

**APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS COMO ESTRATEGIA
PEDAGÓGICA PARA MEJORAR EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO EN LOS
ESTUDIANTES DE SEXTO C DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO
MUNICIPAL MARÍA CONCEPCIÓN LOPERENA DEL MUNICIPIO DE SAN
JOSÉ DE CÚCUTA**

Resumen

La presente investigación busca fortalecer el razonamiento geométrico en un grupo de estudiantes de Sexto grado de la Institución Educativa Colegio Municipal María Concepción Loperena de la ciudad de Cúcuta en el año 2017, a través de la implementación del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), utilizando el modelo de Van Hiele.

En este estudio cualitativo tipo investigación/acción, participaron un total de 33 estudiantes a través del Festival Mundialista de cometas Pigargo, una estrategia pedagógica cuyo objetivo es la construcción de la cometa más grande que vuele lo más alto, bajo el enfoque constructivista de Piaget y el modelo cognitivo social de Vigotsky.

Además, utilizando el modelo teórico de Duval, se desarrollaron los procesos de visualización, razonamiento y construcción, de manera independiente a través del desarrollo de diferentes actividades geométricas con el objeto de lograr la coordinación de las diversas aprehensiones: perceptiva, discursiva y operativa.

La anterior investigación se realizó como parte del programa Becas para Excelencia Docente UNAB - MEN

Palabras claves: Razonamiento geométrico, Aprendizaje basado en Proyectos, unidades figurales, poliedros, transversalidad.

Abstract

The present research seeks to strengthen the geometric reasoning in a group of Sixth grade students of the Municipal School María Concepción Loperena Educational Institution of the city of Cúcuta in 2017, through the implementation of Project Based Learning (PBL), using the Van Hiele model.

In this qualitative research / action study, a total of 33 students participated through the Pigargo World Comet Festival, a pedagogical strategy whose objective is the construction of the largest kite that flies the highest, under Piaget's constructivist approach. the social cognitive model of Vygotsky.

In addition, using the theoretical model of Duval, visualization, reasoning and construction processes were developed independently through the development of different geometric activities in order to achieve the coordination of the different apprehensions: perceptive, discursive and operative.

The previous research was carried out as part of the Scholarships for Teaching Excellence program UNAB – MEN

Keywords: Geometric reasoning, Project-based learning, figural units, polyhedra, transversality.

Introducción

Según Freudental, la Geometría es “agarrar el espacio... ese espacio donde el niño vive, respira y se mueve. El espacio que el niño debe aprender a mover, explorar, conquistar para vivir, respirar y moverse mejor en él” (NTCM, 1989) y una de las formas que permite la formación intelectual de los estudiantes mediante temas accesibles que posibilitan el desarrollo de capacidades: desarrollo de la capacidad espacial, la intuición y del gusto por la belleza, según Miguel de Guzmán.

Es así como se desarrolla la presente investigación, a través de la estrategia pedagógica Festival de cometas “Pigargo” (águila de gran tamaño que vive la mayor parte del tiempo en Rusia) utilizando el Aprendizaje Basado en Proyectos como método para que el estudiante identifique los atributos mensurables de la cometa que él mismo construye, como representante de un país participante del mundial de fútbol.

Surgió como respuesta a la inquietud del investigador por encontrar soluciones creativas acorde a los intereses de los estudiantes para lograr el fortalecimiento del razonamiento geométrico, para lo cual, se utilizó el modelo instruccional de Van Hiele, con 33 de 136 estudiantes de 6 grado de la Institución Educativa Colegio Municipal María Concepción Loperena.

Adicionalmente, se tuvo en cuenta el modelo pedagógico cognitivo de Vigotsky, propuesto por la institución, que considera al maestro un facilitador del desarrollo de estructuras mentales en el estudiante para que pueda construir aprendizajes más complejos, y la teoría del desarrollo del pensamiento espacial de Piaget, en relación a la evolución de los estudiantes en tareas cognitivas de formación del conocimiento espacial.

De acuerdo al diagnóstico, se observó que los estudiantes consideraban que podían descubrir el tamaño de las cometas utilizando solamente un instrumento de medición, desconociendo al mismo tiempo la forma de las figuras y las unidades figurales que la componen, motivo por el cual, se hizo necesario el apoyo de la representación gráfica de la cometa, que permitiera la comparación de sus atributos en las variaciones visuales después de la participación del festival.

