.

Así mismo, los problemas de la educación no se limitan a la consecución de unos fines propuestos y conocidos, sino que estriban en actuar educativamente en situaciones sociales que suponen valores en conflicto e interacciones complejas entre personas distintas que obran en

función de diferentes entendimientos de la situación común y que obedecen a diferentes valoraciones a acerca de cómo debería conducirse tales interacciones.

No obstante, los investigadores admiten que las transformaciones de la realidad social no se consiguen sin interesar el entendimiento según la cual, las personas explican sus prácticas y sus situaciones, las cuales constituyen un elemento esencial para transformar la educación, aunque dicho entendimiento no sea una base suficiente para lograr dichas transformaciones.

La investigación acción en cuanto se ocupa del mejoramiento de las prácticas, de los entendimientos y de las situaciones de carácter educativo, se basa necesariamente en un enfoque de la verdad y de la acción que empieza con un patrón de prácticas y de entendimientos en una situación y culmina con otro distinto en el que algunas prácticas o algunos elementos de éstas, serán continuos, otros discontinuos o finalmente abandonados durante el proceso de mejoramiento.

Igualmente, la investigación acción implica relacionar las prácticas, los entendimientos y las situaciones entre sí, para descubrir correspondencias o ausencia de correspondencias entre entendimientos y prácticas, entre prácticas y situaciones, así como entendimientos y situaciones. De ésta forma, el investigador, al tratar de mejorar las prácticas, los entendimientos y las situaciones, procura avanzar con más seguridad hacia el futuro, mediante la comprensión de cómo sus propias prácticas son construcciones sociales englobadas en la historia y en las instituciones en la que él trabaja.

Por consiguiente, la presente investigación, se llevó a cabo por medio de un proceso de investigación acción, que pretende fortalecer el razonamiento geométrico en estudiantes del grado 6 C del Colegio Municipal María Concepción Loperena utilizando la estrategia pedagógica Festival Mundialista de cometas a “Pigargo” y el modelo instruccional de Van Hiele donde se

plantea la construcción de una cometa para participar en el festival de tal manera que sea lo más grande y vuele lo más alto posible, simulando la competencia mundialista de fútbol que se celebra cada 4 años.

### **3.2 Proceso de Investigación**

La investigación acción, contó con un tipo de diseño secuencial con un grupo de 33 estudiantes, centrada en el desarrollo de una propuesta pedagógica utilizando el aprendizaje basado en proyectos dirigido a estudiantes de sexto grado. Inicialmente se hizo un diagnóstico para diagnosticar el tema objeto de estudio y otro para identificar los presaberes en el componente espacial métrico. El análisis desde el enfoque cualitativo fue interpersonal, sociolingüístico de las representaciones semióticas, los símbolos, los discursos, y el alcance de resultados en la búsqueda cualitativa de significados de la actividad educativa.

#### **Etapa previa: Diagnóstico**

Buisán & Marín (2001), definen el diagnóstico educativo como:

un proceso que trata de describir, clasificar, predecir y explicar el comportamiento de un sujeto dentro del marco escolar. Incluyen un conjunto de actividades de medición y evaluación de un sujeto (o grupo de sujetos) o de una institución con el fin de dar una orientación. (p13)

Adicionalmente esos autores, consideran el diagnóstico educativo o pedagógico como una actividad científica de orientación con el objeto de prevenir, predecir y corregir a sujetos o

instituciones y cuyos resultados sobre las posibilidades y limitaciones encontradas, sirvan para definir el desarrollo, futuro y puesta en marcha del aprendizaje objeto de estudio.

Lo anterior se encuentra enmarcado en los documentos emanados por el MEN que representan las directrices que orientan el proceso de la presente investigación y cuyas competencias se describen según el ICFES a continuación:

**Tabla 7. Descripción de competencias**

<b>COMPETENCIAS</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>
Comunicación, representación y modelación	Capacidad para expresar ideas, usar diferentes tipos de representación, descubrir relaciones matemáticas, descubrir situaciones o problemas usando el lenguaje escrito, concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular expresiones que contengan símbolos y formas, utilizar variables y describir cadenas de argumentos orales y escritas, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones, interpretar lenguaje formal y simbólico, así como traducir del lenguaje natural al simbólico formal y viceversa, que se resume en decodificar de manera entendible aquello expresado matemáticamente en palabras sencillas y manejables por el estudiante.
Razonamiento y argumentación	Capacidad para dar cuenta del cómo y del por qué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, proponer opiniones e ideas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamiento y evaluar cadenas de argumentos.
Resolución de problemas	Capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, desarrollar, aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida, verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema.

Fuente: [www.icfes.gov.co](http://www.icfes.gov.co)

El diagnóstico se desarrolló de dos formas: La primera al inicio del año escolar, con el objeto de identificar la competencia y el componente del área de matemáticas con mayor dificultad

utilizando ejemplos de preguntas de la prueba saber 2015, a través de 3 pruebas (32 preguntas) de selección múltiple y la segunda para identificar los presaberes en el componente espacial métrico a través de una prueba escrita de 19 preguntas de selección múltiple y 5 preguntas abiertas sobre temas relacionados con la forma y el vuelo de la cometa

### **Diseño:**

El diseño de la propuesta se adaptó según el proceso para aprendizaje por proyectos en donde se propone a los estudiantes a través del lema “Si lo oigo, lo olvido, si lo veo, lo recuerdo, si lo hago , lo aprendo” la construcción de una cometa que representa el objeto de conocimiento y se organizan una serie de actividades para poder cumplir con el reto planteado de construir la cometa más grande que vuele más alto como propósito del “Festival mundialista de cometas Pigargo”,

simulando un campeonato mundial en donde cada cometa representa un país que participó en el mundial de futbol Brasil 2014.

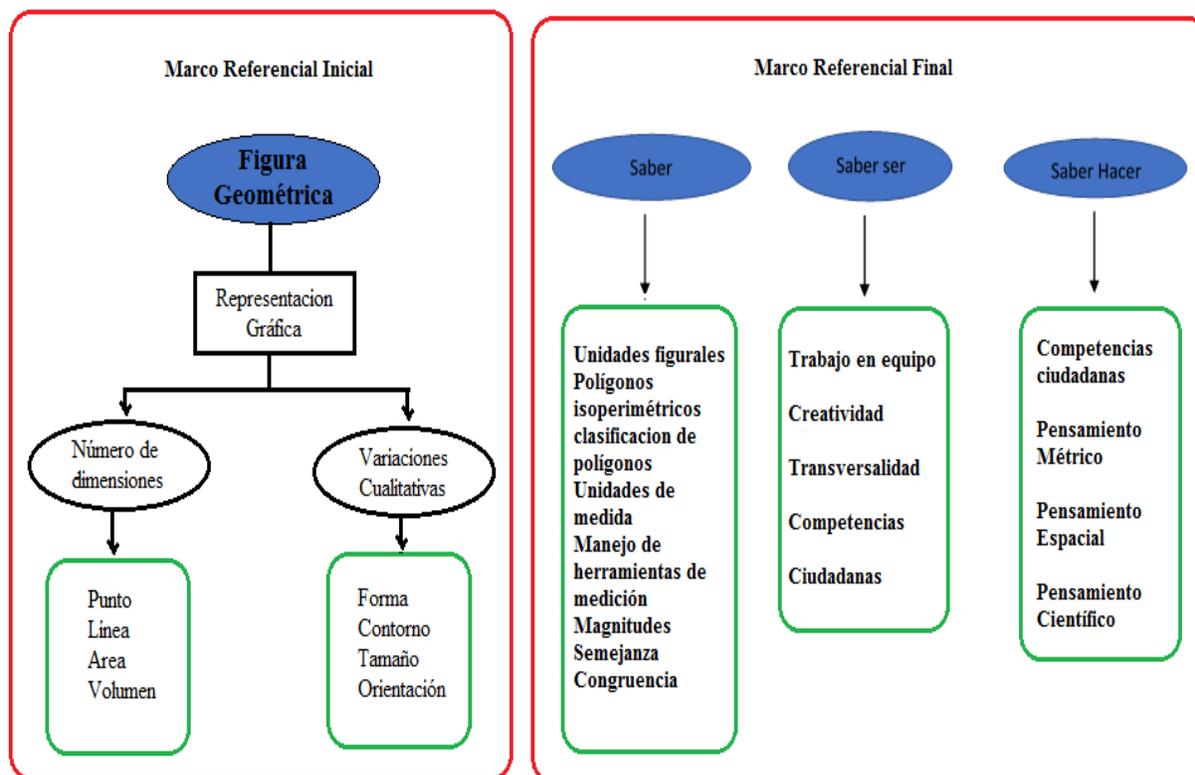


**Figura 10. Procesos cognitivos desarrollados durante la investigación de acuerdo con el modelo de representación de Duval**

Inicialmente, se consideró utilizar únicamente las variaciones de representación gráfica como conceptos geométricos a desarrollar, pero con el avance de la investigación, surgieron conceptos emergentes como semejanza y congruencia de polígonos, polígonos isoperimétricos y la

transversalidad con otras áreas del conocimiento como ciencias sociales, ciencias naturales, entre otros.

La figura presenta la información más relevante respecto a los procesos cognitivos desarrollados durante la investigación de acuerdo con el modelo de representación de Duval



**Figura 11. Marco referencial inicial y final**

### **Implementación:**

Para el desarrollo de la investigación se tuvo en cuenta las fases del diseño a través del aprendizaje por proyectos y se elaboró un plan de acción que contenía 3 fases descritas a continuación:

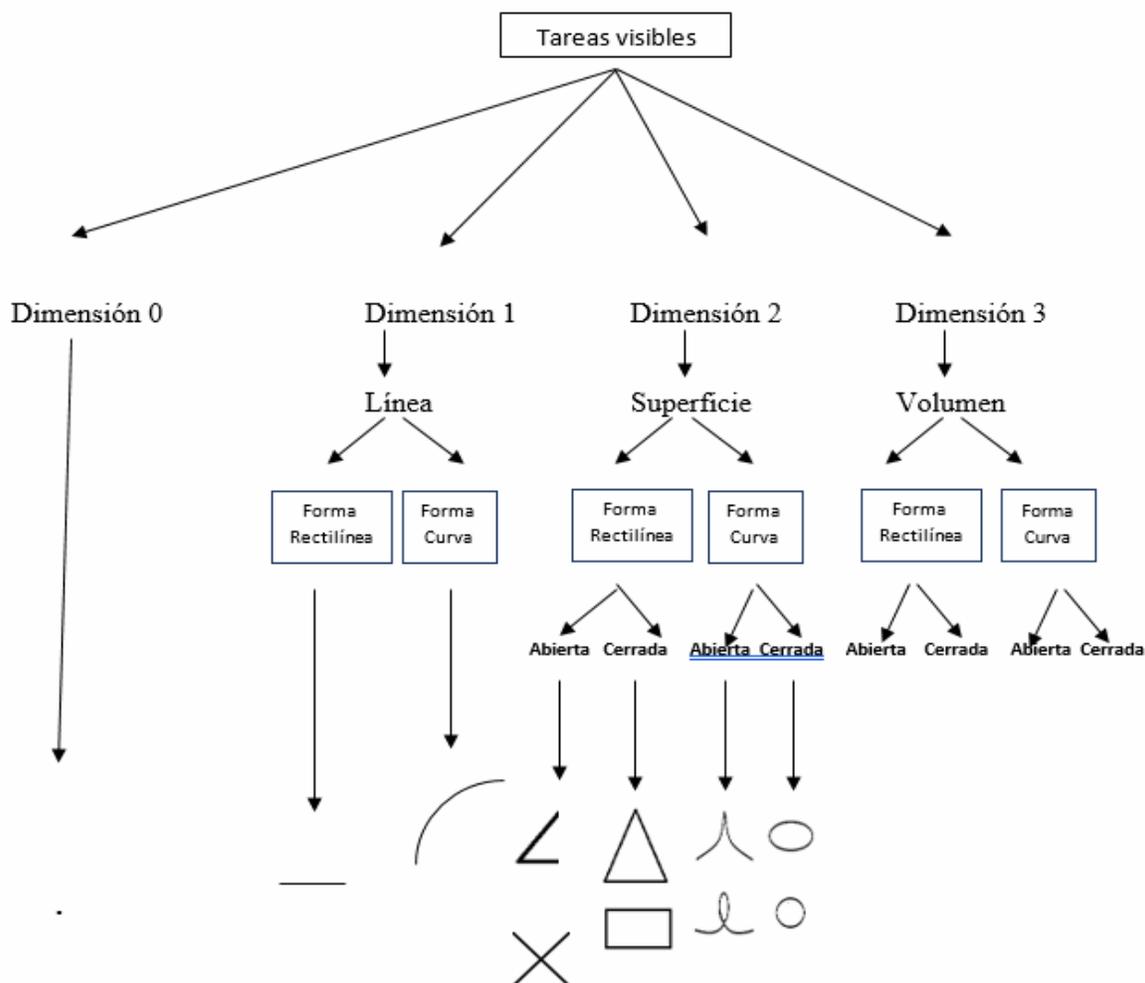


Ilustración 1. Adaptación de Duval. Clasificación de las unidades figurales

## Figura 12. Clasificación de unidades figurales

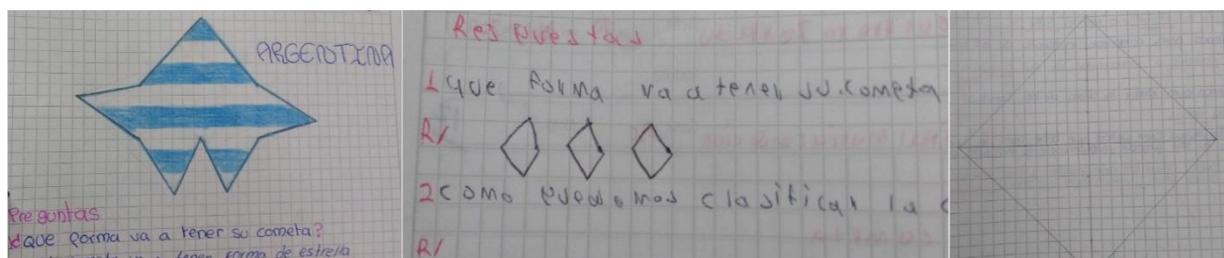
Fase 1: Punto de partida:

En esta fase, se realizó una prueba escrita que constó de 2 sesiones definidas de la siguiente manera: La primera se compone de 19 preguntas del componente Espacial métrico de selección múltiple de la prueba saber 2015, compuesta por 5 preguntas de la competencia comunicativa, 9 preguntas de la competencia razonamiento, objeto de estudio y 5 preguntas de la competencia Resolución. La segunda se compone de 5 preguntas abiertas sobre temas relacionados con la forma

y el vuelo de la cometa: ¿Qué forma va a tener la cometa? (representación); Cómo podemos clasificar las cometas?; Cómo podemos comparar el tamaño de las cometas?; Cómo calculamos la altura de las cometas?; Qué característica cree usted que debe tener la cometa para que sea grande y vuele lo más alto posible?

De esta manera se puede valorar el nivel 1 de razonamiento correspondiente a las variaciones según el número de dimensiones, es decir, unidades figurales de la forma de las cometas que según Duval se observan a través de unas tareas visibles: (Ver Anexo)

Las representaciones gráficas mostraron los aspectos necesarios sobre la identificación de la forma y las posibles concepciones sobre el área que los estudiantes tenían, obteniendo como respuestas para de comparar el tamaño de las cometas.



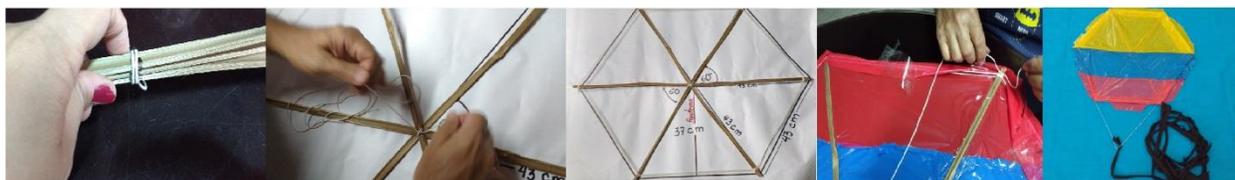
**Figura 13. Representaciones gráficas de las formas de las cometas**

## Fase 2. Festival de Cometas

Se utilizaron diversas estrategias didácticas preliminares para el desarrollo del evento como: Cuento “El tren de los cielos”, Video instructivo, folleto, representación gráfica de cada modelo y elevación de la cometa necesarios para orientar el proceso de construcción e identificación de los

atributos mensurables para participar en el festival de cometas como área y perímetro, indispensable para lograr el nivel 2 de razonamiento correspondiente a los atributos

En esta etapa, el docente pudo orientar los procesos mediante la experimentación del vuelo de la cometa que construyó, la representación gráfica y el video permitieron que los estudiantes elaborar hipótesis sobre las condiciones del vuelo de la cometa, consulta a expertos sobre los materiales necesarios para lograr el objetivo de construir la cometa más grande que volara más alto.



**Figura 14. Proceso de construcción del modelo de la cometa**



**Figura 15. Actividades festival de cometas**

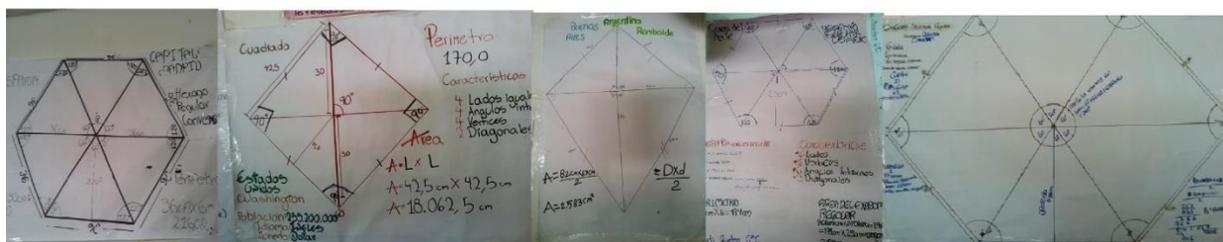
Fase 3: Comparación de Cometas:

Para que pueda haber una figura o gráfico es necesario que haya un contraste sobre un soporte material homogéneo (hoja de papel) de manera que se destaque alguna cosa identificable en tal

campo perceptivo, según Duval (1999). El contraste como primer elemento de toda representación visual, forma una “Mancha visible”.

La implantación de ésta mancha visible según el número de dimensiones y las variaciones cualitativas de forma (línea recta o línea curva) , variaciones de tamaño, de orientación, etc, lo cual define los elementos constitutivos de una figura en relación a las dimensiones dimensional y cualitativo.

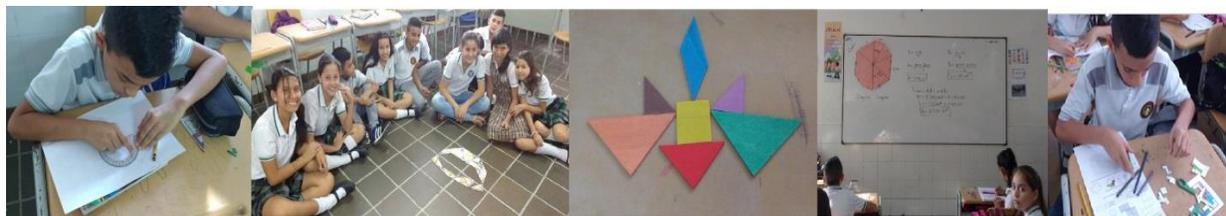
Es así, como cada cometa se representó gráficamente en una cartelera, como modelo en el proceso de comparación, las cuales se ubicaron en las paredes del salón, de tal manera que permitiera consultar sus atributos en clases posteriores.



**Figura 16. Representación y proceso de medición de las cometas**

En dicho proceso, se observa en su mayoría, la ausencia de la identificación de la forma de las cometas por parte de los estudiantes, presentando confusión principalmente en cuadriláteros, motivo por el cual, se hizo necesario el uso de material didáctico como figuras geométricas y tangram para la identificación de la forma, la solución de retos pedagógicos, permitió desarrollar modelos de situaciones problemáticas de comparación de cometas para orientar la construcción de su propio proceso cognitivo con temas que exigieron su estudio utilizando el modelo instruccional de Van Hiele para profundizar el concepto de área y perímetro, y para interpretar la igualdad de 2

cometas con el mismo perímetro, permitiendo el estudio de polígonos isoperimétricos, evaluando el nivel 3 de razonamiento correspondiente al tamaño de las cometas



**Figura 17. Estrategias para identificar unidades figurales**

Fuente: Elaboración propia

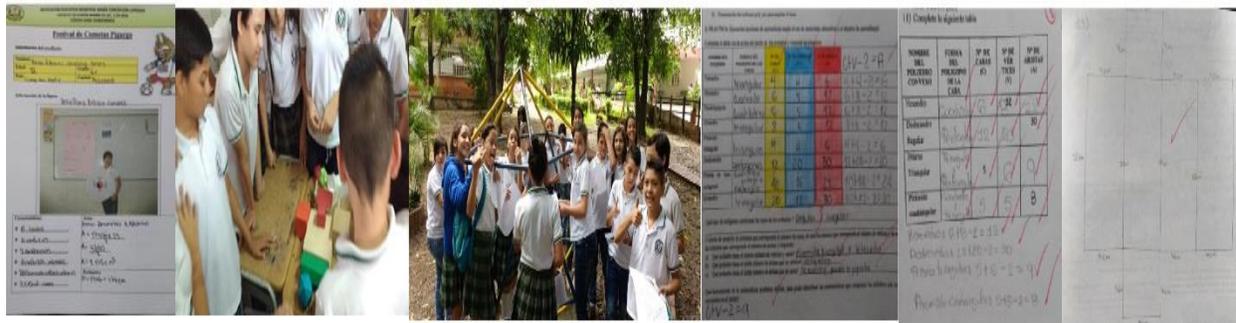
### **Evaluación:**

Existen diversos estudios la importancia de evaluar la propia práctica pedagógica desde 2 facetas: Cuantitativamente (examen) y cualitativamente. La presente investigación, se propone evaluar el razonamiento desde 4 componentes:

En primer lugar, cada estudiante debe resumir las variaciones visuales que identificó de su cometa junto con el desarrollo del proceso operacional en el cálculo del área, utilizando un formato estándar (Álbum Pigargo)

En segundo lugar, a través de una secuencia, el estudiante debe encontrar patrones de los elementos de los poliedros y expresarlos matemáticamente a través de una fórmula (Fórmula de Euler) y hacer la representación plana para construir una caja.

En Tercer lugar, los estudiantes deben responder una prueba escrita de 10 preguntas de selección múltiple con única respuesta, 7 de las cuales son tomadas de la prueba saber de 9° grado (2013,2015) y 3 de las pruebas supérate de 7° grado del año inmediatamente anterior.

