UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES HUMANIDADES Y ARTES

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Diseño de una propuesta didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Gustavo Cote Uribe.

Para optar al grado de:

Magister en Educación

Presentado por:

Rónal Darío Villamizar Ángel

Director de Proyecto de Grado

Mg. María Eugenia Serrano Acevedo

Bucaramanga, Colombia, Julio, 2017

Dedicatoria

A mi padre y a mi madre, quienes siempre me apoyaron incondicionalmente y querían ver en mí un profesional ejemplar, ¡gracias por su sacrificio y amor!

A mi novia, Angélica Merchán, como su nombre lo indica, para mi vida es un Ángel, ¡gracias por su gran amor!

A mis compañeras de maestría, Claudia García y Kinverly Morán, por hacer de las largas jornadas momentos más agradables y formar un gran equipo de trabajo, ¡gracias por su compañerismo!

Agradecimientos

A la Dra. María Eugenia Serrano Acevedo, por su dedicación, amabilidad y apoyo en cada una de las etapas del proyecto, ¡por su profesionalismo con calidad humana!

A la Dra. Astrid Portilla, quien siempre estuvo pendiente de nuestro grupo con sus orientaciones, respondiendo preguntas, resolviendo dudas, aclarando situaciones, facilitándonos material y atendiendo nuestras sugerencias, ¡por su dirigencia!

A la Licenciada Kate Galofre Barros, por todas sus horas de orientación para que mis ideas fueran mejor expresadas, ¡por su arte!

A los estudiantes de octavo del año 2016 y 2017 de la IE Gustavo Cote Uribe, porque sin ellos, este trabajo no tendría razón de ser, por su dedicación, colaboración y esfuerzo, ¡por su superación!

Contenido

Lista de apéndice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

En este trabajo se diseñó una secuencia didáctica para el estudio de las líneas y puntos notables del triángulo en el grado octavo (alumnos entre los 13 y 17 años de edad), siguiendo el Modelo de Van Hiele para caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes y estructurar las actividades para el fortalecimiento de su pensamiento espacial, debido a que en las observaciones realizadas con anterioridad, se evidenciaron deficiencias en estos aspectos, además se propició la exploración activa usando material reciclable como las tapas plásticas de gaseosa y el cartón para el descubrimiento guiado de los conceptos y propiedades. En el marco de una metodología cualitativa, se reflexionó en cada una de las fases en las que está inmerso el investigador docente para obtener mejores resultados en el desempeño de estudiantes provenientes de una población en condiciones de vulnerabilidad, se precisaron además, qué materiales son pertinentes para la exploración de los objetos de estudio.

Palabras claves*: Secuencia didáctica, líneas y puntos notables del triángulo, Modelo de Van Hiele, Pensamiento espacial, exploración activa, material reciclable, metodología cualitativa*

Abstract

Title: Design of a didactic proposal to strengthen the spatial thinking of eighth grade students at Gustavo Cote Uribe Public School.

This project presents the design of a didactic sequence aimed at studying the notable lines and points of triangles. It was implemented with a group of eighth graders, age 13 to 17, who come from unfavorable backgrounds. The Van Hiele Model was followed to characterize the students' reasoning level as well as to structure activities to strengthen their spatial thinking since it had been previously observed some weaknesses on these aspects. Additionally, guided discovering of the concepts and properties was fostered trough active exploration and the use of recyclable materials such cardboard and plastic bottle caps. Based on the qualitative research methodology, the teacher-researcher reflected on each of the stages to identify students' needs, to choose the most suitable materials for the exploration and to improve their overall performance.

Key words: *didactic sequence, notable lines and points of triangles, Van Hiele Model, spatial thinking, active exploration, recyclable material, qualitative research methodology*

Introducción

La presente investigación a través del diseño de una secuencia didáctica para abordar el tema de los puntos y líneas notables del triángulo en el grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe de la ciudad de Bucaramanga, que busca fortalecer el pensamiento espacial de los estudiantes, se hace como punto de partida para realizar una reflexión de la forma en que se asume la proceso de enseñanza aprendizaje en el aula y reorientarla a la manera en que evoluciona el pensamiento de los estudiantes, en especial el de geometría, para lo cual se realizó una revisión de las recomendaciones de los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia. El interés de esta investigación, nace del análisis de los bajos resultados en las pruebas saber de los grados quinto, noveno y décimo, respectivamente, a su vez, de los bajos índices en el ISCE, el bajo rendimiento de los estudiantes de la institución y la necesidad de innovar las prácticas en el aula de clase.

Se seleccionó la asignatura de geometría por varios aspectos que se evidenciaron durante las observaciones previas al planteamiento del problema, como el gusto de los estudiantes por el dibujo y las manualidades, el énfasis ambiental de la institución que promueve el reciclaje y la revisión bibliográfica donde se resalta el potencial de la geometría para desarrollar habilidades en los estudiantes, tal como lo señala Howard Gardner en su trabajo sobre las inteligencias múltiples al afirmar que la geometría es “esencial para el desarrollo del pensamiento científico”, por otra parte, tiene muchos elementos que son prácticos para muchas ocupaciones y profesiones, además por la dinámica que se puede dar en clase con la manipulación de materiales para descubrir elementos y propiedades, lo que puede resultar motivante para el estudiante; por lo anteriormente expuesto, su no abordaje excluye del aula una asignatura propicia para que el educando mejore su nivel de razonamiento y se acerque a otros saberes implícitos como el dibujo, el diseño, la construcción, entre otros.

En el marco de la metodología cualitativa, este estudio se apoyó en las observaciones de clases que se describen en el diario pedagógico, las fotos tomadas en las mismas para evidenciar las actividades y el desarrollo de las guías de cada una de las sesiones de aprendizaje; para el diseño de la secuencia didáctica se reflexionó en cada momento de la investigación (antes, durante y después de su aplicación), sobre aspectos como el gusto de los estudiantes por las actividades, el material con el que se apoyaron estas, que resultaran atractivas hacia ellos y permitieran la exploración de conceptos y propiedades, teniendo en cuenta que para la asignatura se carece de material didáctico y de recursos tecnológicos como tabletas y computadores como mediadores instrumentales en el proceso de enseñanza-aprendizaje; de este modo, esta investigación es un punto de partida para toda el área de matemáticas, puesto que muchas temáticas del álgebra y la aritmética pueden recibir un tratamiento geométrico.

De igual forma, considerando que el rol docente no se debe limitar al preparar e impartir una clase, ya que es un proceso que va más allá de reconocer la fortalezas, debilidades y limitaciones de los estudiantes, el docente debe precisar conocer el desarrollo histórico de lo que enseña, reconocer los obstáculos que se presentaron para la formalización de los contenidos, muchos de los cuales tienen un desarrollo acelerado en el aula, muy distante de su realidad histórica, el docente investigador necesita una introspección de su rol, no solo evaluar qué conoce, sino la forma en que asume el proceso de enseñanza y aprendizaje y los mediadores instrumentales en que se apoya, que posibiliten la exploración, motiven y estén al alcance de las posibilidades de la institución o de las condiciones económicas de los estudiantes; para ello, nos apoyamos en la investigación acción pues precisamente se busca transformar esa realidad de la práctica educativa.

El trabajo se ha organizado de la siguiente manera, en el ***Capítulo 1***, con el fin de entender algunas de las razones que dieron origen al proceso de investigación, se hace una descripción del contexto de los estudiantes de la IE Gustavo Cote Uribe de la ciudad de Bucaramanga, en ella se detallan los resultados en las pruebas externas de los educandos, algunas características del modelo pedagógico de la institución (PEI), el planteamiento del problema de investigación que dio origen a la pregunta de investigación ¿Cómo fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución educativa Gustavo Cote Uribe mediante el diseño e implementación de una propuesta didáctica?, los objetivos de investigación y las razones por las cuales se seleccionó la asignatura de geometría para el diseño de la secuencia didáctica.

En el ***capítulo 2,*** se realiza una revisión bibliográfica de los antecedes de investigación a nivel internacional, nacional y regional sobre temas relacionados con la aplicación del modelo de Van Hiele en el diseño curricular, que según los lineamientos curriculares de matemáticas es el que mejor describe el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, otras revisiones que se hicieron sobre la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes y el diseño de propuestas didácticas, llevaron a indagar además sobre la transposición didáctica y la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau para responder algunas de las inquietudes que nos surgieron ¿Qué rol debe asumir el profesor y el estudiante en la transposición didáctica?, ¿qué se debe evitar en la transposición didáctica?, y ¿qué situaciones se deben plantear en el aula de clase para que sea didáctica?, y otros cuestionamientos, ¿cómo adaptar un contenido tal como es concebido en geometría a un contenido acorde a las habilidades de los estudiantes? , ¿Cómo determinar el grado de habilidad del estudiante?, y finalmente ¿qué etapas seguir en el desarrollo de una temática que ha sido adaptada a la necesidad de los estudiantes? Además se muestran las definiciones y propiedades de algunos de los tópicos inmersos en la secuencia didáctica y el marco legal colombiano relacionado con los objetivos de la educación, la evaluación y la estructura del currículo.

En el ***capítulo 3***, se describe el diseño metodológico, el enfoque de la investigación y el proceso que se llevó a cabo en cada una de las tres etapas que apoyan el proceso antes, durante y después de la interacciones de clase según (Llinares, 1991), se precisaron como la población los estudiantes del grado octavo de la IE y la muestra de nuestra investigación los 36 estudiantes del grado 8-2,también se describen los instrumentos de recolección de información y su validación, al final se realizó un recuento de las evaluación y las actividades con su respectivo análisis.

En el ***capítulo 4***, se presenta la propuesta pedagógica, su justificación, fundamento pedagógico y la metodología de clase y se establecen las conclusiones y recomendaciones de la investigación.

1 Contextualización de la Investigación

La investigación se realizó en la Institución Educativa (IE) Gustavo Cote Uribe, ubicada en el Barrio María Paz del norte de Bucaramanga, que presta servicios educativos en la tres jornadas: diurna, vespertina y nocturna; en la primera, cursan los grados de preescolar, quinto y secundaria (de sexto a undécimo); en la segunda, de preescolar a cuarto y en la tercera se ofrece educación para adultos en el programa de Ciclos Lectivos Integrados (CLEI), respectivamente, gracias a esto, la Institución cuenta con aproximadamente 1000 estudiantes, donde la mayoría de los grupos oscilan entre 36 y 54 estudiantes aproximadamente.

1.1 Descripción Del Problema

Un considerable porcentaje de los estudiantes de la IE Gustavo Cote Uribe provienen de poblaciones en condición de vulnerabilidad, algunos desplazados de otras regiones por el conflicto armado, además, en el aula de clase se evidencia a diario un importante número de inasistencias por inestabilidad en el núcleo familiar, desmotivación, pocos o nulos hábitos de estudio, entre otros factores, lo cual arroja como resultado que muchos de ellos no concluyan su año escolar o no alcancen las competencias necesarias para ser promovidos.

Sumado a lo anterior, los resultados de la prueba SABER de los años 2012- 2014 de los grados tercero, quinto y noveno muestran un aumento en el porcentaje de estudiantes en insuficiente y mínimo como se detalla a continuación.

En el 2014 el 60% de los estudiantes del grado tercero se encontraban en el nivel mínimo e insuficiente, 3% mayor respecto al año 2012 y 5% mayor respecto al año 2013.

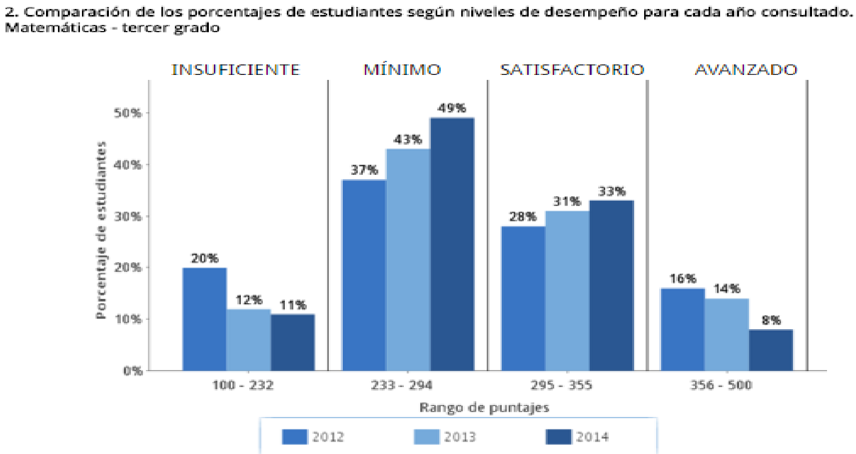


Ilustración 1 Comparativo Pruebas SABER del grado tercero.
Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co

En el 2014 el 68% de los estudiantes de quinto grado se encontraban en el nivel medio e insuficiente, 7% menor respecto al del año 2013 y un 7 % mayor respecto al año 2012.

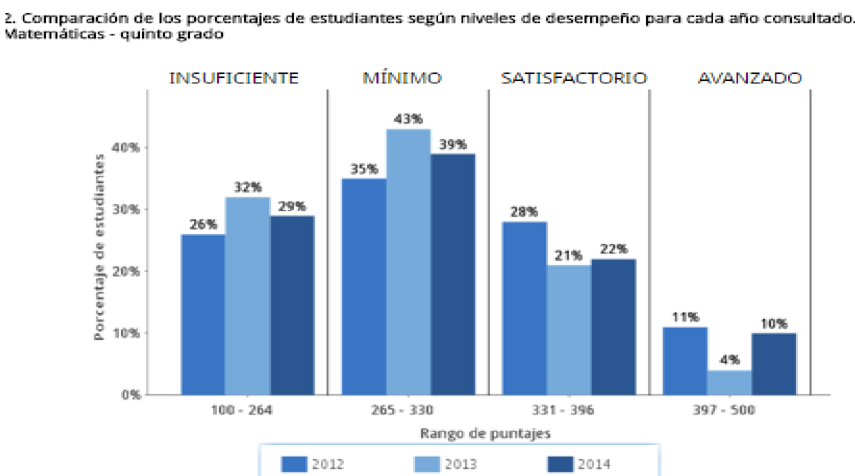


Ilustración 2 Comparativo Pruebas SABER del grado quinto.
Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co

En el 2014 el 71% de los estudiantes de noveno grado se encontraban en el nivel medio e insuficiente, 6 % mayor respecto al año 2012.

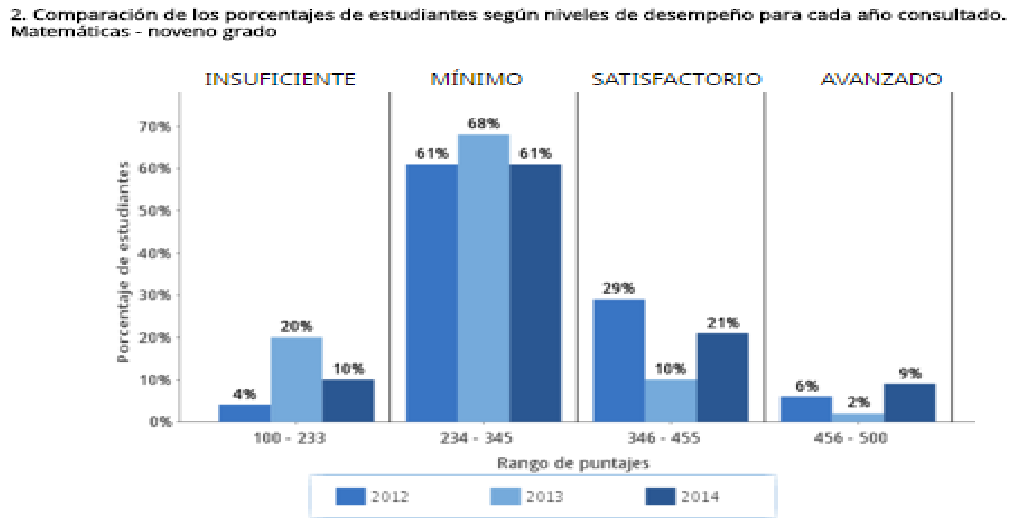


Ilustración 3 Comparativo Pruebas SABER del grado noveno.
Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co

Lo anteriores resultados repercutieron negativamente en el Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE) del año 2015.

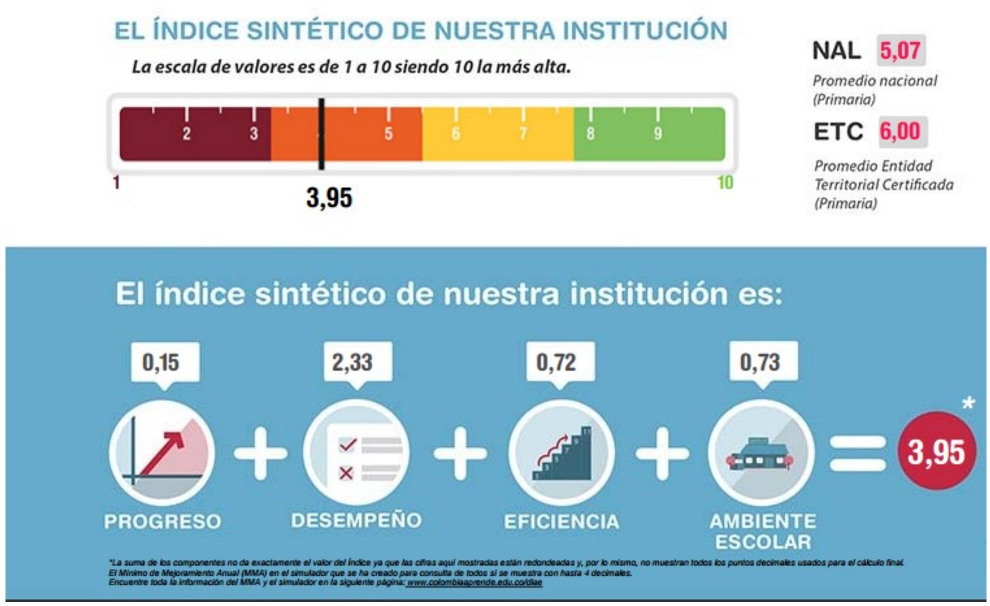


Ilustración 4 ISCE de primaria de la IE Gustavo Cote Uribe del año 2015
Recuperado de http://diae.mineducacion.gov.co/dia_e/documentos/168001006396.pdf

El ISCE de primaria está muy por debajo del promedio nacional de primaria (5,07) y aún más del promedio de la primaria de Bucaramanga (6,00), los promedios son relativamente bajos, teniendo en cuenta que es dentro de una escala de 1 a 10. El valor bajo de 0,15 en el componente de Progreso se explica por el aumento de estudiantes en el nivel mínimo en la prueba SABER de tercero y la disminución de estudiantes en el nivel mínimo e insuficiente de quinto aún no es significativa dado el alto porcentaje en estos dos niveles.

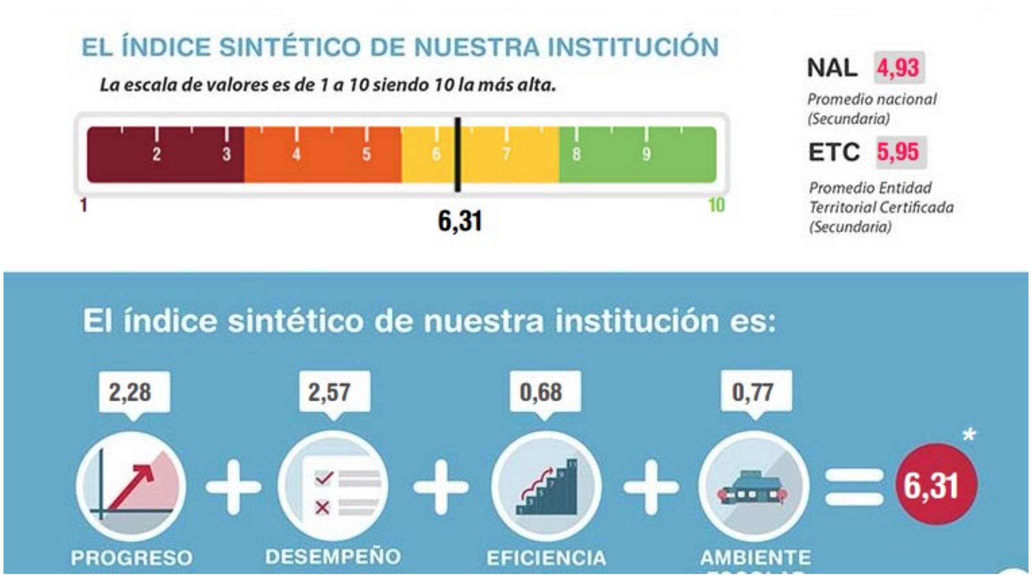


Ilustración 5 ISCE de secundaria de la IE Gustavo Cote Uribe del año 2015
Tomado de http://diae.mineducacion.gov.co/dia_e/documentos/168001006396.pdf

El progreso que se refleja en el ISCE del 2015 para secundaria se explica por la reducción de estudiantes en el nivel mínimo e insuficiente de la prueba SABER noveno del 2014 respecto al año 2013. Sin embargo el porcentaje de estudiantes en el nivel mínimo es del 61%

Sumado a lo anteriormente expuesto, el área de matemáticas en la IE carece de material didáctico y de recursos tecnológicos como tabletas y computadores como mediador instrumental en el proceso de enseñanza-aprendizaje, además dentro de las prácticas docentes, en las asignaturas del área matemáticas se suelen abordar temáticas que no están contextualizadas y no responden a las expectativas y necesidades de los estudiantes y se abordan con un lenguaje no acorde al que dominan los estudiantes.

Después de las consideraciones anteriores, se puede deducir que si no se hace una intervención pronta, el número de estudiantes que no asistirán regularmente a clase se mantendrá, repercutiendo negativamente en el porcentaje de estudiantes que reprueban cada año, estudiantes que al persistir en las dificultades académicas muy probablemente van a optar por no continuar sus estudios.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, la enseñanza de las matemáticas, debe ajustarse al modelo pedagógico social cognitivo que ha adoptado la institución, y para ello es conveniente diseñar actividades didácticas acordes a la realidad del estudiante, que además considere una granja existente en la institución y la profundización en ambiental, la cual no debe sub-utilizarse sino todo lo contrario, apoyar el trabajo pedagógico en ella para intentar obtener mejores resultados.

Con todo lo anterior, se busca propiciar un aprendizaje significativo, acorde a los estándares y lineamientos que establece el Ministerio de Educación y como un paso inicial, para un cambio relevante en las practicas docentes, se iniciará el proyecto en la asignatura de geometría, puesto que ella por sus componentes temáticos permiten la exploración activa a través de la manipulación de elementos como tapas, palillos, y otros muchos elemento que resultan más atractivos a los estudiantes y posibilitan el descubrimiento de propiedades.

La conceptualización que se realiza en la geometría a partir de la exploración se puede extender a otras ramas de las matemáticas como la aritmética, el álgebra, el cálculo,….

Dentro de las matemáticas, la geometría puede ser estimulante a los estudiantes por sus alcances prácticos para muchas ocupaciones y profesiones, además permite referirse a su entorno con un lenguaje más acorde. El no abordaje de la geometría en forma adecuada es un problema en cuanto se excluye del aula una asignatura propicia para que el estudiante mejore su nivel de razonamiento y se acerque a otros saberes implícitos como el dibujo, el diseño, la construcción y muchos más.

1.2 Formulación de la Pregunta de Investigación

¿Cómo fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución educativa Gustavo Cote Uribe mediante el diseño e implementación de una propuesta didáctica?

1.3 Objetivos del proyecto

1.3.1 Objetivo General

- Fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución educativa Gustavo Cote Uribe mediante el diseño e implementación de una propuesta didáctica.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes del grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe.
- Diseñar e implementar una secuencia didáctica que permita fortalecer el pensamiento espacial de los estudiantes de grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe.
- Evaluar la efectividad de las estrategias implementadas con los estudiantes del grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe.

1.4 Justificación

Las nociones de geometría son necesarias en muchas ocupaciones y profesiones, ya que le permiten al individuo orientarse con mayor precisión en el espacio, dibujar con más técnica, reconocer con más detalle las características de las obras artísticas y de las construcciones civiles o realizar decoraciones; es por esta y muchas más razones que la geometría es fundamental para situaciones simples como ubicarse en una ciudad, e incluso, una tan compleja como describir el universo.

En este sentido, los lineamientos curriculares de matemáticas precisan que la geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas; ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.1).

La geometría siempre ha estado ligada a la evolución de la inteligencia humana, aun apoyando otras funciones dentro de las matemáticas , un ejemplo de ello era realizar operaciones aritméticas como sumar, restar, multiplicar y dividir, que se apoyaron en cuerdas parales y pequeñas esferas, objeto conocido como el ábaco y que fue un instrumento fundamental hasta la aparición de nuestro sistema de numeración indo arábigo y que aún en los primeros años escolares es la herramienta reina para la enseñanza de los fundamentos de nuestro sistema de numeración. Además, la geometría es un referente para describir el desarrollo de las grandes civilizaciones plasmadas en las construcciones, las pirámides, los palacios, los coliseos, los templos y muchas más maravillas.

En relación con lo anterior, una habilidad espacial es primordial en muchas actividades y un valor agregado a muchas ocupaciones y más aún si en ella se necesita visualizar, medir, construir y crear; se puede decir entonces que la geometría por sus elementos prácticos y la posibilidad de usar un número considerable de materiales, muchos de ellos reciclables, puede ser usada para la exploración y el descubrimiento de propiedades, lo cual, indudablemente propicia el desarrollo del pensamiento espacial, que está ligado a otras habilidades tales como lo sugiere Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias:

"Una de estas inteligencias la espacial, y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios, es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física y matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial" (MEN, 1998, p. 37).

Paradójicamente, en muchas instituciones el estudio de la geometría ha sido abandonado, se limita a las últimas unidades del año escolar, o simplemente se trata de una serie de definiciones acompañada de un puñado de propiedades desprovistas de aplicabilidad y sentido, que repercuten negativamente en el interés de los estudiantes y no se aprovechan las potencialidades de esta asignatura para que el educando se apasione desde ella por la matemáticas.

Así pues, para que no se presente lo anterior en el aula de clase, los lineamientos curriculares del (MEN, 1998) señalan entre otras, algunas consideraciones importantes que se deben tener presentes en el momento de enseñar geometría:

- "Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento" (p.37).
- "La moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento espacial indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela. El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que adquiere cada vez mayor aceptación en lo que se refiere a geometría escolar" (p.38).