De igual manera, el proceso de comparación de las cometas, permitió identificar la dificultad en el uso de número decimales y la verificación de procesos de medición, cálculos de área y perímetro y el desarrollo de temas emergentes como congruencia de polígonos y

polígonos isoperimétricos con el apoyo del proceso de visualización y la proporcionalidad como estrategia para calcular el tamaño de una cometa a través de una foto.

La intervención pedagógica se desarrolló en cuatro fases: la primera corresponde al diagnóstico para identificar los presaberes de los estudiantes en el componente espacial métrico, seguido de la implementación en donde se planeó la construcción, comparación y el vuelo de la cometa y por último, la evaluación desarrollada desde tres enfoques: evaluación escrita, elaboración de representación plana de poliedros y la construcción de la fórmula de Euler.

Finalmente, el trabajo se organizó en cinco capítulos estructurados de la siguiente manera: En el capítulo I la contextualización de la investigación, en el segundo el marco referencial, el tercero el diseño metodológico, el cuarto la propuesta pedagógica y el quinto capítulo las conclusiones y recomendaciones.

1. Marco Teórico

Kilpatrick (1921) definió la metodología por proyectos como el modelo formativo que garantiza el éxito del desarrollo del individuo en la solución de los problemas de la vida y una oportunidad de orientar al estudiante a hacer distinciones, tomar consideraciones más elaboradas y desarrollar las actitudes sociales sobre las decisiones adoptadas.

Así mismo, Gálvez (2013) considera que las metodologías activas son aquellas donde la labor del docente es la de mediador, guía y facilitador que diseña su clase tomando al estudiante como eje central del proceso en la construcción del conocimiento. Por tal motivo, los estudiantes prefieren las clases que utilizan una metodología activa por encima de las metodologías tradicionales McKinney; Bonwell & Eison (1991) y el “cono del aprendizaje” de Edgar Dale, ilustra cómo se incrementa la capacidad de retención y el aprendizaje basado en el “saber hacer” más que en el simple “saber”.

De otra parte, Piaget (1973), considera que el intelecto humano avanza desde lo sensoriomotor hasta lo conceptual lógico en la constitución de estructuras mentales; pero este proceso no se circunscribe a ninguno de los dos factores, pues el conocimiento no se manifiesta en etapas, sino que es integral, holístico; no obstante, la posibilidad de que, a veces, prevalezca uno sobre el otro, otros a través de manifestaciones más o menos caracterizadas e identificables en sus elementos.

De hecho, en uno de los experimentos de Piaget & Inhelder (1967), pedían a los niños palpar, con los ojos cerrados (percepción háptica), algunos sólidos geométricos y luego escoger, entre un conjunto de sólidos, aquel que fuera igual al que exploraban manualmente. Según estos investigadores, los niños diferenciaban los objetos inicialmente con base en propiedades que denominaban topológicas, tales como: Cerradura, continuidad o conectividad; después, podían diferenciar los objetos con base en propiedades de sus caras o lados, que los investigadores calificaban como proyectivas, como la rectilinealidad o curvilinealidad; y finalmente, la diferenciación se hacía teniendo en cuenta propiedades que

denominaron euclídeas, como el paralelismo o perpendicularidad de los lados y la congruencia de los lados o los ángulos.

Así mismo, el conocimiento espacial para Piaget, se desarrolla con tres grandes períodos o estadios: Sensoriomotor, de las operaciones concretas y de las operaciones formales. En nuestro caso, nos centramos en el período de las operaciones concretas puesto que la mayoría de los estudiantes tienen entre 11 y 12 años donde el niño está construyendo progresivamente las relaciones proyectivas y euclidianas, debido a que su pensamiento operatorio le facilita la flexibilización y reversibilidad en el espacio.

Por otro lado, Fischbein (1993) hace referencia a que: "Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño). Al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (p. 143).

De igual manera, Font, Godino, Planas y Acevedo, expresan sobre el discurso matemático que el objeto metáfora está presente como "objetos con propiedades" en el discurso matemático y facilita el paso de la representación de un objeto a un objeto ideal, que permite que los conceptos se refieren directamente a las cosas y las palabras (términos), en un primer momento no son conexas a los conceptos; después, gracias a la intermediación intelectual, se conectan a las cosas, pero son impuestas directamente sobre las cosas y sobre el estado de las cosas.

De ahí, la importancia del modelo teórico de Duval (1998), quien sitúa en el centro de la enseñanza de la geometría los procesos cognitivos de visualización, razonamiento y la construcción, los cuales deben desarrollarse separadamente y ser reconocidos a través de la actividad geométrica durante el currículo escolar, con el objeto de lograr la coordinación entre visualización y razonamiento, clasificadas según el autor, como procesos: configural, discursivo natural y discursivo teórico según la coordinación de las diversas apprehensiones.