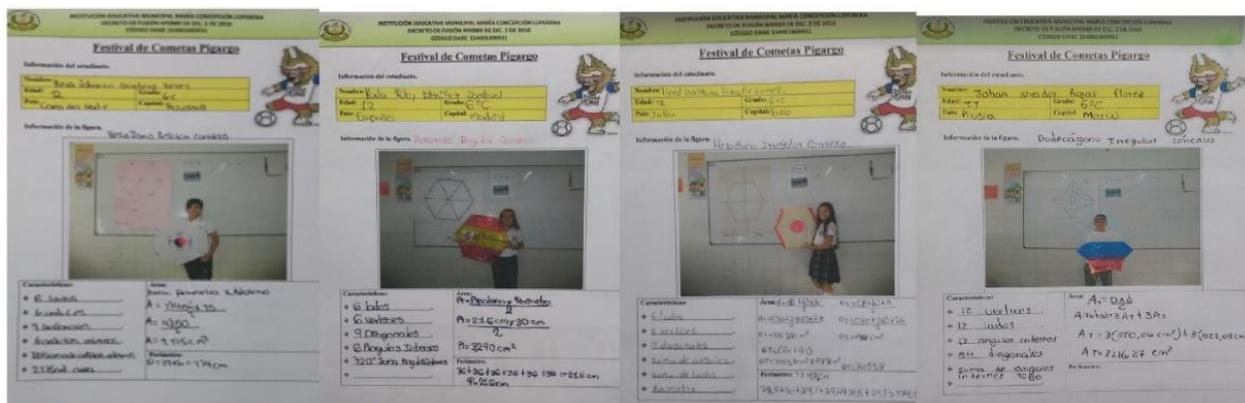


**Figura 18. Estrategias de evaluación**

Fuente: Elaboración propia

Adicionalmente, cada estudiante, construyó un álbum en block cuadriculado con el proceso operacional de cada cometa con vocabulario geométrico utilizado y todo el proceso llevado a cabo,

durante la comparación de las cometas. Además, se elaboró el Álbum Pigargo con información fotográfica de cada participante con el proceso personal de cada cometa.



**Figura 19. Identificación de las unidades figurales de la cometa que representó a Corea del Norte**

Fuente: Elaboración propia

### 3.3 Población y Muestra

La población es el conjunto total de individuos, objetos o medidas que poseen algunas características comunes observables en un lugar y en un momento determinado.

La población objeto de estudio en la investigación son 136 estudiantes de sexto grado del Colegio Municipal María Concepción Loperena.

La muestra es un subconjunto de los elementos de la población, para lo cual, en nuestro estudio, son 33 estudiantes, de los cuales hay 17 mujeres y 16 hombres con edades entre los 11 a los 14 años, como muestran las siguientes tablas

**Tabla 8. Codificación de los informantes claves**

ESTUDIANTES	GENERO	EDAD
E1	M	12
E2	F	12
E3	M	12
E4	M	13
E5	F	13
E6	M	12
E7	M	11
E8	F	13
E9	F	12
E10	F	12
E11	M	11
E12	M	13
E13	F	12
E14	F	12
E15	F	11
E16	M	11
E17	M	12
E18	F	14
E19	M	12
E20	F	11
E21	F	12
E22	F	11
E23	F	13
E24	M	11
E25	M	11
E26	F	12
E27	F	12
E28	M	12
E29	M	14
E30	M	11
E31	F	11
E32	F	11
E33	M	11

EDADES	N° DE ESTUDIANTES
11	12
12	14
13	5
14	2
Total	33

### 3.4 Instrumentos de Recolección de la Información

Para recoger la información se utilizaron diversos instrumentos: Prueba inicial y final, diarios de campo, videos, folletos, los cuales permitieron analizar y evaluar las estrategias utilizadas

**3.4.1 Cuestionarios.** Es una técnica estructurada para recopilar datos, que consiste en una serie de preguntas escritas u orales que debe responder un entrevistado y generalmente es sólo un elemento de un paquete de recopilación de datos. En la presente investigación se realizó para identificar las

**3.4.2 Encuesta.** Cuestionario estructurado que se da a una muestra de la población y está diseñado para obtener información específica de entrevistados.

**Test:**

Prueba destinada a evaluar conocimientos o aptitudes en la cual hay que elegir la respuesta correcta entre varias opciones previamente fijadas.

**Diario Pedagógico: (Diario de campo)**

Es un instrumento utilizado por los investigadores para registrar aquellos hechos que son susceptibles de ser interpretados, es decir es una herramienta que permite sistematizar las experiencias para luego analizar los resultados.

El diario de campo se utilizó en todas las sesiones del proyecto, con el apoyo de grabaciones de audio, observaciones directas y fotográficas que evidenciaban resultados sobresalientes de los trabajos desarrollados por los estudiantes durante la presente investigación.

**Prueba censal Saber 2015**

El instituto colombiano para la evaluación de la educación (ICFES) pone a la disposición de la comunidad educativa y del público en general, de forma gratuita y libre de cualquier cargo, un conjunto de publicaciones con uso para fines académicos e investigativos, dentro de los cuales, se

hace referencia a la prueba de matemáticas para 5° y 9° como instrumentos de valoración de la presente investigación.

El aporte de estas pruebas a la presente investigación permitió identificar la competencia razonamiento del componente numérico como tema de investigación en la cual se desarrolló el proyecto y también como uno de los instrumentos para evaluar la investigación.

### **Categorización y triangulación:**

Según Thurstone (1984), las categorías permiten acercarse a la variabilidad afectiva de las personas respecto a cualquier objeto psicológico y competencias, que se constatan a través de las actitudes individuales y grupales. Las variables son aquellas características propias que identifican

a cada categoría, aspectos, atributos o habilidades observados a través de las funciones propias de cada parámetro en estudio.

Para el desarrollo de la presente investigación se tuvo en cuenta para el diagnóstico y la evaluación, los documentos emanados por el MEN (Lineamientos, Matriz de referencia, etc.) y para la intervención pedagógica, la teoría de representación de Duval.

**Tabla 9. Categorías de acuerdo con los objetivos**

Categorías de acuerdo con los objetivos			
Diagnosticar el pensamiento Geométrico Métrico en los estudiantes de 6 grado del Colegio Municipal María Concepción Loperena.	Competencias en el componente Espacial Métrico del Grado 5	Comunicación	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identificar unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establecer relaciones entre ellas</li> <li>-Establecer relaciones entre atributos mensurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes</li> </ul>
		Razonamiento	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Justificar relaciones de semejanza y congruencia entre figuras</li> <li>- Construir y descomponer figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas.</li> <li>-Utilizar relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición</li> <li>-Conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano</li> <li>- Comparar y clasificar objetos tridimensionales y figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes.</li> </ul>
		Resolución de Problemas	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Resuelve problemas utilizando diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes</li> <li>-Usa representaciones geométricas y establece relaciones entre ellas para solucionar problemas.</li> </ul>

<b>Categorías de acuerdo con los objetivos</b>			
Aplicar una propuesta pedagógica que permita desarrollar el razonamiento geométrico utilizando el Modelo de Van Hiele.	Propuesta pedagógica “Festival de cometas pigargo”	Aprehensión perceptiva Aprehensión discursiva Aprehensión operativa	-Realiza una representación congruente de un objeto real. -Reconoce los atributos mensurables de una figura geométrica relacionados con las variaciones de tamaño y orientación. Ordena un conjunto de objetos geométricos de acuerdo a sus propiedades.
Evaluar la propuesta	Elaboración de un álbum geométrico Construcción bidimensional de una caja. Construcción de la fórmula de Euler. Prueba escrita	Coordinación de aprehensiones	Identifica correctamente las unidades figurales y las variaciones de la representación de un objeto real. Elabora la representación plana de una caja según las características de un objeto real Descubre regularidades y construyo la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas de un poliedro. Resolver problemas del componente espacial métrico que requiere un nivel de razonamiento alto a su grado y nivel

### **Triangulación**

La triangulación es considerada por Cisterna (2005), la acción de integración y cruce dialéctico de toda información pertinente al objeto de estudio surgida en una investigación por medio de los instrumentos correspondientes y que constituye el corpus de resultados de la investigación, una vez se ha concluido el trabajo de recopilación de la información.

Para realizar la triangulación de datos de la observación del fenómeno cualitativo, se deben comparar la información obtenida en diferentes fases a través de los diferentes métodos, lo cual

permite analizar la información desde diversos ángulos.

En el presente trabajo, se consideró apropiado seleccionar la triangulación metodológica, la cual tiene en cuenta las actividades desarrolladas, las observaciones del diario de campo, audios, que permita un análisis completo de los aspectos trabajados en relación al fortalecimiento del razonamiento geométrico.

Para el análisis de las categorías se tuvo en cuenta el razonamiento como primer categoría en donde se analiza la teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial y Raymon Duval, quien considera la relación fuerte entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento como base para el aprendizaje de la geometría en donde la aprehensión perceptiva está conectada con la discursiva y operativa, originando tres tipos de razonamiento en función de la coordinación que se dé entre los tipos de aprehensiones y el grado de discurso utilizado.

Adicionalmente el modelo instruccional de Van Hiele en el aprendizaje como proceso metodológico para desarrollar el razonamiento geométrico, los estudiantes como centro del proceso educativo y la propuesta pedagógica, fruto del Aprendizaje basado en proyectos.

Tabla 10. Triangulación de categorías

<b>Categorías</b>	<b>Subcategorías</b>	<b>Diarios de campo</b>	<b>Definición</b>
Razonamiento	Proceso Configural: Coordinación entre aprehensiones discursiva y operativa	La mayoría de estudiantes utiliza un lenguaje natural para asociar la forma de la cometa y generalmente relacionan el tamaño de las cometas con el uso de un instrumento de medición: (metro).  El uso de material didáctico como figuras geométricas y el tangram (Piaget) permitieron ayudar a aquellos estudiantes que todavía no lograban percibir las unidades figurales, y los atributos mensurables	Desarrollo de la acción coordinada de la aprehensión discursiva y operativa que efectúa el estudiante cuando resuelve un problema de geometría, lo cual genera una interacción entre la configuración inicial y sus posibles modificaciones con las afirmaciones matemáticas adecuadas. Puede dar lugar a

	<p>necesarios para poder comparar el tamaño de las cometas.</p> <p>Los tres retos propuestos permitieron orientar el proceso de medición y cálculo del área, necesarios para el desarrollo de su trabajo con las cometas que participaron en el festival.</p>	<p>la solución del problema o a una solución de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y por tanto, hay un estancamiento del razonamiento producido</p>
<p>Proceso Discursivo natural: Coordinación entre aprehensiones perceptiva y discurso natural</p>	<p>El 90% de los estudiantes hicieron la representación gráfica de las cometas, reconociendo las unidades figurales perceptivamente y de esta forma, servir de soporte intuitivo a razonamientos diferentes hasta lograr hacer la conversión a un lenguaje discursivo de una figura geométrica.</p> <p>Al observar las representaciones, los estudiantes encuentran un dibujo que no es congruente con la forma de su cometa, lo cual hace necesario el manejo del concepto de proporcionalidad para calcular el tamaño como una manera de interpretar la modificación de la figura.</p> <p>Los estudiantes analizaron que no existe una relación directa entre el área y el perímetro de las cometas.</p> <p>Los estudiantes mostraron habilidad en el manejo de definición de área y perímetro en el desarrollo de la actividad que exigía dominio cognitivo utilizando propiedades matemáticas mediante el uso del pentominó, demostrando a través de la actividad, el desarrollo de la percepción discursiva por medio del cambio de anclaje visual a discursivo (Duval, 1993).</p> <p>Se detectó diferentes concepciones erróneas sobre área, dentro de las cuales se encuentran clasificadas según Coberán (1996) como área-perímetro, área-volumen, área-superficie+área, entre otras que no están catalogadas, que se evidencia en el desarrollo de la actividad donde debían construir una figura con menor perímetro al modelo, utilizando las 4 fichas del pentominó para producir un cambio de anclaje del discursivo al visual. (Duval 1993).</p>	<p>El proceso discursivo natural se lleva a cabo de manera espontánea en el lenguaje natural en el acto de la comunicación ordinaria, a través de descripciones, explicaciones o argumentaciones</p>
<p>Proceso Discursivo Teórico: Coordinación entre aprehensiones perceptiva y discursivo Teórica</p>	<p>La percepción háptica permitió constatar el progreso del conocimiento espacial en la elaboración del concepto de poliedros generando procesos de razonamiento en la clasificación de poliedros en regulares, según el estudiante E31 si todas las caras podían servir de base por tener la misma forma, e irregulares si no cumplían con dicha condición; el</p> <p>Estudiante E21 asoció el nombre del paralelepípedo como un hexaedro irregular y el estudiante E22, cuestionó sobre la idea de que el cilindro es o no un poliedro, generando la discusión necesaria para que argumentaran cada una de las opiniones hasta llegar a la</p>	<p>El proceso discursivo teórico utiliza sólo teoremas, axiomas, definiciones para llegar a conclusión, está estructurado deductivamente y ocurre en un registro estrictamente simbólico o en lenguaje natural</p>

		<p>conclusión que pertenecía a otro tipo de cuerpos geométricos llamados cuerpos redondos.</p> <p>El manejo de material concreto y el modelo instruccional de Van Hiele como estrategia metodológica fueron determinantes para poder descubrir regularidades, la cual exigió relacionar a través de una fórmula, las caras, los vértices y las aristas de un poliedro ausente físicamente (Fórmula de Euler) que les permitió argumentar las características de los poliedros en prueba escrita.</p> <p>Adicionalmente, la elaboración de la representación plana de una caja para guardar un objeto paralelepípedo (caja)</p> <p>El 83% de los estudiantes respondieron correctamente las preguntas del nivel mínimo y el 67% de los estudiantes en el nivel satisfactorio de razonamiento de un estudiantes de grado noveno, demostrando un nivel de razonamiento superior a su grado de escolaridad, en la representación de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas</p>	
Aprendizaje	Motivación	La propuesta planteada, permitió despertar el interés por cumplir el reto propuesto basados en los requerimientos técnicos y científicos para construir la cometa más grande que volara más alto	Uno de los principios didácticos de la enseñanza es el del carácter activo y consciente del aprendizaje.
	Objetivos	Se plantean al inicio de cada fase del proyecto, sin embargo, se relaciona con los estándares, la matriz de referencia y las evidencias de aprendizaje emanadas por el MEN	Fin al que se desea llegar o la meta que se pretende lograr. En este caso en el desarrollo del razonamiento geométrico
	Modelo Instruccional de Van Hiele	Modelo instruccional que permitió el progreso continuo del desarrollo del conocimiento espacial a través de las actividades desarrolladas para fortalecer el razonamiento geométrico en cada una de las fases	Es la propuesta recomendada para la construcción del pensamiento geométrico a través de 5 niveles que evidencian un modo de estructurar el aprendizaje desde lo más elemental, hasta lo más complejo
Propuesta pedagógica	Secuencia didáctica	La estrategia pedagógica utilizada permitió unas actividades contextualizadas utilizando el modelo instruccional de Van Hiele, logrando el gusto y la satisfacción por la construcción de la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas.	Conjunto de actividades organizadas, estructuradas y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos para conseguir un determinado aprendizaje.
	Trabajo colaborativo	Los estudiantes por grupo, identificaron las características de los elementos de los poliedros, y trabajaron colaborativamente para construir la fórmula de Euler.	El trabajo colaborativo es la conformación de un grupo de sujetos homogéneos (con conocimientos similares en el tema), donde no surge un líder como en un trabajo de grupo normal, por el contrario, el liderazgo es compartido por todos los integrantes de esta “comunidad” así como la responsabilidad del trabajo y/o el aprendizaje.

**3.4.3 Indicadores de desempeño.** Los indicadores se basan en las habilidades que alcanzan un estado específico de desarrollo a través de los diferentes niveles de Van Hiele y que tienen una naturaleza claramente geométrica.

**Tabla 10. Indicadores de desempeño**

	<b>Dimensión 1</b>	<b>Dimensión 2</b>		<b>Dimensión 3</b>
	<b>Nivel 1</b>	<b>Nivel 2</b>	<b>Nivel 3</b>	<b>Nivel 4</b>
<b>Visualización</b>	Atributos físicos	Propiedades matemáticas		Reconoce los atributos de los poliedros
<b>Análisis</b>	Lista de propiedades físicas	Lista de propiedades matemáticas	Manejo de definiciones	Analiza las unidades figurales que conforman los poliedros
<b>Ordenamiento o clasificación</b>	Organización basada atributos físicos	Organización basada en atributos matemáticos	Organización según propiedades matemáticas	Clasifica poliedros en regulares e irregulares
<b>Razonamiento Deductivo</b>			Deduce información dada	Deduce la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas de un poliedro

### 3.5 Validación de los Instrumentos

La validez y confiabilidad de los instrumentos se desarrolló mediante la revisión de la presentación del contenido, el análisis de los indicadores según las actividades evaluadas y la

aplicación de las pruebas que permiten medir y comparar de acuerdo a los objetivos propuestos (Corral, 2009).

La confiabilidad de un instrumento de medición se refiere al grado en que su aplicación repetida al mismo sujeto u objeto, produce iguales resultados (Hernández, Fernández y Baptista, 2007).

Con el objeto de mejorar el razonamiento geométrico, se elaboraron instrumentos acordes al modelo propuesto y fueron avalados por el director del proyecto.

### **3.6 Resultados y discusión**

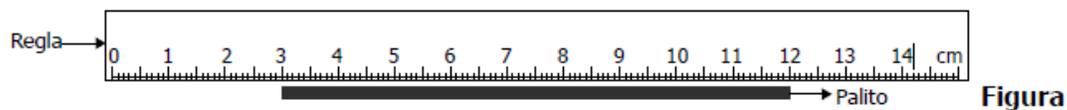
**3.6.1 Etapa previa.** Diagnóstico. Teniendo en cuenta que, en el año 2017, la institución estaba recientemente creada por la fusión de 2 instituciones, se hizo necesario al inicio del año escolar, (Febrero) la aplicación del desarrollo de un diagnóstico que evaluó cada una de las competencias, los aprendizajes y evidencias en el nivel de 5° de primaria, según la matriz de referencia del área de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, y la prueba saber de 5° grado del año 2015.

Se realizaron 3 pruebas utilizando una por cada competencia: Comunicación, representación y modelación (10 Preguntas), razonamiento y argumentación (10 Preguntas) y resolución de problemas (12 Preguntas). Al mismo tiempo, cada prueba evaluaba las competencias (C, R, RE) y los componentes: Numérico Variacional (N), Espacial Métrico (E) y Aleatorio (A), para identificar las debilidades en el área de matemáticas.

En la prueba diagnóstica de la competencia comunicación, representación y modelación (Anexo 1), muestran que de las 330 posibles respuestas, obtuvieron 77 errores (Anexo 2) y el 88% de los estudiantes tuvieron dificultad en identificar unidades tanto estandarizadas como no

convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establece relaciones entre ellas. (Ver Figura 20)

Para medir la longitud de un palito de madera, Johana coloca la regla como se muestra en la figura.



¿Cuál es la longitud del palito?

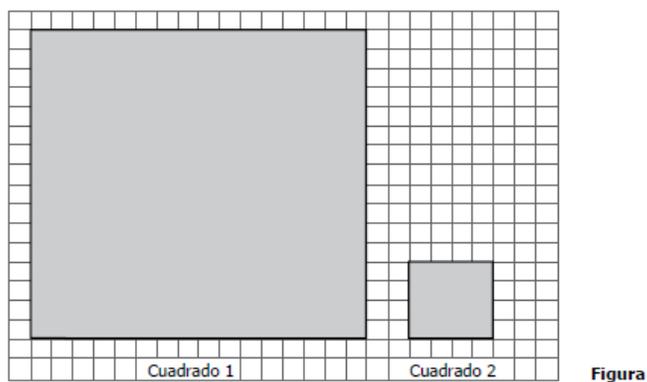
- A. 10 cm.
- B. 9 cm.
- C. 6 cm.
- D. 3 cm.

**Figura 20. Pregunta de la competencia comunicativa del componente Espacial Métrico**

Del mismo modo, la prueba de la competencia razonamiento y argumentación (Anexo 3) muestran que de las 330 posibles respuestas, tuvieron 130 errores (Anexo 4) y el 67% de los

estudiantes, tuvieron dificultad en conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones de figuras en el plano. (Ver Figura 21)

Observa los siguientes cuadrados. El lado del cuadrado 2 mide la cuarta parte del lado del cuadrado 1.



El área del cuadrado 2 es

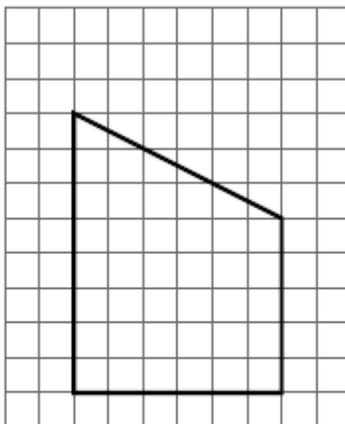
- A. igual al área del cuadrado 1.
- B. el doble del área del cuadrado 1.
- C.  $\frac{1}{8}$  del área del cuadrado 1.
- D.  $\frac{1}{16}$  del área del cuadrado 1.

### Figura 21. Pregunta competencia razonamiento del componente Espacial Métrico

Así mismo, en la competencia de resolución de problemas (Ver Anexo 5), los resultados muestran que de las 396 posibles respuestas, tuvieron 133 errores (Anexo 6) y aproximadamente

el 61 % de los estudiantes presentaron dificultad en usar representaciones geométricas y establecer relaciones entre ellas para solucionar problemas.

Observa la figura dibujada sobre la cuadrícula.



Cada  mide  $1 \text{ cm}^2$ .

¿Cuál es el área de la figura?

- A.  $19 \text{ cm}^2$ .
- B.  $30 \text{ cm}^2$ .
- C.  $39 \text{ cm}^2$ .
- D.  $48 \text{ cm}^2$ .

**Figura 22. Pregunta competencia resolución de problemas del componente Espacial Métrico**

Debido a los resultados obtenidos en las tres pruebas diagnósticas, (Ver anexo 7), se elige el componente Métrico Espacial como tema de estudio en la presente investigación en la competencia razonamiento y argumentación.

Por otro lado, para identificar las competencias específicas del componente espacial, en el mes de julio, se realizó un diagnóstico que sirviera de base sobre la cual se iban a trabajar el proceso investigativo compuesto por 19 preguntas de selección múltiple y 5 preguntas abiertas.

Se observaron nuevamente dificultades por competencias con mayoría en los aprendizajes descritos a continuación que se evidencian en la siguiente tabla:

Competencia comunicación: El 79% de los estudiantes tuvieron dificultad en identificar unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establece relaciones entre ellas.

Competencia Razonamiento: El 55 % de los estudiantes, tuvieron dificultad en conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones de figuras en el plano.