No obstante, la mayoría de las asignaturas en matemáticas tienen contenidos muy extensos y su desarrollo es acelerado, contrario a la evolución que esta tuvo a lo largo de la historia, lo cual hace que muchos estudiantes sean apáticos y vean las matemáticas como algo muy complejo e incluso inentendible.

De este modo y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, que orientan la geometría en el ámbito académico, en este trabajo se diseñará e implementará una secuencia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Gustavo Cote Uribe, buscando que dichas actividades propicien el aprendizaje significativo, con el apoyo y uso de materiales como tapas, palillos, cartón y muchos otros elementos que son reutilizables, obtenidos del reciclaje y de bajo costo, para dar respuesta a múltiples situaciones contextualizadas, algunas de las cuales involucran la granja existente en la institución, con lo que se espera también favorecer la comunicación y el trabajo colaborativo, que a su vez, incidirá positivamente en la actitud de los estudiantes y en los resultados académicos en pruebas internas y externas.

Este abordaje de la geometría es un paso inicial para que sea asumido en las demás asignaturas como la aritmética y el álgebra, las cuales se pueden abordar con un enfoque geométrico y de esta manera favorecer la exploración para que los estudiantes alcancen un nivel de razonamiento mayor al que ya poseen.

1.5 Contextualización

La Institución Educativa Gustavo Cote Uribe es de naturaleza Oficial, mixta, de modalidad técnica, con énfasis en educación ambiental, ubicada en la Carrera 5 No 15 D – 23 norte, del barrio María Paz que está en el norte del municipio de Bucaramanga.

En la actualidad, cuenta con una población de 1050 estudiantes en los niveles de Preescolar, básica primaria, básica secundaria, media, técnica y CLEI.

Ilustración 6 Ubicación de la IE.
Recuperado de https://www.google.es/maps

Las familias de los estudiantes de la IE se caracterizan por tener un nivel socio-económico basado en actividades informales y otras son desplazadas por el conflicto armado en Colombia, además en los alrededores del barrio se encuentran varios asentamientos en los que conviven muchos de los estudiantes en condiciones de vulnerabilidad.

La planta física de la institución dispone de 16 aulas de clase, dos aulas especializadas (laboratorio de informática y de bilingüismo), un kiosco, zona de juegos para niños y una granja integral de 8 hectáreas, lo cual es un aspecto diferenciador dentro de las instituciones de Bucaramanga, ya que resulta ventajoso contar con un espacio como este para el evento educativo y el desarrollo de habilidades.

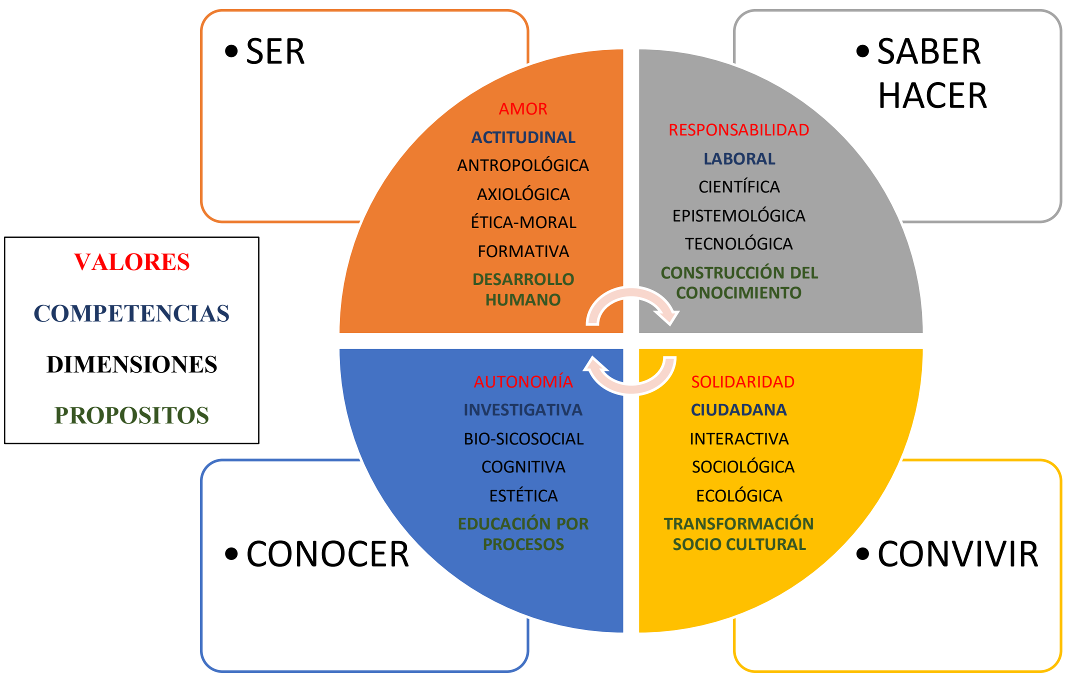


Ilustración 7 Modelo pedagógico Social-Cognitivista de la IE Gustavo Cote Uribe. Adaptado de http://colegiogustavocoteuribe.edu.co/PEI_GUSTAVO_COTE_URIBE.pdf

La IE Gustavo Cote Uribe establece como modelo pedagógico el social-cognitivista, el cual según el PEI está orientado a “mejorar los conocimientos pedagógicos, metodológicos, administrativos y socio–económicos de la comunidad educativa…”

2. Marco Referencial

2.1 Antecedentes Investigativos

Los referentes de esta investigación se encuentran en los trabajos sobre enseñanza y aprendizaje de diversos conceptos de geometría que usan el modelo de Van Hiele, los relacionados con el uso de material concreto en geometría y los que abordan temas relacionados con las líneas notables del triángulo y lugares geométricos.

A continuación se realizará una breve descripción bibliográfica de algunos tópicos relacionados con la investigación a realizarse.

2.1.1 Internacionales

(Jaime, 1993) En su tesis "Aportación a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento", para optar al título de doctor en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, cuyo objetivo era analizar algunos componentes del modelo de Van Hiele y dar una serie de sugerencias de su metodología y aplicación, esto se hace puesto que se considera a este modelo como el marco de referencia más utilizado y estudiado en el diseño curricular. En este trabajo del modelo de Van Hiele, se analizan sus niveles de razonamiento, fases de aprendizaje, características y se desarrolla una unidad de enseñanza de las isometrías en el plano (las traslaciones, los giros y las simetrías) para primaria y secundaria, usando los niveles y fases de aprendizaje de dicho modelo; además, se realiza una revisión de otras investigaciones relacionadas con la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes, y muestran las posturas referentes a que este paso es un proceso continuo, mientras que otros consideran que pueden presentarse cambios bruscos. Explica que para identificar el nivel de razonamiento la aplicación de preguntas de selección múltiple no es adecuada, vivencia que tuvieron, pues en un principio las aplicaron, pero rápidamente cambiaron a las preguntas abiertas, para lo cual recomienda los trabajos sobre método de evaluación de Fortuny, Gutiérrez, Jaime (1998) y Gutiérrez, Jaime, Fortuny (1991).

Dentro de las conclusiones de este trabajo, se considera la aportación práctica del modelo de enseñanza sobre isometrías, usando los niveles y fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, lo cual es un referente importante para el presente proyecto sobre la forma de abordar una propuesta didáctica y se señala como trabajo futuro, el diseño de unidades de enseñanza sobre otros temas, usando el modelo anteriormente mencionado, lo cual es uno de los objetivos de esta investigación.

(Molfino, 2011) En su tesis "Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la Demostración en Geometría?", para optar al título de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional (IPN) de México, que tenía como objetivo investigar el papel de la demostración de geometría en la enseñanza media superior en Uruguay. Este trabajo aborda la enseñanza de la demostración en situaciones que involucran variación de puntos en geometría, más específicamente, el concepto de lugares geométricos, en él se analizan la forma en que los estudiantes resuelven problemas relacionados con la temática en el grado décimo; previamente en el marco teórico presentan los conceptos, esquemas, niveles y funciones de la demostración desde diferentes autores, y se realiza una amplia revisión teórica de las diferencias entre demostrar, argumentar y razonar; además escudriña sobre la aparición del tema de lugares geométricos en los programas de educación secundaria de Uruguay.

Los aspectos anteriores ayudan a orientar el trabajo actual puesto que uno de los temas centrales de este en el grado octavo es la mediatriz, que se puede definir como un lugar geométrico, y el referente sugiere realizar una revisión desde los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas en Colombia, de los temas propuestos en la investigación en la IE Gustavo Cote Uribe, y considerar en él, la importancia de los niveles cognitivos de aprendizaje presentados por Van Hiele, para abordar los temas de geometría con un lenguaje adecuando al nivel de razonamiento de los estudiantes y así evitar el fracaso del currículo tradicional. También se refiere a la importancia de tener presente la transposición didáctica al momento de abordar los contenidos y por ende, el sentido de la demostración puede diferir a lo que formalmente se refiere.

Dentro del planteamiento de demostración se resalta su labor social, al inculcar en los individuos el hecho de comprobar la veracidad de las afirmaciones.

(Guerrero, 2009) En su tesis "La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria" para optar al título de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del IPN de México, cuyo objetivo era construir el significado de ángulo a través de la elaboración y diseño de una propuesta didáctica, realizando previamente una revisión teórica de los elementos epistemológicos, cognitivos y didácticos. Lo anterior proporciona elementos valiosos para la elaboración y diseño de la propuesta didáctica difiriendo en el objeto de estudio, puesto que el trabajo es alrededor de los triángulos.

Para la elaboración de una primera secuencia de propósito didáctico se utilizó como metodología de diseño a la Ingeniería Didáctica, la teoría que reúne esos elementos en la Teoría de Situaciones Didácticas.

Dentro de las conclusiones que se consideran importantes como punto de partida para la investigación, se destacan:

1. La Teoría concede elementos importantes que permiten explicar cómo es que un concepto muchas veces presenta diferentes complicaciones de tipo cognitivo, didáctico y fundamentalmente epistemológico.
2. El uso de la Ingeniería Didáctica, posibilita trabajar el concepto con mayor profundidad, para lograr un diseño didáctico que integre, de manera sistémica, todos los componentes que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Dentro de las conclusiones de este trabajo se destaca la importancia que se le da al estudio de la naturaleza de los conceptos, los cuales aportan elementos valiosos para el diseño de las estrategias didácticas.

2.1.2 Nacionales

(Ramírez J. C., 2014) En su tesis de maestría “Desarrollo del pensamiento espacial desde la enseñanza de los triángulos, a través de un módulo didáctico”, para optar al título, se plantea como objetivo general: contribuir a superar las deficiencias en el aprendizaje y en la formación de los estudiantes del grado octavo de la educación básica secundaria, a partir del estudio de los triángulos por medio de módulos didácticos; generando así, la oportunidad al estudiante de aprender disfrutando.

Para lograr los objetivos propuestos se realizó una metodología mixta con variables cualitativas y cuantitativas y las técnicas para recopilar información se usaron pruebas diagnósticas, encuestas, fotografías y la observación directa, dicha propuesta constó de tres fases:

1. Encuestas a profesores y estudiantes: Identificación de en qué nivel del modelo de Van Hiele se encontraban los estudiantes y la forma en qué los profesores desarrollaban las clases.
2. Análisis de referentes teóricos.
3. Diseño de la propuesta didáctica.

Dentro de los aportes importantes de esta propuesta para el presente trabajo de grado, se encuentra el uso en clase de materiales concretos basados en las fases propuestas por el modelo de Van Hiele.

(Morales & Majé, 2011) En su tesis "Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros", para optar al título de Magister en Ciencias de la Educación de la Universidad de la Amazonía, estudia el desarrollo de la competencia de formular y resolver problemas en los estudiantes de grado séptimo a través de la geometría dinámica para el estudio de los cuadriláteros. La investigación es de corte mixto (cualitativo-cuantitativo) y se desarrolló en dos fases, la primera, diagnóstica buscaba contrastar lo realizado por la institución con las políticas del Ministerio de Educación y el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, así como el nivel de razonamiento de los estudiantes; en la segunda, se presenta la propuesta didáctica con sustento teórico basado en varios autores, donde sus referentes teóricos tuvieron en cuenta cuatro categorías de análisis: El pensamiento espacial, los cuadriláteros, la resolución de problemas y los niveles de Van Hiele. Las categorías fueron determinantes para establecer los instrumentos de recolección, análisis y sacar conclusiones.

Dentro de las conclusiones sobresale la importancia de articular diferentes teorías para dar origen a la propuesta didáctica, entre ellas se destacan "los niveles y fases de aprendizaje según el modelo de Van Hiele, los sistemas semióticos de representación desde Duval y la forma de entender la clase de matemáticas propuesta por Bishop con un elemento adicional, el programa de geometría dinámica"

(Ramírez N. , 2014) En su tesis "Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo de Van Hiele y Geogebra", para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Naciones de Colombia con sede en Medellín, cuyo objetivo general era caracterizar avances de visualización en los estudiantes, mediante la clasificación de triángulos y cuadriláteros, para este trabajo se usó estudio de casos como técnica de investigación, donde participaron estudiantes de grado séptimo y se apoyó en los lineamientos curriculares de matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Las Tecnologías Computaciones del Ministerio de Educación y el Modelo de Van Hiele.

Dentro de las conclusiones se puede mencionar que la estrategia didáctica de clasificación de triángulos y cuadriláteros usando el software de geometría, resultó motivante y se evidenció un avance en la habilidades de visualización de los estudiantes; una de la recomendaciones es explorar el proceso cognitivo de visualización en campos diferentes a la geometría y ver su relación con esta.

2.1.3 Regionales

(Algarín, 2013) En la tesis "Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas", para optar al título de Magister en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (UIS) de la ciudad de Bucaramanga, su objetivo principal fue caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele, específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el tema de las razones trigonométricas.

Se desarrolló una investigación cualitativa y la metodología del trabajo se basó en el análisis de las actuaciones de los estudiantes cuando desarrollan las actividades de razones trigonométricas, para poder caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración. Para dicho fin, se diseñó la unidad de enseñanza y para la recolección de información se grabaron sesiones de clase, registro de notas del observador y las evidencias de las hojas de trabajo de los estudiantes. Cada nivel de Van Hiele se ejemplifica con las producciones de los estudiantes.

Esta tesis es vital para el trabajo investigativo que se está realizando, ya que le aporta la forma de ejemplificar cada nivel de Van Hiele, puesto que uno de los objetivos de dicha propuesta es identificar en qué nivel se encuentran los estudiantes en el grado octavo, además muestra un excelente ejemplo donde evidencia los descriptores relacionados con temas de décimo, relacionando con cada nivel de Van Hiele con su respectivo proceso.

(Berrío, 2016) En su tesis "Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en el proceso de justificación teórica en la resolución de problemas de Geometría", para optar al título de Magister en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (UIS), tuvo por objetivo estudiar el impacto del software matemático computacional llamado asistente de demostración. Este software permite explorar los elementos de la geometría euclidiana tales como definiciones, teoremas y postulados. En este estudio se aplicaron doce (12) entrevistas clínicas para sobre el uso al asistente de demostración, donde se interesan por saber qué hace, qué dice y qué piensa el estudiante mientras demuestra; además, ofrece definiciones bien precisas sobre uno de los temas que se abordan en la propuesta, como es el caso de la mediatriz. Dentro de las conclusiones, se puede resaltar que el software ayuda a los estudiantes a encontrar nuevas ideas y trata de anticiparse a los controles de valides de los pasos de razonamiento.

(Martínez, 2016) En la tesis "Implementación del enfoque resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas" para optar al título de Magister en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, tenía como objetivo fortalecer el aprendizaje de las matemáticas por medio de la implementación del enfoque resolución de problemas, para ello, utiliza textos del programa "todos a aprender 2016" y diseña un proyecto de aula llamado "Sí se puede"; dentro de las conclusiones, es importante mencionar que el enfoque del proyecto es propicio pues establece retos para el estudiante.

El trabajo se divide en cuatro etapas (descripción de la situación problema, la revisión de referentes, diseño metodológico y la presentación de la propuesta) y orienta la investigación respecto a la estructura de la tesis y pone en manifiesto algunas problemáticas de la comunidad educativa como el bajo rendimiento académico, alto porcentaje de estudiantes en el nivel mínimo e insuficiente en la Pruebas SABER, el desinterés de estos y la condiciones de vulnerabilidad a las que están expuestos por su entorno, y se pretende que el docente asuma un rol que difiera del tradicional en donde la resolución de problemas sea la que propicie un verdadero proceso de formación, situaciones similares a las planteadas en el proyecto presente; además, la escuela objeto de la investigación referenciada, comparte con la I.E. Gustavo Cote Uribe el modelo pedagógico social cognitivo, lo cual favorece grandemente el trabajo por ese sustento teórico.

Se concluye que el enfoque de resolución de problemas permite contextualizar y transverzalizar el conocimiento a las demás áreas, esa mejora se ve reflejada en la prueba final, la cual fue tipo prueba SABER.

2.2 Marco Teórico

En este apartado se hace una revisión de los fundamentos curriculares, las temáticas, los modelos pedagógicos y las estrategias didácticas que sirven de sustento de la propuesta didáctica.

2.2.1 El pensamiento espacial en los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas.

Los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas brindan algunas orientaciones básicas respecto al sentido de estas, qué y cómo enseñarlas, en este orden de ideas, la propuesta se enfocará en lo concerniente a la geometría, al respecto *(MEN, 1998)* define el pensamiento espacial como "…el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (p.56).

En la mayoría de los textos escolares, la geometría es presentada como un conjunto de objetos ya sean figuras planas o sólidos y se enuncian algunas clasificaciones, propiedades, transformaciones sin un contexto de aplicación, como si solo sirviera para la asignatura, contrario a esta práctica tan común en el aula, (MEN, 2006) señala la importancia de "relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial” (p.61).

Acorde a las anteriores ideas, en varias partes de los lineamientos se habla de contextos significativos, al respecto Ausebel (1976) citado en (Santaella & García, 2009) considera que el aprendizaje significativo “se refiere a la posibilidad de establecer vínculos significativos y no arbitrarios entre el nuevo contenido que se ha de aprender y aquello que se encuentra en la estructura cognitiva del sujeto” (p.229). Pero ¿cómo establecer vínculos significativos, al respecto? (Santaella & García, 2009) habla de algunos aspectos que hay que considerar para lograr un grado de significatividad, es decir, para vincular nuevos conocimientos con los previos, tales como organizar los contenidos de manera que se relacionen los nuevos contenidos con los precedentes, contenidos acordes al nivel de desarrollo del alumno, que el estudiante haga el esfuerzo mental de aprender, ambientes favorables que contribuyan con la motivación y las buenas actitudes, memorización no mecánica sino comprensible, la cual algunas veces requiere un esfuerzo de repetición (p.229-230).

Además de lo anterior, es importante orientar el trabajo teniendo en cuenta los estándares matemáticos del (MEN, 2006), de octavo-noveno para que los estudiantes desarrollen las siguientes competencias relacionadas con el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

- “Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas" (p.86).

2.2.3 Fundamentos de la didáctica de las Matemáticas y Teoría sobre el abordaje de la geometría

(Chavellard, 1997) En el artículo ***La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,*** define la transposición didáctica como "un contenido del saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza" (p.16). En otras palabras, para enseñar algo, se aísla ese algo de alguna de sus propiedades y se adapta al contenido escolar.

Lo anterior es importante en la labor de los docentes de secundaria, puesto que las matemáticas son generalmente presentadas en forma axiomática, lo cual significa que al estudiante se le presentan una serie términos no definidos, afirmaciones que se consideran verdaderas, definiciones y propiedades que están estrechamente relacionadas y que tienen una secuencia lógica, pero cuya estructura está desprovista de su evolución histórica; esta forma de presentar las matemáticas caracteriza la mayoría de los textos escolares, pues para cada tema se presenta una definición, una propiedades y una serie de ejemplos, problemas y ejercicios.

Las consideraciones anteriores al sugerir la importancia de realizar la transposición didáctica, llevan al surgimiento de algunos nuevos interrogantes para el quehacer docente: ¿Qué rol debe asumir el profesor y el estudiante en la transposición didáctica?, ¿qué se debe evitar en la transposición didáctica?, y ¿qué situaciones se deben plantear en el aula de clase para que sea didáctica?,

Las tres primeras preguntas relacionadas con el rol del docente y alumno, lo que se debe evitar en la transposición didáctica y las situaciones didácticas, encuentran su respuesta en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, en su libro Fundamentos y Métodos de la didáctica de las Matemáticas, (Brousseau, 1986) que tiene como propósito considerar los elementos básicos que debe reunir una propuesta didáctica para que sea útil, completa y coherente; además, preguntas relacionadas con el nivel de razonamiento y las fases de aprendizaje de geometría, entre otras, encuentran su respuesta en el Modelo de Van Hiele, para lo cual se realizará un enfoque en las interpretaciones de Jaime y Gutiérrez (1990).

Según Brousseau (1986), “el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno puede descubrir…el trabajo intelectual del alumno debe ser … comparable a esta actividad científica…exigirá que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que son conformes con la cultura, que tome los que son útiles, etc.” (p.6).

Acorde a las consideraciones anteriores, el docente debe proponer situaciones contextualizadas en relación con la asignatura, es decir, el contexto de aritmética, es diferente al de probabilidad, aunque pueden existir elementos comunes, las situaciones en determinado contexto deben involucrar al estudiantes en un trabajo de exploración, lo cual se ve traducido en una experiencia de aprendizaje, donde los elementos que descubra sean el punto de partida para la construcción de conocimiento.

Dentro de los fenómenos que señala Brousseau que deben controlarse en la transposición didáctica se encuentran:

- Cuando en una situación, repetidamente se minimizan las condiciones para que el estudiante la pueda resolver, pero luego de sucesivos cambios se ha alejado del conocimiento que se quería aprender y los estudiantes terminan resolviendo una situación trivial. Ejemplo: Se les muestra la definición que $a^n = \underbrace{a \times a \ldots \times a}_{n-veces} = b$ y les pide resolver la potencia 2^3, luego de un tiempo ante la negativa de solución, les explica que el exponente (3) es el número de veces que se debe multiplicar la base (2), y les da un tiempo prudente para resolverlo, ante el fracaso de los estudiantes, les pregunta cuánto es 2x2x2, sin obtener respuesta acertada, por lo cual termina preguntándoles cuánto es 4x2. Esto es conocido como el fenómeno **Topaze**.
- Usar situaciones que son muy fáciles e inferir de ello que el estudiante ya tiene conocimientos del tema; por ejemplo: Se explica que la solución de la ecuación 2x=14 es 7, y se presenta la ecuación 4x=28, los estudiantes que señalan que la solución es 7, posiblemente respondieron esto porque consideran que como en el caso anterior, esas ecuaciones tienen la misma solución. Esto se conoce como el fenómeno **Jordain**.
- En el ámbito escolar es habitual explicar un ejemplo y luego proponer otros similares, los alumnos resuelven el problema por una lectura de lo que el docente acostumbra hacer en clase, mas no por la lectura del problema. Esto se denomina: **Uso abusivo de analogías**.
- Justificar el uso de una técnica como la causante de los repetidos fracasos en una actividad de enseñanza, perdiendo de vista el conocimiento matemático, el ejemplo más significativo es la teoría de conjuntos en la escuela, tal vez su objetivo es proporcionar elementos para entender las relaciones entre los conjuntos numéricos, pero realmente este

estudio se ha visto desarticulado de su objetivo, los estudiantes saben qué es unión, intersección…, pero no las identifican en los contextos que dieron su razón de ser.

- Reproducir las mismas historias y situaciones a estudiantes con diferentes características; esto se conoce como **El envejecimiento de las situaciones de enseñanza**.

Brousseau (1986) señala que “la concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los “problemas” que le propone. Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar y evolucionar por sí mismo. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No solo puede, sino que también debe, pues solo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada a-didáctica. Cada conocimiento puede caracterizarse por una o más situaciones a-didáctica…Pero el alumno no puede resolver de golpe cualquier situación a-didáctica, el maestro le procura entre las situaciones a-didácticas, aquellas que esté a su alcance…La situación o el problema elegido por el profesor es una parte esencial de la siguiente situación más amplia: el maestro busca devolver al alumno una situación a-didáctica que provoque en él una interacción lo más independiente y lo más fecunda posible. Para ello, comunica o se abstiene de comunicar, según el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. En consecuencia, el enseñante está implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él ha planteado. Este juego o esta situación más amplia es la situación didáctica" (P.14).

Dadas las anteriores consideraciones, surgen otros cuestionamientos, ¿cómo adaptar un contenido tal como es concebido en geometría a un contenido acorde a las habilidades de los estudiantes? , ¿Cómo determinar el grado de habilidad del estudiante?, y finalmente ¿qué etapas seguir en el desarrollo de una temática que ha sido adaptada a la necesidad de los estudiantes?, en esta apartado, se retomarán los lineamientos curriculares, que señalan que el modelo de Van Hiele describe con bastante exactitud el proceso de construcción del pensamiento geométrico; a continuación se mostrará en qué consiste dicho modelo, su principales características y recomendaciones para la evaluación del nivel de razonamiento y el proceso de aprendizaje de los estudiantes para ayudarles como docentes a alcanzar un nivel superior de razonamiento, todas las precisiones que se harán al respecto son basadas en las interpretaciones de (Jaime & Gutiérrez, 1990) para quienes el modelo de Van Hiele es una excelente herramienta para la comunicación entre el profesor y el estudiante, al mostrar una descripción de lo que el estudiante es capaz y no es capaz de hacer al encontrarse en cierto nivel de razonamiento. Este modelo busca responder las preguntas que muchas veces se hacen los docentes sobre el progreso de los estudiantes en determinado tema de la geometría, interrogantes tales como: ¿Por qué los estudiantes no comprenden algún concepto nuevo?, ¿Por qué los estudiantes solo usan los conceptos o propiedades en ejemplos idénticos? En este sentido, los profesores Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof tratan de explicar el porqué de los comportamientos de estos estudiantes como lo expresado por P.M. Van Hiele (1986) citado a su vez en (Jaime & Gutiérrez, 1990) "Había partes de la materia que yo podía explicar y explicar, y aun así los alumnos no entendían…" (p. 304).

En razón a esto, el modelo que explica el porqué de los anteriores problemas, así como su posible salida se puede resumir de la siguiente manera según (Jaime & Gutiérrez, 1990).

(1) "Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.

(2) Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.

(3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela

(4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma, pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma" (p.305).