Del mismo modo, el modelo de Van Hiele es la propuesta recomendada por el Ministerio de Educación Nacional a través de los lineamientos curriculares para la construcción del pensamiento geométrico por medio de cinco niveles que evidencian un modo de estructurar el aprendizaje desde lo más elemental, hasta lo más complejo, según investigaciones recientes, cada vez con mayor aceptación a nivel internacional.

El modelo de Van Hiele establece que la comprensión de la geometría pasa por cinco formas de ver los conceptos geométricos, formas que se denominan: Niveles de razonamiento.

En estudios anteriores a la lectura de su Tesis, Pierre Van Hiele menciona dos aspectos relacionados con la importancia de los niveles de pensamiento en la comprensión de la geometría: El primero hace referencia a los niveles de comprensión conceptual y el segundo está vinculado a los procesos de ordenación mental.

Con esta diferenciación de niveles se pretende identificar los obstáculos que tienen los alumnos tanto a nivel de conceptos como de lenguaje. Si un alumno que está pensando en el

nivel n-1 se enfrenta a un problema que requiere pensamiento del nivel n, será incapaz de comprenderlo. El progreso en la comprensión de los conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel, y de manera ordenada, a través de los niveles siguientes (Jaime, 1995). Para que los estudiantes se desempeñen adecuadamente en uno de los niveles avanzados deben dominar los niveles previos. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles ya que cada nivel lleva asociado un lenguaje y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y pausada. Una somera descripción de los niveles encontrada en Hoffer (1990) se presenta a continuación:

Nivel 1 (Reconocimiento). El estudiante aprende algo de vocabulario y reconoce una figura como un todo.

Nivel 2 (Análisis). El estudiante analiza las propiedades de las figuras.

Nivel 3 (Ordenamiento). El estudiante ordena lógicamente figuras y comprende la interrelación entre figuras y la importancia de definiciones exactas.

Nivel 4 (Deducción). El estudiante comprende el significado de la deducción y el papel de los términos indefinidos, postulados, teoremas y demostraciones.

Nivel 5 (Rigor). El estudiante comprende la importancia de la precisión cuando trata con las bases y las interrelaciones entre estructuras. Este nivel más avanzado se alcanza rara vez en los estudiantes escolares.

2. Metodología

La investigación acción en cuanto se ocupa del mejoramiento de las prácticas, de los entendimientos y de las situaciones de carácter educativo, se basa necesariamente en un enfoque de la verdad y de la acción que empieza con un patrón de prácticas y de entendimientos en una situación y culmina con otro distinto en el que algunas prácticas o algunos elementos de éstas, serán continuos, otros discontinuos o finalmente abandonados durante el proceso de mejoramiento.

Igualmente, la investigación acción implica relacionar las prácticas, los entendimientos y las situaciones entre sí, para descubrir correspondencias o ausencia de correspondencias entre entendimientos y prácticas, entre prácticas y situaciones, así como entendimientos y situaciones. De esta forma, el investigador, al tratar de mejorar las prácticas, los entendimientos y las situaciones, procura avanzar con más seguridad hacia el futuro, mediante la comprensión de cómo sus propias prácticas son construcciones sociales englobadas en la historia y en las instituciones en la que él trabaja.

Según los objetivos, resultaron las categorías de: comunicación, razonamiento y resolución de problemas en el diagnóstico. Así mismo, en la aplicación de la propuesta, la visualización se desarrolló a través de los diversos tipos de aprehensiones descritas por Duval (1998):

perceptiva, discursiva y operatoria y en la evaluación de la propuesta se estudió la coordinación entre los diversos tipos de aprehensiones

Indicadores de desempeño. Los indicadores se basan en las habilidades que alcanzan un estado específico de desarrollo a través de los diferentes niveles de Van Hiele y que tienen una naturaleza claramente geométrica.