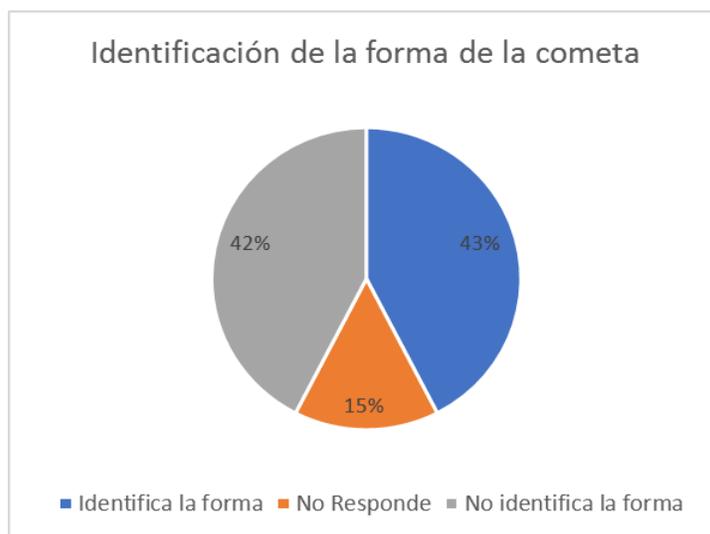
Competencia Resolución: Aproximadamente el 64% de los estudiantes presentaron dificultad en resolver problemas utilizando diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes

**Tabla 12. Dificultades en la prueba diagnóstica del componente espacial métrico**

Nombres	COMUNICACIÓN					RAZONAMIENTO										RESOLUCION					TOTAL
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
E1			X	X		X	X			X		X		X		X				8	
E2			X								X							X	X	4	
E3			X				X				X			X				X		5	
E4			X	X			X	X		X	X	X			X	X	X		X	11	
E5			X	X							X		X	X		X		X	X	8	
E6			X	X		X		X		X	X				X	X		X	X	10	
E7	X		X		X		X								X	X			X	7	
E8	X		X	X	X		X				X	X		X	X	X	X	X	X	13	
E9			X							X	X	X		X	X				X	7	
E10			X	X			X			X	X			X	X	X		X		9	
E11	X		X		X	X			X				X					X		7	
E12			X	X	X	X	X			X		X				X	X	X		10	
E13	X		X												X	X		X	X	6	
E14			X	X						X	X							X	X	6	
E15			X											X					X	3	
E16			X	X		X	X	X		X		X		X	X			X	X	11	
E17	X		X	X						X	X	X		X		X				8	
E18			X	X				X						X		X				5	
E19											X	X								2	
E20	X		X	X	X		X				X			X	X	X		X	X	11	
E21			X		X			X			X	X		X	X	X	X	X	X	11	
E22	X			X											X	X		X		5	
E23	X			X							X			X	X	X	X	X	X	9	
E24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
E25	X			X	X		X				X	X		X	X					8	
E26			X	X				X		X									X	5	
E27	X														X	X			X	4	
E28	X		X													X		X	X	5	
E29	X		X	X	X	X				X	X	X		X	X		X			11	
E30	X		X		X						X	X				X	X	X		8	
E31	X		X	X							X	X		X	X	X	X	X		10	
E32				X	X						X					X	X		X	6	
E33			X	X		X	X		X	X	X			X	X	X	X		X	12	
	14	0	26	20	10	7	11	6	2	12	18	15	2	16	18	21	10	17	20	245	

Además de evaluar conocimientos, se cuestionó a los estudiantes sobre sus conocimientos para el desarrollo del proyecto a través de las siguientes preguntas:

1. ¿Qué forma va a tener su cometa?

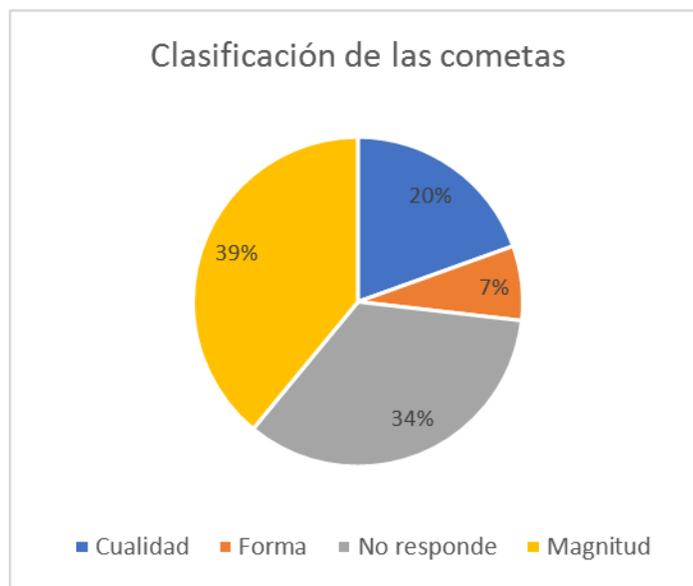


**Figura 23. Identificación de la forma de la cometa**

El 43% de los estudiantes, identificaron correctamente la forma con su respectivo gráfico, el 42 % no identificaron correctamente la forma de una manera específica y coherente y el 15% no respondieron la pregunta, lo cual muestra el dominio de un lenguaje natural y la dificultad en el

manejo de registros diferentes para identificar los diversos tipos de forma y orientación que puede tener una cometa

## 2. ¿Cómo podemos clasificar las cometas?

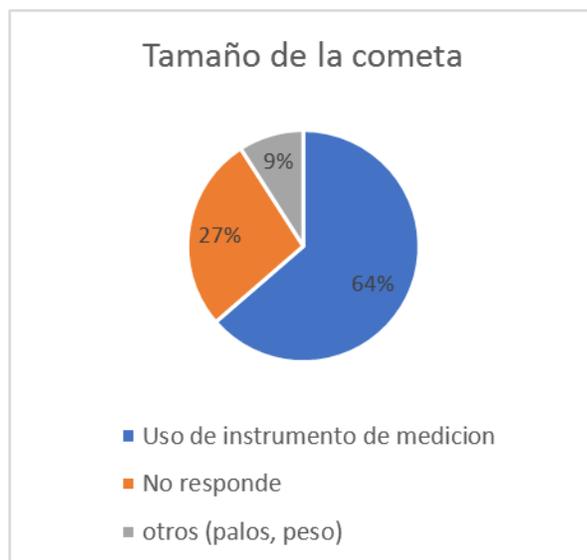


**Figura 24. Clasificación de la cometa**

Las respuestas estuvieron variadas ya que un 20% creen que deben clasificarse por una cualidad (color, idioma, país, entre otros), el 7% por la forma, el 39% por tamaño (medida, tamaño,

peso) y un 34% no respondieron la pregunta, lo cual, permite deducir la preponderancia de las características visuales como criterio de clasificación

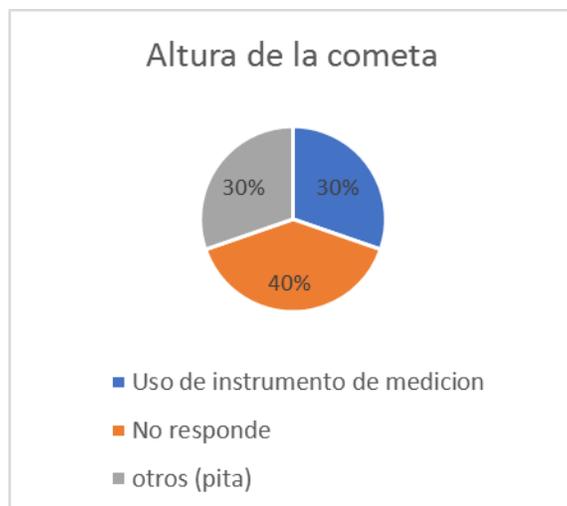
3. ¿Cómo hacemos para comparar el tamaño de las cometas?



**Figura 25. Tamaño de la cometa**

El 64% de los estudiantes creen que, para comparar el tamaño de las cometas, se debe tener en cuenta el uso de un instrumento de medición y el 27% no respondieron la pregunta, lo cual refleja un escaso dominio de las variaciones dimensionales de la cometa

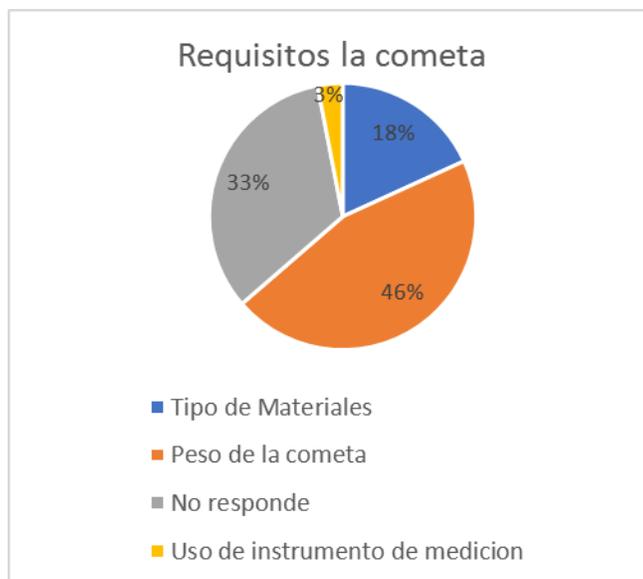
4. ¿Cómo hacemos para medir la altura de las cometas?



**Figura 26. Altura de las cometas**

Las respuestas se refirieron a utilizar el metro (30%) y la pita (30%) y el 40% de los estudiantes, no respondieron la pregunta,

5. ¿Qué características cree usted que debe tener la cometa para que sea la más grande y vuele lo más alto posible?



**Figura 27. Requisito de la cometa**

Cerca del 50% de los estudiantes consideran que el peso influye para que la cometa vuele lo más alto posible, el 22% no respondieron la pregunta, y los demás creen que los materiales y los palos que se utilicen afecta el vuelo de la cometa.

De acuerdo al diagnóstico, el dibujo y las respuestas de las preguntas abiertas, se observa que 17 estudiantes identificaban claramente los atributos mensurables de la cometa que le permitiera ser comparada como la cometa más grande que volara más alto, evaluando de ésta forma que aproximadamente el 50% de los estudiantes, se encontraban en el nivel 1 de razonamiento

**Diseño:**

En reunión de padres de familia se explicó el proyecto de investigación y se hizo una entrevista estructurada para determinar con claridad el acceso a tecnologías de la información con el que cuenta los estudiantes, como medio de comunicación, de la cual se evidencia poco o escaso acceso de herramientas tecnológicas, puesto que 14 de los estudiantes no tienen computadoras o tabletas en sus hogares, es decir, solamente en la institución manejan éste tipo de tecnología.

Así mismo 12 estudiantes tienen acceso a internet y acceden a través de computadores o Tabletats generalmente para hacer consultas académicas y tareas escolares.

Adicionalmente, el uso de la plataforma institucional se maneja semanalmente por 11 padres de familia, mientras 13 expresan que nunca utilizan ésta herramienta, quienes consideran muy

importante el uso de la tecnología en el proceso educativo de sus hijos, pero los costos de poseerla son superiores a sus capacidades económicas.

Adicionalmente, se elaboró un instructivo a través del plegable, que permitió orientar el desarrollo del proyecto, para apoyar a algunos estudiantes que no tuvieron acceso a la información por el sistema, debido a sus limitaciones de acceso a internet y la tecnología

**Implementación:****Figura 28. Elevación del modelo de la cometa**

Inicialmente, los estudiantes relacionaron la palabra pigargo con emociones y conceptos geométricos. Se hizo necesario presentar varios aspectos relacionados con la cometa como la función de la cometa y la relación con el mundial de futbol Rusia 2018.

Los estudiantes mostraron interés por el desarrollo de una tarea de investigación para dar solución a un reto propuesto donde él es quien toma las decisiones, plantearon conjeturas sobre las condiciones necesarias para poder ganar el festival mundialista Pigargo. Disfrutaron de la experiencia con sentimientos encontrados desde la satisfacción del vuelo máximo de la cometa hasta la frustración de quedar atrapada en la copa de un árbol.

En este momento los estudiantes no tienen claridad de elementos constitutivos de las figuras tanto de tipo dimensional como cualitativo (Duval, 1999). En general, muestran interés por desarrollar el proceso de medición característica del aprendizaje por proyectos (Dickinson et al,

1998; Katz & Chard, 1989; Martin & Baker, 2000; Thomas, 1998) especialmente en estudiantes que normalmente no se interesan en las actividades académicas como el estudiante E12.

Adicionalmente, recibimos una visita del Señor Serafín Bautista Villamizar, autor del cuento El tren de los cielos, en donde los estudiantes manifestaron sentimientos encontrados que suceden en el cuento escuchado, como la tristeza por el abandono de la madre y la alegría por el esfuerzo del padre en continuar sus vidas con optimismo y sin rencores, en contradicción con su propia realidad, quienes expresaron que viven situaciones similares, pero por el contrario, el padre, a diferencia de la lectura, infunde sentimientos negativos sobre la madre y les produce tristeza e infelicidad. Los estudiantes se mostraron expectantes respecto a la visita y mostraron dominio de los objetivos del proyecto cuando el Señor Serafín los interrogó. Igualmente demostraron interés por el trabajo que realiza el escritor al contar una historia que no siempre termina en final feliz.



**Figura 29. Visita del escritor Serafín Bautista**

La lectura aportó creatividad e imaginación y algunas recomendaciones sobre aspectos técnicos respecto a la estructura y a los atributos de la forma de la cometa en un lenguaje natural,

venciendo de ésta forma uno de los obstáculos que menciona Bishop (1986) para aprender geometría en donde se puede observar el mundo espacial en una realidad de su cultura familiar.

Inicialmente, la mayoría de los estudiantes, identificaban las unidades figurales dimensionales, pero no lo asociaban a una forma específica, con dificultades en relación a: El manejo operaciones con números decimales, uso inadecuado de instrumentos de medición de lados y ángulos, manejo incorrecto de unidades de medida, lo cual condujo a que los estudiantes con la orientación del docente corrijan las medidas, las características, los cálculos matemáticos que

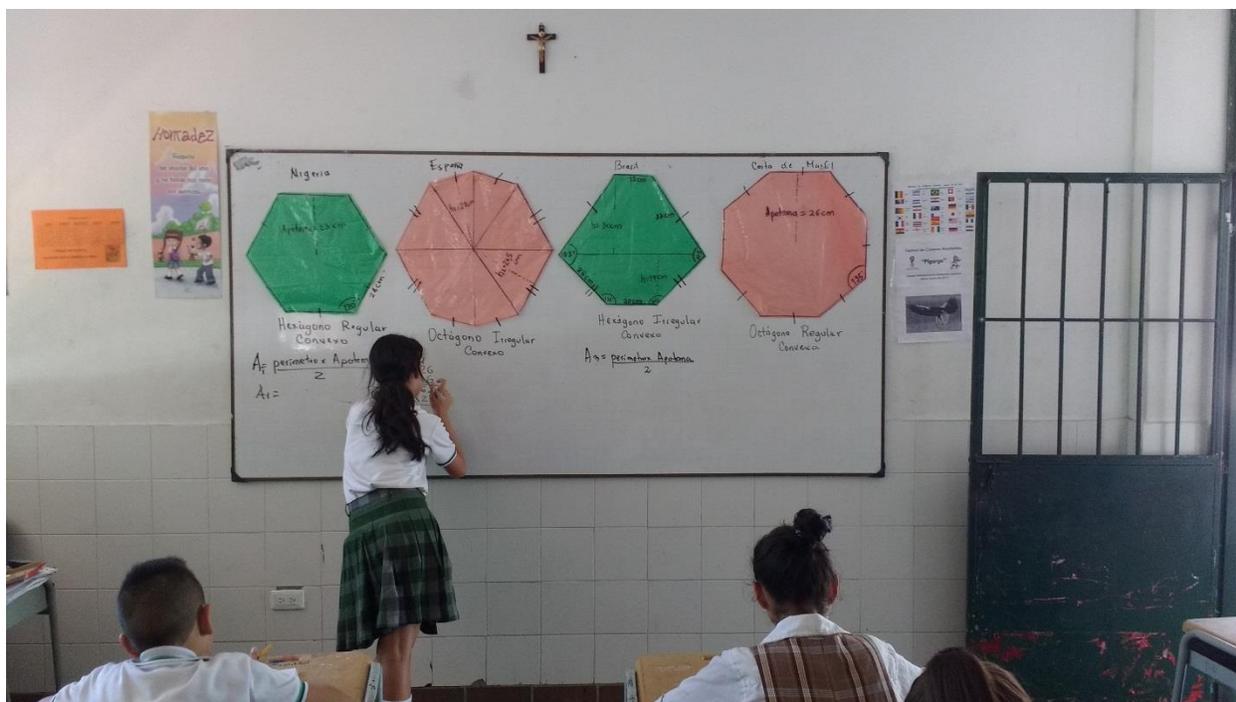
conlleven a descubrir los atributos mensurables que permitan comparar las cometas, logrando un nivel 2 de razonamiento en el 60% de los estudiantes.



**Figura 30. Exposición de cometas**

El uso de material didáctico como figuras geométricas y el tangram, permitieron ayudar a aquellos estudiantes que todavía no lograban percibir las unidades figurales, y los atributos mensurables necesarios para poder comparar el tamaño de las cometas

Los tres retos propuestos permitieron orientar los procesos de medición y cálculo del área, necesarios para el desarrollo de su trabajo con las cometas que participaron en el festival



**Figura 31. Retos pigargo**

Para comprobar los cálculos, algunos estudiantes, llevaron aplicaciones en su celular como: Geometrix, Área y volumen, Área y perímetro, entre otros que les permitieran constatar los

resultados obtenidos en clase a papel y lápiz y otros utilizaron la calculadora para desarrollar los procesos.

En esta etapa, los estudiantes desarrollaron una aprehensión perceptiva del dibujo de la cometa

En el festival participaron 21 cometas, de las cuales analizaron 17 representaciones gráficas para determinar los atributos que pudiesen comparar las cometas como la forma, el área y el perímetro y se premiaron las cometas por tamaño, perímetro y número de lados.

Se hizo un reconocimiento en el salón de clase teniendo en cuenta el tamaño y la altura del vuelo de la cometa, la creatividad entre otros y en acto institucional, se exaltó a los estudiantes que sobresalieron en la actividad.

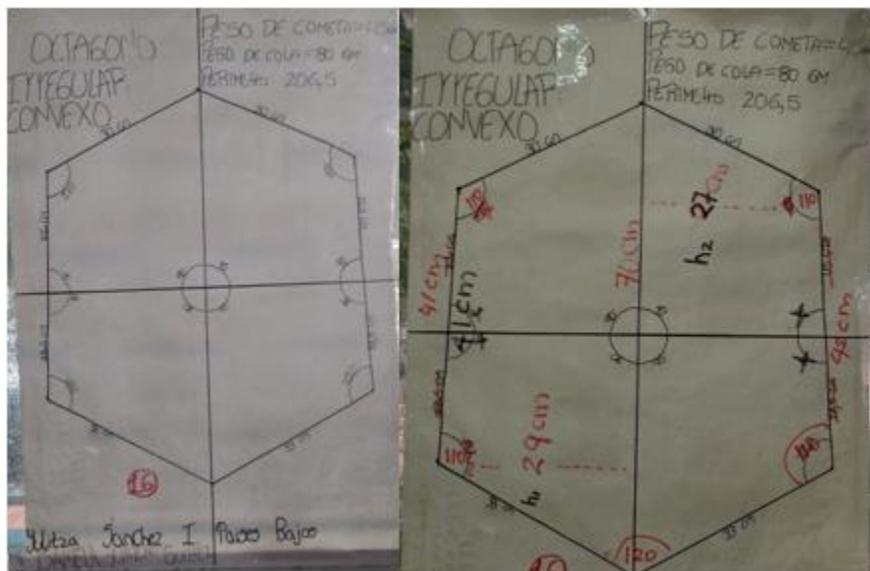


**Figura 32. Premiación de ganadores**

Se evidenció que los estudiantes desarrollaron valores como la perseverancia, la solidaridad, colaboración, responsabilidad, autonomía y felicidad por hacer en su mayoría por primera vez una cometa.

El 90% de los estudiantes hicieron la representación gráfica de las cometas, reconociendo las unidades figurales perceptivamente y de esta forma, servir de soporte intuitivo a razonamientos diferentes hasta lograr hacer la conversión a un lenguaje discursivo de una figura geométrica

demostrando que desarrollaron aprehensión discursiva a través del cambio de anclaje visual a discursivo (Duval, 1993), logrando en su mayoría el nivel 2 de razonamiento.



**Figura 33. Proceso de identificación de los atributos en la representación de una cometa**

Al observar las representaciones, los estudiantes encuentran un dibujo que no es congruente con la forma de su cometa, lo cual hace necesario el manejo del concepto de proporcionalidad para calcular el tamaño como una manera de interpretar la modificación de la figura.

El estudiante E25, dueño del modelo gráfico, expresó sorpresa al encontrar que su modelo no era congruente con la cometa, motivo por el cual, fue necesario la impresión de la foto y la orientación el desarrollo del cálculo del área, comparando las mediciones reales del tablero con las

que aparecían en la foto y por proporcionalidad, se estimaron los valores reales y así calcular el área y el perímetro de una forma aproximada a la realidad.

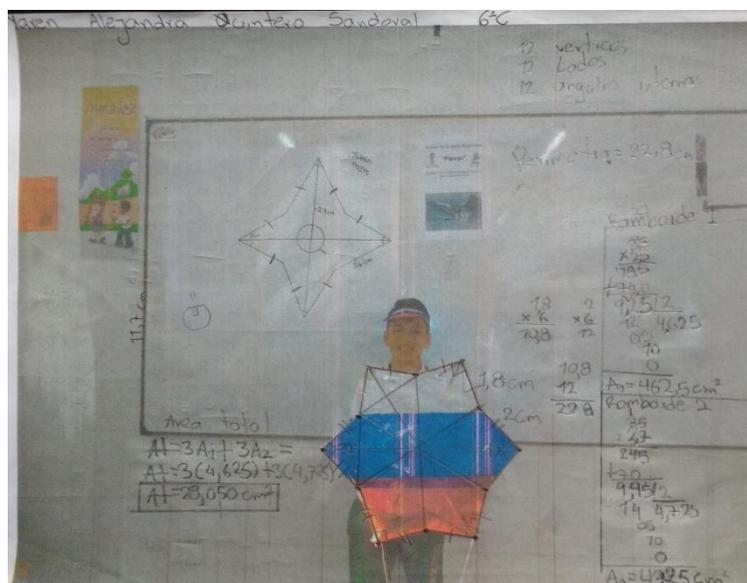


Figura 34. Representación gráfica no congruente con la cometa

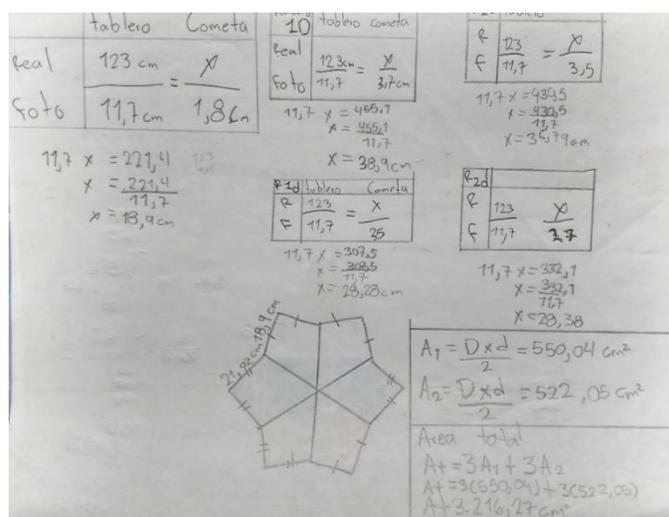


Figura 35. Proceso operacional para el cálculo del tamaño de la cometa por proporcionalidad

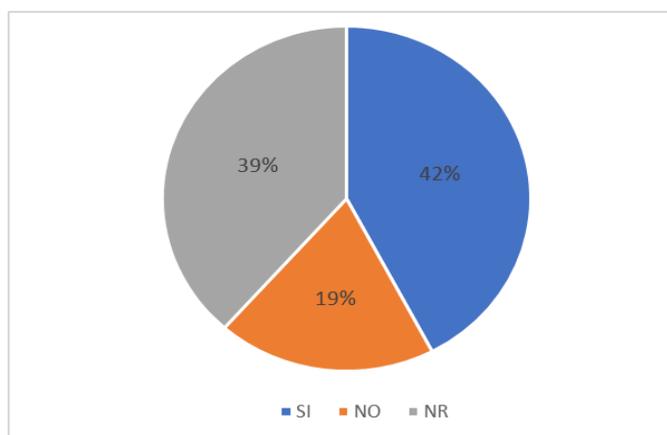
Se construyó una tabla que resumía los datos de las cometas y permitía encontrar regularidades en la medida que iban socializando los resultados de cada una, encontrando algunas características

comunes como suma de ángulos internos, número de diagonales y 2 cometas con la misma área y diferente perímetro

Se desarrolló la secuencia de polígonos isoperimétricos utilizando las fases del modelo de Van Hiele en donde se analizan los elementos trabajados en la tabla resumen construida por los estudiantes.