A continuación se describirán las características de cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, que se reflejan en las actividades de los estudiantes de Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990).

Niveles de razonamiento	**Descripción**	**Características**
Nivel 1. De reconocimiento	Asocian los nombres a determinados tipos de figuras. Cada vez que se presenta a los estudiantes algún concepto geométrico	• Describen las figuras por su apariencia o parecido con algo, aspecto que se evidencia en las descripciones de las figuras con aspectos irrelevantes. • La descripción de las figuras se basan

	nuevo, estos van a pasar por el nivel 1.	en su aspecto físico (forma, tamaño, color, grosor,…). • Las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (con frases como "se parece a…", "tiene forma de…", etc.). • No reconoce las partes ni propiedades de las figuras.
Nivel 2. De análisis	Los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades a través de la observación y la experimentación.	• Los estudiantes reconocen las partes y ciertas propiedades de las figuras. • Pueden deducir propiedades a partir de la experimentación. • No son capaces de relacionar unas propiedades con otras.
Nivel 3. De clasificación	Establece relaciones entre las diferentes propiedades de las figuras.	• Reconocen las implicaciones entre algunas propiedades. • Pueden describir una figura de manera formal. • Clasifica figuras de acuerdo a sus propiedades. • Comprenden los pasos de una demostración pero no son capaces de

		construirlas por sí mismos. • No comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.
Nivel 4. De deducción formal	Es capaz de realizar las demostraciones de lo que ya habían demostrado informalmente con anterioridad y descubrir y demostrar nuevas propiedades más complejas.	• Entienden y realizan razonamientos lógicos formales. • Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas. • Son capaces de partir de distintas premisas para llegar a los mismos resultados.

Tabla 1 Niveles de razonamiento de Van Hiele. Adaptado Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990).

Si el docente quiere organizar y desarrollar su clase usando el Modelo de Van Hiele, debe primero plantear actividades con el lenguaje acorde al nivel de razonamiento de los estudiantes, si el tema es nuevo para ellos, se debe trabajar desde el nivel de reconocimiento de las figuras y propiciar actividades que paulatinamente permitan el avance a un nivel de razonamiento superior. Los métodos que se usan para determinar el nivel de razonamiento son, según (Jaime & Gutiérrez, 1990) los siguientes:

1. Realización de entrevistas individuales entre el profesor y el estudiante, durante las cuales el docente plantea diversas actividades y dialoga con el estudiante sobre su solución.
2. Cuestionarios con las siguientes características:

- Preguntas cuyas respuestas sean largas para determinar su forma de razonar.
- Incitar a los estudiantes a explicar sus respuestas con frases como: Por qué…, explica cómo encontró la solución…
- Lo más importante no es determinar si contestan bien o mal, sino saber cómo contestan.
- Las actividades deben cubrir los 4 niveles, en el caso de los primeros niveles de secundaria los tres primeros.
- A las preguntas no se les debe asignar un nivel, puesto que una misma pregunta puede ser resuelta correctamente de diferente forma por estudiantes que están en diferentes niveles de razonamiento.

Respecto al proceso de aprendizaje, no solo se trata de adquirir más elementos de geometría, sino al desarrollo de las habilidades en el uso de nuevos métodos y herramientas de razonamiento pasando de un nivel a otro; en el ya citado trabajo se tiene en cuenta cómo se desarrollan las habilidades de razonamiento y la forma de favorecer dicho proceso, para lo cual, en el caso de este trabajo para estudiantes de los primeros años de secundaria, se deben propiciar espacios para nuevas experiencias de aprendizaje dentro y fuera del aula, es decir, el estudiante no es un simple receptor pasivo de información.

Al respecto P.M Van Hiele citado en (Jaime & Gutiérrez, 1990) dice “La maduración que lleva a un nivel superior tiene lugar de una forma especial. Se pueden revelar varias fases en ella (esta maduración debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico). Por lo tanto, es posible y deseable que el profesor ayude y la acelere. El objetivo del arte de enseñar es precisamente enfrentarse a la cuestión de saber cómo se pasa a través de estas fases y cómo se puede prestar ayuda al estudiante de forma eficaz" (Fuys, Geddes, Tischler, 1984, p.246).

En este sentido, es importante reconocer entonces que la tarea de los docentes para ayudar a sus estudiantes a subir al siguiente nivel de razonamiento se basa en planear las actividades de acuerdo a cinco fases que hemos interpretado de (Jaime & Gutiérrez, 1990).

La fase 1 lleva por nombre **Toma de Contacto**, donde se informa el campo de estudio a trabajar, el tipo de problemas y los materiales a usar. En esta etapa los estudiantes aprenderán a utilizar dicho material y algunos conocimientos básicos necesarios para el trabajo de clase. Para el docente también es una fase vital que permite identificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema a abordar y su nivel de razonamiento.

La fase 2 se llama **Orientación Dirigida,** propicia que el estudiante explore usando el material proporcionado para descubrir nuevas figuras, conceptos y propiedades o comprender lo que ya conoce. Las actividades deben ser encaminadas de tal manera que los conceptos y propiedades se den en forma progresiva.

La fase 3 se conoce como **Explicitación** y busca que los estudiantes intercambien sus experiencias referidas a lo que observaron, las estrategias o formas de solución; en ella, pueden aprender nuevo vocabulario correspondiente al nivel que se está queriendo alcanzar; es una fase de transición entre el vocabulario que los estudiantes usan para describir los elementos de geometría al usual, dicha fase, no debe entenderse como una etapa que necesariamente debe estar presente en todas las fases del aprendizaje

La fase 4 tiene por nombre **Orientación libre**, la cual consiste en aplicar los conocimientos y lenguajes adquiridos a otras situaciones de las presentadas inicialmente, preferiblemente que se plantee variedad de problemas, algunas deben ser situaciones nuevas. Se pueden dar algunos indicios relacionados con la solución pero que deban aplicar los conceptos y razonamientos ya vistos, además deben ser más complejos que los de la fase anterior.

La fase 5 recibe el nombre de **Integración, y,** como su nombre lo indica trata de integrar los conocimientos nuevos con otros adquiridos anteriormente. En esta fase se compara, acumula y combina lo que ya se sabe.

2.2.3 Conceptos relacionados con las temáticas de la propuesta didáctica

A las descripciones de los puntos y líneas asociadas a cualquier triángulo que en los textos escolares se conocen como las líneas notables de triángulo, por lo general, se les da un interés que no deja de ser más que mostrar algo por mera curiosidad y que en muchas ocasiones, no se le ve una utilidad, desconociendo su potencial en el aula de clase y los elementos prácticos que proporciona en situaciones de diversos contextos. A continuación se describirán algunos conceptos de geometría que están inmersos en el proyecto de investigación, los cuales se relacionan con los interrogantes de la prueba diagnóstica, las actividades de la secuencia didáctica y la evaluación final.

Las definiciones y propiedades corresponden a los puntos y líneas notables del triángulo y son traducidos del inglés del libro ***Geometry Revisited.*** "The purpose of this chapter is to recall some of these half-forgotten things to which Dr. Bell referred, to derive some new theorems, developed since Euclid, and to apply our findings to interesting situations" (Coxeter & Greitzer, 1988, pág. 1).

El punto del centro del círculo circunscrito[1] alrededor de un triángulo hemos acordado llamarlo el ***circuncentro*** del triángulo, y llamamos el círculo, el **circuncírculo** del triángulo. El **circuncentro O** es la intersección de las tres perpendiculares que bisecan[2] los lados del triángulo. El radio del circuncírculo ha sido denotado por la letra R.

[1] "Círculo circunscrito a un polígono es el que tiene por puntos de su circunferencia todos los vértices de este polígono; de suerte que polígono inscrito en un círculo y círculo circunscrito a un polígono, expresan una misma cosa". (Oriol, 1847)

[2] Entendemos por bisecar, dividir en dos partes iguales (RAE, 2017)

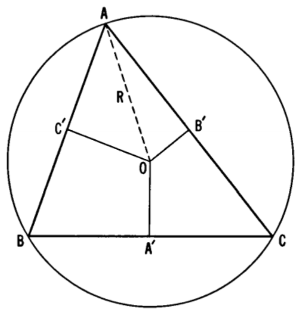


Ilustración 8. El circuncentro O (Geometry revisited, P.7)

Los segmentos que unen los vértices de un triángulo a los puntos medios de los lados opuestos son llamados **medianas**. En la ilustración 9, la líneas $\boldsymbol{AA'}$, $\boldsymbol{BB'}$ y $\boldsymbol{CC'}$ son medianas, de modo que $\boldsymbol{BA'} = \boldsymbol{A'C}$, $\boldsymbol{CB'} = \boldsymbol{B'A}$ y $\boldsymbol{AC'} = \boldsymbol{C'B}$. Las tres medianas son concurrentes.[3] Su punto común, G, es llamado el centroide[4] del triángulo. Si un triángulo fuera cortado con material de densidad uniforme, se equilibraría si se suspendiera en este punto, común a las medianas. En otras palabras el centroide es el “centro de gravedad” del triángulo.[5]

[3] Entendemos que las líneas o segmentos son concurrentes cuando pasan a través de un mismo punto(Geometry revisited, P.16)

[4] En muchos textos escolares se usa la palabra baricentro en lugar de centroide. “El término baricentro proviene del griego βάρος (“peso”, “carga”) y κέντρον (“aguijón”, “centro”)”. (Oxford, 2000, pág. 101)

[5] Arquímedes (hacia 287-212 a.C) obtuvo el centroide como el centro de gravedad de una placa triangular de densidad uniforme. (Coxeter H. , 1988)

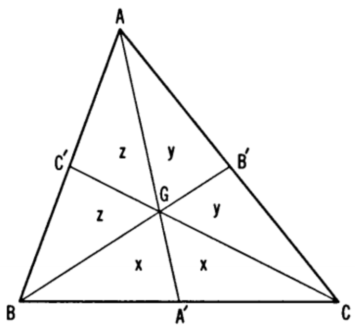


Ilustración 9 Las medianas del triángulo (Geometry revisited, P.8)

Los segmentos[6] AD, BE, CF, perpendiculares a BC, CA, AB, respectivamente, son llamados las ***alturas*** del $\Delta\boldsymbol{ABC}$**.** Su punto común ***H*** es llamado el **ortocentro.** Los puntos ***D, E, F*** se llaman naturalmente los pies de las alturas. Uniendo los pies en pares obtenemos $\Delta\boldsymbol{DEF}$**,** el triángulo ***órtico***

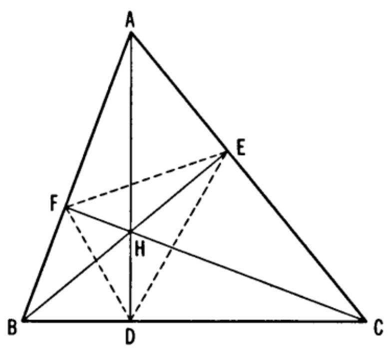


Ilustración 10 Las alturas del triángulo (Geometry revisited, P.8)

[6] En el texto "Geometry revisited" aparece la expresión "***cevian"*** en lugar de segmento que fue lo usado en nuestra traducción, ***the cevian*** se referiere a los segmentos de línea que unen un vértice del triángulo a algún punto sobre el lado opuesto. (Geometry revisited, P.4)

Otro importante conjunto de segmentos[7] son las tres bisectrices de ángulos internos. La ilustración 11, muestra un de tales bisectores ***AL.*** Las bisectrices internas de los tres ángulos de un triángulo son concurrentes.

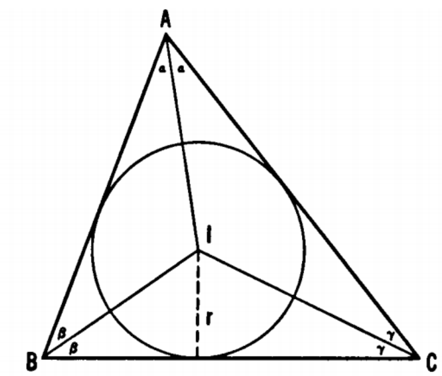


Ilustración 11 Las bisectrices del triángulo ABC

El círculo con centro I y radio R (ilustración 11) tiene los tres lados por tangentes y es así el círculo inscrito o in-círculo. Llamamos ***I*** el ***incentro*** y ***r*** el ***inradio.***

---

[7] ***The cevians*** acá lo hemos llamado segmento y debe tener el sentido de tener un extremo en el vértice del triángulo y su otro extremo en algún punto del lado opuesto.

2.3 Marco legal

Los aspectos que en esta parte se mencionarán, tienen que ver con los objetivos de la educación, la evaluación y la estructura del currículo, de tal manera que lo que se pretenda hacer en el proyecto esté en armonía con las disposiciones legales.

El (Ley General de Educación., 1994) , en su artículo 20 señala como objetivos generales de la educación básica:

a) "Propiciar una formación general mediante el acceso, de manera crítica y creativa, al conocimiento científico, tecnológico, artístico y humanístico y de sus relaciones con la vida social y con la naturaleza, de manera tal que prepare al educando para los niveles superiores del proceso educativo y para su vinculación con la sociedad y el trabajo.

b) Desarrollar las habilidades comunicativas para leer, comprender, escribir, escuchar, hablar y expresarse correctamente".

c) Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana.

d) Propiciar el conocimiento y comprensión de la realidad nacional para consolidar los valores propios de la nacionalidad colombiana tales como la solidaridad, la tolerancia, la democracia, la justicia, la convivencia social, la cooperación y la ayuda mutua.

e) Fomentar el interés y el desarrollo de actitudes hacia la práctica investigativa.

f) Propiciar la formación social, ética, moral y demás valores del desarrollo humano".

Para alcanzar dichos objetivos, además de la vocación y excelente formación académica del docente, se requiere que este estructure muy bien su clase impregnando su quehacer de dinamismo, creatividad e innovación.

Además, el artículo 77 de la (Ley General de Educación., 1994) habla de la autonomía de las instituciones “para organizar las áreas fundamentales de conocimientos definidas para cada nivel, introducir asignaturas optativas dentro de las áreas establecidas en la ley, adaptar algunas áreas a las necesidades y características regionales, adoptar métodos de enseñanza…”

El decreto 1290 relacionado con la evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes en su artículo 3 señala los siguientes propósitos de la evaluación institucional de los estudiantes.

1. Identificar las características personales, intereses, ritmos de desarrollo y estilos de aprendizaje del estudiante para valorar sus avances.

2. Proporcionar información básica para consolidar o reorientar los procesos educativos relacionados con el desarrollo integral del estudiante.

3. Suministrar información que permita implementar estrategias pedagógicas para apoyar a los estudiantes que presenten debilidades y desempeños superiores en su proceso formativo.

4. Determinar la promoción de estudiantes.

5. Aportar información para el ajuste e implementación del plan de mejoramiento institucional.

Además, en 1998 se publicaron los lineamientos curriculares en Matemática amparada bajo la ley general de conocimientos básicos y los contextos como se muestra en la siguiente ilustración.

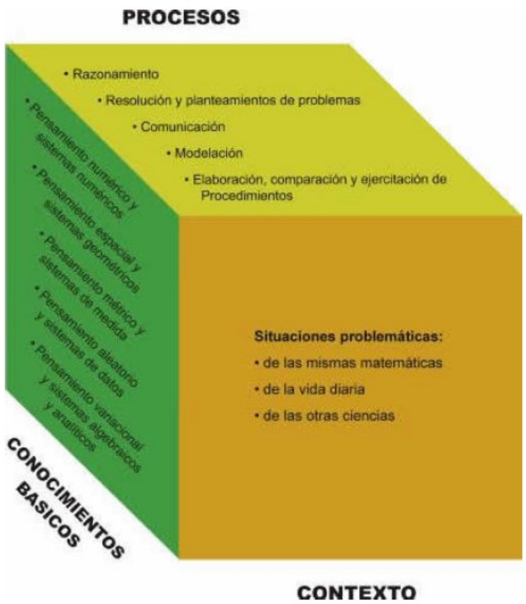


Ilustración 12 Procesos, conocimientos y contextos de las matemáticas. Recuperado de los lineamientos curriculares del MEN

3. Diseño Metodológico

3.1 Tipo de investigación.

Para el desarrollo de este proyecto se realiza una investigación cualitativa; según (Gibbs, 2012), "la investigación cualitativa pretende acercarse al mundo… y entender, describir y algunas veces explicar fenómenos sociales…Las maneras que usa para tal fin se basan en el análisis de las experiencias, interacciones y comunicaciones de los individuos o grupos las cuales se ven reflejadas en los registros de las prácticas, informes, videos, fotos,…" (p.12).

Además, se usará como enfoque la **Investigación Acción** que se define según (Elliot, 1993) como "el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción dentro en la misma" (p.88).

Para los docentes, la situación social que se plantea es cómo mejorar la práctica educativa, lo cual supone una serie de observaciones, actividades, reflexiones y asimismo, una postura al cambio, con el fin de producir una mejora en el ámbito educativo.

En dicha investigación, la validación de teorías se da a través de la práctica, por tal razón su objetivo fundamental según (Elliot, 1993) "consiste en mejorar la práctica en vez de generar conocimientos" (p.67), además para el ámbito de la educación se considera que para la transformación positiva de la práctica pedagógica, se deben considerar tanto el proceso como los resultados. (p.67). Para el docente investigador, mejorar su quehacer supondrá la convergencia de una serie de elementos como la motivación, la competencia y la disciplina en el aula de clase, aspectos que trascenderán en beneficio de toda la comunidad educativa.

Acorde a lo anterior, (Elliot, 1993) muestra como ejemplo que la investigación acción unifica procesos como: la enseñanza, el desarrollo del curriculum, la evaluación, la investigación educativa y el desarrollo profesional (p.72), puesto que, los anteriores elementos no se pueden considerar por separado, ya que el desarrollo y mejora de cada uno de ellos se debe dar en la práctica en forma reflexiva y continua.

Por lo tanto, para el fortalecimiento del pensamiento espacial en los estudiantes de la Institución Educativa Gustavo Cote Uribe, se deben poner en consideración: El PEI, las pruebas SABER, la evaluación, el rol del docente, el rol del alumno, las fases de aprendizaje, el nivel de habillidad del estudiante, el contexto del mismo e integrar todo en pro de mejorar la calidad de prácticas en el aula de clase.

3.2 Proceso de investigación.

(Llinares, 1991), citado en (MEN, Lineamientos Curriculares de Matemátics, 1998) se refiere a la indagación que el docente debe hacer antes, durante y después del proceso de enseñanza, proceso que denomina por fases, llamándolas fases pre-activa, interactiva y pos-activa, que junto a la investigación en el aula llevan al desarrollo profesional del docente; así pues, la fase pre-activa es la preparación de un bosquejo del qué y cómo enseñar, y para ello se debe establecer un conocimiento previo de los estudiantes sobre sus intereses, necesidades, preconceptos y reflexionar sobre la forma de adoptar el conocimiento de las matemáticas a las condiciones de ellos, reconocer la historia de los conceptos matemáticos para de esta manera, identificar las dificultades y errores que debieron superar; todo esto buscar impregnar las matemáticas de lo humano, debido a que en ocasiones se estigmatiza el error y no se ve como una posibilidad de aprender, también se deben seleccionar el texto, los materiales didácticos a usar y diseñar las situaciones problemáticas, todo esto se condensa en lo que se llama unidad didáctica (p.22).

Acorde a lo anterior, dentro de esta fase se realizó una revisión bibliográfica sobre la temática de interés y las recomendaciones didácticas; dado el objetivo de diseñar e implementar una secuencia didáctica que permitan fortalecer el pensamiento geométrico de los estudiantes de grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe, se realizó una revisión curricular, teórica , y didáctica de la enseñanza de la geometría, donde se profundizó sobre algunas características y propiedades de los triángulos, específicamente los puntos y líneas notables del triángulo, la transposición didáctica, la teoría de las situaciones didácticas y el modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría. Una vez realizada la anterior revisión teórica, se hizo una secuencia didáctica, y se tomó la recomendación de (Jaime A.,1993) en la que dice que en cuanto a posteriores investigaciones tengan por objetivo "diseñar unidades de enseñanza sobre otros temas tomando como fundamento el de los niveles de razonamiento y las fases de enseñanza del Modelo de Van Hiele" (p.297). De este modo, teniendo en cuenta lo anterior, se planteó estudiar los puntos y líneas notables del triángulo.

La fase interactiva, por su parte, se refiere a la puesta en acción del bosquejo, y trata de las interrelaciones entre docentes y estudiantes para establecer significados a partir de una situación problemática, donde tanto docente como estudiante aprenden, se establecen vínculos entre los nuevos conocimientos y los pre-saberes, se desarrollan habilidades sociales y comunicativas, lo cual permite que estas interacciones se conviertan en insumos para que el docente perfeccione su quehacer pedagógico y para la evaluación cualitativa (p.23).

Dentro de esta fase, para minimizar los errores en el momento de la aplicación de la propuesta, se realizó una prueba piloto en el año 2016, donde se afinaron las actividades de la secuencia didáctica, para su posterior aplicación en el año 2017, además dentro de esta fase de la investigación, se hizo también una prueba diagnóstica para detectar el nivel de razonamiento espacial desde el modelo de Van Hiele de los estudiantes del grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe, para ello se construyó una prueba con 8 preguntas abiertas, en cada interrogante se planteó una situación que debía justificar, a través de expresiones como: explique o por qué ;se hace necesario resaltar que las temáticas corresponden a lo visto en el grado séptimo, lo cual se constata con el hecho de haber sido el docente de geometría en ese año lectivo.

En este trabajo se abordaron específicamente las líneas del triángulo, llamadas mediatriz, mediana, altura y bisectriz, dicha estrategia estuvo compuesta de 13 guías (6 para el tema de la mediatriz del triángulo, 3 para la mediana del triángulo, 2 para la altura y 2 para la bisectriz), cada guía tenía una serie de actividades[8] (50 en total), e iniciaban siempre con una actividad denominada reto[9].

La evaluación final constó de 8 preguntas abiertas, sobre temas relacionados con las líneas notables del triángulo y una pregunta control que corresponde a un interrogante de la prueba diagnóstica, en donde se modificó la redacción; es de señalar que las respuestas de la prueba diagnóstica fueron socializada. Cabe anotar, que los resultados de los estudiantes se categorizaron siguiendo los niveles de razonamiento de Van Hiele.

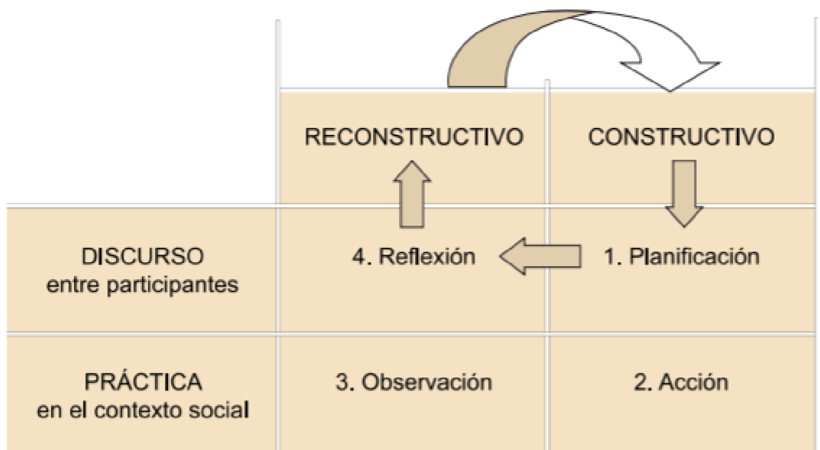
---

[8] Entendemos por actividad “conjunto de operaciones o tareas propias de una persona o entidad” (RAE, 2017).

[9] Entendemos por reto al “objetivo o empeño difícil de llevar a cabo, y que constituye por ello un estímulo y un desafío para quien lo afronta”. (RAE, 2017).

Finalmente, la fase pos-activa según es una fase de reflexión donde se confrontan lo resultados y lo que se esperaba (P.22), para ello, se realizó una triangulación teniendo en cuenta la teoría, la práctica y la reflexión a lo largo de todo el proceso de investigación.

Además, Rodríguez, D y Valldeoriola, J (2012) afirma que “la investigación acción se orienta hacia la resolución de problemas mediante un proceso cíclico que va desde la "actividad reflexiva" a la "actividad transformadora". Los momentos que constituyen la investigación acción pueden verse en la siguiente figura” (p.63).



Momentos de la I-A (Carr y Kemmis, 1988, pág. 197).

Ilustración 13 Momentos de Investigación Acción (Carr y Kemmis, 1988, pág.197).

Recuperado de http://bit.ly/2bPQqwy

3.3 Población y muestra

La población objeto de estudio está compuesta por 72 estudiantes del grado 8-1 y 8-2 de la jornada de la mañana de la I.E. Gustavo Cote Uribe de la ciudad de Bucaramanga(Colombia), que pertenecen a poblaciones en condiciones de vulnerabilidad, algunos viven en asentamientos, otros que fueron favorecidos con la viviendas gratis del gobierno, presentan en sus comunidades problemas de intolerancia e inseguridad, además existen familias desplazadas por el conflicto armado, desempleados, familias disfuncionales y sin formación profesional.

La muestra corresponde a 36 estudiantes (15 chicas y 21chicos) del grado 8-2 de edades que oscilan entre los 14 y 17 años, que en su mayoría habían sido alumnos en el año anterior (2016) en el grado séptimo y por ende, vieron las temáticas establecidas en el plan de asignatura de matemáticas del respectivo grado y acordes a los estándares de matemáticas dentro de las que se destacaban la clasificación de triángulos según sus lados y ángulos, transformaciones isométricas y otras que se incluyeron en la prueba diagnóstica, cabe recalcar que en el 2016 este curso recibió una enseñanza tradicional, cuya estructura de clase se basa en los lineamientos de un texto escolar y dichas actividades no fueron objeto de esta investigación.

Es importante anotar que se seleccionó el grado 8-2 porque es el grupo más disciplinado y cuyos estudiantes presentan mayor continuidad en cuanto a la asistencia a clases, en comparación con 8-1, sin embargo, cabe aclarar que aun así la inasistencia a clase en 8-2 es alta, en comparación a otras instituciones públicas de la ciudad.