Tabla 1. Indicadores de desempeño

	Dimensión 1	Dimensión 2		Dimensión 3
	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Visualización	Atributos físicos	Propiedades matemáticas		Reconoce los atributos de los poliedros
Análisis	Lista de propiedades físicas	Lista de propiedades matemáticas	Manejo de definiciones	Analiza las unidades figurales que conforman los poliedros
Ordenamiento o clasificación	Organización basada atributos físicos	Organización basada en atributos matemáticos	Organización según propiedades matemáticas	Clasifica poliedros en regulares e irregulares
Razonamiento Deductivo			Deduce información dada	Deduce la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas de un poliedro

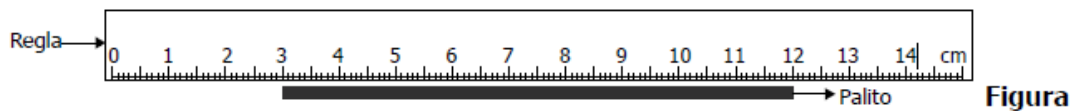
3. Resultados

Etapa previa

Para identificar las competencias específicas del componente espacial, en el mes de julio, se realizó un diagnóstico que sirviera de base al proceso investigativo compuesto por 19 preguntas de selección múltiple y 5 preguntas abiertas.

En la Competencia comunicativa, el 79% de los estudiantes tuvieron dificultad en identificar unidades tanto estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establecer relaciones entre ellas.

Para medir la longitud de un palito de madera, Johana coloca la regla como se muestra en la figura.



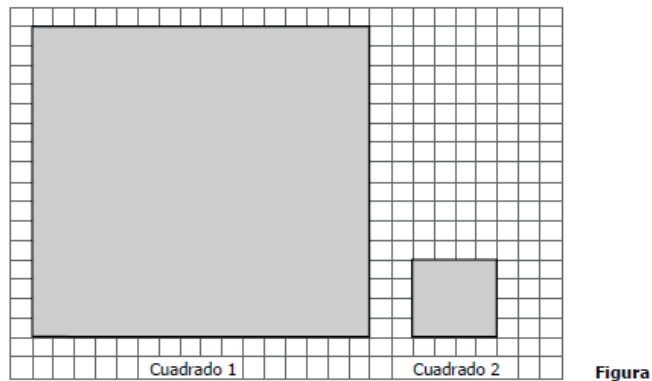
¿Cuál es la longitud del palito?

- A. 10 cm.
- B. 9 cm.
- C. 6 cm.
- D. 3 cm.

Figura 1. Ejemplo preguntas prueba saber 5, 2015

El 55 % de los estudiantes en la competencia razonamiento tuvieron dificultad en conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones de figuras en el plano.

Observa los siguientes cuadrados. El lado del cuadrado 2 mide la cuarta parte del lado del cuadrado 1.



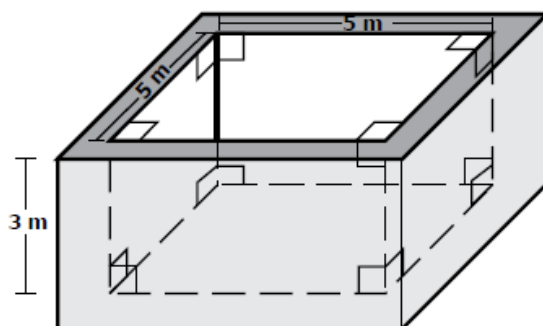
El área del cuadrado 2 es

- A. igual al área del cuadrado 1.
- B. el doble del área del cuadrado 1.
- C. $\frac{1}{8}$ del área del cuadrado 1.
- D. $\frac{1}{16}$ del área del cuadrado 1.

Figura 2. Ejemplo preguntas prueba saber 5, 2015

De mismo modo en la competencia Resolución de problemas, aproximadamente el 64% de los estudiantes presentaron dificultad en resolver problemas utilizando diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes.

Adela quiere saber cuánta agua cabe en una piscina que tiene la forma y las medidas indicadas en la figura.



Los ángulos señalados en la figura son rectos.

Figura

¿Cuál o cuáles de los siguientes procedimientos le sirve(n) a Adela para calcular cuánta agua, en m^3 , cabe en la piscina?

- | | |
|------|-----------------------|
| I. | $5 \times 5 \times 3$ |
| II. | $6 \times 7 \times 3$ |
| III. | $3 + 7 + 5 + 5 + 6$ |

- A. I solamente.
- B. II solamente.
- C. I y III solamente.
- D. II y III solamente.

Figura 3. Ejemplo preguntas prueba saber 5, 2015

Además de evaluar conocimientos, se cuestionó a los estudiantes sobre sus conocimientos para el desarrollo del proyecto a través de cinco preguntas relacionadas con la construcción y el vuelo de la cometa, con los siguientes resultados.

El 43% de los estudiantes, identificaron correctamente la forma con su respectivo gráfico, el 42% no identificaron correctamente la forma de una manera específica y coherente y el 15% no respondieron la pregunta, lo cual muestra el dominio de un lenguaje natural y la dificultad en el manejo de registros diferentes para identificar los diversos tipos de forma y orientación que puede tener una cometa.