Analizando los resultados presentados en la tabla, se cuestionó a los estudiantes sobre los resultados obtenidos:

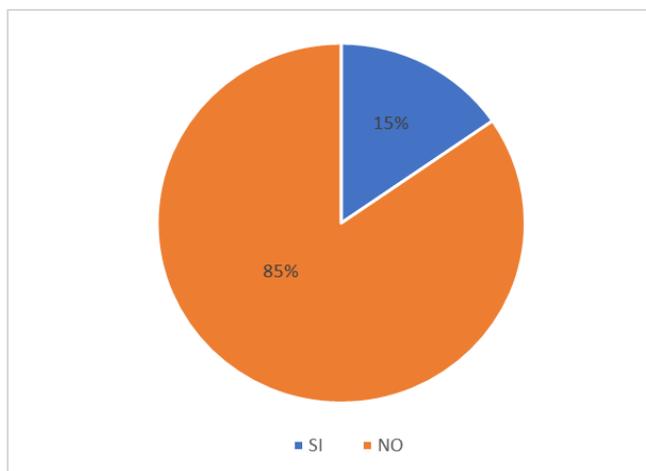
1. ¿Existe alguna relación entre el área y el perímetro de las cometas?



**Figura 36. Existe alguna relación entre el área y el perímetro de las cometas**

La mayoría de los estudiantes considera que existe una relación entre el área y el perímetro de las cometas.

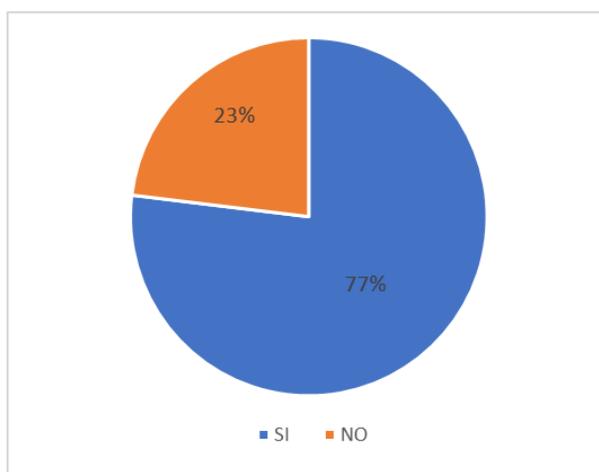
2. ¿Existen cometas que tienen la misma área?



**Figura 37. Existen cometas que tienen la misma área**

La mayoría de los estudiantes, expresan que no existen cometas que participaron en el festival que tengan la misma área, pero no descartan la posibilidad de que pueda suceder en otra competencia.

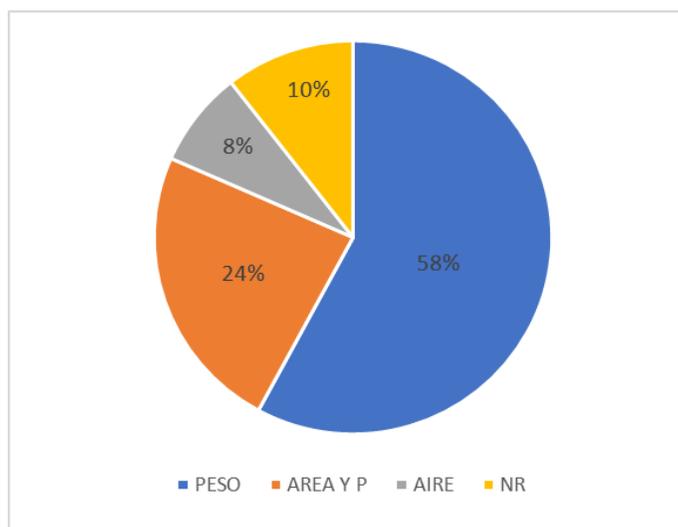
3. ¿Existen cometas que tengan el mismo perímetro?



**Figura 38. Existen cometas que tengan el mismo perímetro**

El 77% de los estudiantes reconocen que las cometas #10 y #13 tienen el mismo perímetro.

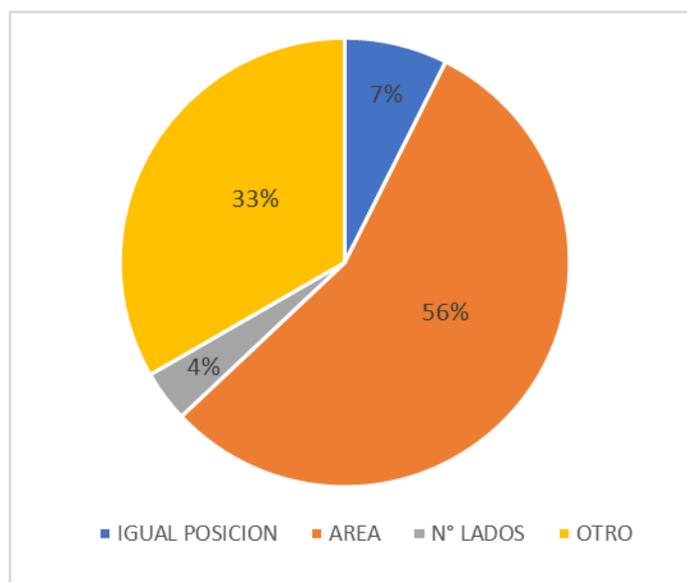
4. ¿Qué influye para que la cometa vuele lo más alto posible?



**Figura 39. Qué influye para que la cometa vuele lo más alto posible**

La mayoría de los estudiantes consideran que los atributos cuantitativos como el peso, el área y el perímetro influyen en el vuelo de la cometa.

5. Criterios para ordenar cometas con igual perímetro



#### **Figura 40. Criterios para ordenar cometas con igual perímetro**

La mayoría de los estudiantes utilizaron el área como criterio de ordenamiento en las cometas con igual perímetro.

En la orientación guiada, sobre el uso del pentominó, los estudiantes mostraron habilidad en el manejo de definición de área y perímetro en el desarrollo de la actividad que exigía dominio cognitivo utilizando propiedades matemáticas mediante el uso del pentominó, demostrando a través de la actividad, el desarrollo de la percepción discursiva por medio del cambio de anclaje visual a discursivo (Duval, 1993).

Adicionalmente, en su mayoría expresaron atributos medibles al cuestionarlos sobre la comparación y ordenamiento de las cometas, pero presentaron dificultad en el ordenamiento de números decimales que se evidencia al asignar la posición que ocupaba cada una.

Así mismo, se detectó diferentes concepciones erróneas sobre área, dentro de las cuales se encuentran clasificadas según Coberán (1996) como área-perímetro, área-volumen, área-superficie+área, entre otras que no están catalogadas, que se evidencia en el desarrollo de la actividad donde debían construir una figura con menor perímetro al modelo, utilizando las 4 fichas del pentominó para producir un cambio de anclaje del discursivo al visual. (Duval 1993).

#### **Evaluación:**

Según el marco teórico Piagetiano, el espacio no viene dado “a priori”, surgiendo de la mera percepción, sino que a través de la actividad del estudiante, se construye poco a poco iniciando por

una actividad sensoriomotriz y posteriormente a un nivel representativo, de tal manera que exija la coordinación de las imágenes para convertirlas en operaciones.

Para constatar dicho proceso, en primer lugar, se les entregó un formato para que completaran los datos en el álbum sobre las percepciones visuales e identificación de las unidades figurales en las representaciones gráficas de las cometas y se observó que la gran mayoría registraron las variaciones de tipo dimensional y cualitativo presente en las carteleras expresando satisfacción por haber alcanzado los objetivos del proyecto.

De ahí, se considera que la percepción origina la concepción adulta del espacio a través de la construcción activa del propio sujeto y la implicación de relaciones topológicas y luego en proyectivas y euclidianas mediante el paso de la percepción a la representación mental.

En segundo lugar, el estudio de los poliedros se realizó mediante el desarrollo de la secuencia utilizando el modelo instruccional de Van Hiele y la percepción háptica como estrategia para

identificar el espacio topológico en la elaboración del concepto de poliedro, como objeto de conocimiento.

El proceso desarrollado permitió la elaboración de la representación plana de una caja para guardar un objeto y a través de la observación de regularidades, permitiera la construcción de la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas.

La actividad, permitió identificar los elementos de los poliedros y construir una definición de cuerpos geométricos y generó unos procesos de razonamiento en los siguientes aspectos:

1) El estudiante E31 propuso para clasificar los poliedros, colocar en un grupo aquellos poliedros donde cualquier cara podía servir de base porque tenía la misma forma (poliedros regulares).

2) El estudiante E4 intervino cuestionando la existencia de la geometría en todos los objetos del universo.

3) El estudiante E21 asoció el nombre del paralelepípedo como un hexaedro irregular.

4) El estudiante E22, cuestionó sobre la idea de que el cilindro es o no un poliedro, para lo cual, fue necesario identificar cada uno de sus elementos para poder concluir colaborativamente

que no o era poliedro sino un cuerpo redondo por no tener todos los elementos constitutivos de los poliedros: caras, vértices y aristas.

7) La mayoría de los estudiantes, lograron dibujar los moldes tanto del cubo, como del paralelepípedo.

En general, todos los estudiantes lograron construir la definición los poliedros, clasificarlos en regulares e irregulares y mostraron un buen nivel de razonamiento según las justificaciones que orientaron durante el proceso.

El manejo de material concreto fue determinante para poder descubrir regularidades y completar la tabla, la cual exigió relacionar a través de una fórmula, las caras, los vértices y las aristas de un poliedro ausente físicamente (Fórmula de Euler).

RESOLVER LOS PROBLEMAS 11 AL 14, JUSTIFICANDO SU RESPUESTA (0,5)

11) Complete la siguiente tabla

Nº	NOMBRE DEL POLIEDRO CONVEXO	FORMA DEL POLIGONO DE LA CARA	Nº DE CARAS (C)	Nº DE VERTICES (V)	Nº DE ARISTAS (A)
1	Hexaedro	Cuadrado	6	8	12
2	Dodecaedro Regular	Rectángulo	12	20	30
3	Prisma Triangular	Rectángulo y Triángulo	5	6	9
4	Pirámide cuadrangular	Triángulo cuadrado	5	5	8

1-  $6+8-2=12$   
 2-  $12+20-2=30$   
 3-  $5+6-2=9$   
 4-  $5+5-2=8$

**Figura 41. Ejemplo de respuestas de los estudiantes**

El 87,5 % de los estudiantes justificaron sus respuestas utilizando la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas

En Tercer lugar, los estudiantes presentaron una prueba escrita de 10 preguntas de selección múltiple con única respuesta, 7 de las cuales son tomadas de la prueba saber de 9° grado (2013,2015) y 3 de las pruebas supérate de 7° grado del año inmediatamente anterior.

En los resultados de las preguntas de selección múltiple de grado 9°, se observó mayor desempeño en las siguientes preguntas cuyos resultados se interpretan respecto a su categorización

según los niveles de desempeño del estudiante promedio del grado 9° del año 2015 en el componente espacial métrico desde el nivel mínimo, hasta el nivel avanzado.

**Tabla 13. Nivel mínimo de la prueba saber grado 9 – 2015**

### Nivel Mínimo de la Prueba Saber Grado 9 – 2015

El estudiante promedio de este nivel en el componente espacial métrico, identifica algunas propiedades de figuras planas y sólidos, establece relaciones entre dimensionalidad y magnitud. Identifica algunos movimientos rígidos en el plano, utiliza formas de representación convencionales para describir fenómenos de las ciencias sociales o naturales

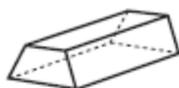
#### Pregunta N°1

##### • Resultados a nivel nacional y de Entidad Territorial Certificada (ETC)

ETC/País	A	B	C	D	Omisión y multimarca	N° estudiantes
Amazonas	7.3%	7.0%	20.6%	61.9%	3.2%	627
Antioquia	7.9%	9.4%	21.1%	59.8%	1.9%	19242
Apartado	10.7%	13.1%	19.6%	55.2%	1.5%	1088
Arauca	7.3%	7.5%	21.3%	63.2%	0.6%	1581
Armenia	9.1%	9.1%	19.2%	61.3%	1.3%	2587
Atlántico	10.1%	11.2%	21.5%	55.5%	1.8%	4921
Barrancabermeja	9.0%	9.9%	22.8%	57.2%	1.0%	1845
Barranquilla	8.4%	10.1%	20.6%	59.6%	1.4%	10592
Bello	7.4%	8.3%	19.7%	63.2%	1.4%	3031
Bogotá, D.C.	5.7%	5.6%	18.1%	69.6%	0.9%	62071
Bolívar	10.3%	13.2%	21.6%	53.0%	2.0%	7541
Boyacá	5.1%	5.7%	20.3%	68.3%	0.7%	7838
Bucaramanga	6.2%	5.4%	17.1%	70.1%	1.1%	4497
Buenaventura	11.6%	12.3%	20.5%	53.4%	2.2%	2787
Buga	7.1%	9.3%	18.3%	64.4%	0.9%	917
Caldas	7.0%	8.3%	21.2%	62.9%	0.6%	4429
Calí	8.1%	9.0%	18.9%	62.7%	1.3%	16580
Caquetá	8.0%	9.3%	22.8%	58.3%	1.6%	1657
Cartagena	10.4%	12.7%	21.5%	54.2%	1.3%	9659
Cartago	6.4%	8.3%	21.7%	61.8%	1.8%	1017
Casanare	6.4%	8.1%	20.3%	64.5%	0.6%	2177
Cauca	7.4%	9.3%	18.7%	63.1%	1.4%	8222
Cesar	9.3%	12.2%	22.4%	55.2%	0.9%	5409
Chocó	10.5%	14.2%	21.0%	52.1%	2.1%	2051
Chía	3.7%	4.3%	17.7%	73.4%	0.8%	1416
Ciénaga	11.2%	13.7%	22.3%	50.9%	1.9%	1060
Cundinamarca	5.6%	6.0%	19.2%	68.4%	0.8%	13372
Córdoba	9.4%	11.7%	21.3%	56.3%	1.5%	8943
<b>Cúcuta</b>	<b>6.9%</b>	<b>7.8%</b>	<b>20.8%</b>	<b>63.5%</b>	<b>1.0%</b>	<b>5733</b>
Dosquebradas	6.7%	6.5%	18.1%	68.2%	0.5%	1319
Duitama	4.0%	4.8%	18.4%	72.5%	0.3%	1251
Envigado	5.5%	7.4%	15.4%	71.1%	0.6%	1633
Facatativa	4.9%	4.7%	19.8%	70.2%	0.4%	1113
Florencia	7.5%	8.0%	19.7%	63.3%	1.5%	1383
Floridablanca	5.5%	5.7%	18.6%	69.2%	1.0%	1982
Fusagasugá	5.6%	4.5%	20.5%	68.8%	0.6%	1119
Girardot	8.3%	8.4%	21.8%	60.9%	0.5%	912

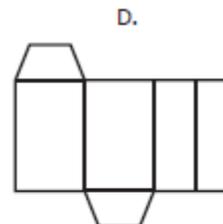
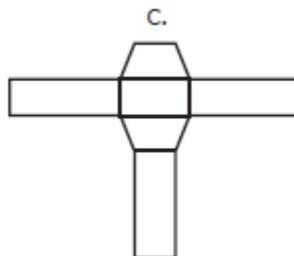
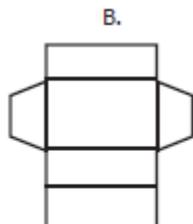
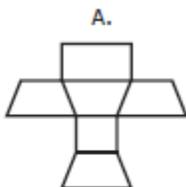
#### Pregunta N° 10

Una empresa que produce barras de chocolate empaca su producto en cajas como la que se muestra en la figura.



Figura

¿Con cuál de los siguientes moldes se puede armar la caja?



• Estructura

Competencia	Razonamiento
Componente	Espacial - métrico
Afirmación	Argumentar formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
Nivel de desempeño	Mínimo
Respuesta Correcta	B

• Resultados a nivel nacional y de Entidad Territorial Certificada (ETC)

ETC/País	A	B	C	D	Omisión y multimarca	Nº estudiantes
Amazonas	5.6%	77.5%	5.7%	9.6%	1.6%	627
Antioquia	8.4%	70.4%	7.6%	12.1%	1.4%	19242
Apartadó	9.8%	69.8%	8.4%	10.9%	1.1%	1088
Arauca	6.5%	74.4%	6.8%	11.7%	0.6%	1581
Armenia	5.9%	73.6%	8.2%	11.6%	0.6%	2587
Atlántico	9.3%	68.9%	7.3%	13.5%	1.0%	4931
Barrancabermeja	6.3%	73.0%	7.6%	12.5%	0.5%	1845
Barranquilla	6.2%	73.7%	7.3%	12.1%	0.7%	10592
Bello	6.6%	72.7%	8.0%	11.6%	1.1%	3031
Bogotá, D.C.	4.6%	78.8%	5.6%	10.4%	0.5%	62071
Bolívar	11.4%	64.5%	9.3%	13.4%	1.4%	7541
Boyacá	5.7%	76.4%	6.4%	11.1%	0.4%	7838
Bucaramanga	4.2%	78.3%	5.5%	11.4%	0.6%	4497
Buenaventura	10.3%	67.2%	8.1%	13.0%	1.4%	2787
Buga	6.0%	75.5%	7.0%	11.5%	0.1%	917
Caldas	8.6%	71.2%	7.7%	12.1%	0.4%	4429
Cali	5.6%	74.2%	7.4%	12.1%	0.8%	16580
Caquetá	8.3%	73.0%	6.5%	11.6%	0.7%	1657
Cartagena	8.4%	68.8%	8.7%	13.0%	1.1%	9659
Cartago	5.4%	74.2%	7.7%	12.5%	0.2%	1017
Casanare	6.4%	76.3%	6.5%	10.4%	0.4%	2177
Cauca	7.3%	72.1%	6.7%	13.2%	0.8%	8222
Cesar	9.8%	68.4%	8.6%	12.5%	0.7%	5409
Chocó	11.5%	66.9%	8.8%	11.1%	1.7%	2051
Chía	3.7%	82.5%	3.1%	10.3%	0.4%	1416
Ciénaga	11.1%	67.0%	6.7%	14.5%	0.7%	1060
Cundinamarca	5.6%	77.2%	5.8%	11.0%	0.5%	13372
Córdoba	10.6%	65.4%	8.5%	14.5%	1.0%	8943
Cúcuta	5.4%	76.1%	6.5%	11.3%	0.7%	5733
Dosquebradas	4.9%	74.7%	7.5%	12.1%	0.8%	1319
Duitama	3.0%	83.9%	4.1%	8.9%	0.1%	1251
Envigado	3.9%	79.9%	5.7%	10.2%	0.3%	1633
Facatativá	3.5%	81.2%	4.9%	10.1%	0.4%	1113

Resultados: El 83% de los estudiantes respondieron correctamente las preguntas 1 y 10, demostrando un nivel de razonamiento superior a su grado de escolaridad, en la representación de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas, superando los resultados de la ciudad y a nivel nacional en la pregunta 1, e igualando casi al mejor puntaje de la época Duitama (83,9%) en la pregunta 10

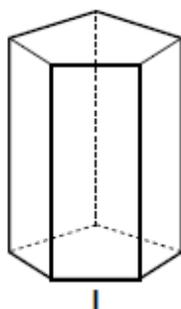
Este nivel supera las preguntas de menor complejidad del estudiante promedio en la prueba de matemáticas para 9° grado de Educación básica

#### Nivel Satisfactorio de la Prueba Saber Grado 9 - 2015

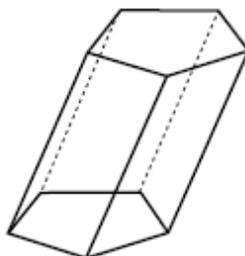
Además de lograr lo definido en el nivel precedente, el estudiante promedio de éste nivel en el componente espacial métrico, establece relaciones entre los sólidos y sus desarrollos planos, reconoce y aplica movimientos rígidos a figuras planas en un sistema de coordenadas, compara atributos medibles de uno o varios objetos o eventos

Pregunta N° 5

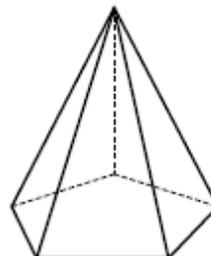
La figura muestra tres sólidos.



I



II



III

Figura

¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca de los sólidos es verdadera?

- A. Todos son pirámides.
- B. Dos de ellos tienen caras perpendiculares a la base.
- C. Todos tienen base pentagonal.
- D. Uno de ellos tiene solamente cinco caras.

#### · Estructura

Competencia	Razonamiento
Componente	Espacial - métrico
Afirmación	Argumentar formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
Nivel de desempeño	Satisfactorio
Respuesta Correcta	C

• Resultados a nivel nacional y de Entidad Territorial Certificada (ETC)

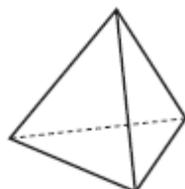
ETC/País	A	B	C	D	Omisión y multimarca	Nº estudiantes
Amazonas	9.0%	30.7%	41.6%	16.6%	2.0%	589
Antioquia	9.9%	28.3%	44.0%	15.0%	2.9%	16848
Apartadó	10.1%	31.1%	41.7%	15.5%	1.5%	1018
Arauca	8.0%	28.2%	49.8%	13.4%	0.6%	1612
Armenia	8.2%	28.3%	49.6%	13.3%	0.6%	2415
Atlántico	10.8%	29.0%	42.7%	15.5%	2.0%	4581
Barrancabermeja	8.5%	27.0%	52.1%	11.4%	1.0%	1899
Barranquilla	8.4%	26.0%	52.7%	11.5%	1.4%	9986
Bello	8.0%	25.7%	54.9%	10.2%	1.1%	3094
Bogotá, D.C.	5.5%	23.2%	61.3%	9.0%	1.0%	60316
Bolívar	12.8%	30.2%	38.3%	16.9%	1.9%	7074
Boyacá	7.7%	26.9%	51.9%	12.6%	1.0%	7298
Bucaramanga	5.6%	22.2%	63.2%	7.8%	1.2%	4683
Buenaventura	11.8%	31.6%	36.0%	18.8%	1.8%	2198
Buga	5.8%	27.7%	51.8%	12.3%	2.5%	886
Caldas	8.0%	30.2%	45.1%	15.9%	0.9%	4246
Cali	7.5%	26.0%	53.8%	11.1%	1.6%	16005
Caquetá	9.7%	29.6%	42.5%	16.3%	1.9%	1584
Cartagena	10.4%	26.5%	47.3%	13.8%	2.0%	8876
Cartago	7.9%	27.2%	49.9%	13.0%	2.0%	863
Casanare	7.9%	29.3%	48.2%	13.1%	1.4%	2077
Cauca	9.6%	30.5%	38.8%	19.0%	2.0%	7914
Cesar	11.5%	29.3%	40.5%	17.3%	1.4%	5115
Chocó	14.5%	29.4%	30.6%	23.3%	2.1%	1899
Chía	4.1%	21.4%	67.1%	6.7%	0.7%	1290
Ciénega	12.7%	30.2%	36.1%	19.1%	1.9%	996
Cundinamarca	6.5%	25.2%	56.0%	10.8%	1.5%	13474
Córdoba	11.6%	31.7%	39.1%	16.2%	1.4%	8801
Cúcuta	7.8%	27.9%	52.3%	11.6%	0.4%	6037
Dosquebradas	5.9%	27.0%	54.3%	11.8%	0.9%	1266
Duitama	5.1%	19.5%	68.0%	6.6%	0.8%	1069
Envigado	7.3%	20.5%	63.1%	8.3%	0.8%	1675
Facatativá	5.3%	25.5%	57.8%	10.4%	1.0%	1064
Florencia	7.9%	30.1%	49.9%	11.6%	0.5%	1285

Resultados: El 67% de los estudiantes respondieron correctamente la pregunta N°5, demostrando un nivel superior de razonamiento a su grado de escolaridad a través de la argumentación sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos, superando a los resultados de la ciudad e igualando casi al mejor resultado de la época correspondiente a Duitama (68%)

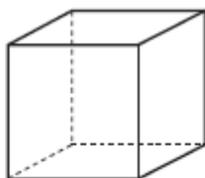
Este es el nivel esperado que todos o la gran mayoría de estudiantes promedio deberían alcanzar, mostrando un desempeño adecuado en la competencia Razonamiento, exigible para el área de matemáticas en el componente Espacial Métrico del grado 9° de Educación básica

Además de lograr lo definido en los niveles precedentes, el estudiante promedio de éste nivel en el componente espacial métrico, caracteriza una figura en el plano que ha sido objeto de varias transformaciones, halla áreas y volúmenes a través de descomposiciones y recubrimientos, usa criterios de semejanza y congruencia.