3.4 Técnica e instrumentos de la recolección de la información

Para diagnosticar, diseñar, implementar y evaluar la efectividad de la propuesta didáctica de geometría en los estudiantes del grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe, se utilizaron técnicas para la supervisión de las actividades, registro de las observaciones, lo que sucedía durante la aplicación de los instrumentos y reflexión sobre sus alcances, limitaciones y dificultades. Además para refinar los instrumentos de recolección de datos, se realizó una prueba piloto con el grupo 8-1, entre los meses de septiembre y octubre del año 2016 con 40 estudiantes (22 chicos y

18 chicas) de la jornada de la mañana de la IE Gustavo Cote Uribe, lo cual permitió: (1) mejorar la prueba diagnóstica, ajustándose al modelo de Van Hiele en aspectos tales como el uso de un lenguaje sencillo y preguntas que permitieran la explicación por parte del estudiante; (2) renovar las actividades de la secuencia didáctica, de tal manera que tuvieran una secuencia lógica y unos objetivos claros; (3) identificar materiales pertinentes de usar por su seguridad, costo y propicios para la exploración.; (4) ajustar la metodología de la clase a las necesidades de la población.

Para ello se utilizaron las siguientes técnicas:

1. Diario de campo: La cual contiene fechas, hora de inicio, hora de finalización, temas y narraciones de las observaciones, reflexiones, recomendaciones y aspectos directamente relaciones con la forma en que los estudiantes se enfrentan a las actividades, las emociones del docente, todo lo que se perciba que puede afectar el normal desarrollo de las actividades, para esto, la investigación se apoyó en las siguientes categorías para su posterior análisis.

Categorías	**Subcategorías**	**Indicadores**
Educando	• Nivel de razonamiento	• Según el modelo de Van Hile el estudiante realiza sus actividades evidenciando. o Ningún nivel de razonamiento. o Visualizando elementos globales o irrelevantes. o Reconociendo propiedades.

	• Emociones	• Son las percepciones de los estados emotivos que tienen lugar mientras el estudiante desarrollar las actividades
Enseñanza-Aprendizaje de Geometría[10]	• Materiales y Recursos • Planificación, secuenciación y selección de los contenidos • Dificultades en la enseñanza de la geometría • Estrategias para la Enseñanza de la Geometría	Elementos que utiliza el maestro para desarrollar los contenidos geométricos. Entre ellos: materiales impresos, modelos, instrumentos, papel, cartón, etc. Cómo organiza sus clases el docente, cómo selecciona los contenidos geométricos y hace la secuenciación de los mismos en el aula. • Errores manifestados por el maestro y/o observados durante clases de Geometría. Junto a la percepción de los obstáculos e impedimentos para atender la enseñanza de la Geometría. • Acciones coordinadas o dirigidos por el maestro para implementar la enseñanza de la Geometría.
Docente	• Comunicación	• Es el lenguaje que asume el docente en el proceso de enseñanza aprendizaje

[10] Esta categoría, subcategorías y definiciones fueron tomadas de (Vilchez, 2004, pág. 335)

	• Actitud • Conocimiento	• Son los comportamientos que asume el docente frente al desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes. • Es el dominio del docente de los aspectos históricos, epistemológicos y didácticos que involucran el objeto de estudio.

Tabla 2 Categorías de Análisis

2. La prueba diagnóstica, que consta de 8 preguntas abiertas que buscan identificar cómo responden los estudiantes y de esta manera determinar su nivel de razonamiento, a priori se determinó para cada nivel cómo podían contestar los estudiantes y se contrastó con los resultados obtenidos.
3. Guías de trabajo, en las cuales los estudiantes registraron la solución a cada una de las situaciones que se plantean para cada sesión programada, al final de la clase el docente recogía las guías para su posterior análisis y una vez hecha esta tarea se les devolvían al estudiante, señalando aquellas actividades que se podían mejorar, esto se realiza en una hora de clase adicional a la de la implementación de la actividad, cabe recalcar que la intensidad de la asignatura de geometría para este proyecto fue de dos horas semanales.

Para determinar el nivel de razonamiento de algunas acciones, se realizó con anterioridad una lista de la forma en que se espera, los estudiantes razonen en cada actividad, para ello, se tomaron como base los trabajos realizados por Gualdrón (2011), los cuales corresponden al tema de Semejanza pero sirvió de guía para este nuevo tema, la tarea era pensar cómo anticiparse a las respuestas que podrían dar los estudiantes, tarea que ya se había hecho con la prueba diagnóstica con algunos temas del grado séptimo, y que luego se realizó en forma general para el tema de puntos y líneas notables del triángulo.

Nivel 1 Reconocimiento

Los estudiantes perciben las características de los puntos y líneas notables del triángulo en forma global. Aspectos característicos:

- Reconocen los puntos y líneas que se forman en cualquier triangulo, no reconocen las semejanzas o diferencias entre ellas.
- Reconocen puntos a igual distancia, visualizan cuáles están más distantes y cuáles más cercanos.
- Son capaces de plasmar o dibujar líneas y puntos en un triángulo sin tener presente aspectos como punto medio y perpendicularidad.

Nivel 2 Análisis

En este nivel los estudiantes reconocen que los puntos y líneas que se pueden formar en el triángulo tienen unos elementos, propiedades y se pueden aplicar a diversas situaciones. Aspectos característicos:

- Construyen líneas notables del triángulo como la mediatriz, la mediana, las alturas y las bisectrices.
- Construyen la mediatriz usando puntos a igual distancia de otros dos fijados previamente.
- Construyen la mediatriz de un triángulo usando rectas perpendiculares.
- Identifican aspectos matemáticos como que los puntos a igual distancia de los extremos de un segmento pasan por el punto medio del segmento y si se unen estos puntos, el segmento es perpendicular al segmento inicial.

- El centroide o centro de gravedad (baricentro) de un triángulo, se puede determinar como la intersección de los segmentos que unen el vértice y punto medio del lado opuesto (esta línea se llama mediana).

2 Registro fotográficos, los cuales evidencian las actividades más relevantes y que muestran entre otras la organización del salón, el trabajo colaborativo, la manipulación de material como tapas, cartón, palillos,…, la creatividad de los estudiantes y la dinámica de clase, no se realizaron grabaciones en video de clase porque se necesitaba que todos los estudiantes participara en las actividades y los niveles de ruido en la IE son muy altas.

3.5 Validación de los instrumentos

Para la validación de los instrumentos se realizó una prueba piloto con el grupo 8-1 en el año 2016, es decir, los instrumentos tuvieron una corrección previa a su aplicación en el grupo 8-2. Además, los instrumentos recibieron la aprobación por parte de la directora del proyecto la Dra. María Eugenia Serrano, quien tiene experiencia en el modelo de Van Hiele, puesto que este fue parte de su proyecto de pregrado y de maestría.

3.6 Resultado y discusión

Respecto al primer objetivo específico, concerniente a identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes, inicialmente se aplicó una prueba diagnóstica en el grupo 8-1 en el año 2016, se plantearon 12 preguntas abiertas, pero al contrastar sus resultados con el marco teórico, se verificó que esta no cumplía las condiciones para propiciar que los estudiantes explicaran sus respuestas, en ella lo que más se evidenciaba era si contestaban bien o mal, pero no su forma de explicar una situación

Ilustración 14 Aplicación prueba diagnóstica en 8-2

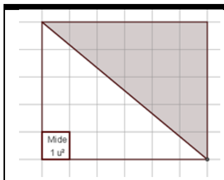
Dados estos resultados, para el año 2017, se reestructuró la prueba diagnóstica disminuyendo el número de preguntas a 8, las cuales igualmente incluían algunos temas precedentes que se enseñaron en el grado séptimo en el año 2016, y que fueron desarrollados evidentemente en este grado, puesto que se confirmó con el respectivo docente, pero estas preguntas exigían algún tipo justificación o explicación. Las respuestas evidencian algún nivel de razonamiento que puede tener un estudiante según el Modelo de Van Hiele, que en forma general lo podríamos resumir de la siguiente manera:

- **Sin nivel**: Cuando el estudiante deja las preguntas sin responder o sus respuestas no tienen nada que ver con lo que se plantea.
- **Nivel 1**: Incluye en sus respuestas aspectos globales (se parece a, se asemeja a,…).
- **Nivel 2**: Reconoce propiedades de las figuras o transformaciones en el plano.

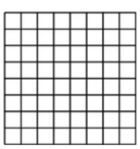
- **Nivel 3**: Establece relaciones entre las propiedades.

Para dar más claridad, a continuación se incluye una tabla con las preguntas y a priori se estableció lo que se esperaba como respuesta de los estudiantes para clasificarla dentro de un nivel, una vez revisada la prueba diagnóstica, se ajustó aún más la tabla, puesto que el proceso de investigación es cíclico.

Pregunta	**Respuesta que se espera según nivel de razonamiento**		
	Nivel 1. Reconocimiento	**Nivel 2. Análisis**	**Nivel 3. Clasificación**
1. ¿Un triángulo rectángulo puede ser isósceles? Explique su respuesta.	Construye un triángulo cualquiera o expresa que todos los triángulos son iguales o diferentes.	Construye el ejemplo de un triángulo rectángulo que tiene sus dos catetos iguales o expresa esto en palabras.	Explica las características del triángulo isósceles y del triángulo rectángulo, para establecer implicaciones entre sus características.
2. Si el área del cuadrado pequeño mide 1 u^2.	Halla el área contando el número de cuadrados en el rectángulo.	Halla el área multiplicando la base por la altura.	

 a. ¿Cuánto mide el área de todo el rectángulo? (Explique cómo halló el resultado).			
b. ¿Cuánto mide el área del triángulo sombreado? (Explique cómo halló el resultado).	Halla el área triángulo recubriendo con cuadrados de $1u^2$.	Halla el área dividiendo el área del rectángulo entre dos.	
3. Coloree el triángulo[11] o los triángulos que observa en el siguiente corazón. ¿Por qué las demás figuras no son triángulos? 	Reconoce que el triángulo tiene tres lados.	Reconoce que el triángulo tiene tres lados rectos.	

[11] Se acordó con los estudiantes que se trataba de colorear la superficie triangular.

4. ¿Los ángulos de un triángulo suman 180°? Explique su respuesta.	No hay distinción entre ángulos y lados del triángulo.	Muestra ejemplo particulares donde la suma es de 180º	Deduce de forma lógica porqué la suma es de 180º
5. Dibuje un triángulo rectángulo en la siguiente cuadrícula. ¿Por qué a ese triángulo se le llama triángulo rectángulo? 	Dibuja la figura un triángulo que tiene un ángulo recto.	Explica que se llama triángulo rectángulo porque tiene un ángulo recto.	
6. ¿La siguiente figura corresponde a un triángulo? ¿Por qué? 	No observan un triángulo porque es una figura de cuatro lados.	No puede corresponder a un triángulo porque corresponde a la familia de cuadriláteros	
7. El eje de simetría de una figura es una línea imaginaria que divide la figura en dos partes iguales. ¿Es posible que	Muestra ejemplos de figuras con un eje de simetría.	Muestra ejemplos de figuras con más de un eje de simetría.	

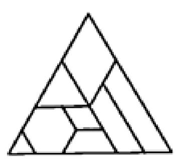
una figura tenga más de un eje de simetría? Explique			
8. Coloree las figuras que corresponden a paralelogramos y escriba todas sus características relacionadas con sus lados, ángulos y diagonales. 		Identifica el rombo y romboide como paralelogramos.	Identifica el rombo y romboide como paralelogramos y establece relaciones entre propiedades como la suma interna de sus ángulos, el punto de corte de las diagonales.

Tabla 3 Prueba Diagnóstica

Los resultados de la prueba diagnóstica permitieron identificar 9 estudiantes que no muestran algún nivel de razonamiento, es decir, la mayoría de preguntas las dejaron en blanco o respondieron cosas que nada tienen que ver con la temática, aunque presentan algunos elementos del siguiente nivel; por su parte, 21 estudiantes se encuentran en el *nivel 1 de reconocimiento*, 9 de los cuales presentan elementos del siguiente nivel , en todo caso estos 21 estudiantes son capaces de asignar nombres a algunas figuras geométricas y sus descripciones se basan en el aspecto físico o parecido a alguna figura geométrica, y solo un estudiante está en el *nivel 2 Análisis*, es decir, es capaz de reconocer propiedades de la figuras geométricas. Cabe recalcar que en el momento de la prueba a los estudiantes se les indicó no dejar preguntas sin responder. La pregunta 8 se omitió para el análisis puesto que ningún estudiante mostró algún nivel de razonamiento, varias razones son posibles: por ser la última pregunta no se respondió, en especial es una pregunta que requiere un nivel de razonamiento mayor, para ello no solo basta visualizar la figura sino que se debe conocer la definición de paralelogramo y relacionar propiedades, también cabe aclarar que los 5 estudiantes que no asistieron a clase no se incluyeron en el análisis.

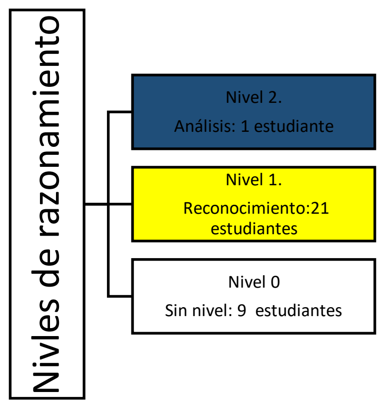


Ilustración 15. Nivel de razonamiento de los estudiantes de 8-2

A continuación se muestra el nivel de los estudiantes para cada pregunta, a cada estudiante se le asignó como nombre E1, E2,…, E36.

CÓDIGO ESTUDIANTE	Nivel de Razonamiento								
	P1	P2a	P2b	P3	P4	P5	P6	P7	Prevalente
E1									
E2									
E3*									
E4									
E5									
E6									
E7									
E8									

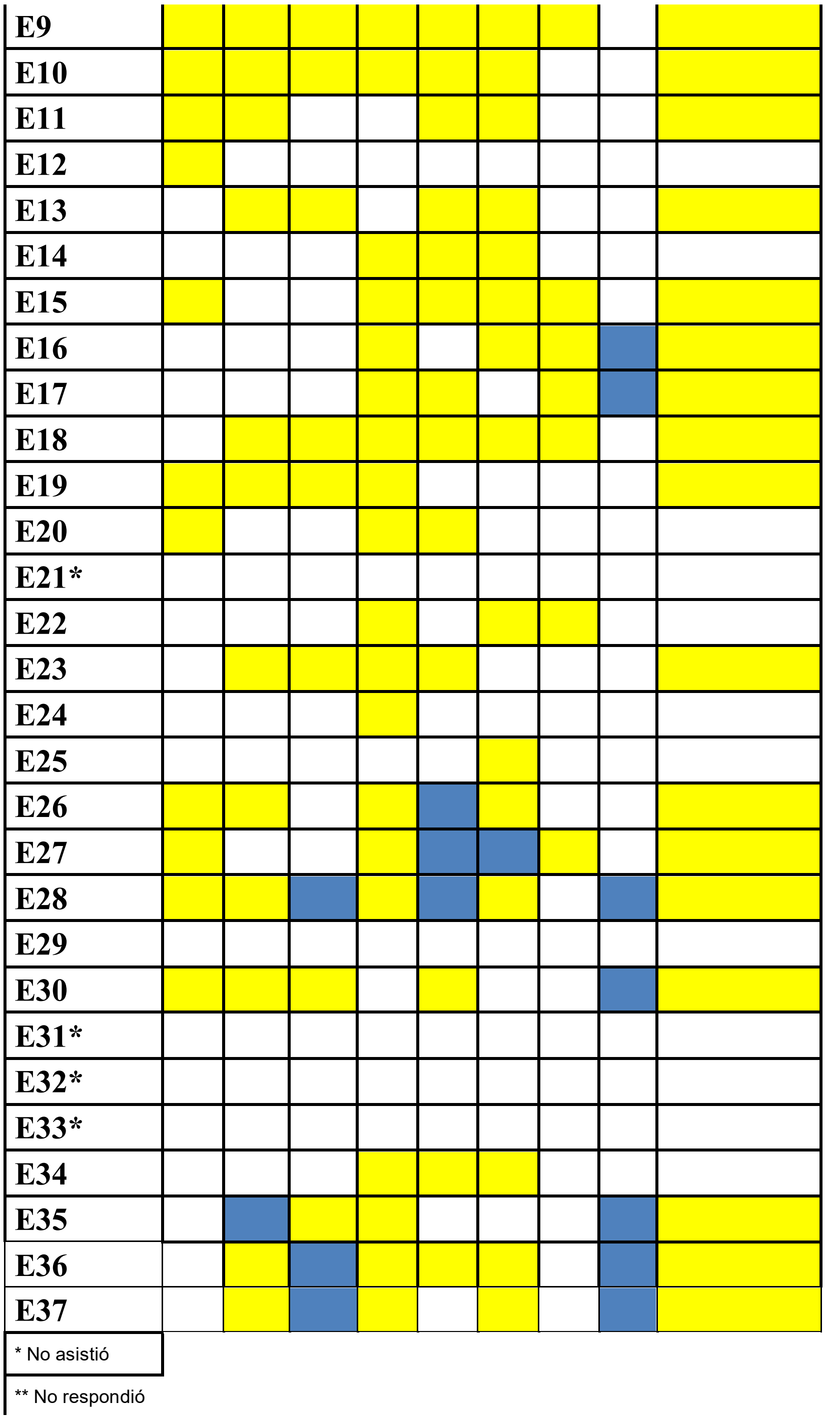


Ilustración 16 Nivel de razonamiento de los estudiantes de 8-1 por pregunta

La siguiente tabla muestra el consolidado de estudiantes en cada nivel de razonamiento.

Nivel de Razonamiento	PREGUNTA							
	1	2ª	2B	3	4	5	6	7
Sin Nivel No responden o sus respuestas son incoherentes.	16	15	17	8	11	12	18	23
Nivel 1 Reconoce figuras por su parecido a algo.	16	15	10	24	17	19	14	1
Nivel 2 Reconoce propiedades.	0	2	5	0	4	1	0	8

Tabla 4 Consolidado nivel de razonamiento 8-2 por pregunta

Los anteriores consolidados son independientes de si la respuestas son correctas o incorrectas, si se tienen en cuenta las notas de un examen tradicional, el promedio del grupo fue de 18 en una escala de 10 a 100, pero en todo caso se evidencia que las respuestas de los estudiantes se basa en el reconocimiento de aspectos globales e irrelevantes o se tiene un desconocimiento total de los temas, pese a que se trató el año anterior.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos del tipo de respuestas de los estudiantes que los llevó a ser catalogados en algún nivel de razonamiento.

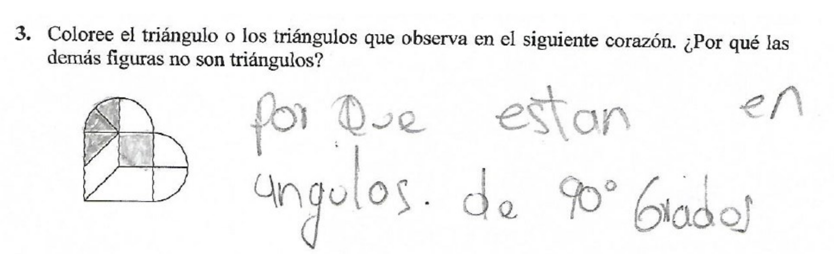
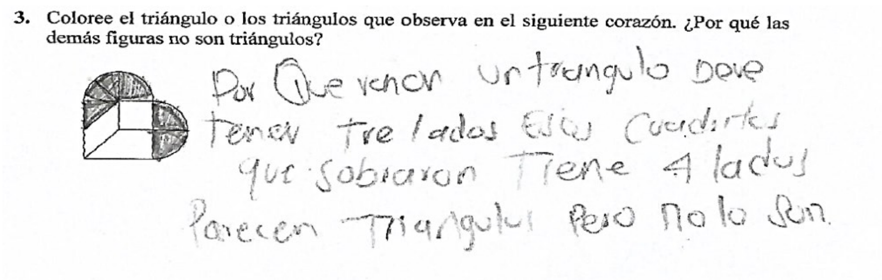


Ilustración 17 Respuesta sin nivel de razonamiento

En la respuesta anterior se evidencia que el estudiante no diferencia entre un triángulo y un cuadrilátero.

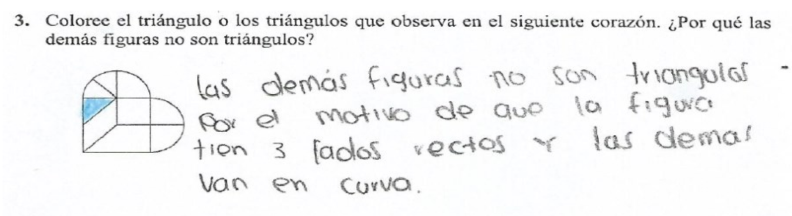


3. Coloree el triángulo o los triángulos que observa en el siguiente corazón. ¿Por qué las demás figuras no son triángulos?

Por Que venor un triangulo Deve tener Tre lados Esto Cuadritos que sobraron Tiene 4 lados Parecen Triangulos Pero No lo Son.

Ilustración 18 Respuesta del nivel 1(Reconocimiento)

En esta respuesta el estudiante es capaz de visualizar que los triángulos tienen tres lados pero no reconoce en ella sus principales elementos.



3. Coloree el triángulo o los triángulos que observa en el siguiente corazón. ¿Por qué las demás figuras no son triángulos?

las demás figuras no son triangulos por el motivo de que la figura tion 3 lados rectos y las demas van en curva.

Ilustración 19 Respuesta de nivel 2 de Análisis (Prueba piloto).

En esta respuesta, el estudiante identifica que el triángulo está formado por segmentos de recta.

Acorde al objetivo específico de diseñar una secuencia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial, se creó la siguiente secuencia didáctica para abordar temas relacionados con los puntos y líneas notables del triángulo, lo cual se muestra en el número de estudiantes sin nivel de razonamiento, la mayoría se encuentran en el nivel 1 de reconocimiento y dentro de este, se podría hablar de grados de dominio de cada nivel, pero que no será parte de la investigación para no extendernos más, al respecto se podría usar el método que considera que el cambio de un nivel a otro es continuo y dentro de estos procesos hay grados de adquisición de cada nivel, uno de los métodos de evaluación se puede ampliar en Jaime, A (1993).

La cantidad de actividades de la secuencia didáctica se ajusta al nivel de complejidad de la temática, se enlaza cada tema en forma lógica, teniendo presente que se ajuste al ritmo de aprendizaje de los estudiantes, cada guía fue aplicada previamente a un grupo del grado octavo, que consideramos como prueba piloto, con el fin de realizar los ajustes al lenguaje y que estos estén acordes al nivel de razonamiento de los educandos.

Algunos de los ejes temáticos y problemas se muestran en la tabla y sigue las etapas de planteamiento del problema, exploración y aplicación; en cada una de estas se establece un diálogo continuo a través de preguntas, con el fin de conceptualizar cada temática, para lo cual se construyó una secuencia didáctica, donde se condensan los temas relacionados con los puntos y las líneas notables del triángulo, estos temas más allá de sus implicaciones prácticas son ejemplos sustanciales de cómo se puede motivar en el aula a través de una dinámica de clase diferente a la tradicional de tiza y tablero, y que además permite que el estudiante tenga una experiencia de aprendizaje propicia para que mejore su nivel de razonamiento.

Temas de la secuencia didáctica	**Retos o actividades que dan inicio al tema dentro de la secuencia didáctica**	
La mediatriz	**# 1**. En una granja hay dos corrales y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales. Determina al menos 10 posibles ubicaciones	**# 2**. En una granja se amplió el número de corrales de dos a tres y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia a cada uno de los corrales. Determina la ubicación del

	del grifo.[12]	grifo.[13]
La mediana	**# 3.** Dado un triángulo[14] hecho en cartulina tratar de equilibrarlo con la punta de un lápiz.	
La altura	**#4** Construir un triángulo con palillos y medir las alturas.	
La bisectriz	**# 3.** Un agrónomo se dirige desde su casa hasta la ciudad a caballo pero debe pasar por el río para que el animalito tome agua. Su casa y la ciudad quedan del mismo lado del rio. Ayúdale a encontrar el camino más corto para ir de su casa a la ciudad pasando por el rio.	

Tabla 5 Temas de la secuencia didáctica

Para la mediatriz de un triángulo, que consta de 6 guías, y va desde un reto inicial para identificar la mediatriz como un conjunto de puntos con ciertas características hasta el circuncentro como un punto que resulta de la intersección de tres mediatrices, los retos propician la exploración con materiales concretos, tales como las tapas plásticas de la gaseosa , las cuales fueron recolectadas

[12] En (Garcia & López, 2008) el problema aparece "Carlos vive a la misma distancia de la casa de Ara (punto A) que de la de Bety (punto B). Marca con puntos cinco lugares diferentes donde puede estar la casa de Carlos" (P.40).

[13] En (Garcia & López, 2008) el problema aparece como "se va a construir un centro comercial y se desea que esté a la misma distancia de las tres unidades. Identifique con un punto el lugar donde se tendría que construir el centro comercial. Haga la construcción en su cuaderno" (P.68).

[14] Se acordó con los estudiantes que nos referíamos a la superficie triangular

por los estudiantes del grupo, además de cumplir una función pedagógica fueron entregadas al final en la campaña de la Fundación SANAR, quienes recolectan las tapas plásticas para obtener recursos económicos para el tratamiento de niños con cáncer.

Ilustración 20 Donación de tapas en las urnas de la fundación SANAR

Dentro de esta unidad, la guía No. 1 buscaba introducir a los estudiantes en una exploración usando tapas y midiendo para visualizar la mediatriz y no solo citar una definición desprovista de significado. El reto o situación problemática surge en una granja, que podría ser la granja existente en la institución con la siguiente estructura: planteamiento de la situación problemática que hemos llamado reto, descripción de la actividad (lo qué tiene que hacer), los materiales a usar y una orientación, que es el resumen de lo que el docente ha explicado en la fase de información, para aquellos estudiantes que no escucharon o no lograron captar la idea de lo que se desea hacer, o simplemente desean volver a enlazarla.