Al consultarles por la forma de clasificar las cometas, las respuestas estuvieron variadas ya que un 20% creen que deben clasificarse por una cualidad (color, idioma, país, etc.), el 7% por la forma, el 39% por tamaño (medida, tamaño, peso) y un 34% no respondieron la

pregunta, lo cual, permite deducir la preponderancia de las características visuales como criterio de clasificación.

De la misma forma, el 64% de los estudiantes creen que, para comparar el tamaño de las cometas, se debe tener en cuenta el uso de un instrumento de medición y el 27% no respondieron la pregunta, lo cual refleja un escaso dominio de las variaciones dimensionales de la cometa.

Las respuestas sobre la forma de medir la altura de las cometas, tuvo las opciones de utilizar el metro (30%) y la pita (30%) y el 40% de los estudiantes, no respondieron la pregunta, evidenciando la falta de claridad en el uso de una estrategia para realizar la tarea.

Cerca del 50% de los estudiantes consideran que el peso influye para que la cometa vuele lo más alto posible, el 22% no respondieron la pregunta, y los demás creen que los materiales y los palos que se utilicen afecta el vuelo de la cometa.

Teniendo como referente, el dibujo realizado por los estudiantes sobre la forma de las cometas y las respuestas de las preguntas abiertas, se observa que 17 estudiantes de los 33, identificaban claramente los atributos mensurables de la cometa que le permitiera ser comparada como la cometa más grande que volara más alto, evaluando de esta forma que aproximadamente el 50% de los estudiantes, se encontraban en el nivel 1 de razonamiento.

Implementación:

Los estudiantes mostraron gran interés por el desarrollo de una tarea de investigación para dar solución a un reto propuesto donde él mismo, es quien toma las decisiones, para lo cual, plantearon conjeturas sobre las condiciones necesarias para poder ganar el festival.

En un primer momento, los estudiantes no tienen claridad de elementos constitutivos de las figuras tanto de tipo dimensional como cualitativo (Duval, 1999) y en general, muestran interés por desarrollar el proceso de medición característica del aprendizaje por proyectos (Dickinson et al, 1998; Katz & Chard, 1989; Martin & Baker, 2000; Thomas, 1998) especialmente en estudiantes que normalmente no se interesan en las actividades académicas.

La representación gráfica de la cometa permitió observar que la mayoría de los estudiantes lograron identificar las unidades figurales dimensionales, pero no lo asociaban a una forma específica, el uso incorrecto de unidades de medida e instrumentos de medición y las limitaciones en el manejo de las operaciones con números decimales, como las situaciones que afectaron el proceso de aprendizaje. Por lo anterior, se hizo necesario el proceso de retroalimentación permanente para que pudieran descubrir las formas y la importancia de las

medidas de longitud, las fórmulas que conlleven a descubrir los atributos mensurables que permitan comparar el tamaño de las cometas, para desarrollar el nivel 2 de razonamiento.



Figura 4. Exposición de cometas

El uso de material didáctico como figuras geométricas y el tangram, permitieron fortalecer los procesos de aprendizaje a aquellos estudiantes que todavía no lograban percibir las formas y unidades de medida; de igual manera se plantearon tres retos con situaciones modelo sobre la comparación del tamaño de las cometas y de esta forma, orientar el proceso, comprobar la medición y el cálculo del área necesarios para el desarrollo de su trabajo con las cometas que participaron en el festival.

Para comprobar los cálculos, algunos estudiantes llevaron aplicaciones en su celular como: Geometrix, Área y volumen, Área y perímetro, entre otros que les permitieran constatar los resultados obtenidos en clase a papel y lápiz y otros utilizaron la calculadora para desarrollar los procesos, el cual aportó en gran medida la estrategia más interesante para su nivel.

En el festival participaron 21 cometas, de las cuales se analizaron 17 representaciones gráficas para determinar los atributos que pudiesen comparar las cometas como la forma, el área y el perímetro y se premiaron las cometas por tamaño, perímetro y número de lados.

Se hizo un reconocimiento a los estudiantes teniendo en cuenta el tamaño y la altura del vuelo de la cometa, la creatividad entre otros y en acto institucional, se exaltó a los estudiantes

que sobresalieron en la actividad, evidenciando que los estudiantes desarrollaron valores como la perseverancia, la solidaridad, colaboración, responsabilidad, autonomía y la felicidad de hacer por primera vez una cometa en su gran mayoría.