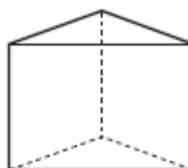
Pregunta N° 3



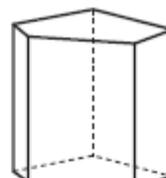
Tetraedro



Hexaedro



Prisma triangular



Heptaedro

¿Cuál de los anteriores sólidos tiene igual número de vértices que de caras?

- A. Tetraedro.
- B. Hexaedro.
- C. Prisma triangular.
- D. Heptaedro.

• Estructura

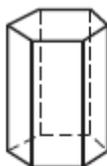
Competencia	Comunicación
Componente	Espacial - métrico
Afirmación	Representar y describir propiedades de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
Nivel de desempeño	Avanzado
Respuesta Correcta	A

• Resultados a nivel nacional y de Entidad Territorial Certificada (ETC)

ETC/País	A	B	C	D	Omisión y multimarca	Nº estudiantes
Amazonas	19.9%	38.1%	21.4%	18.3%	2.2%	627
Antioquia	30.5%	34.3%	20.1%	13.5%	1.6%	19242
Apartadó	29.3%	35.8%	19.0%	14.6%	1.3%	1088
Arauca	28.5%	35.2%	21.9%	13.9%	0.6%	1581
Armenia	33.4%	31.6%	21.3%	12.9%	0.9%	2587
Atlántico	25.7%	35.9%	22.8%	14.4%	1.3%	4931
Barrancabermeja	33.3%	33.0%	19.7%	13.1%	0.9%	1845
Barranquilla	33.2%	33.1%	20.7%	11.9%	1.1%	10592
Bello	36.8%	31.7%	19.2%	11.1%	1.3%	3031
Bogotá, D.C.	40.7%	29.1%	18.4%	11.1%	0.7%	62071
Bolívar	21.0%	38.2%	23.8%	15.5%	1.5%	7541
Boyacá	34.8%	33.5%	18.3%	13.0%	0.5%	7838
Bucaramanga	44.5%	26.8%	17.5%	10.3%	1.0%	4497
Buenaventura	23.6%	39.8%	21.6%	13.8%	1.2%	2787
Buga	35.9%	30.5%	18.4%	14.7%	0.4%	917
Caldas	29.5%	35.0%	20.4%	14.7%	0.5%	4429
Cali	35.3%	30.9%	20.1%	12.7%	1.0%	16580
Caquetá	27.5%	38.3%	19.7%	13.5%	1.1%	1657
Cartagena	27.7%	35.0%	22.6%	13.6%	1.2%	9659
Cartago	34.2%	30.9%	21.7%	12.6%	0.6%	1017
Casanare	29.1%	37.3%	19.7%	13.4%	0.5%	2177
Cauca	25.8%	37.4%	20.5%	15.2%	1.1%	8222
Cesar	24.8%	36.6%	22.4%	15.6%	0.5%	5409
Chocó	21.3%	37.7%	23.9%	15.0%	2.0%	2051
Chía	46.8%	26.7%	15.1%	10.7%	0.7%	1416
Ciénaga	19.8%	38.2%	24.8%	15.8%	1.4%	1060
Cundinamarca	37.1%	32.3%	17.8%	12.2%	0.5%	13372
Córdoba	23.0%	37.8%	22.2%	15.8%	1.3%	8943
<b>Cúcuta</b>	<b>34.3%</b>	<b>33.7%</b>	<b>18.8%</b>	<b>12.2%</b>	<b>1.0%</b>	<b>5733</b>
Dosquebradas	37.8%	29.9%	19.9%	11.8%	0.7%	1319
Duitama	49.0%	25.7%	14.9%	10.2%	0.2%	1251
Envigado	51.6%	22.5%	15.7%	9.6%	0.6%	1633
Facatativá	39.7%	28.7%	19.0%	12.0%	0.5%	1113

Pregunta N°4

En la figura se muestra un prisma hexagonal.



Figura

**NO** es correcto afirmar que el prisma tiene

- A. 6 caras rectangulares.
- B. 10 vértices.
- C. 2 caras hexagonales.
- D. 18 aristas.

### Estructura

Competencia	Comunicación
Componente	Espacial - métrico
Afirmación	Representar y describir propiedades de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
Nivel de desempeño	Avanzado
Respuesta Correcta	B

• Resultados a nivel nacional y de Entidad Territorial Certificada (ETC)

ETC/País	A	B	C	D	Omisión y multimarca	Nº estudiantes
Amazonas	26.5%	31.1%	16.3%	21.4%	4.8%	627
Antioquia	22.5%	37.1%	14.5%	24.0%	1.9%	19242
Apartadó	23.5%	33.9%	18.2%	22.6%	1.7%	1088
Arauca	20.2%	37.9%	14.4%	26.7%	0.8%	1581
Armenia	20.3%	40.2%	13.5%	24.9%	1.1%	2587
Atlántico	28.5%	32.0%	17.3%	20.4%	1.7%	4931
Barrancabermeja	21.0%	42.0%	13.6%	22.3%	1.2%	1845
Barranquilla	20.5%	43.0%	14.3%	20.7%	1.5%	10592
Bello	19.6%	43.2%	13.8%	21.9%	1.6%	3031
Bogotá, D.C.	16.0%	48.6%	10.8%	23.5%	1.1%	62071
Bolívar	29.5%	30.3%	19.2%	18.8%	2.2%	7541
Boyacá	19.2%	42.8%	11.8%	25.4%	0.8%	7838
Bucaramanga	14.5%	51.0%	10.5%	22.8%	1.2%	4497
Buenaventura	29.0%	29.1%	18.7%	21.0%	2.3%	2787
Buga	20.5%	43.8%	12.0%	23.0%	0.7%	917
Caldas	23.3%	35.7%	16.2%	23.8%	0.9%	4429
Cali	19.0%	42.8%	13.7%	22.9%	1.5%	16580
Caquetá	25.8%	33.9%	17.9%	21.7%	0.8%	1657
Cartagena	23.0%	36.7%	16.8%	22.0%	1.5%	9659
Cartago	20.2%	44.5%	11.8%	22.0%	1.5%	1017
Casanare	20.9%	39.3%	14.8%	24.3%	0.7%	2177
Cauca	28.5%	34.0%	16.2%	19.7%	1.6%	8222
Cesar	25.6%	35.6%	16.7%	21.4%	0.8%	5409
Chocó	32.5%	28.1%	18.7%	18.6%	2.1%	2051
Chía	12.1%	55.2%	8.1%	23.7%	0.9%	1416
Ciénaga	32.3%	26.5%	19.7%	19.1%	2.5%	1060
Cundinamarca	18.2%	44.4%	11.6%	24.8%	1.0%	13372
Córdoba	26.9%	32.1%	17.8%	21.5%	1.6%	8943
Cúcuta	18.7%	44.6%	12.1%	23.4%	1.2%	5733
Dosquebradas	18.0%	46.3%	12.7%	22.5%	0.5%	1319
Duitama	11.8%	55.4%	8.8%	24.1%	0.0%	1251
Envigado	12.6%	56.0%	9.6%	21.2%	0.6%	1633
Facatativá	17.1%	46.8%	10.2%	25.2%	0.7%	1113

Resultados: El 46% de los estudiantes, respondieron correctamente las preguntas 3 y 4, demostrando un nivel superior a su grado de escolaridad en la competencia comunicativa a través de la representación y descripción de propiedades y objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas, superando a los desempeños de los estudiantes a nivel municipal (44,6%)

En éste nivel, el estudiante de 9° de educación básica, muestra un desempeño sobresaliente en las competencias esperadas para el área de matemáticas en el componente espacial métrico

El 25% de los estudiantes respondieron correctamente a ésta pregunta, demostrando un nivel inferior respecto al nivel municipal y nacional, demostrando debilidad respecto a la competencia razonamiento a nivel avanzado de grado noveno en argumentar formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos

• Resultados a nivel nacional y de Entidad Territorial Certificada (ETC)

ETC/País	A	B	C	D	Omisión y multimarca	Nº estudiantes
Amazonas	26.0%	31.2%	21.6%	18.7%	2.5%	589
Antioquia	27.8%	24.5%	24.7%	20.1%	2.8%	16848
Apartadó	33.6%	22.6%	20.3%	22.5%	1.0%	1018
Arauca	24.6%	27.9%	27.5%	19.5%	0.4%	1612
Armenia	29.1%	23.4%	27.2%	19.8%	0.5%	2415
Atlántico	26.9%	24.9%	25.1%	21.5%	1.7%	4581
Barrancabermeja	25.3%	25.0%	28.3%	20.3%	1.0%	1899
Barranquilla	25.3%	24.3%	29.5%	19.5%	1.3%	9986
Bello	28.5%	24.9%	24.7%	21.0%	0.9%	3094
Bogotá, D.C.	24.8%	24.3%	31.8%	17.9%	1.2%	60316
Bolívar	28.4%	26.2%	22.2%	21.5%	1.6%	7074
Boyacá	23.9%	29.7%	28.7%	16.7%	1.0%	7298
Bucaramanga	23.5%	23.7%	37.0%	14.4%	1.4%	4683
Buenaventura	30.2%	23.3%	18.9%	26.2%	1.5%	2198
Buga	22.6%	24.9%	30.6%	19.5%	2.4%	886
Caldas	28.3%	25.1%	25.1%	20.8%	0.7%	4246
Cali	27.1%	23.8%	29.6%	17.9%	1.7%	16005
Coquetá	30.4%	28.3%	22.9%	16.7%	1.7%	1584
Cartagena	28.8%	23.4%	24.5%	21.6%	1.8%	8876
Cartago	23.5%	24.3%	31.2%	19.2%	1.7%	863
Casanare	26.9%	28.6%	26.7%	16.5%	1.3%	2077
Cauca	26.9%	27.4%	26.2%	17.6%	1.9%	7914
Cesar	29.8%	25.4%	22.2%	21.5%	1.1%	5115
Chocó	29.2%	22.9%	19.1%	27.3%	1.5%	1899
Chía	20.1%	26.2%	40.1%	13.0%	0.6%	1290
Ciénaga	31.7%	19.1%	20.2%	27.3%	1.7%	996
Cundinamarca	23.9%	26.9%	30.7%	16.8%	1.6%	13474
Córdoba	27.7%	25.6%	21.9%	23.7%	1.1%	8801
<b>Cúcuta</b>	<b>25.7%</b>	<b>24.2%</b>	<b>31.5%</b>	<b>18.1%</b>	<b>0.4%</b>	<b>6037</b>
Dosquebradas	24.2%	25.6%	31.8%	17.1%	1.3%	1266
Duitama	18.8%	21.0%	47.7%	11.9%	0.7%	1069
Envigado	25.4%	19.1%	39.9%	14.9%	0.7%	1675
Facatativá	28.3%	24.2%	31.5%	14.9%	1.0%	1064

### **3.7 Principios Éticos**

La investigación se desarrolló en un ambiente de respeto y legalidad. Se solicitó el consentimiento informado a padres de familia para poder usar fotografías o videos de sus hijos como evidencias de trabajo. Adicionalmente, la FIFA otorgó el permiso para poder utilizar las imágenes y logos que se usan en el proyecto con fines educativos y de manera privada, respecto al mundial de fútbol Rusia 2018.

Del mismo modo, el rector de la institución, ha sido informado acerca de la implementación de la propuesta en el centro educativo, teniendo en cuenta los lineamientos estipulados por el PEI, en un ambiente de PAZ y sana convivencia en cada una de las actividades programadas con los estudiantes.

El trabajo se diseñó citando conforme a la norma y estará disponible para compartir con fines educativos y pedagógicos y la posibilidad de adaptarlo y mejorarlo.

## **4. Propuesta**

### **4.1 Presentación**

La presente propuesta pedagógica propone fortalecer el razonamiento geométrico mediante la aplicación de una secuencia didáctica que oriente la construcción de la fórmula de Euler que relaciona caras, vértices y aristas de un poliedro, diseñada para grado sexto de la institución Educativa Colegio Municipal de Bachillerato

### **4.2 Justificación**

La geometría, ha demostrado ser una herramienta de interpretación en un mundo geométrico por excelencia que ha influido en el desarrollo de los pueblos mediante el uso de variados sistemas de expresión y representación paralelos al lenguaje natural o de las imágenes necesarios en la vida cotidiana y profesional del ser humano.

Actualmente la geometría demanda la simultaneidad tanto en el discurso sobre las figuras y propiedades como del lenguaje natural indispensable para enunciar definiciones, teoremas, hipótesis que a través de las representaciones y de manera interactiva pueda lograr los resultados esperados en la coordinación entre los objetos geométricos y su representación como medio para exteriorizar las representaciones mentales del estudiante.

A pesar de que su aprendizaje presenta cierto nivel de dificultad, exige la reflexión continua para mejorar su comprensión a través de una didáctica acorde a los intereses de los estudiantes y

las expectativas de una sociedad moderna desde una visión científica, cultural y tecnológica comprometida con el ambiente y la convivencia pacífica con sus semejantes.

La percepción háptica es una actividad que despierta la curiosidad necesaria para identificar las características que componen las diversas formas de los poliedros, ya que obliga al estudiante al uso de una representación mental y una significación a través de la aprehensión perceptiva o conceptual de dicho objeto de conocimiento.

Por lo anterior, se hizo necesario desarrollar una secuencia didáctica que conlleve al estudiante a través del modelo instruccional de Van Hiele, poder visualizar, analizar, ordenar y clasificar

hasta identificar el sentido del razonamiento deductivo al descubrir las regularidades de los poliedros mediante la construcción de la fórmula de Euler ( $c-a+v=2$ )

### **4.3 Objetivos**

Construir la fórmula de Euler que relaciona caras, vértices y aristas de un poliedro

### **4.4 Indicadores de desempeño**

Clasifica objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, aristas ) y propiedades

Descubre regularidades en los diversos tipos de poliedros, construyendo la fórmula de Euler que relaciona caras, vértices y aristas

### **4.5 Metodología**

La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial, que Ochaíta (1983) resalta la importancia de ésta teoría como único modelo que relaciona, la evolución de la cognición espacial con el desarrollo cognitivo general y en donde expone 3 aspectos fundamentales:

1. El espacio se construye paso a paso de la actividad sensoriomotriz a las imágenes reales, haciendo reversibles las imaginadas espaciales para convertirlas en operaciones y no viene dado

“a priori” surgiendo de la mera percepción que inicia en el nacimiento y no termina en la adolescencia

2. Se establecen 3 tipos de relaciones espaciales: Topológicas (espacio dentro del objeto o figura), proyectivas (espacio proyectivo) y euclidianas (espacio euclidiano o métrico), en donde el niño elabora primero el espacio topológico tanto a nivel real como en el de la representación .

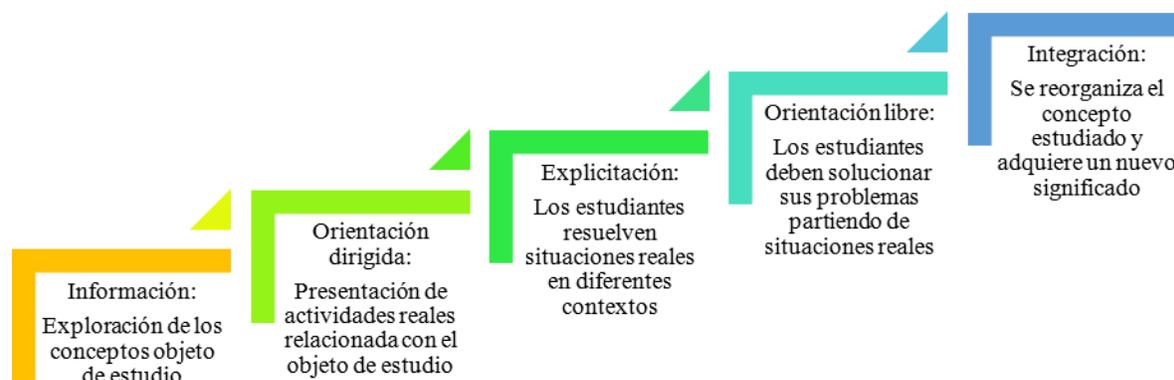
3. El desarrollo intelectual y el conocimiento espacial se desarrolla en tres grandes períodos: Período sensoriomotor, período de las operaciones concretas y período de las operaciones formales

Algunos de sus experimentos fueron utilizados como estrategias para desarrollar la percepción espacial en los estudiantes y el análisis de la percepción a la representación como una forma de

reconstrucción de las relaciones topológicas inicialmente como base para luego el desarrollo de las proyectivas y euclidianas.

Para la construcción del espacio topológico, euclidiano y proyectivo, Piaget expone algunas características según la edad del niño que se describen los anexos.

La presente propuesta es una secuencia didáctica que se diseñó utilizando el modelo instruccional de Van Hiele para lograr que los estudiantes identifiquen las regularidades de los poliedros, y construyan la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas.



**Figura 42. Modelo Instructivos De Van Hiele**

#### **4.6 Fundamento Pedagógico**

La primera geometría regular de la que se tiene noticia es el tetraedro encontrada en una excavación de la antigua ciudad de Ur, al sur de Irak y formaba parte de un juego de dados. La

segunda figura, el cubo, apareció en Roma como la forma más popular para los dados alrededor del año 900 a.C y luego en el mismo lugar encontraron un dado en forma de dodecaedro.

Pitágoras, filósofo y matemático griego (582-507 a.C ) agrupó los tres poliedros simétricos que se conocían hasta el momento como ejemplos de una especie común: La esfera de 12 pentágonos, como se llamó al dodecaedro y que asumió el significado espiritual de la secta pitagórica; el cubo, compuesto de seis cuadrados y la pirámide de cuatro caras triangulares llamada tetraedro por los pitagóricos ya que tetra significa cuatro en griego.

Pitágoras no descubrió ningún otro sólido nuevo, lo cual demoró en descubrir otras dos figuras geométricas, debido a que los miembros de la secta juraban mantener en secreto sus ideas del mundo matemático.

Hacia los años 428-347 a.C Platón recuperó el estudio de las figuras pitagóricas y junto a Teeteto quien estudió cómo para construir una figura tridimensional con las máximas simetrías, los polígonos bidimensionales tendrían que ser simétricos, y todas las caras del sólido debían tener la misma forma. Estas caras planas, también tendrían que encontrarse unas con otras siempre con la misma configuración y con éste criterio, descubrió al octaedro y el icosaedro, demostrando que nunca podría encontrar una sexta manera de colocar juntas caras regulares para construir un nuevo tipo de poliedro regular convexo.

Para Platón, el tetraedro, la más puntiaguda y simple de las cinco, representaba el fuego; el icosaedro, la más redonda, representaba el agua; el octaedro, como una forma intermedia entre las dos anteriores, representaba el aire; el cubo una de las más estables, representaba la tierra y, por

último la esfera, de 12 pentágonos, que Platón rebautizó como dodecaedro, representaba el universo.

Paralelamente a los descubrimientos en Roma y Grecia, se sabe que éstos poliedros ya eran conocidos por culturas anteriores, puesto que en 1850 se encontraron unas figuras de barro en un yacimiento neolítico en Escocia que corresponde a los 5 sólidos platónicos y que datan del 2000 aC. Que indican claramente un grado de dominio de las matemáticas que hasta la fecha todo arqueólogo o historiador de la matemática, le había negado al hombre neolítico.

Mas de 2000 años después, Johannes Kepler demostró que existían más figuras que cumplían con la definición de los sólidos regulares, aunque fueran cóncavos en vez de convexos como los sólidos platónicos y se conocen con el nombre de sólidos de Kepler-Poinsot (dodecaedro estrellado, icosaedro estrellado).

Una de las ecuaciones que cambiaron el mundo es la fórmula de Euler que relaciona de un modo sencillo el número de caras (c), vértices (v) y aristas (a) de un poliedro, allanando el camino para técnicas más generales y potentes y creando una rama nueva en las matemáticas como es la topología, considerada como la geometría de la lámina elástica. La fórmula se expresa como:

Aunque Descartes fue el primero que la descubrió (1639), no la publicó por considerarla una curiosidad menor y se la entregó a Leonard Euler, el matemático más prolífico en la historia para probar y publicar ésta relación, lo cual hizo en 1750.

La versión moderna de la expresión expresa que las caras (C) son polígonos de dimensión 2, las aristas (A) son líneas de dimensión 1 y los vértices (V) son puntos de dimensión 0. Los signos de la expresión, alternan, + - +, con + asignada a las características de dimensión par y - a aquellas

de dimensión impar. Esto implica que puedes simplificar un solo fusionando sus caras o eliminando sus aristas y vértices y éstos cambios no alteran el número  $C - A + V$  siempre que cada vez que elimines una cara, también elimines una arista o cada vez que elimines un vértice, también elimines una arista. Los signos que se alternan quieren decir que los cambios de éste tipo, se compensan.

Los poliedros regulares poseen las siguientes características:

Cada cuerpo está constituido por un solo polígono regular base (solo triángulos, solo cuadrados, solo pentágonos)

Sobre cada vértice converge el mismo número de aristas

El ángulo que conforma la estructura es constante, lo que hace que todos sus vértices, toquen una esfera ( $60^\circ$  para los poliedros basados en triángulos,  $90^\circ$  para el cubo, que está basado en cuadrados y  $108^\circ$  para el dodecaedro por estar hecho a partir de pentágonos).

Los poliedros que tienen el mismo volumen reciben el nombre de equivalentes

#### **4.7 Diseño de Actividades**

##### **Secuencia Didáctica:**

Primera fase: Información. El propósito de la actividad es que el profesor identifique los conocimientos que los estudiantes poseen sobre el tema a tratar y al mismo tiempo, que ellos se ubiquen en la dirección al tema a desarrollar

En ésta etapa se organizan los estudiantes en grupos para realizar la descripción de un objeto oculto (la percepción háptica) que se encuentran en una bolsa que no permite ver su interior.

Seguidamente seleccionen la palabra que represente lo más cercano posible, la percepción del objeto percibido, al frente de cada frase:

1) Tipo y cantidad de bordes:

a. Rectosb. CurvosCant. \_\_\_\_\_

2) Tipo de superficie:

a. No Uniformeb. UniformeCant. \_\_\_\_\_

3) Extremos:

a. Puntasb. CurvosCant. \_\_\_\_\_

4) ¿Qué forma tiene cada superficie del cuerpo que palparon?