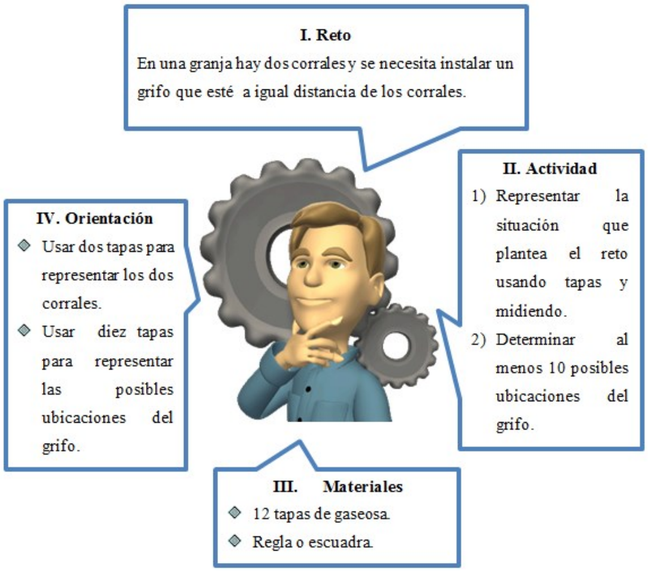


Ilustración 21 Diseño guía No. 1

De esta manera podríamos describir que pretendía cada guía alrededor de la mediatriz.

Guía	Retos o actividades	Objetivo
1	En una granja hay dos corrales y se necesita instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales.	Identificar la mediatriz como un conjunto de puntos con ciertas características. • Puntos con igual distancia a dos puntos fijos • Puntos en línea recta. • Puntos infinitos.
2	Dado un conjunto de puntos identificar cuáles están a igual distancia de los extremos de un segmento.	Identificar la mediatriz como un conjunto infinito de puntos que se encuentran a igual distancia de los extremos un segmento.

3	Usando acetatos que tienen la forma de la letra L, verificar si las rectas son las mediatrices del segmento AB y corregir aquellas que estén mal.	Identificar la mediatriz como una recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.
4	En una granja se amplió el número de corrales de dos a tres y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia a cada uno de los corrales.	Identificar el circuncentro como el punto a igual distancia de otros tres puntos fijos.
5	Ubicar el circuncentro de los triángulos.	Identificar el circuncentro como la intersección de las mediatrices del triángulo.
6	Aplicaciones del circuncentro en la construcción.	Resolver situaciones problemáticas relacionadas con el circuncentro. Reconocer que el circuncentro es el centro del círculos cuya circunferencia toca todos los vértices del triángulo

Tabla 6 Actividades y objetivos de la mediatriz y el circuncentro

Una nueva situación con el nombre de reto, resultó muy interesante, ¡otra forma de abordar un problema!, algo diferente a lo que cotidianamente se hacía en geometría, ante la limitaciones tecnológica no nos detuvimos en generar actividades de la geometría activa.

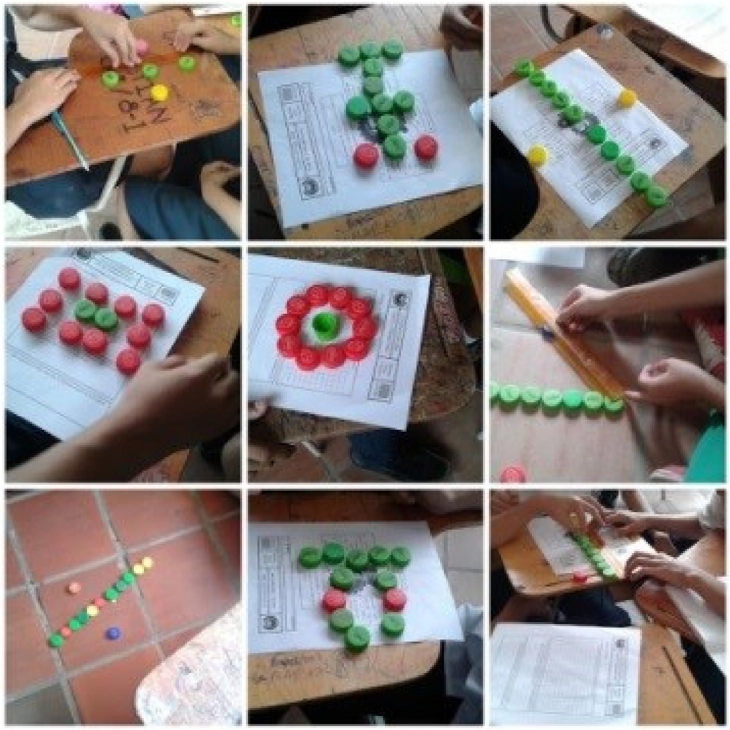


Ilustración 22 Proceso de solución del primer reto usando tapas

En las fotos se observan cómo los estudiantes naturalmente con tapas y tomando medidas resolvieron la situación planteada.

El primer reto de la **guía No 1** pedía ubicar 10 puntos que estuvieran a igual distancia de dos puntos fijos, en una situación problema "En una granja hay dos corrales y se necesita instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales", además, los estudiantes tuvieron que identificar el punto más cercano que cumple las ya mencionadas características, todos los equipos de trabajo lograron resolver correctamente el reto.

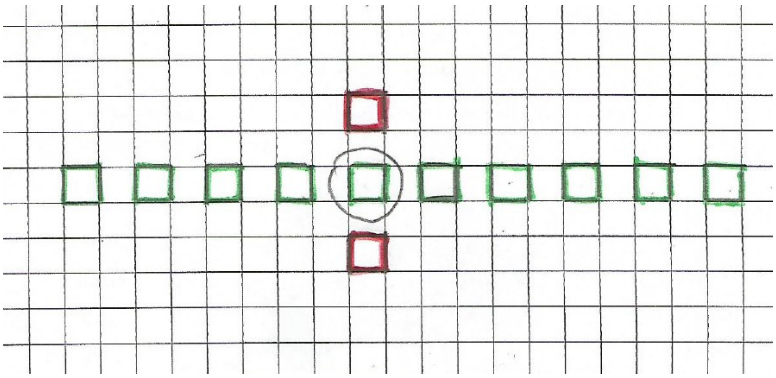


Ilustración 23 Grifos a igual distancia de dos corrales (Solución de un estudiante de 8-2)

Los cuadrados verdes representan los grifos y los rojos los corrales, el cuadrado en un círculo representa el grifo a menor distancia, esta solución es la representación de lo que cada grupo construyó con las tapas, además se observa que identificó el punto de menor distancia a los dos corrales, sin embargo la mayoría no lograron identificar la de menor distancia.

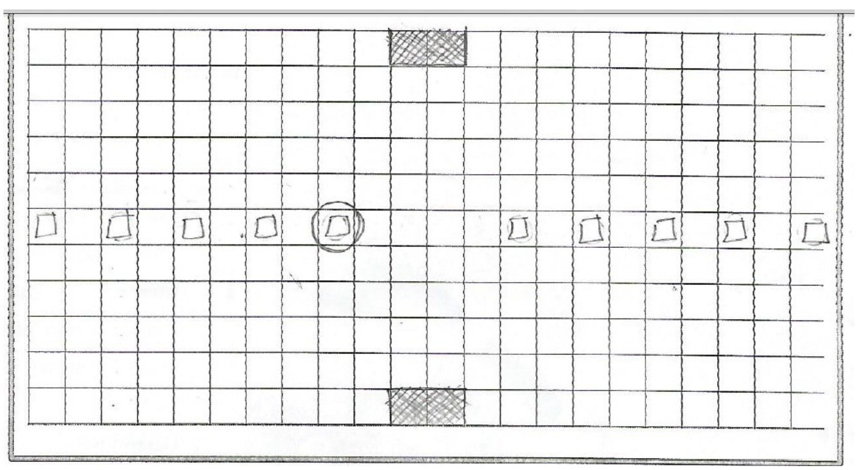


Ilustración 24 Los puntos de la mediatriz (solución de estudiante un de 8-2)

En la anterior solución el estudiante no señaló el de menor distancia, sin embargo al volver a mirar la pregunta:" *¿Cuál de las posibles ubicaciones del grifo resultaría la más económica? ¿Por qué? (En el dibujo anterior enciérrela en un círculo)",* como docente esperaba que señalaran todos los estudiante como en la ilustración 23, pero para que todos lo hicieran se debió plantear la pregunta de otra manera como “busque una ubicación que sea la más cercana posible a los dos corrales”, en todo caso las respuestas de todos los estudiantes fue correcta puesto, de todos los puntos que ellos representaron debían buscar el más cercano a los dos corrales, así no fuera el que yo quería que señalaran y en cuánto a la pregunta 3 ¿Qué características comunes tienen las posibles ubicaciones del grifo?, las respuestas fueron muy variadas tales como “Mide lo mismo entre los dos corrales”, “cada grifo se aleja más a los corrales”,” que son del mismo color”, “son iguales de grandes”, “todos botan agua y todos van a abastecer a los dos corrales de su cantidad de agua”, ”que todos están centrados en medio de los dos grifos”, la mayoría basaba su respuestas en los aspectos físicos de las figuras, lo que se queríamos era que descubrieran que estaban en línea recta, pero las anteriores respuestas son correctas por el tipo de pregunta, sin embargo como se puede ver un estudiante observó que estaban los puntos estaban centrados, una posible pregunta hubiese sido ¿Qué figura geométrica se puede formar al unir los puntos que representan los grifos?

Reflexión: Aun aplicando una prueba piloto, se puede ver que no fue suficiente, la actividad docente es continua no tiene fin, ni aún después de haber aplicado los instrumentos, el mejoramiento continuo debe estar inmerso en nuestra profesión, para ello la reflexión se debe dar en todo momento antes, durante y después de la intervención de clase. Una pregunta planteada en una evaluación puede tener múltiples interpretaciones, por ello es necesario enfocarnos en las respuestas de los estudiantes para darnos cuenta, que muchas respuestas que al principio nos parecían absurdas, tienen mucho sentido cuando miramos el trasfondo de lo que se hizo en clase y de lo que se pregunta.

Para la ***guía No. 2***, previamente se le dio nombre a algunos elementos como al punto de menor distancia (**punto medio**) y al conjunto de puntos a igual distancia (**la mediatriz**), explicando detalladamente sus características y acorde al *nivel 1 de visualización en la fase de información*.

En estas actividades los estudiantes exploraron cada una de las propiedades de la mediatriz relacionadas con una de sus propiedades[15] , todos los estudiantes fueron capaces de identificar la mediatriz.

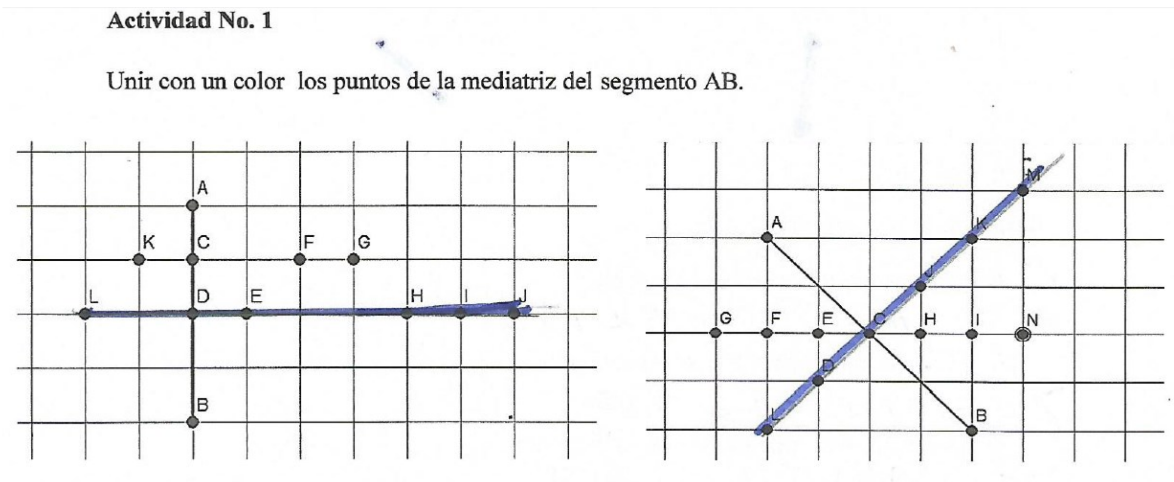


Ilustración 25 Los puntos que pertenecen a la mediatriz (solución de un estudiante de 8-2)

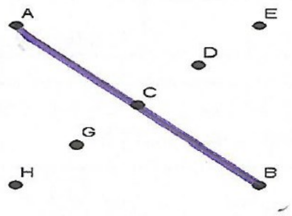
Para la ***Actividad No. 2***, dar dos instrucciones en un mismo punto generó algo de confusión, por una parte se pedía trazar la mediatriz y por otra, unir con segmentos de colores los pares de puntos con igual distancia.

---

[15] Teorema: Si un punto está sobre la mediatriz de XY entonces equidista de X y Y. (Berrío, Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en el proceso de justificación teórica en la resolución de problemas de geometría., 2016, pág. 50)

Actividad No. 2

Tomar las distancias y completar la tabla. Luego con un mismo color unir los pares de segmentos que tienen la misma distancia y trazar la mediatriz.



DISTANCIAS	
AC= 2,5 cm	BC=2,5 cm
AE=4,2 cm	BE= 3 cm
AD= 3,5 cm	BD= 2,5 cm
AG= 2,5 cm	BG= 3 cm

Rta = NO se pudo trasar mediatriz.

Ilustración 26 Los puntos que pertenecen a la mediatriz (solución de un estudiante de 8-2)

La mayoría de los estudiantes asistentes, resolvieron correctamente los puntos de esta actividad, en las situaciones no se incluyó cuadricula, este caso debían resolver las situaciones usando regla o escuadra.

La ***actividad No. 3***, era la más interesante puesto que pedía dibujar la mediatriz y no se daba ninguna instrucción de cómo, 19 de los 27 estudiantes la resolvieron satisfactoriamente.

Actividad No. 3

Trazar la mediatriz del segmento AB

Ilustración 27 Construcción de la mediatriz usando puntos (solución de un estudiante de 8-2)

Para el desarrollo de estas actividades el estudiante debía ya estar familiarizado con lo ya ha visualizado, pero para esta tarea debía empezar a hacer acciones concretas como verificar distancias y que estas distancias fueran iguales.

La guía 3, buscaba explorar la definición[16] de la mediatriz, fíjese que primero se exploró una propiedad y luego la definición, esto se hizo puesto que en la prueba piloto se observó que para los estudiantes, visualizar una recta perpendicular era difícil y se buscó asociar la perpendicular con algo y se pensó en la letra **L,** y para facilitar la exploración en un acetato con la forma de la letra **L**.

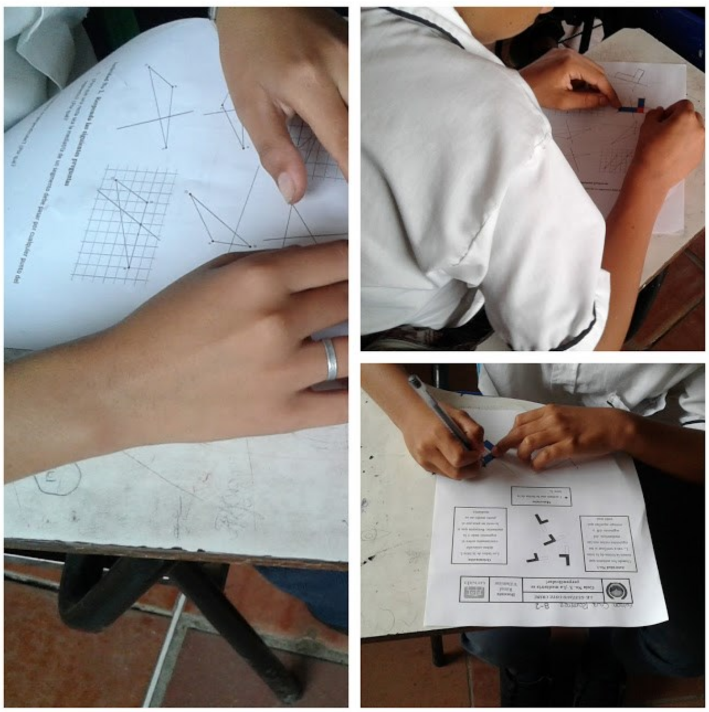


Ilustración 28 Estudiantes de 8-2 usando los acetatos en forma de L

[16] Definición: "Si una recta es perpendicular a un segmento y pasa por su punto medio, entonces en mediatriz del segmento" (Berrío, Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en el proceso de justificación teórica en la resolución de problemas de geometría., 2016, pág. 50)

La ***Actividad No. 1*** correspondiente a identificar las mediatrices de los segmentos fue hecha correctamente por 16 de los 28 estudiantes.

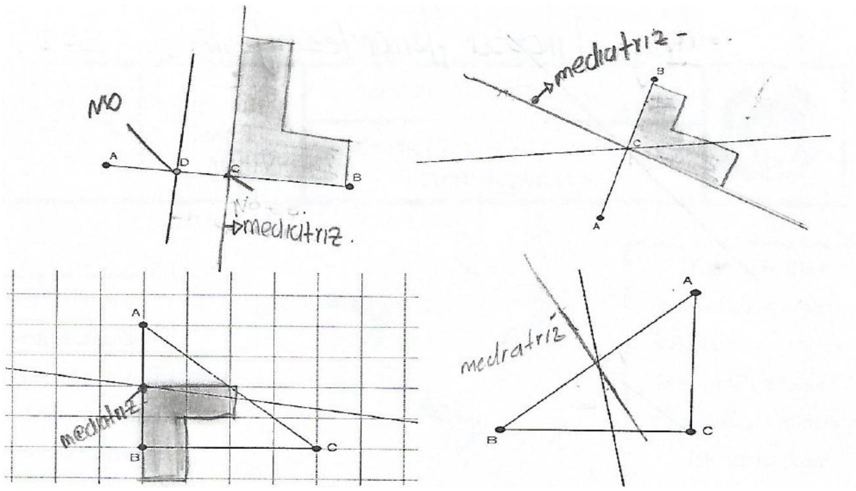


Ilustración 29 La recta perpendicular asociada a la letra L (actividad realizada por un estudiante de 8-2)

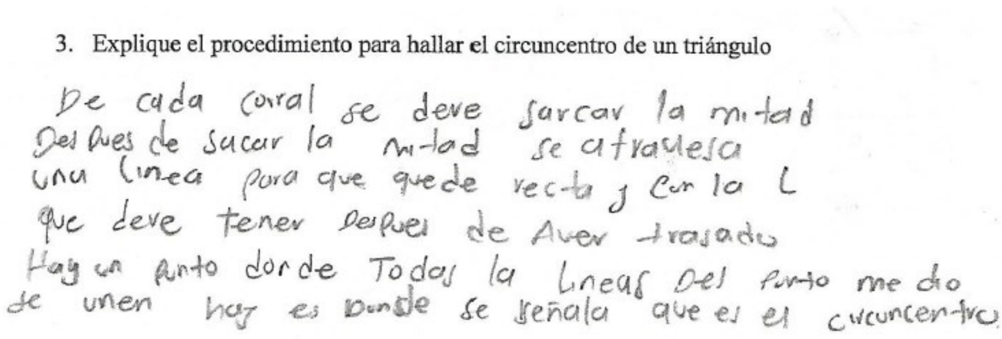
En la primera pregunta de la ***Actividad No. 2*** ¿La mediatriz de un segmento debe pasar por cualquier punto del segmento? ¿Por qué?, este aspecto que ya se había explorado en las anteriores guías, menos de la mitad de los estudiantes asistentes respondieron correctamente y de muy pocos, argumentan convincentemente, para superar esta dificultad se debió incluir una guía sobre punto medio, algo que no fue previsto en la prueba piloto.

La guía 4, planteaba como un nuevo reto, similar al primero, pero en este caso tenían que ubicar un grifo a igual distancia de tres corrales, se les indicó a los educandos, usar la misma estrategia para determinar los grifos que están a igual distancia de dos corrales y para ello cada grupo disponía de 33 tapas plásticas de gaseosa.

Ilustración 30. Proceso de construcción del circuncentro

Todos los grupos lograron resolver el reto y a la pregunta ¿cuántos grifos están a igual distancia de los tres corrales?, la mayoría afirmaron que evidentemente había un punto a igual distancia de los tres puntos fijos (corrales).

En la ***guía No. 5***, la mayoría de los estudiantes construyeron con éxito el circuncentro de los triángulos dados. Cuando se añade a un procedimiento una situación problemática, 18 de los 29 estudiantes lo resolvieron apropiadamente y cuando se le pide que expliquen el procedimiento, la mayoría obvia pasos o no utilizan un lenguaje apropiado, solo 5 de los 29 estudiantes describieron el procedimiento adecuadamente.



3. Explique el procedimiento para hallar el circuncentro de un triángulo

De cada corral se deve sarcar la mitad
Despues de sacar la mitad se atraviesa
una linea para que quede recta y con la L
que deve tener despues de aver trasado
Hay un punto donde Todas la lineas del punto medio
se unen hay es donde se señala que es el circuncentro

Ilustración 31 Procedimiento para hallar el circuncentro (solución de estudiante de 8-2)

En la ***guía No. 6***, los estudiantes resolvieron diversas situaciones donde integraba todo el tema alrededor de la mediatriz y el circuncentro, se les preguntó para qué servía la mediatriz y el circuncentro, la mayoría asociaban su utilidad a un tema netamente para la asignatura, respuestas como: “los mediatriz sirve para ubicar puntos a igual distancia de otros dos”, “el circuncentro sirve para trazar un circulo que pase por los vértices del triángulo”; muy pocas evocaron los ejemplo de los retos precedentes, y señalaron que servían “para ubicar grifos en una granja y para instalar una fuente en el centro”.

El eje temático de la mediana, que consta de 3 guías, y va desde un reto inicial para identificar el punto de equilibrio de un triángulo, hasta una guía donde se trabajan dos aplicaciones tales como suspender un triángulo de un hilo y que se mantenga totalmente horizontal hasta la construcción de pirámides de base triangular con la condición de establecer su altura en el punto donde se intersecan las medianas de la base. Los materiales que se usaron fueron triángulo de cartón, palillos y plastilina. Al final la plastilina se recogió para ser utilizada nuevamente.

Guía	Retos o actividades	Objetivo
7	Mantener un triángulo en equilibrio sobre la punta de un lápiz.	Identificar el baricentro[17] como el punto de equilibrio en un triángulo.
8	Ubicar el punto de equilibrio de los triángulos.	Identificar el baricentro como el punto de intersección de las medianas.
9	• Colgar triángulos del baricentro y que se mantenga totalmente horizontal. • Construir pirámides de base triangular cuya altura se ubica sobre el baricentro.	Identificar el baricentro como el punto de equilibrio que se puede aplicar en situaciones cotidianas y de la construcción.

Tabla 7. Actividades y objetivos de la mediana y el baricentro

Los estudiantes se dispusieron a realizar las actividades colmados de muchas expectativas, al escucharse expresiones de admiración ante los descubrimientos, ellos mostraban con orgullo las soluciones, tal como lo hizo hace siglos Arquímedes, quien descubrió este punto equilibrando una superficie triangular de densidad uniformemente distribuida.

[17] Hemos acordado que cuando nos refiramos al baricentro del triángulo, nos referimos al baricentro de la superficie triangular.

La ***guía No 7*** buscaba que ellos por sí mismos descubrieran la forma de ubicar el baricentro del triángulo en una hoja de papel, la mayoría logró describir por cuál parte del lado del triángulo para la línea que viene desde el vértice opuesto y pasa por el punto de equilibrio, a lo que se refirieron con expresiones como "línea que pasa por el punto medio", pero en el momento de describir el procedimiento, la mayoría no logró describir detalladamente el procedimiento, solo dos de los estudiantes dieron una descripción detallada del procedimiento para hallar el baricentro.

Tabla 8 Estudiantes buscando el baricentro (centroide), tal como lo hizo Arquímedes

La ***guía No. 8***, tenía como finalidad que los estudiantes lograran realizar la construcción de las medianas, además, al preguntárseles ¿es posible que el baricentro se ubique afuera del triángulo?, todos los educandos asistentes respondieron acertadamente y sus argumentos se basaron en las exploración previas.

Ilustración 32 Trabajo colaborativo para resolver guía.

La ***guía No. 9***, buscaba que los estudiantes se familiarizaran con otras aplicaciones del baricentro, y para ello se pensó, suspender una superficie triangular con un hilo y que este quedará totalmente horizontal y la construcción de pirámides con bases triangulares y que la altura de ella quedará exactamente sobre el baricentro, fue un tiempo de exploración y diversión, donde los estudiantes usaron variados elementos como cartón, palillos, y plastilina, identificar el baricentro no fue problema, el trabajo colaborativo permitió que algunos estudiantes superan sus dificultades y entre todos los integrantes del grupo lograrán realizar sus construcciones.

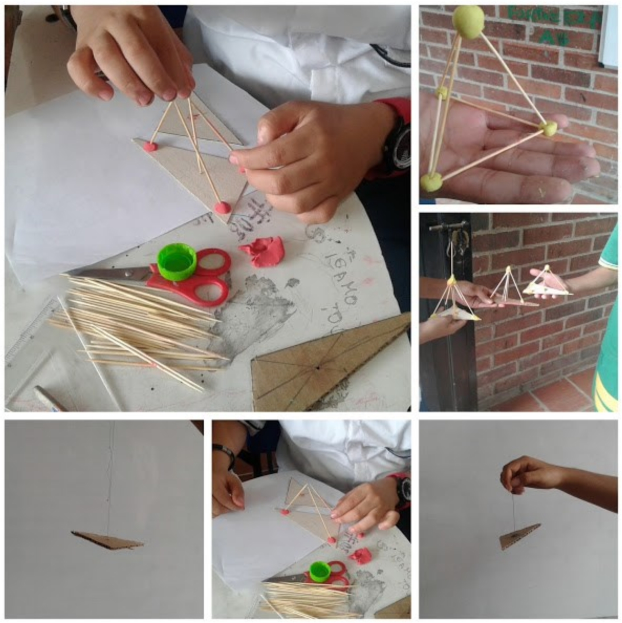


Tabla 9 Aplicaciones del baricentro

Para la altura de un triángulo se trabajaron 2 guías, y van desde el reto inicial de medir la altura de un triángulo hecho con palillos, hasta el establecimiento de procedimientos, en estas actividades a los estudiantes se les dificultó identificar la altura de los triángulos cuando estos se ubicaban fuera del triángulo, pese a que la actividad inicial se realizó midiendo la alturas de triángulo de cartón apoyándolos sobre cada lado.

Guía	Retos o situaciones	Objetivo
10	Medir la altura de tres triángulos de cartón.	Reconocer que un triángulo tiene tres alturas.
11	Halla la altura de diferentes objetos. Hallar la altura de diversos triángulos en la hoja de papel.	Identificar las alturas de un triángulo y realizar correctamente su construcción.