El 90% de los estudiantes reconocieron las unidades figurales perceptivamente a través de la representación gráfica de las cometas, y de esta forma, servir de soporte intuitivo a razonamientos diferentes hasta lograr hacer la conversión a un lenguaje discursivo de una figura geométrica demostrando que desarrollaron aprehensión discursiva a través del cambio de anclaje visual a discursivo (Duval, 1993), logrando en su mayoría el nivel 2 de razonamiento.

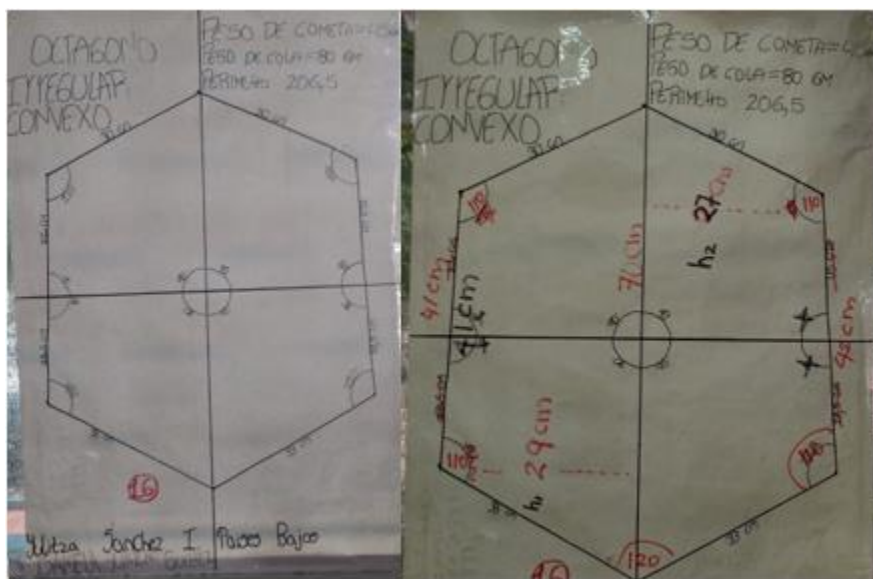


Figura 5. Proceso de identificación de los atributos en la representación de una cometa

En el proceso de comparar el tamaño de las cometas, a través de las representaciones gráficas, los estudiantes encuentran un dibujo que no es congruente con la forma de su

cometa, lo cual hace necesario el manejo del concepto de proporcionalidad para calcular el tamaño como una manera de interpretar la modificación de la figura.