---

5) ¿Según la experiencia realizada, Qué elementos componen el cuerpo?

---

6) ¿Qué nombre cree que se le puede asignar al cuerpo oculto y cómo lo definiría? Justifique

---

Segunda fase: Orientación dirigida: Es la fase fundamental en donde se construyen los fundamentos del tema a desarrollar y constituyen la base sobre el cual se adquieren niveles

superiores de pensamiento. El propósito es orientar a los estudiantes a través de la diferenciación de nuevas estructuras basadas en aquellas observadas en la primera fase

En esta etapa se solicita a los estudiantes clasificar los poliedros en 2 grupos según los tipos de polígonos de sus caras

El docente orienta la ubicación de los poliedros según tengan la misma forma en las caras con polígonos regulares y los que no lo tienen

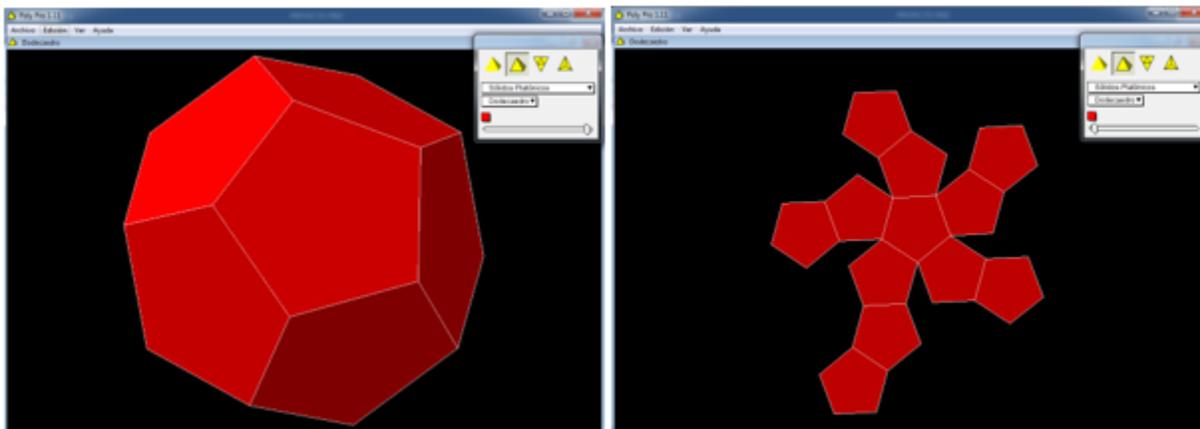
**Tabla 14. Clasificación de los poliedros según la forma de las caras**

Grupo 1		Grupo 2	
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	

Tercera fase: Explicitación: Tiene el propósito de concientizar a los estudiantes de las características y propiedades del objeto de conocimiento y consolidar un vocabulario propio del

nivel. El docente condiciona el entendimiento real al éxito de la clase e introduce el lenguaje técnico.

El docente presenta el Software Poly pro para el reconocimiento de los poliedros, insistiendo en los elementos constitutivos de los sólidos regulares



**Figura 43. Modelo de dodecaedro en software Poly pro**

El software, permite la identificación de las características de los poliedros regulares e irregulares y la respectiva conversión en representación plana

Cuarta fase: Orientación Libre: Los estudiantes deben utilizar los conocimientos para resolver actividades y problemas diferentes a los anteriores y con mayor grado de complejidad.

1. Los estudiantes utilizan los poliedros entregados para completar la tabla teniendo en cuenta sus elementos (Se recomienda que todos los poliedros no estén disponibles). Seguidamente,

Coloree de amarillo la columna que corresponde al número de caras, de azul la columna que corresponde al número de vértices y de rojo la columna que corresponde al número de aristas

**Tabla 15. Modelo Tabla de identificación de elementos de Poliedros**

NOMBRE DEL POLIEDRO	FORMA DEL POLÍGONO DE LA CARA	N° DE LADOS DEL POLÍGONO DE LA CARA (n)	N° DE CARAS (c)	N° DE VÉRTICES (v)	N° DE ARISTAS (a)	CANTIDAD DE ARISTAS QUE LLEGAN A CADA VÉRTICE (r)	COMPROBACIÓN
Tetraedro							
Hexaedro							
Paralelepípedo							
Octaedro							
Pirámide triangular							
Dodecaedro							
Prisma de base octagonal							
Icosaedro							

Quinta fase: Integración. Los estudiantes revisan y resumen lo que han aprendido bajo la orientación del profesor.

1) ¿Qué tipo de polígonos conforman las caras de los poliedros?

---

2) ¿Qué poliedro tiene el mismo número de vértices y caras?

---

3) ¿Qué poliedro tiene el doble número de aristas que de vértices?

---

4) ¿Qué poliedro tiene el doble número de aristas que de caras?

---

5) ¿Qué herramienta de las matemáticas podemos utilizar, para poder identificar las características que componen los poliedros que no están presentes?

#### **4.8 Desarrollo de las Actividades Propuestas**

##### **Tabla 16. Diseño de actividades**

<b>Indicadores de desempeño</b>	<b>Actividad</b>	<b>Recursos</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Producción</b>
Identificar los presaberes que tienen los estudiantes en el componente Espacial Métrico	Diagnostico	Fotocopias, regla, hojas cuadriculadas, útiles escolares.	2 Horas	Prueba escrita Planteamiento de hipótesis
Orientar el proceso de medición y selección de materiales necesarios para construir una cometa que vuele alto y sea lo más grande posible para la participación en el festival.	El vuelo de una cometa	Video, regla, compás, pliego de papel bond, marcadores, piola, tijeras, palos, transportador, escuadra, lápiz, plástico de colores, pegante.	3 Horas.	Video Construcción de la cometa
Estimular la competencia comunicativa a través de la escucha del audio del cuento: El tren de los cielos	El tren de los cielos	Audio y Libro “Hasta el viento olvidará mis pasos”. Serafín Bautista Villamizar	2 Horas	Listado de condiciones de la cometa
Establecer criterios claros para el desarrollo del proyecto	Planeando el vuelo	Plegable, página web: <a href="http://www.colmunbto.edu.co">www.colmunbto.edu.co</a>	2 Horas	Plegable

<b>Indicadores de desempeño</b>	<b>Actividad</b>	<b>Recursos</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Producción</b>
Reconocer las unidades figurales y los atributos mensurables de las cometas, que permitan compararlas utilizando el sistema de representación gráfica.	La forma y el tamaño de las cometas	Cartelera, regla, transportador, marcadores, cuaderno, libros, tangram, figuras geométricas, cometas.	10 Horas	Dibujo en cartelera
Participar en el festival mundialista de cometas Pigargo.	La cometa Pigargo más grande	Carteleras, cometas, espacios físicos de la institución.	2 Horas	Festival de Cometas
Identificar los atributos mensurables semejantes de las cometas	Comparación de las formas de las cometas	Fotografías, fotocopias.	6 Horas	Tabla resumen
Deducir la fórmula de Euler para poliedros que relaciona caras, vértices y aristas.	Validez del nivel de Razonamiento de los estudiantes	Poliedros, fotocopias, moldes, jardín de poliedros, software poly pro.	8 Horas	Construcción de moldes. Construcción de Poliedros
Desarrollar la competencia comunicativa en los estudiantes mediante la elaboración de un álbum que presente la información básica del trabajo de cada estudiante.	Elaboración del Álbum Pigargo	Bloc cuadriculado Hojas impresas.	2 Horas	Álbum Pigargo Vocabulario Geométrico

### **3.4.4 Desarrollo de las actividades propuestas.**

Se ve en la siguiente tabla

**Tabla 11. Actividades propuestas**

Actividad	Desarrollo de la actividad	Recursos	Tiempo
Diagnostico	<p>Los 33 estudiantes del grado 6 presentaron una prueba escrita, utilizando 19 preguntas de las pruebas saber 5 del año 2015 del componente Espacial Métrico en las competencias:</p> <p>Comunicativa (5 preguntas), razonamiento (9 preguntas) y resolución (5 preguntas).</p> <p>Adicionalmente, 5 preguntas abiertas relacionadas con conocimientos previos sobre el festival de cometas Pigargo.</p>	Fotocopias, regla, hojas cuadriculadas, útiles escolares.	2 Horas
El vuelo de una cometa	<p>Se cuestiona a los estudiantes sobre las condiciones para que una cometa sea grande y vuele lo más alto posible, para lo cual, se presenta el modelo y se realiza una observación directa de las características y el vuelo de la cometa.</p> <p>Se orienta el proceso de su construcción a través de un video y cada estudiante de manera individual o por parejas, escoge la bandera de uno de los países que participaron en el mundial de futbol 2014 para decorar la cometa, la construye para participar en el festival de cometas.</p>	Video, regla, compás, pliego de papel bond, marcadores, piola, tijeras, palos, transportador, escuadra, lápiz, plástico de colores, pegante.	3 Horas.

<p>El tren de los cielos</p>	<p>Se recibe la visita programada del escritor Serafín Bautista Villamizar, autor del libro Hasta el viento olvidará mis pasos, escritor nortesantandereano, actualmente rector de la institución Colegio Municipal María Concepción Loperena. El relato cuenta la historia de 2 mellizos, quienes después de vacaciones intermedias y aprovechando los vientos del mes de agosto, deciden planear ir a volar cometas con su padre, por lo cual Benjamín consulta al profesor de artística, quien le recomendó que no fuera cuadrada, redonda ni rectangular y Pablo al profesor de Física, quien le orientó sobre los esquemas y estrategias para que la cometa se hiciera inalcanzable, sobre tiempo, modo y lugar para lograr el objetivo. Repartieron las funciones encargando al padre, los palos, Pablo el papel y las medidas exactas como las matemáticas y Benjamín de la cola, quien propuso como nombre Rosita a la cometa, igual al nombre de la madre que los abandonó por enamorarse perdidamente del sobrino de su esposo Juan José. Benjamín sueña que llega su madre en la madrugada, que lo despierta de la</p>	<p>Audio y Libro “Hasta el viento olvidará mis pasos”. Serafín Bautista Villamizar</p>	<p>2 Horas</p>
------------------------------	---	--	----------------

Actividad	Desarrollo de la actividad	Recursos	Tiempo
	<p>emoción y su hermano Pablito lo tranquiliza, explicándole que es sólo un sueño y que ella no irá a venir. Al día siguiente, se dirigieron a la montaña para esperar las corrientes de aire que permitió que la cometa tomara tanta fuerza que reventó la pita y se despidió Rosita, descolgándose en picada, cuya frustración por el dolor de la partida le recordaba la ausencia de su madre.</p>		
Planeando el vuelo	<p>Se elaboró un folleto instructivo para explicar el proceso, los objetivos, la metodología, la evaluación y las fechas y se cargó en la plataforma virtual de la institución para que los estudiantes ampliaran sus expectativas y planearan las actividades según el cronograma. Adicionalmente, se entregó una copia a los docentes del área de matemáticas, directivos docentes y se publicó en cartelera para el conocimiento de la comunidad educativa.</p>	plegable, página web: <a href="http://www.colmunbto.edu.co">www.colmunbto.edu.co</a>	2 Horas

<p>La forma y el tamaño de las cometas</p>	<p>La estrategia se desarrolló teniendo en cuenta las fases de aprendizaje del modelo educativo de Van Hiele</p> <p><b>Información:</b> El uso del libro, como material de consulta, permitió que los estudiantes interactuaran con una forma escrita del conocimiento no habitual para ellos, que exigía ubicar el tema en una página específica y a través del trabajo en equipo, interactuar con sus compañeros a través del intercambio de información.</p> <p>Los estudiantes llevaron material de consulta como fotocopias, impresiones, libros sobre las diversas formas y sus variaciones para la construcción de esquemas y cuadros sinópticos.</p> <p><b>Orientación guiada</b> En esta fase, se realizaron actividades con material concreto con figuras geométricas y el tangram en cuanto a, composición y recomposición de figuras, comparación y clasificación de formas, medición de lados y ángulos, como estrategia para identificar las unidades figúrales de las distintas formas.</p> <p><b>Explicación</b> Se desarrollaron 3 Retos pigargos, que consisten en la presentación situaciones</p>	<p>cartelera, regla, transportador, marcadores, cuaderno, libros, tangram, figuras geométricas, cometas.</p>	<p>20 Horas</p>
--	--	--	-----------------

Actividad	Desarrollo de la actividad	Recursos	Tiempo
	<p>problemáticas del festival, donde varias cometas vuelan a la misma altura con el objeto de orientar el proceso de identificar la cometa ganadora según los elementos que determinan la forma, los procesos de medición y cálculo del área, necesarios para el desarrollo de su trabajo con las cometas que participan en el festival.</p> <p><b>Orientación Libre</b> Cada estudiante decidió escoger una forma para la participación en el festival de cometas con el objeto de que fuera la más grande y volara lo más alto posible.</p> <p><b>Integración</b> Los estudiantes con la ayuda de la representación de las cometas en las carteleras y las orientaciones del docente, identificaron las características, revisaban y corregían si era necesario, las medidas, el tamaño, las cuales resumieron en una tabla que presenta los elementos básicos de cada una.</p>		

<b>Actividad</b>	<b>Desarrollo de la actividad</b>	<b>Recursos</b>	<b>Tiempo</b>
La cometa Pigargo más grande	<p>Los estudiantes del grupo, presentaron su cometa y participaron en el festival, para un total de 21 cometas donde se pudo evidenciar las cometas que volaron más alto, en espacio abierto utilizando la cancha de fútbol de la institución con la presencia de algunos padres de familia y algunos docentes de la institución.</p> <p>Durante el desarrollo del festival, se observaron las diferentes actitudes de los estudiantes respecto a la responsabilidad, el manejo de emociones y dificultades; La frustración de un estudiante, no le permitió exponer su cometa debido a que se le dañó en el camino al colegio, pero dicha situación permitió el respeto y la solidaridad por parte de sus compañeros, algunos estudiantes tuvieron dificultades al volar la cometa, e intentaron remediar los problemas de cola (peso) o daños (rotos) que se iban presentando y así tuvieran problemas de salud, llegaron con la intención de presentar el esfuerzo realizado</p>	Carteleras, cometas, espacios físicos de la institución.	2 Horas

<p>Comparación de las formas de las cometas</p>	<p>El desarrollo del proyecto, posibilitó diversos tipos de experiencias, entre ellas, la representación gráfica de cometa no congruente con el modelo original, lo cual exigió el desarrollo de estrategias inmediatas utilizando la foto, para poder calcular las medidas reales a través del manejo de la proporcionalidad utilizando la Figura como elemento de medición.</p> <p><b>Orientación guiada:</b> Los estudiantes deben recomponer un rectángulo de 12 X 5 con las 12 fichas del pentominó, calcular el área y el perímetro, sabiendo que cada cuadrado o unidad de área tiene 1 cm de lado.</p> <p><b>Explicación:</b> La docente presenta, ejemplos y la comparación de 3 letras del pentominó F, W y P con el objeto de que logre justificar la relación del área y el perímetro de una figura.</p> <p><b>Orientación libre:</b> Los estudiantes calculan el área y el perímetro de la recomposición de 2 puzzles utilizando los movimientos de 4 fichas del pentominó Z, F, N y P para lograr el objetivo.</p> <p><b>Integración:</b> El estudiante debe ubicar 4 fichas del pentominó de tal manera que su perímetro sea menor a 2 figuras presentadas.</p>	<p>fotografías, fotocopias.</p>	<p>6 Horas</p>
---	--	---------------------------------	----------------

<p>Validez del nivel de Razonamiento de los estudiantes</p>	<p><b>Información:</b>  Los estudiantes exploraron libremente los poliedros en cartulina que llevaron para la clase e identificaron algunos elementos de las formas trabajadas en clase anterior en el jardín de los poliedros.</p> <p><b>Orientación guiada:</b>  Se presentaron varias bolsas de tela con cuerpos geométricos en su interior no visibles, con el objeto para que los estudiantes, a través de su percepción háptica, descubrieran las caras, los vértices y las aristas mediante la palpación de las superficies, los bordes y los extremos hasta llegar a imaginar el cuerpo oculto. Seguidamente, el docente orienta los elementos encontrados en el cuerpo, descubriendo la bolsa para que reconozcan los poliedros, cuentan y describen cada uno de los elementos constitutivos de los poliedros, los clasifican en 2 grupos que a los cuales nombraron en: regulares e irregulares y les permiten construir colectivamente una definición de poliedros.</p> <p><b>Explicación:</b>  Se presenta el software poly pro para presentar la simulación de la construcción de los diferentes tipos de poliedros regulares, se</p>	<p>poliedros, fotocopias, moldes, jardín de poliedros, software poly pro.</p>	<p>8 Horas</p>
---	--	---	----------------

Actividad	Desarrollo de la actividad	Recursos	Tiempo
	<p>identifican las caras, los vértices y las características que permiten diferenciarlos y clasificarlos en Platónicos o regulares.</p> <p><b>Orientación libre:</b> Los estudiantes deben completar los elementos constitutivos de los poliedros en una tabla que presenta 8 poliedros, utilizando los poliedros que aparecen en el jardín y los poliedros que se trabajaron en clase.</p> <p><b>Integración:</b> Los estudiantes relacionaron gráficamente los moldes planos con los poliedros regulares, construyeron el molde de un hexaedro regular de 5 cm de arista, identificando los elementos del cubo y construyeron el molde plano para guardar el amplificador del docente.</p>		
Elaboración del Álbum Pigargo	Se entrega a cada estudiante la impresión de la hoja que contiene su foto para que escriban las características básicas y cálculos necesarios para calcular el área y el perímetro.	Hojas impresas.	1 Horas

**Tabla 17. Desarrollo de las actividades propuestas**

<b>Actividad</b>	<b>Desarrollo de la actividades</b>	<b>Recursos</b>	<b>Tiempo</b>
<b>Inicio</b>			
<b>Desarrollo</b>			
<b>Culminación</b>			

## 5. Conclusiones

La evaluación diagnóstica, permitió identificar las dificultades reales de los estudiantes de sexto grado en cada uno de los componentes y competencias según las pruebas saber 2015, evidenciando debilidades en el razonamiento del componente Espacial métrico.

La prueba y los conocimientos previos, mostraron que una gran mayoría no identificaba la forma y los atributos mensurables de una cometa que le permitiera ser comparables al nivel de un estudiante de sexto grado y que podía ser un importante objeto de conocimiento matemático por descubrir.

El dibujo de la cometa realizada por cada estudiante, permitió representar, comunicar y reflexionar sobre la información visual que poco a poco iban descubriendo en la medida que sus necesidades cognitivas lo exigían, encontrando relaciones no solamente topológicas sino también métricas, que los llevaron a conclusiones sobre la forma y los atributos de las cometas, utilizando el modelo instruccional de Van Hiele.

La estrategia pedagógica Festival de cometas pigargo, despertó el interés de los estudiantes por aprender matemáticas a través de una situación real que exigió a los estudiantes de justificar, proponer, hasta llegar a generaliza a través de la construcción de la fórmula de Euler, hecho que no es común en estudiantes de éste grado escolar.

El desarrollo de aprendizaje por proyectos generó situaciones reales en la que un estudiante necesitó utilizar la proporcionalidad para calcular el tamaño de su cometa utilizando su representación gráfica y el hallazgo de 2 objetos que tenían el mismo perímetro con diferentes

áreas, permitió utilizar los procesos de visualización, como medio para mejorar los procesos de razonamiento denominado por Torregrosa y otros (2010), Razonamiento Configural.

La aplicación del modelo instruccional de Van Hiele permite evidenciar el desarrollo del razonamiento en los procesos cognitivos de los estudiantes, a través de una serie de fases en donde se favorece tanto el trabajo individual como colaborativo

El proyecto generó un impacto importante en la comunidad educativa, puesto que se logró la vinculación de los padres de familia en el proyecto y algunos docentes de otras áreas como tecnología, ciencias naturales y sociales, incluyeron en su programación, temas relacionados con

el proyecto en relación a la clasificación Taxonómica del ave Pigargo y el estudio de los países que intervinieron en el desarrollo del festival.

## **Recomendaciones**

El proyecto se puede adaptar al tiempo, lugar y a las circunstancias con el objeto de contextualizar el tema de acuerdo a las necesidades e intereses de los estudiantes.

Es posible generar diversas actividades interesantes en donde el estudiante sea el protagonista de su proceso de aprendizaje que le permita tomar decisiones fundamentado en justificaciones y razonamientos.

Es importante utilizar el modelo de Van Hiele en el aprendizaje de la geometría con el objeto de desarrollar el razonamiento geométrico como la estrategia que asegura la permanencia del aprendizaje independientemente del nivel en que se encuentre el estudiante

Se recomienda la utilización de la plataforma WIX en la cual se elaboró el proceso de investigación y puede ser utilizada con fines educativos, no comerciales

## 6. Referencias Bibliográficas

- Acuña, C. (2010). Las funciones figurales y epistémicas de los dibujos. *Relime*, 13(4-11), 116 - 128.
- Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: Una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. *Investigación en Educación Matemática XIII*, 119 - 127. Santander, Colombia: SEIEM
- Aravena, M., & Caamaño, C. (2013). niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa* ,16(2), 139 -178.
- Arias, N & Flórez, R. (2011). Aporte de la obra de Piaget a la comprensión de problemas educativos: su posible explicación del aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, 60(1), 93 -105.
- Arreguín, L., Alfaro, J & Ramirez, S. (2012). Desarrollo de competencias matemáticas en secundaria usando la técnica de aprendizaje orientado en proyectos. *Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, 10(4), 264 - 284.
- Arriaga, M. (2015). El diagnóstico educativo, una importante herramienta para elvar la calidad de la educación en manos de los docentes. *Revista Científico Pedagógica Atenas*. 3(31), 63 - 74.
- Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación Matemática*, 15(3), 57 - 76.

- Barrantes, M. (2002). recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar y su enseñanza - Aprendizaje. Badajoz: Universidad de Extremadura .
- Barrantes, M., López, M & Fernández, M. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. PNA, 9(2), 107 - 127.
- Bautista, O. (2017). Pensamiento Geometrico. Recuperado de <https://olgacecilia6.wixsite.com/geometria>
- Bedoya, J., Esteban, P y Vasco, E. (2007). Fases de aprendizaje del modelo educativo de Van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local. Lecturas Matemáticas, 28(U), 77 - 95.
- Bernabeu, M & Llinares, S. (2017). Compresión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. Educación Matemática, 29(2), 9 - 35.
- Bisquerra, R. (2003). Educación emocional y competencias básicas para la vida . Revista de Investigación Educativa, 21(1), 7 - 43.
- Burger, W & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. Journal for Research in Mathematics Education, 17(1), 31 - 48.
- Caballero, O. O. (2013). Una transición de la geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recuso didáctico en la clase de matemáticas. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia .

- Cabello, A. B. (2013). la modelización de van hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de cabri. Salamanca: Universidad de Salamanca .
- Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación*, 60(1), 41 - 60.
- Cárdenas, A. (2011). Piaget: lenguaje, conocimiento y educación. *Revista Colombiana de Educación* 60(2011), 71 -91.
- Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software geogebra con alumnos de ii de magisterio de la e.n.m.p.n. tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.
- Ciro, C. (2012). Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.Pr) como estrategia de enseñanza y aprendizaje en la educación básica y media . Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*,. 14(001), 61-71.
- Clements, D & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* . Recuperado de: <https://bib.irb.hr/datoteka/877842.Kovacevic.pdf>
- Clmente, F., Llinares, S & Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 31(57), 497 - 516.