Tabla 10 Actividades y objetivos de la altura y el ortocentro

La ***guía No. 10***, permitió aclarar porqué se habla de las tres alturas del triángulo, para ello se realizó una exploración, donde se construyeron las superficies triangulares y al apoyar cada triángulo sobre cada uno de sus lados se logró identificar las alturas.

La ***guía No. 11***, permitió que los estudiantes ejercitaran un procedimiento para hallar cada una de las alturas, que básicamente era seguir ejercitándose en la construcción de rectas perpendiculares.

Reflexión: En este punto de la propuesta ya se ha hablado de tres tipos de líneas en un triángulo, la mediatrices, las medianas y las alturas, en las actividades se observó que tienen a construir en lugar de una de las líneas otra y que tienden a construir la que consideran más sencilla sin centrarse en la pertinencia de su aplicación.

Guía	**Retos o situaciones**	**Objetivo**
12	Un agrónomo se dirige desde su casa hasta la ciudad a caballo pero debe pasar por el río para que el animalito tome agua. Su casa y la ciudad quedan del mismo lado del rio. Ayúdale a encontrar el camino más corto para ir de su casa a la ciudad pasando por el rio.	Visualizar las bisectriz de del ángulo de un triángulo en la solución de una situación real.
13	Hallar la bisectriz doblando los triángulos de tal manera que coincidan dos lados	Identificar la bisectriz de un triángulo como un eje de simetría.

	consecutivos.	

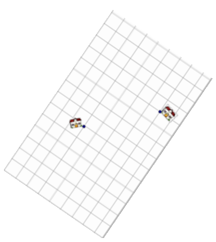
Tabla 11 Actividades y objetivos de la bisectriz y el incentro

El eje temático de la bisectriz consta de dos guías, inicialmente se plantea el reto de determinar el camino más corto para ir de un punto a otro tocando previamente un punto sobre una recta; luego se busca identificar un procedimientos para construir la bisectriz, este procedimiento se basa en asignarle a la bisectriz las características del eje de simetría de los lados del triángulo que forman un ángulo.

Acordes a los objetivos de la investigación se planteó una prueba final que constaba de 8 preguntas, una de las cuales era similar a una de las preguntas de la prueba diagnóstica, solución que fue socializada y otra de las preguntas requería un nivel de razonamiento superior a los que se trataron de fortalecer en la secuencia didáctica.

Pregunta	**Nivel de razonamiento**		
	Nivel 1. **Visualización**	**Nivel 2.** **Análisis**	**Nivel 3.** **Clasificación**

1. ¿Es posible que el circuncentro de un triángulo se ubique afuera del triángulo? Explique.	Es capaz de plasmar o dibujar líneas y puntos en un triángulo sin tener presente aspectos como punto medio y perpendicular a.	Construye líneas notables del triángulo como la mediatriz, la mediana, las alturas y las bisectrices.	
2. El profesor explica que el circuncentro es la intersección de las tres mediatrices del triángulo, pero un estudiante afirma que es suficiente decir qué es la intersección de dos mediatrices, ¿estás de acuerdo? Explique.	Identifica el circuncentro como la intersección de las mediatrices.	Reconoce que donde se cortan dos mediatrices, se cortará la otra mediatriz	
3. ¿Es posible que el circuncentro y el baricentro de un triángulo sea el mismo? (Pista: Piense en triángulos equiláteros, isósceles o rectángulos). Explique.			Establece relaciones entre dos o más propiedades relacionadas con los puntos

			notables.
Los residentes de cada una de las dos casas quieren construir una cerca que esté a igual distancia de cada una de ellas. Explique donde debe ubicar la cerca. 	Reconoce puntos a igual distancia, visualiza cuáles están más distantes y cuáles más cercanos.	Construye la mediatriz usando puntos a igual distancia de otros dos fijados previamente.	
Cien árboles se ubican a igual distancia de dos corrales. Si el primer árbol es el más alto y alguien que tiene una estatura inferior a la altura del primer árbol se ubica de frente a este, ¿cuántos árboles puede ver? Explique.	Reconoce puntos a igual distancia, visualiza cuáles están a mayor distancia y cuáles más cercanos.	Reconoce que los puntos a igual distancia se ubican en línea recta.	

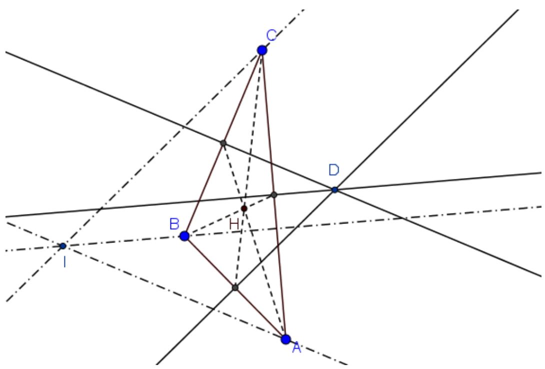
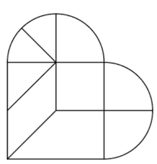
¿Cuál es el circuncentro del triángulo ABC? Explique 	Considera que en la mayoría de triángulos el circuncentro se ubica dentro del triángulo.	Identifica las características de la mediatrices del triángulo.	
En el siguiente corazón, coloree las figuras que no son triángulos. ¿Por qué las demás figuras son triángulos? 	Reconoce que el triángulo tiene tres lados.	Reconoce que el triángulo tiene tres lados rectos.	
Se quiere construir una circunferencia que pase por los vértices del siguiente triángulo. Explique el procedimiento.	Realiza la tarea por ensayo y error.	Construye el circuncentro usando las mediatrices del triángulo.	

Tabla 12 Preguntas evaluación final

La pregunta 2, relacionada con la afirmación de un profesor al aparecer “el profesor explica…”, en las respuestas de los estudiantes plasmaban la idea de que el profesor no se puede equivocar y “si dijo que el circuncentro es la intersección de tres mediatrices es porque es así”.

La pregunta 3, buscaba que el estudiante estableciera relaciones entre propiedades, a priori pensamos que iba ser una tarea fuera del alcance del nivel de razonamiento de los estudiantes porque se trabajó solo el reconocimiento y análisis de propiedades, sin embargo un estudiante lo logró.

La pregunta 5, al revisar las respuestas de los estudiantes nos dimos cuenta que el problema estaba mal planteado, lo que buscaba era que los estudiantes reconozcan que los puntos a igual distancia de dos puntos fijos están en línea recta, esta pregunta se había pensado luego de la prueba diagnóstica.

Dadas estas consideraciones se tuvieron en cuenta para el análisis de nivel de razonamiento las preguntas 1, 4, 6,7 y 8.

En la evaluación final, se identificaron 4 estudiantes que no mostraron un nivel de razonamiento ya fuera porque dejaban preguntas en blanco o sus respuestas eran irrelevantes; 14 estudiantes lograron reconocer elementos de las temáticas, ya usaban un lenguaje más acorde a los objetos de estudio y reconocían algunas propiedades de los puntos y líneas notables del triángulo, y 9 estudiantes reconocieron en la mayoría de situaciones las propiedades objeto de estudio. Estos resultados muestran un avance significativo en el nivel de razonamiento de los estudiantes, al disminuir el número de estudiantes sin nivel de razonamiento.

Reflexión: En esta investigación podemos observar cómo algunas de las preguntas que se plantean en el salón de clase que como docentes consideramos obvias pueden presentar problemas de diferente índole, por ejemplo la pregunta estaba muy elevada para el nivel de razonamiento de los estudiantes; inducir una respuesta dado algún personaje que representa autoridad para los estudiantes como por ejemplo la pregunta 2 o un error en el planteamiento que puede hacer que la pregunta sea imposible de resolver o trivial como la pregunta 5.

Para la pregunta 6, algunos un considerables números de estudiantes consideran que el circuncentro siempre está dentro del triángulo, algunos manifestaron que se confundieron con el baricentro que siempre está dentro del triángulo y esa fue una pregunta en esa guía.

Disminuyó el número de estudiantes que no mostraron nivel de razonamiento, en la prueba final 3 presentaron esta situación.

4. Propuesta pedagógica

4.1 Presentación de la propuesta

La geometría dentro del área de matemáticas, además de lo que puede lograr para mejorar el razonamiento de los estudiantes, por sus implicaciones prácticas puede tener efectos positivos en la motivación de los mismos, por la posibilidad de usar materiales concretos en las actividades. Para hacer esta labor de enseñanza de geometría en el grado octavo, como primera tarea se hizo una revisión de los lineamientos curriculares, los cuales señalan que la mejor forma de abordar la geometría, es promoviendo la exploración activa, o en otras palabras, manipular objetos para ver sus características y descubrir propiedades; y señala que el modelo pedagógico que mejor se ajusta a su enseñanza es el modelo de Van Hiele, este modelo además de recomendar usar un lenguaje acorde al nivel de desarrollo de los estudiantes, describiendo en varios niveles para caracterizar a los estudiantes de cualquier grado de escolaridad, lo que se determinó en la aplicación de una prueba diagnóstica, da unas fases o etapas para el desarrollo de toda la temáticas.

Dentro de los procesos matemáticos que se desarrollan potencialmente en esta propuesta, se encuentra el del razonamiento, el cual está estrechamente relacionado con los demás procesos, para razonar el estudiante necesita describir cosas y para ello debe saber comunicar, nombrar los objetos adecuadamente, también dentro del desarrollo de su nivel de razonamiento necesita reconocer las características de los objetos y las propiedades de las figuras bidimensionales y tridimensionales, así como sus transformaciones y relaciones. En el desarrollo de la propuesta se buscó mejorar en todos los procesos inmersos en las matemáticas tales como la comunicación, el modelamiento, la resolución de problemas y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Con todo esto, la propuesta es acorde al énfasis ambiental de la institución, puesto que en varias actividades de cada unidad didáctica se usó, como se menciona a lo largo del proyecto, material reciclable como tapas y cartón, resaltando una vez más que las tapas una vez usadas, cumplieron una función social al ser donadas en las respectivas cajas de la Fundación SANAR, la cual recolecta tapas como una forma de obtener recursos para el tratamiento de niños con cáncer. Los temas son los puntos y líneas notables del triángulo por dos razones básicas: es un tema que corresponde al grado octavo y por la sugerencia tomada de (Jaime A.,1993) de abordar nuevas temáticas usando el modelo de Van Hiele.

4.2 Justificación

Para el desarrollo de la propuesta se tuvieron en cuenta las condiciones sociales, económicas y culturales de la población objeto de la investigación, la infraestructura de la institución, su modelo pedagógico, las consideraciones de los lineamientos curriculares, así como los estándares de matemáticas para el grado octavo. Un ideal sería desarrollar la clase de geometría usando software geométricos que permitan la exploración activa, pero las condiciones de la institución no lo permiten, puesto que en ella solo existe una sala de cómputo para atender la asignatura de informática para toda una jornada de 14 grupos. El software da la posibilidad de describir objetos geométricos y descubrir propiedades y relaciones mediante el arrastre de puntos, la construcción de figuras, la medición de distancias y ángulos,…, pero, ¿cómo lograr estas condiciones para la geometría activa como ambiente propicio para el aprendizaje? En esta propuesta se plantea la posibilidad de sustituir los anteriores elementos como los puntos por tapas, y la toma de distancias que en un software se da señalando punto a punto, midiendo con una regla de punto a punto, que en cierta esta medida se asemeja más a lo que en la vida real hace alguien en una ocupación o profesión, claro que esto está expuesto a un margen error y que en la práctica se debe minimizar con una buena disposición de los instrumentos y la observación. Otros elementos que se pueden incorporar en las actividades son el cartón para construir las figuras geométricas, los palillos, la plastilina y que acorde a la modalidad ambiental, las tapas y el cartón se pueden reciclar y los demás materiales recolectarlos para un posterior uso. El hecho de realizar actividades donde los estudiantes puedan manipular objetos para descubrir propiedades puede resultar muy motivante, la idea es que amen las matemáticas y como punto de partida para ello sea la geometría. Además, es importante un plan de acción para la clase y estas pautas las brinda el modelo de Van Hiele.

4.3 Objetivos

Crear una secuencia didáctica que permita a los estudiantes desarrollar las competencias en la asignatura de geometría alrededor de las temáticas de las líneas notables del triángulo y el teorema de Pitágoras.

4.4 Indicadores de desempeño

- Propone argumentos válidos para explicar los conceptos geométricos y los procedimientos utilizados.
- Da argumentos válidos para determinar la estrategia de solución de situaciones de geometría.

4.5 Metodología

Para abordar los puntos y líneas notables del triángulo se partió de una situación problema a la que se denominó reto, para resolver estas situaciones se daban una serie de orientaciones sobre el uso de materiales concretos como tapas, palillos, cartón,…, los cuales propician la exploración y el descubrimiento de propiedades con mayor facilidad; las actividades se organizaron de tal manera que el estudiante lograra mejorar su nivel de razonamiento, trabajando solo los dos primeros niveles de este, el nivel de reconocimiento y de análisis, respectivamente; y para propiciar este desarrollo para cada nivel se organizaron siguiendo las 5 fases de aprendizaje de Van Hiele (De información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración), ya descritas en el marco teórico.

Cabe resaltar que la fase de información solo se dio para el desarrollo del nivel de reconocimiento, además la fase de explicitación se ve reflejada en todas las actividades por el trabajo colaborativo en el cual los estudiantes intercambiaron ideas con sus compañeros, docentes y por la puesta en común que se realizaba al final de desarrollar la guía y en la retroalimentación de la clase siguiente, pero ¿por qué socializar algo al final de la clase y al inicio de la siguiente?, por el alto índice de inasistencia por diversas razones descritas en el contexto de la institución y por las falencias que presentan los estudiantes de años atrás.

En el nivel 1, los estudiantes visualizaron que ciertos puntos y líneas responden a la solución de ciertas situaciones problemáticas y en el nivel 2, que las líneas y puntos que se forman en los triángulos además de responder a la solución de ciertas situaciones problemáticas, tienen ciertas propiedades.

La guía 1 (Actividad 1, 2 y 3), estuvo pensada para desarrollar el nivel 1 en la *fase de información*, con esta actividad se pretende que los estudiantes exploren el material que más frecuente se usará (las tapas), modelen con ellas la situación que plantea en la actividad 1 (llamado reto), tomen distancias que satisfagan las condiciones dadas e ilustren las situaciones planteadas con la tapa en la guía, además de estas actividad se observará que tan conveniente es este material para la disciplina del grupo y que tanto propicia la exploración. La idea es que en esta actividad las tapas representen los puntos que uno representa en un software geométrico y la toma de medidas con una regla la distancia que se toma dando clic de punto a punto. En esta fase deberá quedar claro que las rectas son conjuntos de puntos, en el nivel 2, el estudiante descubrirá que las disposiciones de estos puntos permiten resolver otras situaciones problemas y tienen unas propiedades.

La guía 2 (Actividad 1 a 4), **la guía 7** (Actividad 1), **la guía 10** (Actividad 1), **la guía 12** (Actividad 1) están diseñadas para desarrollar el nivel 2 en la *fase de información*, en estas actividades el estudiante ya debe ir más allá de lo visual y empezar a identificar regularidades, qué es y qué no es la mediatriz, la mediana, la altura y la bisectriz, en la guía 2 aún no se ha abordado la mediatriz como una línea notable del triángulo.

La guía 3 (Actividad 1- 2), **la guía 7** (Actividades 2-3), **la guía 10** (Actividades 2-3), **la guía 12** (Actividad 2-4) tiene como finalidad desarrollar el nivel 2 en la *fase de orientación dirigida*, en esta guía el estudiante debe seguir procedimientos y dar respuestas específicas sobre propiedades y característica que el estudiante ya debió interiorizar.

La guía 4 (Actividad 1-2), **la guía 5** (Actividad 1-3), **la guía 8** (Actividades 1-2), **la guía 10** (Actividades 1-2) y la **guía 12** (Actividades 1-2) están orientadas en la *fase de orientación libre* en el nivel 2, se trata de nuevos contextos de aplicación de las propiedades que ya ha descubierto.

La guía 6 (Actividad 1-5), **la guía 9** (Actividades 1-2) y la **guía 10** (Actividad 3) están orientados a *la fase de integración en el nivel* 2, y buscan sintetizar todo lo visto hasta ahora, en especial asociarlo con situaciones problemas donde los conceptos vistos son necesarios.

4.6 Fundamento pedagógico

La propuesta además de considerar el contexto de la institución educativa, discurre las recomendaciones del Ministerio de Educación Nacional, que respecto al fortalecimiento de los pensamientos (espacial, métrico, numérico, variacional y aleatorio), según (MEN, Lineamiento curriculares, 1998), "el hecho de presentar bajo un mismo aspecto los diferentes tipos de pensamiento y los sistemas, podría interpretarse como si cada pensamiento se desarrollara solamente a través del respectivo sistema desconociendo el carácter transistémico de cada tipo de pensamiento" (p.21). Lo anterior supone que las actividades que se desarrollan en cada asignatura de matemáticas no se restringe al desarrollo de un proceso, por el ejemplo en el caso de geometría al pretender mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes, en esta tarea el estudiante debe desarrollar actividades de comunicación, modelamiento, resolución de problemas y ejecución de procedimientos, por ello en el título de la tesis se habla de "… fortalecimiento del pensamiento espacial…". Cada actividad planteada busca desarrollar estos procesos. Dentro de otras consideraciones el MEN señala que el modelo de Van Hiele es el que mejor describe el proceso de construcción del pensamiento espacial, siguiendo los parámetros de dicho modelo se desarrolló una prueba diagnóstica para clasificar el grupo de estudiantes según sus habilidades en geometría y las actividades se secuenciaron lógicamente, al inicio de cada eje temático se realizó una exploración con objetos manipulables (tapas, palillos, cartón,…), y usando escuadra para usos como tomar medidas y trazar líneas con ciertas características, en el desarrollo de los anteriormente expuesto para el desarrollo de clase se siguieron las etapas o fases del modelo de Van Hiele descritos para este trabajo en la metodología.

Conclusiones

Dentro de las conclusiones y recomendaciones se pueden mencionar:

- Se logró evidenciar en la evaluación diagnóstica, que las clases tradicionales de geometría producen pobres resultados para el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, esto se observa en los 9 estudiantes que no mostraron algún nivel de razonamiento y los 21 estudiantes que solo son capaces de reconocer aspectos globales e irrelevantes de las figuras geométricas.
- Se logró concluir que el uso de material concreto, en el caso de esta propuesta (tapas de gaseosa plástica, cartón, palillos, plastilina,..), favoreció el reconocimiento de los elementos y propiedades inmersas en las temáticas de puntos y líneas notables de triángulo, propició el trabajo colaborativo y despertó la curiosidad de los estudiantes para resolver cada una de las actividades propuestas. Esto reafirma una de las recomendaciones de los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia (MEN, 1998) al señalar que "los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento" (p.37).
- Organizar las actividades de acuerdo a la forma en que evoluciona el nivel de razonamiento de los estudiantes, permitió que estos se comprometieran más con su proceso de aprendizaje, eso se evidenció en la disciplina, el dinamismo de clase y el desarrollo de la guías.

- Se creó una secuencia didáctica de una temática que se aborda muy brevemente en los textos del grado octavo y que sin embargo, gracias a la revisión bibliográfica se descubrieron una serie de aplicaciones muy interesantes que pueden ser elementos valiosos para que en una futura profesión de diseño y construcción, se desarrolle el proceso con mayor detenimiento y precisión.
- Finalmente, se logró evidenciar en la prueba final que disminuyó el número de estudiantes que no muestra un nivel de razonamiento y aumentó el número de estudiantes que reconocen las propiedades de los objetos de estudio, por lo cual se puede considerar que organizar las actividades de acuerdo a las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y usar material concreto, tienen incidencias positivas en el nivel de razonamiento de los estudiantes.

Recomendaciones

- Se experimentó también que no todos los materiales son propicios para determinadas situaciones problemáticas, en el caso de las tapas de gaseosas plásticas, son pertinentes cuando el problema requiere que una misma tapa ocupe diferentes posiciones para determinar la más adecuada; en el caso de la lana, se observó que solo cumplió una función decorativa, mas no funcional; en este sentido, identificar los materiales pertinentes es una tarea del docente investigador.
- Se reflexionó sobre la importancia de ajustar los contenidos en las asignaturas, teniendo en cuenta los siguientes elementos: las habilidades de los estudiantes, su contexto y búsqueda en la aplicación de los temas que permitan a los mismos proyectarse como ciudadanos y profesionales. Por lo anterior los docentes de matemáticas deben identificar qué actividades y recursos son pertinentes en su población.

Referencias Bibliográficas

Algarín, D. (2013). Caracterización de los niveles de razonamiento específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. Bucaramanga.

Berrío, J. (2016). Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en el proceso de justificación teórica en la resolución de problemas de geometría. Bucaramanga.

Chavellard, Y. (1997). La Transposición didáctica-Del saber sabio al saber enseñado.

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, España. 35, p.p 10-11. 90-106.

Educación, M. d. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Santa Fé de Bogotá: MEN.

Elliot, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

García, S., & López, O. L. (2008). La enseñanza de la Geometría Materiales para apoyar la práctica educativa. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

Gibbs, G. (2012). El análisis de datos cualitativos en Investigación Cualitativa. Madrid.

Guerrero, R. A. (2009). La construcción del concepto de ángulo. México Distrito Federal.

Jaime, A. (1993). Aportación a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Valencia.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. Teoría y práctica en educación matemática, 295-384.

Martínez, C. (2016). Implementación del enfoque resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas. Bucaramanga.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: MEN.

Molfino, V. (2011). Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la Geometría? Sistema de Información Científica Redalyc, 37-61.

Morales, C., & Majé, R. (2011). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros (Doctoral dissertation, Tesis de maestría), Universidad de la Amazonia, Colombia.

Nacional, M. d. (1998). Lineamientos Curriculares . Santa Fé de Bogotá: MEN.

Pruzzo, V. (2005) Aportes para la profesionalización docente: una mirada desde la investigación acción. Praxis Educativa. Argentina, 50-60. Recuperado el 9 de Enero del 2016 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=153120512006

Ramírez, J. C. (2014). Desarrollo del pensamiento espacial, un acercamiento desde la enseñanza de los triángulos, a través de un modulo didáctico. Medellín.

Ramírez, N. (2014). Estrategia Didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientado por el Modelo de Van Hiele y Geogebra. Medellín.

Restrepo Gómez, Bernardo; (2004). La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico. Educación y Educadores, 45-55. Recuperado el 9 de Enero del 2016 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83400706

Santaella, C. M., & García, M. P. (2009). Didáctica-Teoría y práctica de la enseñanza. Madrid: Ediciones Pirámide.

Scaglia, S., Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. Educación Matemática, diciembre, 105-120. Recuperado el 9 de Enero del 2016 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=153120512006

Apéndices

Apéndice A. Planeaciones

Guía No. 1. Ubicando grifos.			
Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar la mediatriz como un conjunto de puntos con ciertas características.	• Guía • 12 tapas plásticas • Regla o escuadra	120 minutos

Descripción de Actividad

Inicio

Se les indica a los estudiantes que se van a estudiar las líneas notables del triángulo pero para tal fin se van a explorar las propiedades paulatinamente, se organiza el grupo en equipos de trabajo de 3 a 5 estudiantes, se verifica que cada grupo tenga el material de clase. Luego se hace la lectura del recto inicial: "En una granja hay dos corrales y se necesita instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales", y se dan las indicaciones como: se resuelve usando 12 tapas de gaseosas y midiendo, dos de las tapas representan los corrales y las demás los grifos.

Desarrollo

La solución corresponde a un conjunto de puntos en línea recta. Durante el desarrollo del problema algunos estudiantes van a preguntar pistas, para lo cual el docente debe indicarles que lean nuevamente el reto. El docente continuamente pregunta la distancia de una tapa que representa el grifo a cada una de las tapas que representa el corral y les interroga sobre si efectivamente son iguales, de esta forma los estudiantes seguirán buscando la solución.
Una vez resuelta la situación, los educandos la ilustran en la guía y responden dos preguntas relacionadas con las primeras características de la mediatriz:

- ¿Cuál de las posibles ubicaciones del grifo resultaría la más económica? La respuesta a esta pregunta está relacionada con el punto medio de un segmento o centro entre dos puntos. ¿Por qué? La mayoría van a dar una respuesta relacionada con la optimización de los recursos como tubos y otros.
- ¿Qué características comunes tienen las posibles ubicaciones de los grifos? Además de la ya citada de igual distancia, se espera que los estudiantes identifiquen que todos los puntos están en línea recta.

Final

Al final de la clase se socializan las respuestas y se analizan los pros y contras de ellas.

Guía No. 2 Los puntos de la mediatriz.

Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar la mediatriz como un conjunto infinito de puntos que se encuentran a igual distancia de los extremos un segmento.	• Guía • Regla	120 minutos

Descripción de Actividad

Inicio

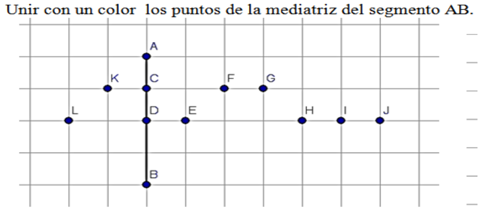
Se retoma el problema anterior para dar nombre a algunos de los descubrimientos de los estudiantes como el centro entre dos puntos y llamar a la recta que se forma uniendo los puntos de la solución del reto anterior, a esta recta la llamaremos la mediatriz y se procederá a estudiar con más detalle sus características.

Desarrollo

La actividad consta de una serie de ejercicios para afianzar los descubrimientos de la Guía No. 1. En ella se estudian las características de los puntos que hacen parte de la mediatriz y a partir de todas estas observaciones aproximarse al concepto de mediatriz.

Actividad No. 1

Unir con un color los puntos de la mediatriz del segmento AB.



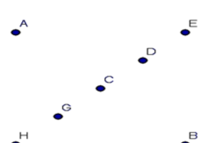
La Actividad No.1 es para identificar en una cuadrícula cuáles puntos son los que pertenecen a la mediatriz del segmento AB, para ello deben tener presente que son los puntos que están a igual distancia de A y B;

La ***Actividad No. 2*** sin cuadrícula les pide medir la distancia de cada uno de los extremos del segmento a los demás puntos y completar la tabla para identificar cuáles tienen la misma distancia y acorde a esto trazar con un mismo segmentos que tengan la misma distancia, y de esta manera identificar los puntos de la mediatriz, para trazar una recta.