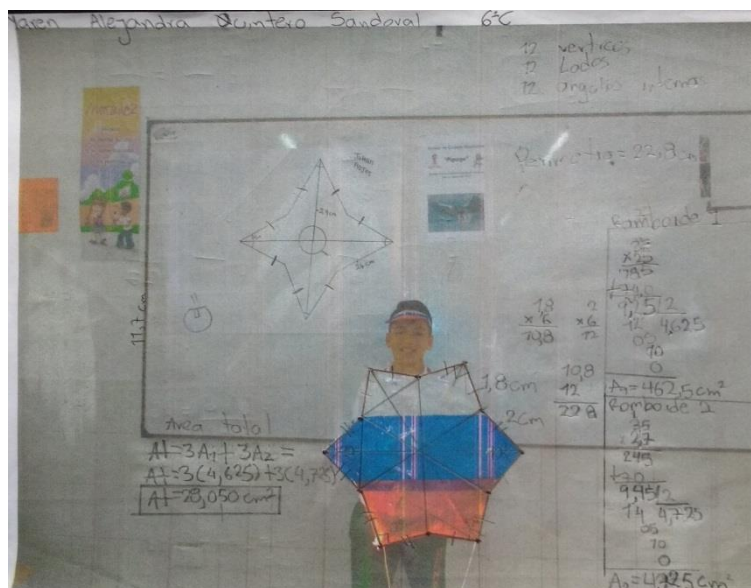


Figura 6. Representación gráfica no congruente con la cometa

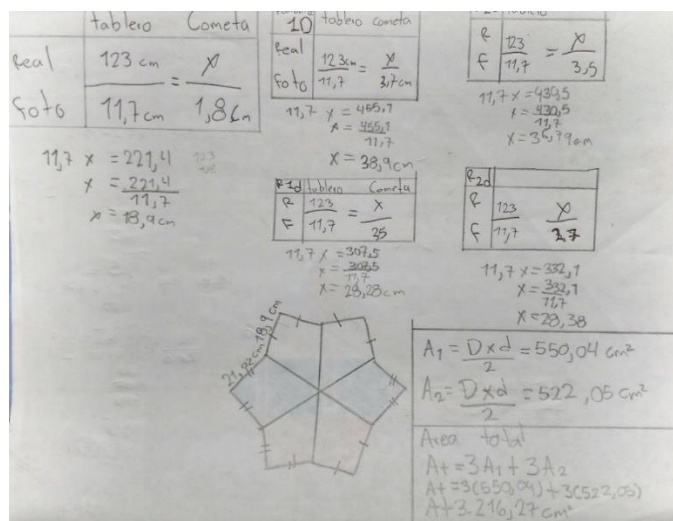


Figura 7. Proceso operacional para el cálculo del tamaño de la cometa por proporcionalidad

En ese proceso de comparación, se utilizó una tabla para resumir los datos de las cometas y que permitiera encontrar regularidades en la medida que iban socializando los resultados de cada una, encontrando algunas características comunes como suma de ángulos internos, número de diagonales y 2 cometas con el mismo perímetro y diferente área, permitiendo el

estudio de polígonos isoperimétricos, puesto que la mayoría de los estudiantes consideraban que existía una relación directa entre el área y el perímetro de las cometas.

La situación permitió que los estudiantes expresaran que aunque no hayan participado cometas que tengan la misma área en el festival, no descartaban la posibilidad de que podía suceder en otra competencia.

La situación generada, permitió que el 77% de los estudiantes reconocieran que las cometas #10 y #13 tenían el mismo perímetro y la mayoría de los estudiantes utilizaron el área como criterio de ordenamiento en las cometas con igual perímetro.

Adicionalmente, en su mayoría expresaron atributos medibles al cuestionarlos sobre la comparación y ordenamiento de las cometas, pero presentaron dificultad en el ordenamiento de números decimales que se evidencia al asignar la posición que ocupaba cada una.

Evaluación:

Según el marco teórico Piagetiano, el espacio no viene dado “a priori”, surgiendo de la mera percepción, sino que a través de la actividad del estudiante, se construye poco a poco iniciando por una actividad sensoriomotriz y posteriormente a un nivel representativo, de tal manera que exija la coordinación de las imágenes para convertirlas en operaciones.

Para constatar dicho proceso, en primer lugar, se les entregó un formato para que completaran los datos en el álbum sobre las percepciones visuales e identificación de las unidades figurales en las representaciones gráficas de las cometas y se observó que la gran mayoría registraron las variaciones de tipo dimensional y cualitativo presente en las carteleras expresando satisfacción por haber alcanzado los objetivos del proyecto.

De ahí, se considera que la percepción origina la concepción adulta del espacio a través de la construcción activa del propio sujeto y la implicación de relaciones topológicas y luego en proyectivas y euclidianas mediante el paso de la percepción a la representación mental.

En segundo lugar, el estudio de los poliedros se realizó mediante el desarrollo de la secuencia utilizando el modelo instruccional de Van Hiele y la percepción háptica como estrategia para identificar el espacio topológico en la elaboración del concepto de poliedro, como objeto de conocimiento, para que los estudiantes hicieran la representación plana de

una caja para guardar un objeto y través de la clasificación y observación de regularidades, permitiera la construcción de la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas.

La actividad, permitió identificar los elementos de los poliedros y construir una definición de cuerpos geométricos y generó unos procesos de razonamiento en los siguientes aspectos:

1) Uno de los estudiantes propuso para clasificar los poliedros, colocar en un grupo aquellos poliedros donde cualquier cara podía servir de base porque tenía la misma forma (poliedros regulares).

2) Otro estudiante intervino cuestionando la existencia de la geometría en todos los objetos del universo.

3) Un estudiante asoció el nombre del paralelepípedo como un hexaedro irregular.

4) Otro de los estudiantes, cuestionó sobre la idea de que el cilindro es o no un poliedro, para lo cual, fue necesario identificar cada uno de sus elementos para poder concluir colaborativamente que no era poliedro sino un cuerpo redondo por no tener todos los elementos constitutivos de los poliedros: caras, vértices y aristas.

7) La mayoría de los estudiantes, lograron dibujar los moldes tanto del cubo, como del paralelepípedo, evidenciando la coordinación entre visualización y razonamiento, definidas por Duval (2003,2005), producto de la descomposición por deconstrucción dimensional.