Colmenares, A. & Piñero, L. (2008). La investigación acción. Una herramienta metodológica heurística para la comprensión y transformación de realidades y prácticas socio-educativas. *Laurus* 14( 27), 96 - 114.

Comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI, presidida por JACQUES DELORS. (s.f). La educación encierra un tesoro . UNESCO: Santillana Ediciones.

Corberán, R. (1996). Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por lo estudiantes desde primaria a la universidad. . Valencia: Universidad De Valencia .

Corberán, R. (s.f). Didáctica de la geometría : el modelo Van Hiel. Publicaciones de la Universidad de Valencia (PUV). Recuperado de: <https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/CorOtr94.pdf>

Esteban, M., Ibañes, M & Ortega, T. (1998). Trigonometría. Madrid: Síntesis.

Fernández, T. (2011). Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.

Fernández, T. (s.f.). La investigación en visualización y razonamiento espacial. pasado, presente y futuro. Santiago de Compostela : Universidad de Santiago de Compostela.

FIFA.COM. (s.f). Copa mundial de fútbol. Recuperado de: <http://es.fifa.com/worldcup/>

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Springer*, 24(2), 139 -162.

- Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el modelo de van hiele. sigma. Recuperado de: [http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43573/es/contenidos/informacion/dia6\\_sigma/es\\_sigma/adjuntos/sigma\\_28/5\\_test\\_geometrico.pdf](http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_28/5_test_geometrico.pdf)
- Fouz, F. (2013). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. Un paseo por la geometria. Recuperado de: <http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf>
- Fuentes, N & Portillo, J. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geometrico segun el modelo de Van Hiele en estudiantes de septimo grado de la institucion educativa San José de Carrizal. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Furman, M. (2016). Educar mentes curiosas: la formación del pensamiento científico y tecnológico en la infancia. Buenos Aires: Fundación Santillana.
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometria. Revista EMA, 2(1), 49 - 58 .
- Gallego, R & Pérez, R. (s.f). Aprendibilidad, ensenabilidad y educabilidad en las ciencias experimentales. revista educación y pedagogía, 11(25), 87 - 117.
- Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico - semiótico de la cognición e intrucción matemática. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, R. (2013). Exploración de las características del razonamiento visual en alumnos de e.s.o. en particular, alumnos con talento matemático. Valencia: Universidad de Valencia .

- González, J. (2014). Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café. Medellín : Universidad de Antioquia.
- Gualdrón, É & Gutiérrez, Á. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de van Hiele para la semejanza. *investigación en educación matemática*, 11(2007), 369 - 380 .
- Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A & Cáceres, M. (1992). La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B. Valencia. Recuperado de: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf>
- Gutierrez, A. (2012). Investigar es evolucionar: Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. *Teoría crítica y práctica de la educación matemática. serie crítica y fundamentos* 41(1), 43 - 59.
- Gutierrez, A. (sf). *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización* . Valencia : Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática* . Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gutiérrez, L., Martínez, E & Nebreda, T. (2008). *Las competencias básicas en el área de matemáticas* . Cantabria: Consejería de Educación de Cantabria.
- Gutierrez, S. (s.f). *El pensamiento geométrico en los estudiantes de primer grado de secundaria* . Chihuahua: Universidad Autónoma de Chihuahua.

Hershkowitz, R., Parzysz, B & Dormolen, J. (1996). Space and Shape. International Handbook of Mathematics Education , 1(u), 161 - 204.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2006). Matriz de referencia de matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2015). Cuadernillo de prueba. Ejemplo de preguntas Sabr 5° Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2015). Cuadernillo de prueba. Ejemplo de preguntas Saber 9° Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2017). Informe nacional de resultado. Colombia en PISA 2015. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Jaime, A & Gutierrez, A. (1993). Aportaciones a la interpretacion y aplicacion del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A., Chapa, F & Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triangulos y cuadrilateros : Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. Epsilon 23(U), 49 - 62.

Julio, L. (2014). Las tranformaciones en el plano y la noción de semejanza . Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Larios, V. (2006). La rigidez geometrica y la preferencia de propiedades geométrica en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. Relime. 9(3) , 361 - 382.

- León, O & Calderón, D. (2008). Semiosis y lenguaje en la didáctica de las matemáticas. Encuentro Colombiano de matemática educativa. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/935/1/3Cursos.pdf>
- Lucio, R. (1989). educación, pedagogía, enseñanza y didáctica: diferencias y relaciones. Revista de la Universidad de la Salle, 11(17), 35-47.
- Luna, M. (2013). Origen y desarrollo de las formas geométricas elementales en el lenguaje gráfico y el pensamiento visual del niño. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Macías, J. (2016). Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Mallo, M. (s.f). Un viaje por geometrías encontradas, descubiertas, redescubiertas o reinterpretadas. Jornadas Científicas arquitectura, educación y sociedad. Recuperado de: <http://docplayer.es/67113930-Arquitecta-por-la-escuela-tecnica-superior-de-arquitectura-de-madrid-etsam-con-la-calificacion-de-sobresaliente-julio-2006.html>
- Maracci, M. (2001). Drawing in the problem solving process. En J. Novotná (Ed.), Proceedings of 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 478–488). Praga, República Checa: Charles University Marqués (2005)

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá.

Recuperado de: <https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html>

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogota: Escribe y Edita.

Ministerio de Educación Nacional. (2014). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá. Recuperado de: <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/DBA%20Transici%C3%B3n.pdf>

Montes, S. A. (2012). Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego pacman. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Morris, R. (1986). Estudios en educación matemática. Enseñanza de Geometría: Unesco.

Motealegre, R. (2016). Controversias piaget-vygotski en psicología del desarrollo. Acta Colombiana de Psicología, 8(2012), 271 -283.

Murcia, M. E & Henao, J. (2015). Educación matemática en Colombia una perspectiva evolucionaria. Entre Ciencia e Ingeniería, 9(18), 23 - 30.

Ochaíta, E. (1983). La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. Estudios de Psicología, 14(1), 93 - 108.

Overlooker, J. (2015). Pigargo de Steller, el águila marina más grande Recuperado de Bolgspot: <http://aguilasdelmundo.blogspot.com/2015/02/pigargo-de-steller-el-aguila-marina-mas.html>

- Perea, J. (2017). Aprendizaje de la teoría de grafos a través de los poliedros y de la característica de Euler. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Perrenoud, P. (2004). Diez nuevas competencias para enseñar . El Marqués: Quebecor World, Gráficas Monte Albán.
- Quesada, H. (2014). Análisis de la coordinación entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento en la resolución de problemas en geometría. Alicante: Universidad de Alicante.
- Quintero, O. L. (s.f.). Un modelo pedagógico de enseñanza de la geometría euclidiana. Puerto Rico: Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.
- Rodríguez, A. M. (2014). Elaboración de un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) , que integre el origami como facilitador de la enseñanza de los sólidos en Geometría . Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Sarasua, J & Arrieta, M. (2009). Relación entre los descriptores de los niveles de Van Hiele y la adquisición de habilidades de representación externa de figuras planas. Investigación en

educación matemática. Recuperado de:

<https://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/SarasuaArrieta09.pdf>

Scaglia, S & Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. Mexico: Grupo Santillana.

Subsecretaria de Educación Básica . (2006). Taller de actualización sobre los programas de estudio. C.D Mexico : Secretaria de Educación publica.

Thaqi, X. (2009). Aprender a enseñar transformaciones geométricas en primaria desde una perspectiva cultural. barcelona: Universidad de Barcelona.

Torregrosa, G., Quesada, H & Penalva, M. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. Enseñanza de las ciencias,28(3), 327 - 340.

Vargas, G & Gamboa, R. (2013). El modelo de van hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 27(1), 74 - 94.

Vasco, C. (1985). El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. Revista UNAL,1(1985), 45 - 51.

Zambrano, M. (2006). El razonamiento geométrico y la teoría de Van Hiele. Kaleidoscopio, 3(5), 28 - 33.

**Anexos**

## Anexo 1. Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE) 2016 de dos instituciones.

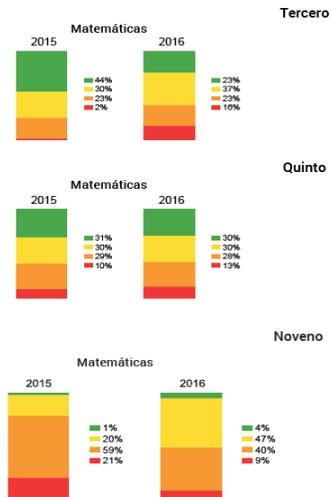
<b>BASICA PRIMARIA</b>												
<b>COLEGIO MUNICIPAL DE BACHILLERATO</b>							<b>I. TECNICO MARIA CONCEPCION LOPERENA</b>					
<b>AÑO</b>	<b>D</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>A</b>	<b>ISCE</b>	<b>MMA</b>	<b>D</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>A</b>	<b>ISCE</b>	<b>MMA</b>
2018						4,89						5,67
2017	2,68	1,62	0,94	0,75	5,98	4,65	2,80	2,50	0,94	0,75	6,98	5,44
2016	2,62	1,64	0,97	0,74	5,96	4,47	3,19	3,14	0,99	0,74	8,06	5,27
2015	2,61	9,19	0,86	0,75	4,41		2,67	0,88	0,93	0,73	5,22	
<b>BASICA SECUNDARIA</b>												
<b>COLEGIO MUNICIPAL DE BACHILLERATO</b>							<b>I. TECNICO MARIA CONCEPCION LOPERENA</b>					
<b>AÑO</b>	<b>D</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>A</b>	<b>ISCE</b>	<b>MMA</b>	<b>D</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>A</b>	<b>ISCE</b>	<b>MMA</b>
2018						5,08						4,59
2017	2,77	3,06	0,94	0,74	7,51	4,76	2,42	0	0,90	0,75	4,07	4,26
2016	2,31	0	0,85	0,75	3,90	4,52	2,42	1,17	0,97	0,74	5,30	4,03
2015	2,37	0,51	0,82	0,75	4,44		2,34	0,02	0,84	0,75	3,95	
<b>MEDIA TECNICA</b>												
<b>COLEGIO MUNICIPAL DE BACHILLERATO</b>							<b>COL. TECNICO MARIA CONCEPCION LOPERENA</b>					
<b>AÑO</b>	<b>D</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>A</b>	<b>ISCE</b>	<b>MMA</b>	<b>D</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>A</b>	<b>ISCE</b>	<b>MMA</b>
2018						4,32						4,87
2017	2,56	3,00	1,88		7,44	4,15	2,45	0,04	1,79		4,27	4,70
2016	2,40	3,05	1,74		7,19	4,03	2,35	1,04	1,91		5,30	4,57
2015	2,33	0,00	1,65		3,98		2,32	0,39	1,82		4,53	

## Anexo 2. Porcentaje de estudiantes por niveles y grados en las pruebas saber de las instituciones

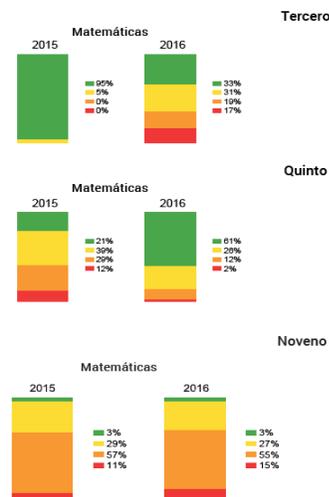
**COL MPAL DE BACHILLERATO**  
 Código DANE: 154001000931  
 ETC: Cúcuta

**INST TEC MARIA CONCEPCION LOPERENA**  
 Código DANE: 154001011044  
 ETC: Cúcuta

PORCENTAJE DE ESTUDIANTES EN NIVEL INSUFICIENTE  
 La escala de valores es de 0 a 100%

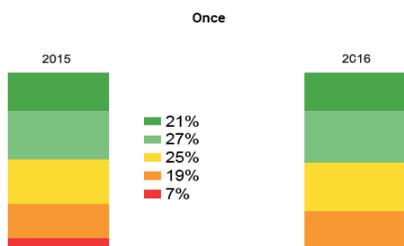


PORCENTAJE DE ESTUDIANTES EN NIVEL INSUFICIENTE  
 La escala de valores es de 0 a 100%

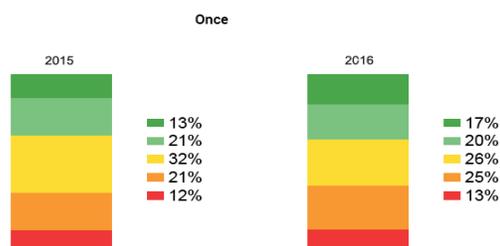


Nivel avanzado ■ Nivel satisfactorio ■ Nivel mínimo ■ Nivel insuficiente ■

PORCENTAJE DE ESTUDIANTES EN NIVEL INSUFICIENTE  
 La escala de valores es de 0 a 100%



PORCENTAJE DE ESTUDIANTES EN NIVEL INSUFICIENTE  
 La escala de valores es de 0 a 100%



Quintil 5 ■ Quintil 4 ■ Quintil 3 ■ Quintil 2 ■ Quintil 1 ■

### Anexo 3. Prueba diagnóstica competencia comunicativa

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL  
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO MUNICIPAL MARÍA CONCEPCIÓN LOPEZENA  
 DECRETO N.º 0089 DEL 2 DE DICIEMBRE DE 2016  
 RECONOCIMIENTO OFICIAL NÚMERO 2466 DEL 9 DE NOVIEMBRE DE 2017  
 DANE 184902000981  
**PRUEBA DIAGNÓSTICA 8ª - COMPETENCIA COMUNICATIVA**

1. Andrés hace el siguiente recorrido cuando va desde su casa hasta la casa de su tía.

¿Cuántos minutos demora en ir desde su casa a la casa de su tía?

A.3 B.5 C.10 D.15

2. Los niños de quinto grado votaron por Rosa, Julia, Sara, Francisco, Diego y Ana, que querían ser elegidos como representantes del curso. Los resultados de la votación fueron:  
 Rosa, Julio, Sara, Sara, Rosa, Francisco, Julio, Diego, Sara Sara, Julio, Francisco, Rosa, Sara, Sara, Sara, Julio, Rosa.

¿En cuál de las siguientes tablas aparecen los resultados de la votación?

A. 

Estudiantes	Número de votos
Rosa	
Julio	
Sara	
Francisco	
Diego	
Ana	

B. 

Estudiantes	Número de votos
Rosa	
Julio	
Sara	
Francisco	
Diego	
Ana	

C. 

Estudiantes	Número de votos
Rosa	
Julio	
Sara	
Francisco	
Diego	
Ana	

D. 

Estudiantes	Número de votos
Rosa	
Julio	
Sara	
Francisco	
Diego	
Ana	

3. En el calendario de abril se marcaron algunos números para realizar una actividad en clase de matemáticas.

ABRIL						
L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

Los números marcados en el calendario son todos múltiplos de:

A.4 B.8 C.12 D.28

4. En una encuesta se le preguntó a un grupo de niños por su película favorita. En la gráfica se muestran los resultados.

¿Cuántos niños, en total, respondieron la pregunta?

A. 80 B. 20 C. 5 D. 4

5. Lucy observa el siguiente paquete de arroz en el supermercado La Información "1 kilogramo de arroz" indica

A. Volumen  
 B. Superficie  
 C. Duración  
 D. Masa

6. Los estudiantes de un curso votaron para escoger el día de la semana en que realizarán una salida pedagógica. Estos fueron los resultados:

Viernes, viernes, viernes, miércoles, martes, miércoles, lunes, martes, martes, lunes, jueves, miércoles, viernes, miércoles, martes, miércoles, viernes, miércoles, martes, miércoles.

¿En cuál tabla se presentan correctamente los resultados de la votación?

A. 

Día	Número de votos
Lunes	2
Martes	3
Miércoles	2
Jueves	1
Viernes	6

B. 

Día	Número de votos
Lunes	2
Martes	3
Miércoles	2
Jueves	1
Viernes	6

C. 

Día	Número de votos
Lunes	2
Martes	3
Miércoles	2
Jueves	1
Viernes	5

D. 

Día	Número de votos
Lunes	3
Martes	2
Miércoles	3
Jueves	4
Viernes	5

7. En clase inglés, el profesor organizó un concurso. Cada vez que un estudiante traducía una palabra correctamente, el profesor dibujaba una rayita frente al nombre del estudiante.

¿Quiénes fueron los tres estudiantes que tradujeron, correctamente, más palabras?

En la tabla se presentan los resultados:

Nombre del estudiante	Número de palabras traducidas correctamente
Carlos	
Juana	
José	
Constanza	
Maricela	
Victor	
Amanda	
Reinaldo	
Viviana	
Daniela	

A. Carlos, Juana y José  
 B. Daniela, Maricela y Juana  
 C. Constanza, Victor y Amanda  
 D. Lucía quiere saber cuánta pesa. ¿Cuál de los siguientes instrumentos debe utilizar?

A. B.   
 C. D.

9. Los tickets utilizados en un terminal de transporte tienen códigos de dos cifras. La primera cifra indica la zona de destino y

Zona de destino	Medio de transporte
1	3
2	2
3	1

la segunda, el medio de transporte.

En la tabla 1 se indican las cifras que corresponden a cada zona y en la 2, las cifras que corresponden a cada medio de transporte.

Una persona compra un ticket para viajar al sur en bus. ¿Con cuál de los siguientes códigos está marcado su ticket?

A. 11 B. 13 C. 21 D. 23

Zona de destino	Primera cifra
Centro	1
Sur	2
Norte	3

Tabla 1

Medio de transporte	Segunda cifra
Bus	1
Bicicleta	2
Colectivo	3

Tabla 2

10. Para medir la longitud de un palito de madera, Johana coloca la regla como se muestra en la figura.

¿Cuál es la longitud del palito?

A. 10 cm.  
 B. 9 cm.  
 C. 6 cm.  
 D. 3 cm.

### Anexo 4. Dificultades de la prueba de la competencia comunicativa

COMPETENCIA	COMUNICATIVA		COMUNICATIVA										TOTAL RESP. IN CORR.
			N	A	N	N	E	A	A	E	N	E	
COMPONENTE			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
PREG.													
EST.													
E1	M	12			X	X		X			X	X	5
E2	F	12									X	X	2
E3	M	12										X	1
E4	M	13										X	1
E5	F	13				X	X				X	X	4
E6	M	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E7	M	11					X					X	2
E8	F	13									X	X	2
E9	F	12					X					X	2
E10	F	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E11	M	11						X				X	2
E12	M	13		X		X		X		X		X	5
E13	F	12	X				X					X	3
E14	F	12									X	X	2
E15	F	11										X	1
E16	M	11	X			X						X	3
E17	M	12	X			X	X					X	4
E18	F	14					X				X	X	3
E19	M	12				X						X	2
E20	F	11					X				X		2
E21	F	12				X	X				X	X	4
E22	F	11					X				X		2
E23	F	13									X	X	2
E24	M	11					X					X	2
E25	M	11										X	1
E26	F	12			X							X	2
E27	F	12					X					X	2
E28	M	12					X					X	2
E29	M	14	X			X					X	X	4
E30	M	11				X						X	2
E31	F	11				X		X				X	3
E32	F	11					X					X	2
E33	M	11	X				X					X	3
			5	1	2	10	14	4	0	1	11	29	77

### Anexo 5. Prueba competencia razonamiento



**SECRETARÍA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL**  
**INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO MUNICIPAL MARÍA CONCEPCIÓN LOPERENA**  
 DECRETO No. 0948 DEL 2 DE DICIEMBRE DE 2016  
 RECONOCIMIENTO OFICIAL NÚMERO 2446 DEL 8 DE NOVIEMBRE DE 2017  
 DANE 134001000931



**PRUEBA DIAGNÓSTICA 8ª - COMPETENCIA: RAZONAMIENTO**

**1. Federico dibujó la siguiente figura:**  **Figura**

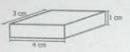
Luego la vio ampliada con una lupa.  
 ¿Cuál de las siguientes figuras vio Federico?

  
A

  
B

  
C

  
D

**2. Leonardo quiere construir un sólido como el de la figura, utilizando dos bloques:**  **Figura**

¿Con cuál de los siguientes pares de bloques, Leonardo puede construir el sólido?

  
A

  
B

  
C

  
D

**3. Oswaldo utilizó dos bloques distintos para armar un sólido como el de la figura.**  **Figura**

¿Cuál de los siguientes grupos de bloques Oswaldo armó el sólido?

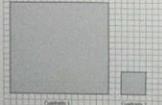
  
A

  
B

  
C

  
D

**4. Observa los siguientes cuadrados. El lado del cuadrado 2 mide la cuarta parte del lado del cuadrado 1.**

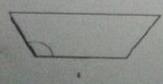
  
Cuadrado 1

  
Cuadrado 2

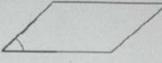
El área del cuadrado 2 es:

A. Igual al área del cuadrado 1.      B. el doble del área del cuadrado 1  
 C.  $\frac{1}{4}$  del área del cuadrado 1      D.  $\frac{1}{16}$  del área del cuadrado 1

**5. A continuación, se presentan 4 figuras geométricas y en cada una de ellas, se señala un ángulo:**

  
1

  
2

**3**  **4** 

¿En cuál de las siguientes figuras se señala un ángulo obtuso?

A. En la 1      B. En la 2      C. En la 3      D. En la 4

**6. En una fábrica de lápices, 10 lápices se empacan en una bolsa, 10 bolsas de empacan en una caja pequeña y 10 cajas pequeñas se empacan en una caja grande.**

¿En la fábrica, cómo pueden empacar 4.372 lápices?

A. 2 cajas grandes, 3 cajas pequeñas, 7 bolsas y 4 lápices sueltos.  
 B. 4 cajas pequeñas, 7 cajas grandes, 3 bolsas y 2 lápices sueltos.  
 C. 2 cajas pequeñas, 2 cajas grandes, 3 bolsas y 4 lápices sueltos.  
 D. 4 cajas grandes, 3 cajas pequeñas, 7 bolsas y 2 lápices sueltos.

**7. Las esferas colocadas en los platos de la balanza son de diferente material y están marcadas con su masa en gramos.** 

La balanza está inclinada porque  $5 + 4$  es mayor que  $3 + 2$ . ¿Cuál esfera se debe colocar en el plato de la izquierda para equilibrar la balanza?

A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

**8. Un número de tres cifras es divisible por 11, si al sumar la primera cifra con la tercera y a este resultado restarle la 2, se obtiene 0 ó un múltiplo de 11.**

Por ejemplo, el número 869 es divisible por 11

Segunda cifra	8	6	9
Tercera cifra			
Primera cifra	8	6	9

porque  $(9 + 8) - 6 = 11$ .

De acuerdo con lo anterior, el número 726 es divisible por 11 porque

A.  $(6 + 2) - 7 = 1$       B.  $(6 + 7) - 2 = 11$       C.  $(6 \times 2) + 2 = 44$       D.  $(6 \times 2) + 7 = 19$

**9. La gráfica muestra el número de panes rollo y la tabla, el número de panes blanditos vendidos en una panadería entre el lunes y el viernes de la semana pasada.**

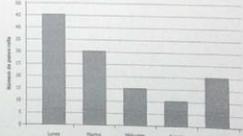


Gráfico	
Día	Número de panes blanditos
Lunes	20
Martes	30
Miércoles	15
Jueves	11
Viernes	13

**Tabla**

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A. El Lunes se vendieron menos panes rollo que cualquier otro día.  
 B. El Jueves se vendieron más panes blanditos que cualquier otro día.  
 C. El Viernes se vendieron 13 panes rollo y 20 panes blanditos.  
 D. El Martes se vendieron 30 panes rollo y 32 panes blanditos.