Actividad No. 2

Tomar las distancias de A y B a los demás puntos para completar la tabla. Luego trazar con un mismo color los segmentos que tienen la misma distancia y trazar la mediatriz de AB.

DISTANCIAS	
AC=	BC=
AE=	BE=
AD=	BD=
AG=	BG=



En cada ejercicio los estudiantes deben identificar que la mediatriz pasa por el punto medio y verificar que los puntos de la mediatriz están a igual distancia de los extremos del segmento **AB**.

En la ***Actividad No. 3***, los estudiantes deben construir la mediatriz usando mínimo dos puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento A y B.

Actividad No. 3

Trazar la mediatriz del segmento AB

Actividad No. 4

Responda las siguientes preguntas.

- ¿Qué puntos hacen parte de la mediatriz?
- ¿Cuántos puntos puede tener la mediatriz?
- Defina con sus propias palabras la mediatriz

La ***Actividad No 4***. consta de una serie de preguntas que condensan el proceso que hasta ahora se ha desarrollado, para la primera pregunta se espera que unánimemente respondan que los que están a igual distancia de los extremos del segmento forman parte de la mediatriz; para la segunda pregunta esperamos que algunos piensen qué pasaría si se siguieran ubicando más puntos a igual distancia, pero también puede pasar que la mayoría que están en el primer nivel de razonamiento respondan contando los puntos que observan en la guía; para la tercera pregunta, definir está en un nivel de razonamiento superior, pero esperamos que nombren algunos elementos para referirse a la mediatriz tales como puntos a igual distancia.

Final

El docente puede preguntar al final, ¿Cómo se llama el punto más cercano y que está a igual distancia de los extremos del segmento? (Centro, punto medio)

¿Cuánto puntos pueden estar a igual distancia de los extremos de un segmento? (Infinitos)

¿Qué figura se forma con los puntos que están a igual distancia? (Una recta)

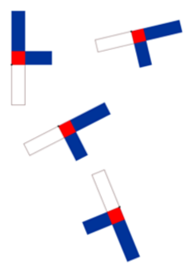
Que socialicen el porqué de esos nombres.

Guía No. 3 ¡La mediatriz es perpendicular!

Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar la mediatriz como una recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio.	• Guía • Acetato con la forma de la letra **L.**	120 minutos

Descripción de Actividad

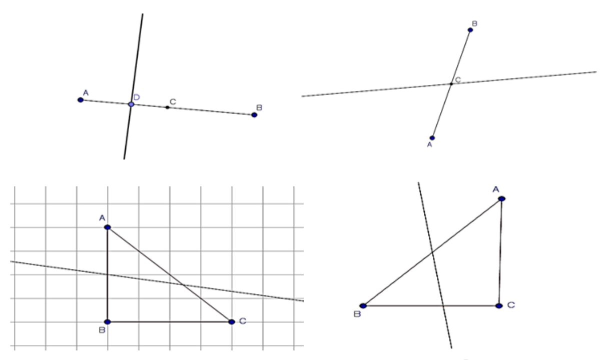
Inicio



Preguntar que ideas tienen los estudiantes sobre perpendicularidad, ¿cuándo dos rectas son perpendiculares?

Se explica cuándo dos rectas son perpendiculares, esto se da cuando entre ellos se forma perfectamente la letra L, en lenguaje más técnico cuando el ángulo entre ellas es recto, es decir de 90°. La idea es usar un lenguaje lo más sencillo posible. Otra forma de explicarlo es decir que un ángulo de 90° corresponde a un cuarto de giro o un cuadrante del plano cartesiano. En el tablero el docente construye algunos segmentos y pide construir rectas perpendiculares usando un acetato en forma de L o una escuadra grande a la cual se le dibujará la letra L en el ángulo de 90°.

Desarrollo



La ***Actividad No. 1*** consta de una serie de segmentos a los cuales se les trazó una recta por algún punto, algunas son mediatrices. Usando un acetato en forma de **L**, si sus lados encajan perfectamente entre el segmento y la recta se dirá que la recta es perpendicular, además si esta pasa por el punto medio se dirá que esa recta es la mediatriz.

A lo largo del desarrollo de la actividad, el docente debe verificar que los estudiantes están verificando correctamente la perpendicularidad de la mediatriz. Para ello se pregunta al estudiante qué es lo que debe verificar.

El estudiante debe responder las preguntas de la ***Actividad No. 2***, las cuales son una afirmación de lo que ha estado aplicando en esta guía, primero debe afirmar que la mediatriz no pasa por cualquier punto de un segmento, debe pasar por el punto medio y la segunda respuesta es reafirma algo que se tituló y explicó en la etapa inicial de esta planeación, que evidentemente la mediatriz es perpendicular por algunas de razones ya mencionadas (entre el segmento y la mediatriz se forma un ángulo de 90°, entre los dos se forma exactamente la letra **L**).

Final

El docente puede proponer que al final de la actividad entre todos se construya un concepto definición de mediatriz donde se relaciones recta perpendicular y punto medio.

Guía No. 4 Más corrales

Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar el circuncentro como el punto a igual distancia de otros tres.	• 33 tapas de gaseosa. • Regla o escuadra.	120 minutos

Descripción de Actividad

Inicio

Se hace una retroalimentación de lo visto hasta el momento, preguntar a los estudiantes sobre el concepto de mediatriz, se puede hacer un segmento de recta en el tablero y preguntarles todas las formas posibles para construir la mediatriz del segmento.

Desarrollo

La ***Actividad No 1*** consta de un reto similar al inicial planteado en la ***guía No. 1***, pero esta vez en lugar de dos corrales, se pide ubicar grifos que estén a igual distancia de tres corrales. Los tres corrales simulan los vértices de un triángulo.

Se dan las indicaciones relacionadas con el reto, en esta ocasión se utilizarán 33 tapas plásticas, 3 de las cuales representan los corrales y 30 tapas representan los grifos. Los estudiantes en grupos (3 a 5 estudiantes) deben tratar de ubicar el o los grifos que estén a igual distancia de los tres corrales, para lo cual van a utilizar la misma estrategia del primer reto para cada par de corrales (ubicar grifos a igual distancia de dos corrales), este proceso se hace para cada par de corrales. El docente debe verificar la solución de los grupos, para ellos les solicita a los estudiantes que midan y corroboren que efectivamente se cumple con las condiciones del reto. La guía incluye los aspectos de orientación dirigida al mostrar en detalle qué deben hacer.

El estudiante debe dibujar lo que modelo con las tapas e identificar cuántos grifos están a igual distancia de los tres corrales.

Final

Al final se socializa cada punto de la guía y se le dará nombre al punto que está a igual distancia de los tres corrales como el circuncentro.

<table>
<tr><td colspan="4">Guía No. 5 El circuncentro</td></tr>
<tr><td>Indicadores</td><td>Objetivos</td><td>Recurso</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.</td><td>Identificar el circuncentro como la intersección de las mediatrices del triángulo.</td><td>• 33 tapas de gaseosa.
• Regla o escuadra.</td><td>120 minutos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descripción de Actividad</td></tr>
<tr><td colspan="4">Inicio
Se retoma la solución del reto grifos a igual distancia de tres corrales con el fin de precisar nuevos términos, en este caso señalar que los tres corrales representan los vértices de un triángulo, y los grifos se disponen de tal manera que sea la mediatriz entre cada para de corrales y la intersección entre ellas es la solución y que ese punto recibe el nombre de circuncentro.
El docente puede dibujar un triángulo y preguntar, cuántas mediatrices tiene un triángulo y que varios estudiantes muestren cómo construir la mediatriz de cada segmento.

Desarrollo
La guía consta de tres actividades, en la Actividad No. 1 se pide ubicar el circuncentro de un triángulo, la Actividad No. 2 ubicar el circuncentro para dar solución a una situación real y la Actividad No 3 tiene por finalidad precisar conceptos, relaciones y retomar los pasos del procedimiento para ubicar el circuncentro.

Final
Se socializan cada una de las actividades de la guía.
Se debe hacer énfasis el nuevo elemento que aparece al cruzarse las tres mediatrices</td></tr>
</table>

Guía No. 6 Más sobre la mediatriz y el circuncentro.			
Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Resolver situaciones problemáticas relacionadas con el circuncentro.	• Regla o escuadra. • Lápiz	120 minutos

Descripción de Actividad

Esta ***actividad No 1*** los estudiantes en forma individual, se enfrentan a situaciones que resumen todo lo visto hasta el momento, en esta actividad se plantea la siguiente situación“Los residentes de dos casas desean ubicar árboles que estén a igual distancia de las casas. Señala con una recta donde se deben ubicar los árboles”, en este planteamiento el estudiante debe aplicar la definición de mediatriz como un conjunto de puntos a igual distancia de otros dos, el plasmar el dibujo correctamente evidencia que ya lo interiorizó.

1. Los residentes de dos casas desean ubicar árboles que estén a igual distancia de las casas. Señala con una recta donde se deben ubicar los árboles.

En la ***Actividad No. 2*** “La plazoleta central del parque de un pueblo tiene forma triangular y se quiere instalar en todo su centro una fuente. Señale el lugar donde se debe ubicar la fuente”, el estudiante debe reconocer que el circuncentro es el punto que satisface dicha situación y que es precisamente la intersección de las mediatrices.

Actividad No. 2
La plazoleta central del parque de un pueblo tiene forma triangular y se quiere instalar en todo su centro una fuente. Señale el lugar donde se debe ubicar la fuente.

Otra aplicación es la **Actividad No. 3**, que es precisamente la que la da sentido al nombre de circuncentro y es porque este es el punto que corresponde al centro de un círculo cuya circunferencia pasa por los vértices del triángulo.

La ***Actividad No. 4*** consta de dos preguntas, donde los estudiantes deben identificar e la aplicación de la mediatriz y el circuncentro, no es otra cosa que permita que el estudiante reafirme alguno de los usos ya descritos tanto en esta guía como las precedentes o que piense en algún uso nuevo.

Final

En el momento de la socialización de las actividades, el docente debe usar el lenguaje técnico de cada uno de los objetos geométricos que intervienen en la actividad, por ejemplo, es necesario asociar los corrales con el vértice de tal manera que ellos llamen los objetos geométricos adecuadamente.

Guía No. 7 Mantener en equilibrio.

Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar el baricentro como el punto de equilibrio en un triángulo.	• Triángulos de cartón • Regla o escuadra. • Lápiz	120 minutos

Descripción de Actividad

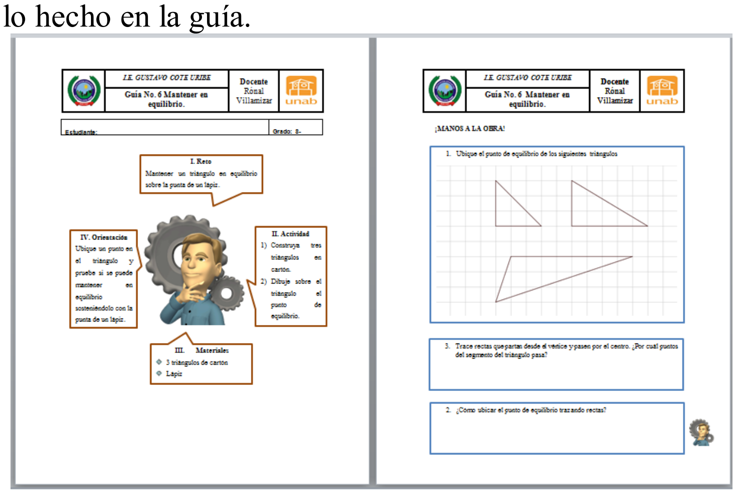
Inicio

Los estudiantes ubicados en parejas, deben construir tres triángulos de cartón, parecidos los que se muestran en la guía. El reto consiste en equilibrar una superficie triangular sobre la punta de un lápiz (dado que las puntas de los lápices no son totalmente planas se puede usar en el revés de un lapicero o un lápiz sin punta), dentro de este se encuentra el punto del equilibrio.

Para resolver el reto va a señalar un punto sobre el cartón, al cual consideren como solución y realizan la comprobación para ver si este punto sobre el lápiz se mantiene en equilibrio.

Desarrollo

La actividad 1, 2 y 3 de la guía buscan que el estudiante registre su experiencia. La ***Actividad No. 1*** corresponde a ubicar el punto de equilibrio de cada uno de los triángulos. La ***Actividad No. 2*** consiste en una serie de instrucciones: "Trace rectas que partan desde el vértice y pasen por el centro. ¿Por cuál punto del segmento del triángulo pasa?" Esto con el fin de que identifique que dicho punto se encuentra en la intersección de las rectas que van del punto medio de cada lado del triángulo a cada uno de los vértices opuestos. La ***Actividad No. 3*** ¿Cómo ubicar el punto de equilibrio trazando rectas?, busca que el estudiante haga una recapitulación de todo lo hecho en la guía.



El estudiante debe responder los tres puntos de la guía, este debe realizar una interpretación de cada una de las indicaciones, en ellas se dan pistas de lo que deben realizar.

Final

Se socializa al final la pregunta 3, que es precisamente explicar el procedimiento para hallar el punto de equilibrio, se les dice a los estudiantes que esas rectas se llaman medianas y la intersección se llama baricentro.

Guía No. 8 La mediana y el baricentro			
Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar el baricentro como el punto de intersección de las medianas.	• Triángulos de cartón • Regla o escuadra. • Lápiz	60 minutos

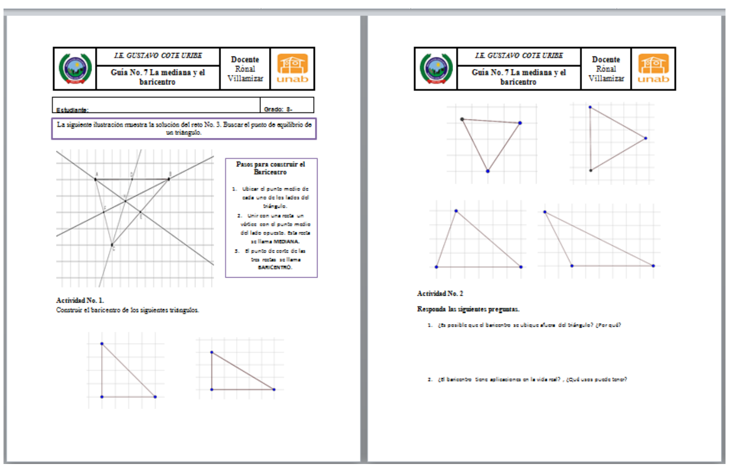
Descripción de Actividad

Inicio

Se inicia mostrando los elementos que intervinieron en el reto de mantener en equilibrio los tres triángulos mostrando cada uno se los pasos para la construcción de las medianas y cómo ubicar el baricentro.

Desarrollo

Las actividades de esta guía consisten en ejercitar los pasos aquí nuevamente explicados, así como precisar aspectos relacionados con la ubicación del baricentro y su aplicación.



I.E. GUSTAVO COTE URIBE

Guía No. 7 La mediana y el baricentro

Docente Rónal Villamizar

Estudiante: Grado: 8-

La siguiente ilustración muestra la solución del reto No. 3. Buscar el punto de equilibrio de un triángulo.

Pasos para construir el Baricentro

1. Ubicar el punto medio de cada uno de los lados del triángulo.
2. Unir con una recta un vértice con el punto medio del lado opuesto. Esta recta se llama MEDIANA.
3. El punto de corte de las tres rectas se llama BARICENTRO.

Actividad No. 1.

Construir el baricentro de los siguientes triángulos.

I.E. GUSTAVO COTE URIBE

Guía No. 7 La mediana y el baricentro

Docente Rónal Villamizar

Actividad No. 2

Responda las siguientes preguntas.

1. ¿Es posible que el baricentro se ubique afuera del triángulo? ¿Por qué?
2. ¿El baricentro tiene aplicaciones en la vida real? , ¿Qué usos puede tener?

En esta guía se explica qué es la mediana, qué es el baricentro y su construcción.
Los estudiantes realizan la construcción del baricentro en la actividad No.1
El docente verifica a cada uno de los estudiantes que evidentemente haya quedado bien ubicado el baricentro.
El estudiante debe responder las preguntas de la actividad No. 2 según su parecer y creatividad.

Final

Se socializa al final la pregunta relacionada con la aplicación, se desea hacer un cumulo de posibles aplicaciones, lo cuales darán origen a la guía No. 8 Aplicaciones del baricentro.

Guía No. 9 Aplicaciones del Baricentro.			
Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar el baricentro como el punto de equilibrio que se puede aplicar en situaciones cotidianas y de la construcción.	• Triángulos de cartón • Palillos • Plastilina • Regla o escuadra. • Lápiz	120 minutos

Descripción de Actividad

Inicio

Se organizan los equipos de trabajo, conformados por grupos de 3 a 5 estudiantes, se describe la actividad y los estudiantes organizan su material de trabajo, se les informa que la actividad corresponde a las aplicaciones del baricentro y puede ser usado en la decoración de una fiesta y hasta en grandes construcciones y se hace entrega del material(los triángulos de cartón de la clase anterior, palillos, plastilina e hilo).

Desarrollo

Se trata de realizar la experiencia de dos posibles aplicaciones del baricentro, una es la de colgar triángulo de un solo hilo de tal manera que se mantengan totalmente horizontal y la otra es la de construir pirámides de base triangular y usar como parámetro ubicar la altura en el baricentro de la base.

En esta actividad los estudiantes además de aplicar un concepto, expresaron su creatividad, por ejemplo algunas veces los triángulos aunque se cuelguen del baricentro se mantienen ladeados porque el material no es lo suficientemente resistente al aire.

También se les puede decir que independiente de que la figura no sea triángulo se puede obtener un punto de equilibrio usando métodos más sofisticados.

El docente verifica que los triángulos hayan quedado suspendidos en forma horizontal y que evidentemente la altura de los triángulos esté ubicada en el baricentro.

Cuando el estudiante trata de realizar las actividades basados en su propia interpretación de las indicaciones del docente.

Final

Al final se pregunta para qué sirve el baricentro, se espera que los estudiantes señalan las tres aplicaciones antes vistas.

Guía No. 10 La alturas del triángulo.

Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Reconocer que un triángulo tiene tres alturas.	• Triángulos de cartón • Regla o escuadra. • Lápiz	120 minutos

Descripción de Actividad

Inicio

Se organizan los grupos de 3 ó 4 estudiantes. Explicar que un triángulo tiene tres alturas no era difícil de entender, por lo general se asocia a un distancia, precisamente vertical.

Para este fin los estudiantes construyen tres triángulo (equilátero, isósceles y rectángulo) en cartón o usa los de las actividades anteriores.

Desarrollo

Se les pide a los estudiantes apoyar el triángulo sobre cada uno de los lados y medir la altura desde la base hasta el vértice opuesto, la regla se debe poner vertical, es decir la base y la regla deben ser perpendiculares. ¿Preguntar a los estudiantes cuántas alturas cree que tiene un triángulo? Para responder a esa pregunta se les pide construir tres superficies triangulares o usar los anteriores y determinar la altura de cada base.

Orientar a los estudiantes cómo medir la altura de una persona y análogamente cómo se haría la de un triángulo, ellos preguntara qué cuál lado, indicarles qué cuántas se podrán medir.

Durante toda la actividad, el diálogo es continuo al resolver las inquietudes de los estudiantes y en el diálogo dentro de cada grupo y cuando los estudiantes tratan de plasmar las alturas de los triángulos de cartón en la guía, en ella debe pintar la línea de la altura y poner su correspondiente distancia.

Final

Preguntar si es posible que una altura esté fuera de un triángulo y explicar sus correspondientes ejemplos.

Preguntar si es posible que una altura esté dentro del triángulo y explicar sus correspondientes ejemplos.

Preguntar si es posible que una altura sea un lado del triángulo y explicar sus correspondientes ejemplos.

Guía No. 11 Más sobre las alturas.

Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar el baricentro como el punto de intersección de las medianas.	• Regla o escuadra. • Lápiz	120 minutos

Descripción de Actividad	**Fases de Aprendizaje**

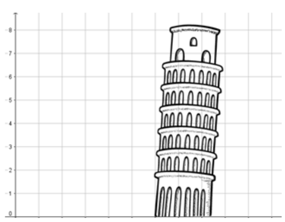
Inicio

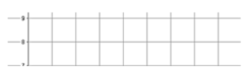
La **actividad No. 1**, busca identificar en qué forma los estudiantes miden la altura de los objetos, es decir si disponen la escuadra o regla en forma perpendicular a la base o si lo que hacen es construir una línea a través de la figura, al terminar esta actividad se hace un paréntesis para discutir sobre la forma en qué cada uno halló la altura de las figuras y discutir sobre la interpretación que cada uno le dio a la actividad.

Actividad No. 1

Trace la altura de los siguientes objetos.

Orientación: La altura es perpendicular a la base, acá vamos a considerar la base como el lado donde se origina la figura.





Desarrollo

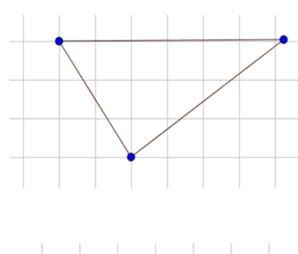
En la ***Actividad No. 2***, los estudiantes deben ejercitar el procedimiento para construir las alturas, deben identificar las tres alturas y ser diestros en el momento de identificar las alturas que coinciden con un lado del triángulo, las alturas que se ubican dentro del triángulo y aquellas que quedan afuera, es una tarea que requiere ejercitación y se aprende haciendo, añadiéndole la ventaja que ya deben reconocer las rectas perpendiculares.

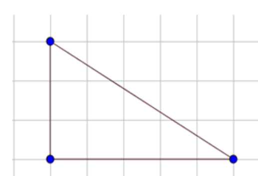
Actividad No. 2

Trace la tres alturas del triángulo.

Orientación

La altura se traza uniendo un vértice mediante un segmento perpendicular al lado opuesto.





Final

En la ***Actividad No. 3***, los estudiantes deben relacionar dos líneas notables tales como las mediatrices y las alturas, poniendo en marcha su destreza, se espera que señalen como solución un triángulo equilátero.

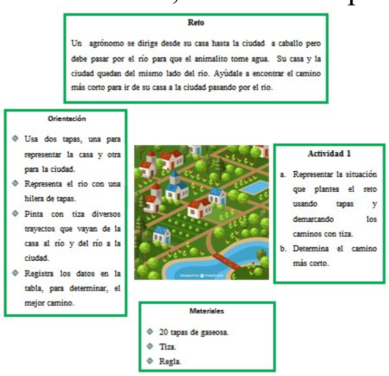
Guía No. 12 Buscando el camino.

Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Visualizar las bisectriz de del ángulo de un triángulo en la solución de una situación real.	• Tapas • Regla o escuadra	120 minutos

Descripción de Actividad	**Fases de Aprendizaje**

Inicio

Se plantea el siguiente reto “Un agrónomo se dirige desde su casa hasta la ciudad a caballo, pero debe pasar por el río para que el animalito tome agua. Su casa y la ciudad quedan del mismo lado del rio. Ayúdale a encontrar el camino más corto para ir de su casa a la ciudad pasando por el rio”, para lo cual el estudiante va usar un número de tapas para representar el río (en línea recta), y con otras dos tapas va representar la ciudad y la casa. Para resolver el reto va determinar las distancias a cada una de las tapas que representa el río. Para este reto el docente entrega el material y las guías, y cada grupo de 3 ó 4 estudiantes van a leer las instrucciones y modelar la situación. El docente responde inquietudes relacionadas con precisar que el río va ser en línea recta, los demás aspectos se espera que los interpreten los estudiantes.



Desarrollo

El estudiante debe completar la tabla que hace parte de la ***Actividad No. 1***, esta tabla es un apoyo para el proceso de estimar el camino más de la casa a la ciudad, con la condición de ir primero al río. En la ***Actividad No. 2***, el estudiante plasma sus hallazgos a través de un dibujo.

Final

En la ***Actividad No.3,*** a través del doblez de la hoja, el estudiante debe descubrir que el camino más corto está determinado por una línea recta, al reflejar el punto que representa la ciudad. También se le puede pedir al estudiante que mida los ángulos que se forman al unir mediante segmentos los puntos la actividad.

Guía No. 13 La Bisectriz.			
Indicadores	**Objetivos**	**Recurso**	**Tiempo**
Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.	Identificar la bisectriz de un triángulo como un eje de simetría.	• Escuadra • Lápiz • Transportador	120 minutos

Descripción de Actividad

Inicio

Se realiza un recuento de la actividad anterior, es necesario en este punto explicar la reflexión de puntos, se puede hablar de las características de la reflexión, en este caso el río es el eje de simetría y se determina que para reflejar el punto es necesario considerar la distancia del punto que se va reflejar al eje de simetría (río) y que este que en el lado opuesto conservando esta distancia, pero además se ubique sobre una recta perpendicular (imaginaria) que se forma entre el eje de simetría y el punto que representa la ciudad.

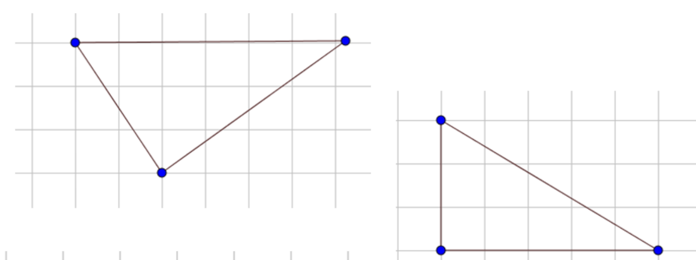
Desarrollo

Los estudiantes van a identificar la bisectriz de una forma práctica como si fuera el eje de simetría entre los lados del triángulo.

Actividad No. 1

1. Construya la bisectriz de los siguientes triángulos.

Orientación: Dibuje la bisectriz doblando los triángulos de tal manera que coincidan dos lados consecutivos.



Final

En la actividad No. 2, el estudiante debe comprobar usando el transportador cómo son los ángulos que se forman entre los lados del triángulo y la línea divisoria que se construyó y escribir sus apreciaciones y conclusiones, se espera que identifique que precisamente esta línea divisoria divide cada ángulo del triángulo en dos ángulos de la misma medida.

Actividad No. 2

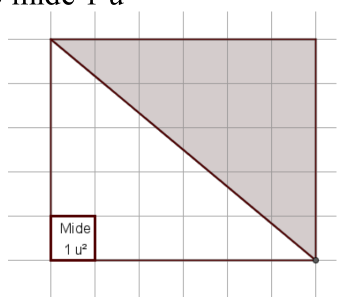
Con un transportador mide cada uno de los ángulos del triángulo y el ángulo que se forma entre cada lado del ángulo y la bisectriz. ¿Qué puedes concluir?