En general, todos los estudiantes lograron construir la definición de poliedros, clasificarlos en regulares e irregulares y mostraron un buen nivel de razonamiento según las justificaciones que expresaron durante el proceso, en donde el manejo de material concreto fue determinante para poder descubrir regularidades y completar la tabla que resumía los componentes de todo poliedro, la cual exigió relacionar a través de una fórmula, las caras, los vértices y las aristas de un poliedro ausente físicamente (Fórmula de Euler).

El 87,5 % de los estudiantes justificaron sus respuestas utilizando la fórmula de Euler para caras, vértices y aristas, al plantear un ejercicio escrito, lo cual evidencia el mejoramiento de su nivel de razonamiento categorizado en el nivel 3 según la propuesta de investigación.

En la prueba escrita, el 83% de los estudiantes respondieron correctamente las preguntas del nivel mínimo y el 67% de los estudiantes en el nivel satisfactorio de razonamiento de un estudiante de grado 9° demostrando un nivel de razonamiento superior a su grado

de escolaridad, en la representación de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.

4. Conclusiones y recomendaciones:

La evaluación diagnóstica, permitió identificar las dificultades reales de los estudiantes de sexto grado en cada uno de los componentes y competencias según las pruebas saber 2015, evidenciando debilidades en el razonamiento del componente espacial métrico.

La prueba y los conocimientos previos, mostraron que una gran mayoría no identificaba la forma y los atributos mensurables de una cometa que le permitiera ser comparables al nivel de un estudiante de sexto grado y que podía ser un importante objeto de conocimiento matemático por descubrir.

El dibujo de la cometa realizada por cada estudiante, permitió representar, comunicar y reflexionar sobre la información visual que poco a poco iban descubriendo en la medida que sus necesidades cognitivas lo exigía, encontrando relaciones no solamente topológicas sino también métricas, que los llevaron a conclusiones sobre la forma y los atributos de las cometas, utilizando el modelo instruccional de Van Hiele.

La estrategia pedagógica Festival de cometas Pigargo, despertó el interés de los estudiantes por aprender matemáticas a través de una situación real que exigió a los estudiantes justificar, proponer, hasta llegar a generalizar.

El desarrollo de aprendizaje por proyectos generó situaciones reales en la que un estudiante no coordinó un objeto real con su representación y el hallazgo de dos objetos que tenían el mismo perímetro con diferentes áreas, permitió utilizar los procesos de visualización, como medio para mejorar los procesos de razonamiento denominado por Torregrosa y otros (2010), Razonamiento Configural.

La aplicación del modelo instruccional de Van Hiele permite evidenciar el desarrollo del razonamiento en los procesos cognitivos de los estudiantes, a través de una serie de fases en donde se favorece tanto el trabajo individual como colaborativo.

El proyecto generó un impacto importante en la comunidad educativa, puesto que se logró la vinculación de los padres de familia en el proyecto y algunos docentes de otras áreas como

ciencias naturales y sociales, incluyeron en su programación, temas relacionados con el tema del proyecto.

Bibliografía

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: Una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. *Investigación en Educación Matemática XIII*, 119 - 127. Santander, Colombia: SEIEM

Arreguín, L., Alfaro, J & Ramirez, S. (2012). Desarrollo de competencias matemáticas en secundaria usando la técnica de aprendizaje orientado en proyectos. *Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, 10(4), 264 - 284.

Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación Matemática*, 15(3), 57 - 76.

Burger, W & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31 - 48.

Cabello, A. B. (2013). la modelización de van hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de cabri. Salamanca: Universidad de Salamanca .

Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*,. 14(001), 61-71.

Clements, D & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* . Recuperado de: <https://bib.irb.hr/datoteka/877842.Kovacevic.pdf>

Clmente, F., Llinares, S & Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 31(57), 497 - 516.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*.

Fischbein, E. (1993). *The Theory of Figural Concepts*. Springer, 24(2), 139 -162.

Gualdrón, É & Gutiérrez, Á. (2007). Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de van hiele para la semejanza. *investigación en educación matemática*, 11(2007), 369 - 380 .

Hershkowitz, R., Parzysz, B & Dormolen, J. (1996). Space and Shape. *International Handbook of Mathematics Education* , 1(u), 161 - 204.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2015). Cuadernillo de prueba. Ejmplo de preguntas Saber 5° y 9° Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Macías, J. (2016). Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Ochaíta, E. (1983). La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial. *Estudios de Psicología*, 14(1), 93 - 108.

Stewart, I. (2012). 17 ecuaciones que cambiaron el mundo (1st ed., pp 108-128).