**10. Un dado con forma de cubo tiene dos caras azules, dos verdes, una amarilla y una roja.**

La probabilidad de que al lanzar el dado, éste muestre una cara azul es

A. Igual a la probabilidad de que muestre una cara roja.  
 B. la mitad de la probabilidad de que muestre una cara verde.  
 C. la mitad de la probabilidad de que muestre una cara roja.  
 D. Igual a la probabilidad de que muestre una cara verde.

**Anexo 6. Dificultades en la prueba de la competencia razonamiento**

COMPETENCIA			RAZONAMIENTO										TOTAL RESP. INCORR
			E	E	E	E	E	N	N	N	A	A	
COMPONENTE			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
PREG. EST.													
E1	M	12			X	X		X		X		X	5
E2	F	12				X	X	X					3
E3	M	12	X	X		X	X		X			X	6
E4	M	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E5	F	13						X			X	X	3
E6	M	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E7	M	11				X	X	X	X				4
E8	F	13				X	X	X		X			4
E9	F	12										X	1
E10	F	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E11	M	11	X			X							2
E12	M	13	X	X			X	X	X	X	X	X	8
E13	F	12								X	X	X	3
E14	F	12			X	X		X			X		4
E15	F	11					X	X			X		3
E16	M	11				X	X			X	X	X	5
E17	M	12		X		X	X	X	X				5
E18	F	14		X		X	X	X	X				5
E19	M	12	X				X		X				3
E20	F	11				X	X						2
E21	F	12		X		X	X	X	X	X	X	X	8
E22	F	11				X	X	X		X		X	5
E23	F	13				X					X	X	3
E24	M	11	X	X	X			X			X	X	6
E25	M	11				X	X						2
E26	F	12				X	X	X					3
E27	F	12				X	X	X			X		4
E28	M	12		X			X	X			X		4
E29	M	14	X		X	X	X	X		X		X	7
E30	M	11	X			X	X	X	X			X	6
E31	F	11		X		X	X		X	X	X		6
E32	F	11	X			X		X			X		4
E33	M	11				X	X	X	X		X	X	6
			8	8	4	22	21	20	10	9	14	14	130

## Anexo 7. Prueba competencia resolución

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO MUNICIPAL MARIA CONCEPCION LOPERENA  
DECRETO No. 088 DEL 2 DE ENERO DE 2016  
RECONOCIMIENTO OFICIAL NÚMERO 2486 DEL 8 DE NOV DE 2017  
DANE 154001000933  
PRUEBA DIAGNÓSTICA 6° - COMPETENCIA: RESOLUCIÓN

**1. En una cafetería se venden alimentos y bebidas. Este aviso muestra los precios de algunos productos.**

Jugo	\$1.000
Arepa	\$600
Gaseosa	\$700
Torta	\$1.300

Al comprar dos de los productos que aparecen en el aviso, Fabián pagó con un billete de \$2.000 y le sobraron \$100. ¿Qué productos compró?

A. Jugo y arepa.                      B. Jugo y torta.  
C. Gaseosa y arepa                  D. Gaseosa y torta.

**2. En la siguiente tabla se presenta información incompleta de los precios de paquetes de dulces en una tienda.**

Si cada paquete de dulces vale lo mismo, ¿Cuánto valen tres paquetes?

Número de paquetes	Precio
1	...
2	\$1.800
3	...
4	...
5	\$4.500

Tabla

**3. En un restaurante, a la hora del almuerzo sirven la gaseosa en vaso de la misma forma y tamaño. En la tabla se presenta la cantidad de gaseosa que sirven en 2,3 y 4 vasos llenos:**

¿Qué cantidad de gaseosa se necesita para llenar 7 vasos?

Número de vasos	Cantidad de gaseosa en centímetros cúbicos (cm <sup>3</sup> )
2	500
3	750
4	1.000
...	...

Tabla

**4. A un evento deportivo asistieron niños y adultos. Por cada 7 niños había 2 adultos. Si en total había 28 niños, ¿cuántos adultos asistieron?**

A. 19    B. 9    C. 8    D. 7

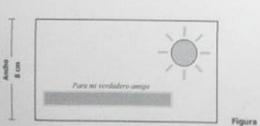
**5. En un grupo de danza, 40 personas van a participar en un baile típico. Se necesita que por cada hombre haya 2 mujeres.**



¿Cuántos hombres se necesitan en total?

A. 5    B. 6    C. 17    D. 24

**6. Yolima decoró una tarjeta de forma rectangular como la que se muestra en la figura, pegándole un hilo dorado por los cuatro bordes.**



Yolima utilizó en total 40cm de hilo dorado. ¿Cuántos centímetros de hilo dorado utilizó solamente para decorar los dos bordes largos de la tarjeta?

A. 8cm    B. 10cm    C. 24 cm    D. 48 cm

**7. La tabla representa el número de estudiantes (niños y niñas), por grado, que recibieron medallas en una izada de bandera.**

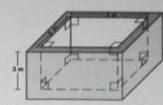
Grado	Número de niñas que recibieron medallas	Número de niños que recibieron medallas
Primero	2	3
Segundo	5	3
Tercero	3	2
Cuarto	1	2
Quinto	4	5

Tabla

¿Cuál fue el grado en el más estudiante recibieron medallas?

A. Primero    B. Segundo    C. Tercero    D. Quinto

**8. Adela quiere saber cuánta agua cabe en una piscina que tiene la forma y las medidas indicadas en la figura.**

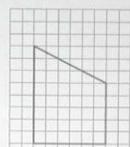


Los ángulos señalados en la figura son rectos.

¿Cuál o cuáles de los siguientes procedimientos le sirven a Adela para calcular cuánta agua, en m<sup>3</sup>, cabe en la piscina?

A. I solamente                      B. II solamente  
C. I y III solamente                  D. II y III solamente

**9. Observa la figura dibujada sobre la cuadrícula.**



Cada  $\square$  mide 1 cm<sup>2</sup>.

¿Cuál es el área de la figura?

A. 19cm<sup>2</sup>    B. 30cm<sup>2</sup>    C. 39cm<sup>2</sup>    D. 48cm<sup>2</sup>

**10. Lucía quiere armar la figura usando fichas. La figura se divide en 6 regiones.**

¿Con cuál de los siguientes pares de fichas Lucía puede armar la región 1?



**11. Edisson recibió regalos en su fiesta de cumpleaños. La gráfica muestra la clase y el número de regalos que recibió.**

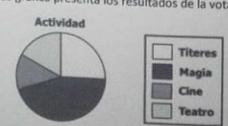


¿Cuántos regalos en total recibió Edisson en su fiesta de cumpleaños?

A. 4    B. 12    C. 23    D. 30

**12. Los estudiantes de un curso eligieron la actividad a la que quieren asistir entre títeres, magia, cine y teatro. Todos asistirán a la actividad que tuvo mayor votación.**

La gráfica presenta los resultados de la votación.



¿A cuál de las actividades asistirán todos los estudiantes?

A. Títeres    B. Magia    C. Cine    D. Teatro

### Anexo 8. Dificultades de la prueba de la competencia resolución

Competencia	Resolución														Total resp. Incorr.
	Componente		N	N	N	N	N	E	A	E	E	E	A	A	
Preg. Est.			X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
E1	M	12		X	X	X				X	X	X	X		7
E2	F	12						X			X	X			3
E3	M	12		X		X	X								3
E4	M	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E5	F				X					X					2
E6	M	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E7	M	11						X			X		X	X	4
E8	F	13		X	X	X	X	X			X				6
E9	F	12			X		X				X		X		4
E10	F	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E11	M	11													0
E12	M	13	X	X		X	X	X		X			X		7
E13	F	12		X	X	X		X	X	X	X				7
E14	F	12			X			X			X	X			4
E15	F	11		X	X			X			X				4
E16	M	11				X	X	X		X	X		X		6
E17	M	12		X	X		X	X		X	X	X			7
E18	F	14		X	X	X	X	X		X	X		X		8
E19	M	12					X								1
E20	F	11			X						X		X	X	4
E21	F	12			X	X	X	X		X	X	X			7
E22	F	11					X	X							2
E23	F	13			X			X		X	X	X			5
E24	M	11					X			X		X			3
E25	M	11						X			X				2
E26	F	12		X		X	X			X	X		X		6
E27	F	12					X	X			X	X			4
E28	M	12					X			X	X				3
E29	M	14		X			X	X		X					4
E30	M	11					X		X	X		X			4
E31	F	11	X	X		X	X				X	X	X	X	8
E32	F	11								X					1
E33	M	11				X	X	X	X		X	X	X		7
			2	11	12	11	18	17	3	15	20	11	10	3	133

## Anexo 9. Resumen de dificultades en las pruebas diagnósticas por competencias y componentes

COMPETENCIA	COMUNICATIVA										TOTAL RESP. INCORR.
	COMPONENTE	N	A	N	N	E	A	E	N	E	
PREG. EST.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
E1			X	X	X				X	X	5
E2									X	X	2
E3										X	1
E4										X	1
E5				X	X				X	X	4
E6		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E7				X						X	2
E8									X	X	2
E9				X						X	2
E10		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E11					X					X	2
E12		X	X	X	X	X	X	X	X	X	5
E13	X			X						X	3
E14									X	X	2
E15										X	1
E16	X			X						X	3
E17	X		X	X						X	4
E18				X					X	X	3
E19			X							X	2
E20				X					X		2
E21			X	X					X	X	4
E22				X						X	2
E23									X	X	2
E24				X						X	2
E25										X	1
E26		X								X	2
E27				X						X	2
E28				X						X	2
E29	X		X						X	X	4
E30			X							X	2
E31			X	X						X	3
E32				X						X	2
E33	X			X						X	3
	5	1	2	10	14	4	0	1	11	29	77

COMPONENTES N: Numérico Variacional

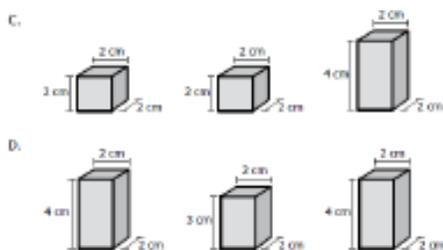
COMPETENCIA	RAZONAMIENTO										TOTAL RESP. INCORR.
	COMPONENTE	E	E	E	E	N	N	N	A	A	
PREG. EST.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
E1			X	X	X	X		X		X	5
E2					X	X	X				3
E3	X	X		X	X		X			X	6
E4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E5					X			X	X		3
E6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E7				X	X	X	X				4
E8				X	X	X		X			4
E9										X	1
E10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E11	X			X							2
E12	X	X		X	X	X	X	X	X	X	8
E13								X	X	X	3
E14			X	X	X			X			4
E15					X	X		X			3
E16				X	X	X	X	X	X	X	5
E17		X		X	X	X	X				5
E18		X		X	X	X	X				5
E19	X			X		X					3
E20				X	X						2
E21		X		X	X	X	X	X	X	X	8
E22				X	X	X		X		X	5
E23					X				X	X	3
E24	X	X	X			X			X	X	6
E25				X	X						2
E26				X	X	X					3
E27				X	X	X		X			4
E28		X			X	X		X			4
E29	X		X	X	X	X		X		X	7
E30	X		X	X	X	X	X		X		6
E31		X		X	X	X	X	X	X		6
E32	X			X	X			X			4
E33				X	X	X	X	X	X	X	6
	8	8	4	22	21	20	10	9	14	14	130

A: Aleatorio

COMPETENCIA	RESOLUCION												TOTAL RESP. INCORR.
	COMPONENTE	N	N	N	N	E	A	E	E	A	A		
PREG. EST.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
E1		X	X	X				X	X	X	X		7
E2						X				X	X		3
E3		X		X	X								3
E4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E5			X					X					2
E6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E7						X			X		X	X	4
E8		X	X	X	X	X			X				6
E9			X	X					X		X		4
E10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E11													0
E12	X	X		X	X	X	X	X			X		7
E13		X	X	X		X	X	X	X				7
E14			X			X			X	X			4
E15		X	X			X			X				4
E16				X	X	X	X	X	X	X	X		6
E17		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		7
E18		X	X	X	X	X	X		X	X	X		8
E19				X									1
E20			X							X	X	X	4
E21			X	X	X	X	X	X	X	X	X		7
E22					X	X							2
E23			X			X		X	X	X			5
E24				X				X		X			3
E25						X			X				2
E26		X		X	X			X	X	X	X		6
E27					X	X			X	X			4
E28					X			X	X				3
E29		X		X	X	X		X					4
E30				X		X	X		X		X		4
E31	X	X		X	X				X	X	X	X	8
E32						X			X				1
E33				X	X	X	X	X	X	X	X	X	7
	2	11	12	11	18	17	3	15	20	11	10	3	133

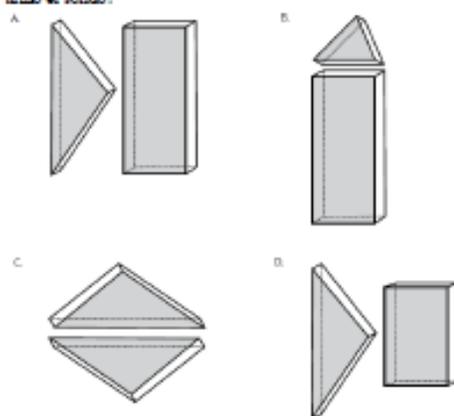
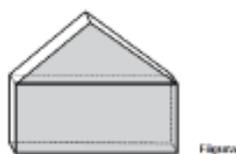
E: Espacial Métrico

### Anexo 10. Prueba diagnóstica de geometría

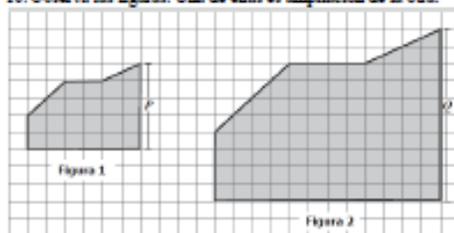


9. Osvaldo utilizó dos bloques distintos para armar un sólido como el de la figura

Con cuál de los siguientes grupos de bloques Osvaldo armó el sólido?



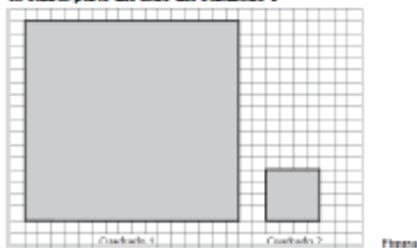
10. Observa las figuras. Una de ellas es ampliación de la otra:



La medida del lado P de la figura 1 es:

- A. La mitad de la medida del lado Q de la figura 2
- B. La tercera parte de la medida del lado Q de la figura 2
- C. La cuarta parte de la medida del lado Q de la figura 2
- D. La quinta parte de la medida del lado Q de la figura 2

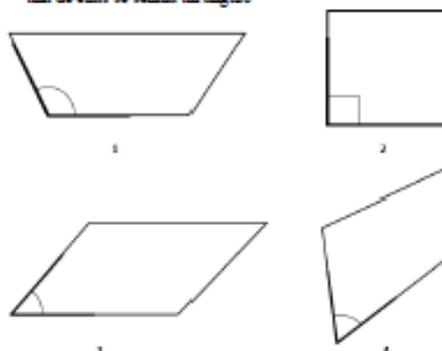
11. Observa los siguientes cuadrados. El lado del cuadrado 2 mide la cuarta parte del lado del cuadrado 1



El área del cuadrado 2 es:

- A. Igual al área del cuadrado 1
- B. El doble del área del cuadrado 1
- C.  $\frac{1}{8}$  del área del cuadrado 1
- D.  $\frac{1}{16}$  del área del cuadrado 1

12. A continuación, se presentan 4 figuras geométricas y en cada una de ellas se señala un ángulo

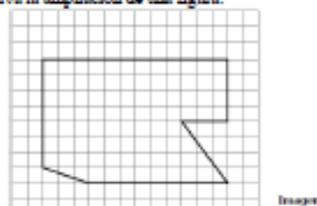


En cuál de las figuras, se señala un ángulo obtuso?

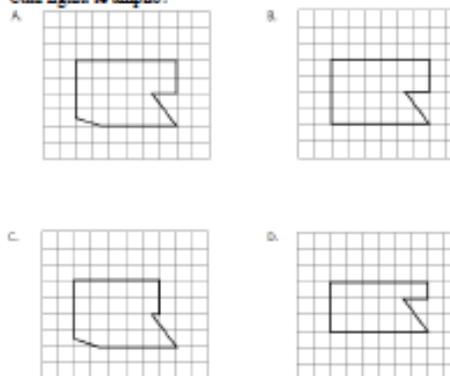
- A. En la 1
- B. En la 2
- C. En la 3
- D. En la 4

**RECUERDA:**  
UN ÁNGULO OBTUSO MIDE MÁS DE 90°

13. Observa la ampliación de una figura:



Cuál figura se amplió?



14. Un polígono regular tiene todos sus lados de la misma medida. Cual de los siguientes polígonos, es regular?





Anexo 11. Tabla resultados prueba diagnostico geometría

Nombres	COMUNICACIÓN					RAZONAMIENTO									RESOLUCION					TOTAL
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
E1			X	X		X	X			X		X		X		X				8
E2			X								X							X	X	4
E3			X				X					X			X				X	5
E4			X	X			X	X		X	X	X			X	X	X		X	11
E5			X	X							X		X	X		X		X	X	8
E6			X	X		X		X		X	X				X	X		X	X	10
E7	X		X		X		X								X	X			X	7
E8	X		X	X	X		X				X	X		X	X	X	X	X	X	13
E9			X							X	X	X		X	X				X	7
E10			X	X			X			X	X			X	X	X		X		9
E11	X		X		X	X			X				X					X		7
E12			X	X	X	X	X			X		X				X	X	X		10
E13	X		X												X	X		X	X	6
E14			X	X						X	X							X	X	6
E15			X											X					X	3
E16			X	X		X	X	X		X		X		X	X			X	X	11
E17	X		X	X						X	X	X		X		X				8
E18			X	X				X						X		X				5
E19											X	X								2
E20	X		X	X	X		X				X			X	X	X		X	X	11
E21			X		X			X			X	X		X	X	X	X	X	X	11
E22	X			X											X	X		X		5
E23	X			X								X		X	X	X	X	X	X	9
E24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E25	X			X	X		X				X	X		X	X					8
E26			X	X				X		X									X	5
E27	X														X	X			X	4
E28	X		X													X		X	X	5
E29	X		X	X	X	X				X	X	X		X	X		X			11
E30	X		X		X						X	X				X	X	X		8
E31	X		X	X							X	X		X	X	X	X	X		10
E32				X	X						X					X	X		X	6
E33			X	X		X	X		X	X	X			X	X	X	X		X	12
	14	0	26	20	10	7	11	6	2	12	18	15	2	16	18	21	10	17	20	245

## Anexo 12. Folleto instructivo festival de cometas

**Metodología**

Se pretende a través del aprendizaje basado en proyectos, que el estudiante realice la transversalidad con todas las áreas del conocimiento, escogiendo una bandera de un equipo de fútbol que haya participado en el Campeonato mundial Brasil 2014 para



la decoración de su cometa y hacer los procesos de medición y cálculo matemáticos, y determinar las características necesarias para su selección, como la cometa más grande que vuela más alto.



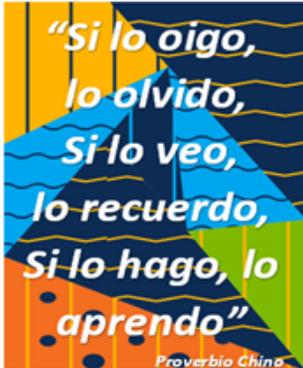
**Recursos**

- Instrucciones del proyecto : [www.colmunicipio.edu.co](http://www.colmunicipio.edu.co)
- Cuento: "El tren de los cielos" del Libro: Hasta el Viento olvidará mis pasos. Mg. Serafín Bautista Villamizar.
- Vídeo de orientación sobre la construcción de la cometa en la dirección: [www.youtube.com/watch?v=90V\\_3Nuc9Eo](https://www.youtube.com/watch?v=90V_3Nuc9Eo)

**Evaluación**

N°	Aspectos	Valoración	Criterios
1	Modelo de la cometa en papel: Forma	10 %	Puntualidad Presentación Definición de la forma: Lados, ángulos internos, diagonales Exactitud de las medidas Uso de instrumentos de medición
2	Cálculo del tamaño de la cometa: Área	20 %	Perímetro de la cometa Área
3	Vídeo: Construcción de la cometa	30 %	Puntualidad Proceso metódico Presentación
4	Participación en el festival de cometas	30 %	Exponer y elevar la Cometa
5	Uso de Tecnología	10 %	Uso de aplicación informática para comprobar el cálculo de magnitudes de la cometa

**Proyecto:**  
**Festival de Cometas Mundialista "Pigargo"**



**Olga Cecilia Bautista M.**  
**Docente Área de Matemáticas**  
**COLEGIO MUNICIPAL**  
**MARIA CONCEPCIÓN LOPERENA**  
DANE 154001000931 - Y NIT 890.501.394-6  
[Colmunicipiomariaconcepcionlop@gmail.com](mailto:Colmunicipiomariaconcepcionlop@gmail.com)  
Cúcuta, Agosto de 2017

**Quiénes somos?**

El Colegio Municipal María Concepción Loperena es una institución de carácter oficial, cuya sede principal está ubicada en la Av. 11E # 2-112 del Barrio Quinta Oriental de la Ciudad de Cúcuta y fue creada mediante decreto de fusión: # 0089 del 02 de diciembre de 2016 con el propósito de responder a las necesidades educativas de la comunidad y cuya planta física ofrece oportunidades de aprendizaje en ambientes naturales.



Adicionalmente, cuenta con tres (3) sedes:  
Sede 1: María Ofelia Villamizar Bultrago, está ubicada en Av. 16KN-13 A - 81 Barrio Esperanza Martínez  
Sede 2: Domingo Savio, ubicada en Cl. 16 HN- 15-00 Barrio Brisas del Aeropuerto.  
Sede 3: Colegio Básico **Guimarzal**, No. 25, ubicada en la Av. 12E # 9BN-49 del Barrio **Guimarzal**

**Objetivo General**

Construir una cometa lo más grande posible que vuela más alto.

**Objetivos específicos:**

- Identificar las características según la forma y el tamaño de las cometas.
- Utilizar correctamente los instrumentos de medición en la elaboración del modelo de la cometa
- Utilizar la tecnología en la elaboración de un vídeo sobre la construcción de la cometa.
- Relacionar el proyecto con las demás áreas del conocimiento
- Exponer y participar en el Festival de Cometas

**Justificación**

La geometría, ha demostrado ser una herramienta de interpretación en un mundo geométrico por excelencia y el desarrollo de los pueblos y su enseñanza presenta cierto nivel de dificultad que conlleva a la reflexión continua para mejorar su



comprensión a través de una didáctica acorde a los intereses de los estudiantes y las expectativas de una sociedad moderna desde una visión científica, cultural y tecnológica comprometida con el ambiente y la convivencia pacífica con sus semejantes.

**Presentación**

El festival de cometas "Pigargo" (Pigargo de Steller) es una estrategia pedagógica que pretende el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes de Sexto grado, aprovechando los espacios físicos de la institución, la época del año y nuestra posición geográfica, mediante la construcción de una cometa que hace referencia al águila marina de mayor tamaño más pesada del planeta en la actualidad, cuya envergadura alcanza los 2 metros y medio de punta a punta, que habitan durante la estación primaveral y veraniega en Rusia (especialmente en la península de Kamchatka y en parte de la costa cercana al mar de Ojotsk, los lugares donde crían), país donde se realizará el Mundial de Fútbol en el año 2018.