Apéndice B. Evaluaciones

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE **Prueba Diagnóstica de Geometría**	**Docente** Rónal Villamizar	unab
Estudiante:			**Grado**: 8-

1. ¿Un triángulo rectángulo puede ser isósceles? Explique su respuesta.

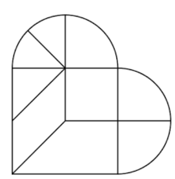
2. Si el área del cuadrado pequeño mide 1 u^2



   A. ¿Cuánto mide el área de todo el rectángulo? (Explique cómo halló el resultado)

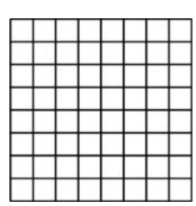
   B. ¿Cuánto mide el área del triángulo sombreado? (Explique cómo halló el resultado).

3. Coloree el triángulo o los triángulos que observa en el siguiente corazón. ¿Por qué las demás figuras no son triángulos?



4. ¿Los ángulos de un triángulo suman 180°? Explique su respuesta.

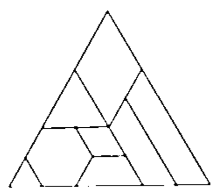
5. Dibuje un triángulo rectángulo en la siguiente cuadrícula. ¿ Por qué a ese triángulo se le llama triángulo rectángulo?



6. ¿La siguiente figura corresponde a un triángulo? ¿Por qué?

7. El eje de simetría de una figura es una línea imaginaria que divide la figura en dos partes iguales. ¿Es posible que una figura tenga más de un eje de simetría? Explique

8. Coloree las figuras que corresponden a paralelogramos y escriba todas sus características relacionadas con sus lados, ángulos y diagonales.



	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	Docente	
	Evaluación final	Rónal Villamizar	

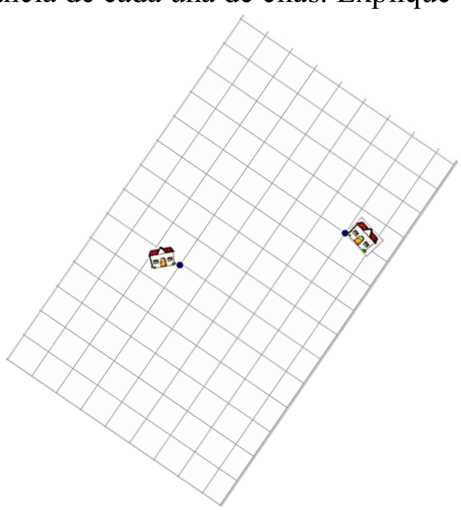
Estudiante:	**Grado: 8-**

1. ¿Es posible que el circuncentro de un triángulo se ubique afuera del triángulo? Explique.

2. El profesor explica que el circuncentro es la intersección de las tres mediatrices del triángulo, pero un estudiante afirma que es suficiente decir qué es la intersección de dos mediatrices, ¿estás de acuerdo? Explique.

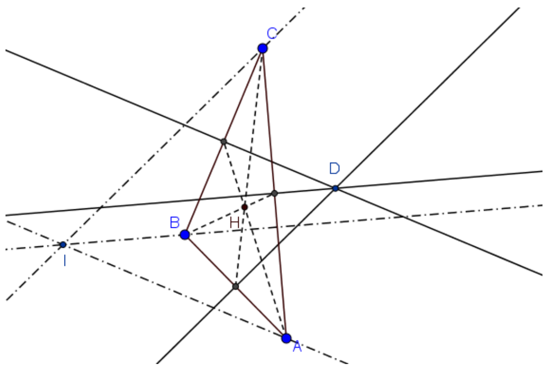
3. ¿Es posible que el circuncentro y el baricentro de un triángulo sea el mismo? (Pista: Piense en triángulos equiláteros, isósceles o rectángulos). Explique.

4. Los residentes de cada una de las dos casas quieren construir una cerca que esté a igual distancia de cada una de ellas. Explique donde debe ubicar la cerca.

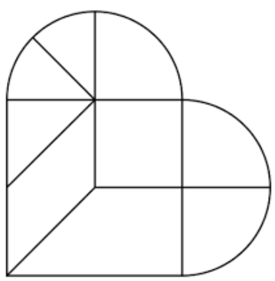


5. Cien árboles se ubican a igual distancia de dos corrales. Si el primer árbol es el más alto y alguien que tiene una estatura inferior a la altura del primer árbol se ubica de frente a este, ¿cuántos árboles puede ver? Explique.

6. ¿Cuál es el circuncentro del triángulo ABC? Explique



7. En el siguiente corazón, coloree las figuras que no son triángulos. ¿Por qué las demás figuras son triángulos?



8. Se quiere construir una circunferencia que pase por los vértices del siguiente triángulo. Explique el procedimiento.

Apéndice C Guías

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	**Docente** Rónal Villamizar	unab
	Guía No. 1 Ubicando grifos		

Estudiante:	**Grado: 8-**

I. Reto

En una granja hay dos corrales y se necesita instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales.

II. Actividad

1) Representar la situación que plantea el reto usando tapas y midiendo.
2) Determinar al menos 10 posibles ubicaciones del grifo.

III. Materiales

- 12 tapas de gaseosa.
- Regla o escuadra.

IV. Orientación

- Usar dos tapas para representar los dos corrales.
- Usar diez tapas para representar las posibles ubicaciones del grifo.

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	Docente	
	Guía No. 1 Ubicando grifos	Rónal Villamizar	

¡MANOS A LA OBRA!

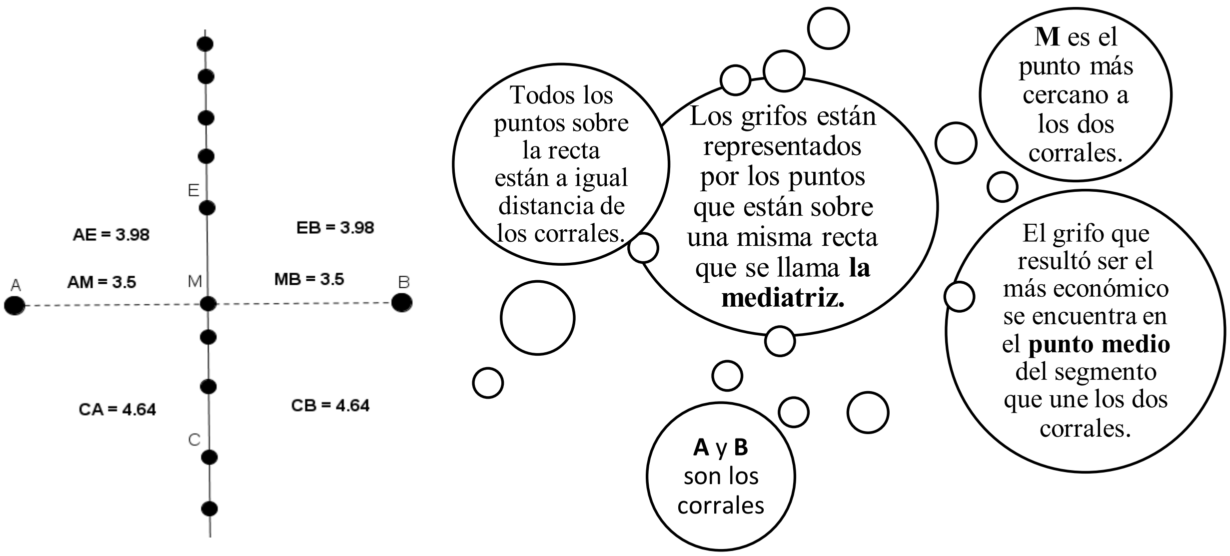
- Dibujar los corrales y las 10 posibles ubicaciones de los grifos.

- ¿Cuál de las posibles ubicaciones del grifo resultaría la más económica? ¿Por qué? (En el dibujo anterior enciérrala en un círculo).

2. ¿Qué características comunes tienen las posibles ubicaciones de los grifos?

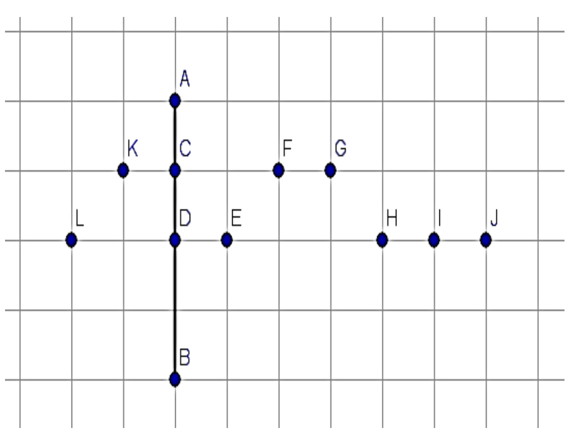
	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	Docente	
	Guía No. 2 Los puntos de la Mediatriz	Rónal Villamizar	
Estudiante:		**Grado: 8-**	

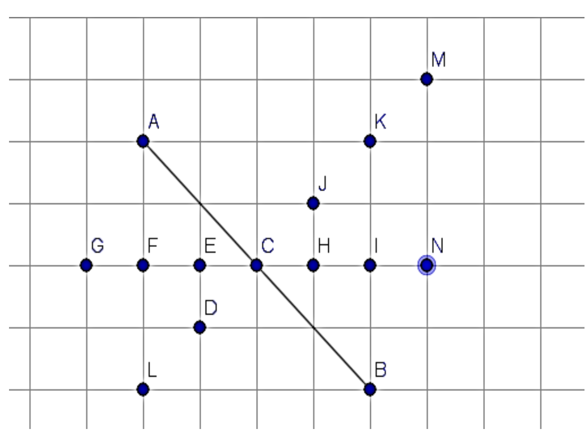
La siguiente ilustración muestra la solución del reto No. 1: "En una granja hay dos corrales y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales"



Actividad No. 1

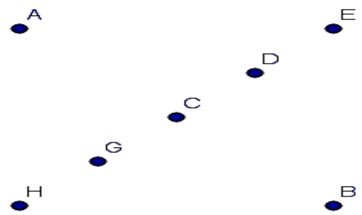
Unir con un color los puntos de la mediatriz del segmento AB.





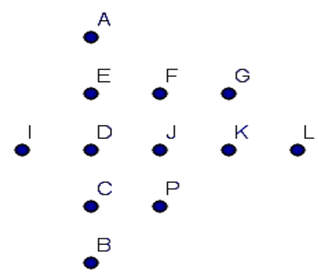
Actividad No. 2

Tomar las distancias de A y B a los demás puntos para completar la tabla. Luego trazar con un mismo color los segmentos que tienen la misma distancia y trazar la mediatriz de AB.



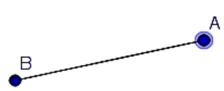
DISTANCIAS	
AC=	BC=
AE=	BE=
AD=	BD=
AG=	BG=

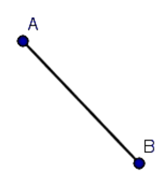
DISTANCIAS	



Actividad No. 3

Trazar la mediatriz del segmento AB





Actividad No. 4

Responda las siguientes preguntas.

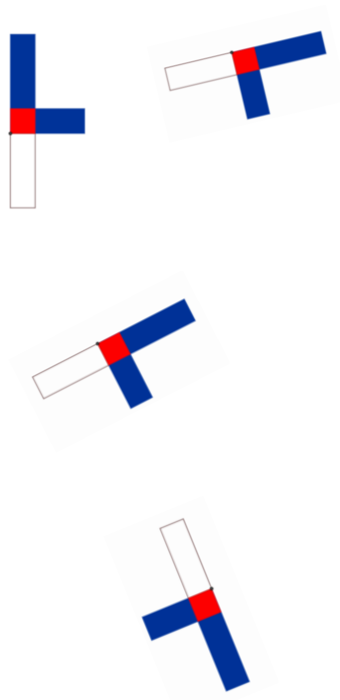
- ¿Qué puntos hacen parte de la mediatriz?
- ¿Cuántos puntos puede tener la mediatriz?
- Defina con sus propias palabras la mediatriz

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	Docente	
	Guía No. 3 ¡La Mediatriz es perpendicular!	Rónal Villamizar	

Estudiante:	**Grado: 8-**

Actividad No.1

Usando los acetatos que tienen la forma de la letra L, vas a verificar si las siguientes rectas son las mediatrices del segmento AB y corregir aquellas que estén mal.

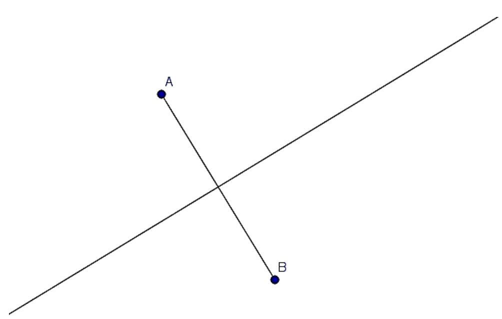


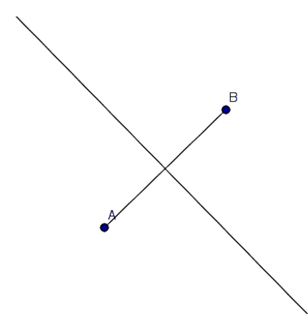
Orientación

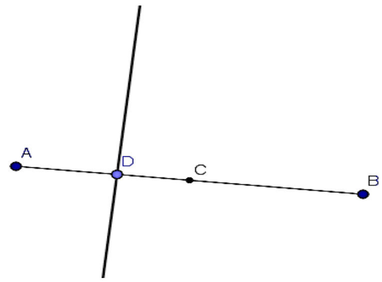
Los lados de la letra L deben coincidir exactamente sobre el segmento dado y la mediatriz. Recuerda que si la recta no pasa por el punto medio no es mediatriz.

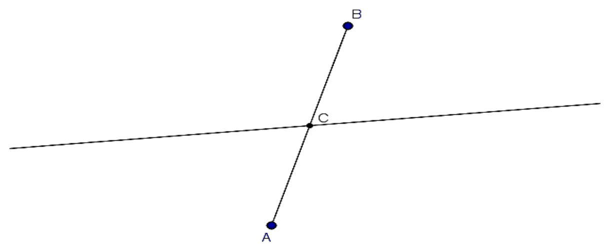
Materiales

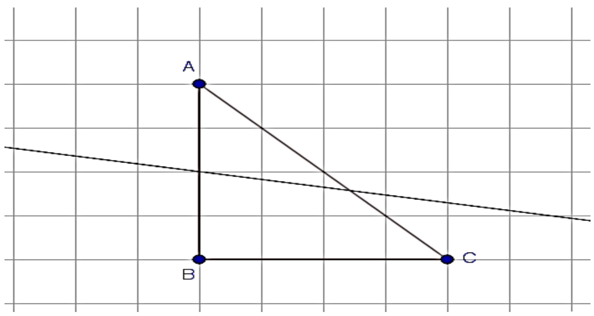
- 1 acetato con la forma de la letra **L**

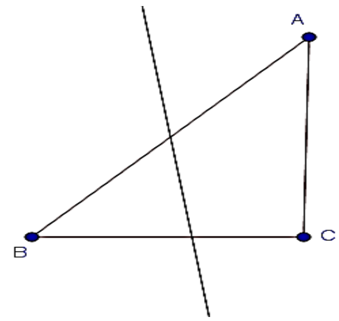


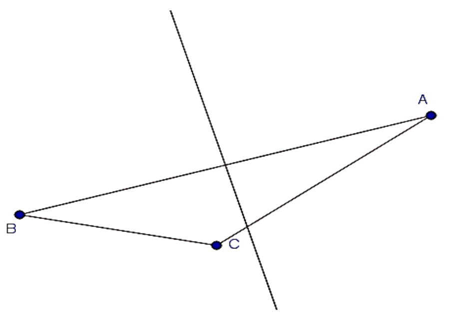


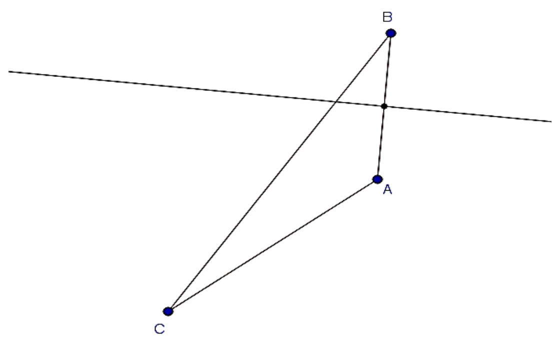


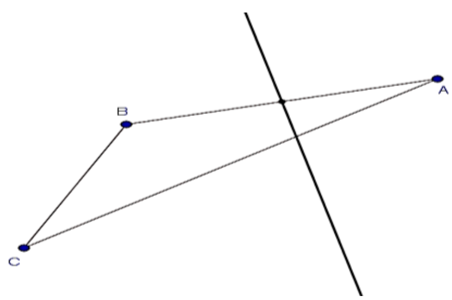


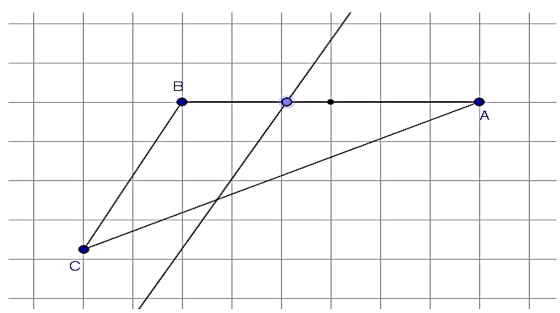












Actividad No 2. Responda las siguientes preguntas

1. ¿Para que una recta sea la mediatriz de un segmento debe pasar por cualquier punto del segmento? ¿Por qué?

2. ¿La mediatriz es perpendicular? ¿Por qué?

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	**Docente** Rónal Villamizar	
	Guía No. 4. Más corrales		

Estudiante:	**Grado: 8-**

Reto

En una granja se amplió el número de corrales de dos a tres y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia a cada uno de los corrales.

Orientación

- Usa tres tapas para representar los tres corrales.
- Los corrales no deben estar en línea recta.
- Ubicar los grifos que están a igual distancia de cada par de corrales.

Actividad

1) Representar la situación que plantea el reto usando tapas y midiendo.
2) Determina la ubicación del grifo.

Materiales

- 33 tapas de gaseosa.
- Regla o escuadra.

¡MANOS A LA OBRA!

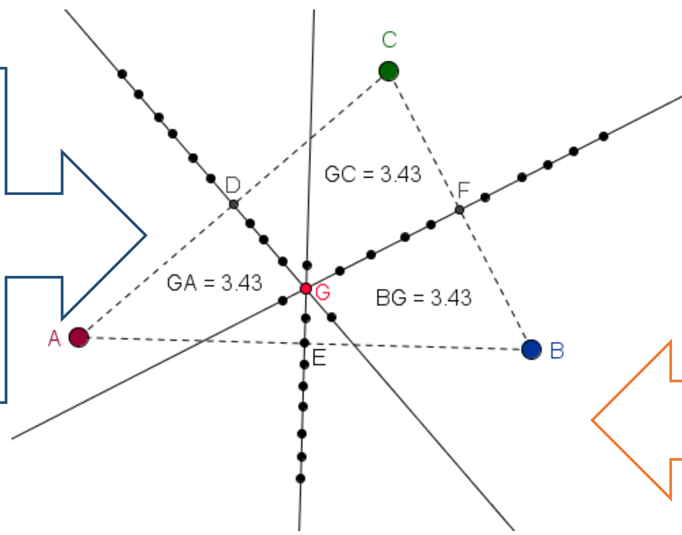
1. Dibuja los corrales y la posible ubicación del grifo.

2. ¿Cuántos grifos están a igual distancia de los tres corrales? (En el dibujo anterior coloréalo)

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE **Guía No. 5. El Circuncentro**	**Docente** Rónal Villamizar	
Estudiante:			**Grado: 8-**

La siguiente gráfica ilustra la solución de la situación: "En una granja se amplió el número de corrales de dos a tres y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales".

Los grifos están representados con los puntos que están sobre cada una de las rectas que se llaman **las mediatrices.**

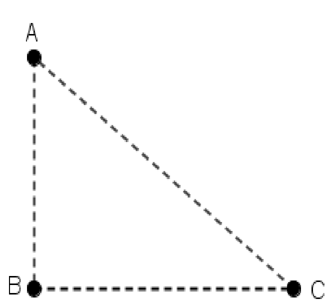


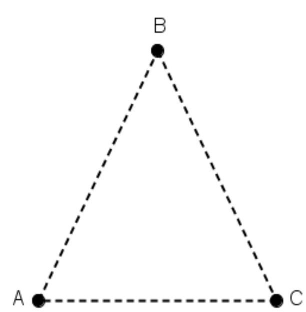
A, B y C son los corrales.

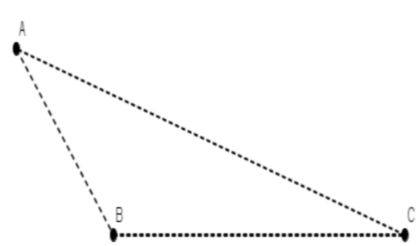
G es el punto que está a igual distancia de los tres corrales y se llama **el circuncentro.**

Actividad No 1

1. Ubicar el circuncentro de los siguientes triángulos

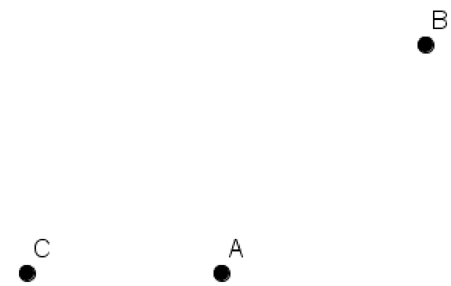






Actividad No. 2 Responda las siguientes preguntas

2. Los puntos representan tres barrios y se desea construir un parque que esté a igual distancia de los barrios. Ubique con un punto el lugar exacto donde se debe construir el parque.



Actividad No. 3 Responda las siguientes preguntas

1. Escriba una idea que relacione el siguiente par de elementos.
   - Circuncentro y vértice

   - Mediatriz y circuncentro

2. ¿Cuántos puntos están a igual distancia de los vértices de un triángulo?

3. Explique el procedimiento para hallar el circuncentro de un triángulo

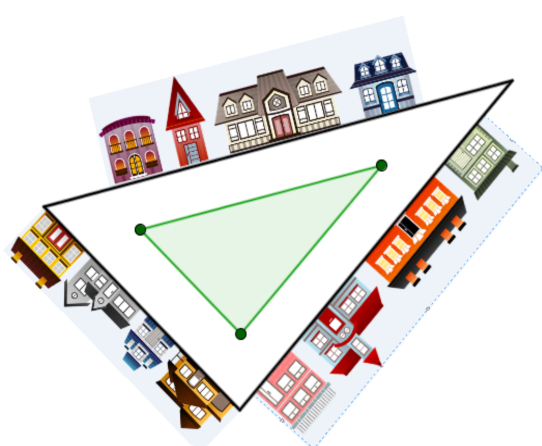
	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	**Docente** Rónal Villamizar	
	Guía No. 6 Más sobre la Mediatriz y el Circuncentro.		
Estudiante:			**Grado: 8-1**

Actividad No. 1

Los residentes de dos casas desean ubicar árboles que estén a igual distancia de las casas. Señala con una recta donde se deben ubicar los árboles.

Actividad No. 2

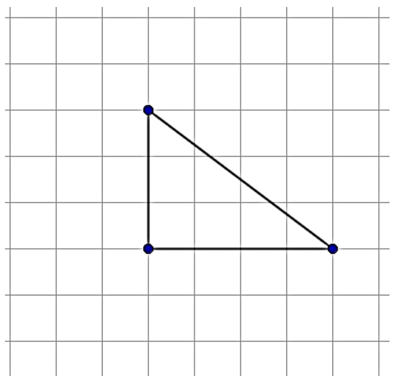
La plazoleta central del parque de un pueblo tiene forma triangular y se quiere instalar en todo su centro una fuente. Señale el lugar donde se debe ubicar la fuente.

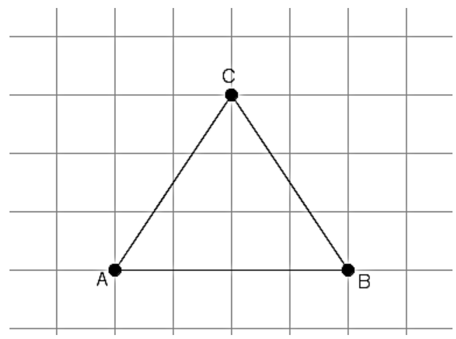


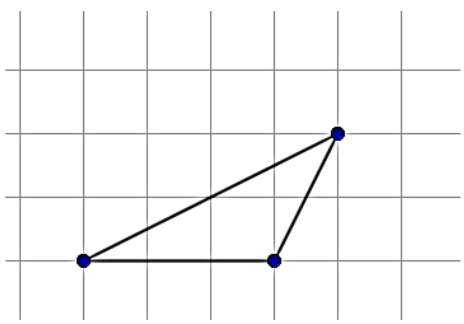
	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	**Docente** Rónal Villamizar	unab
	Guía No. 6. Más sobre la Mediatriz y el Circuncentro		

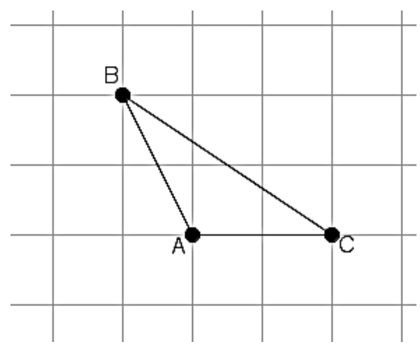
Actividad No. 3

Trazar una circunferencia que pase por los tres vértices.









Actividad No. 4 Responda las siguientes preguntas

1. ¿Para qué sirve la mediatriz?

2. ¿Para qué sirve el circuncentro?

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE **Guía No. 7 Mantener en Equilibrio**	**Docente** Rónal Villamizar	
Estudiante:			**Grado: 8-**

I. Reto

Mantener un triángulo en equilibrio sobre la punta de un lápiz.

IV. Orientación

Ubique un punto en el triángulo y pruebe si se puede mantener en equilibrio sosteniéndolo con la punta de un lápiz.

II. Actividad

1) Construya tres triángulos en cartón.
2) Dibuje sobre el triángulo el punto de equilibrio.

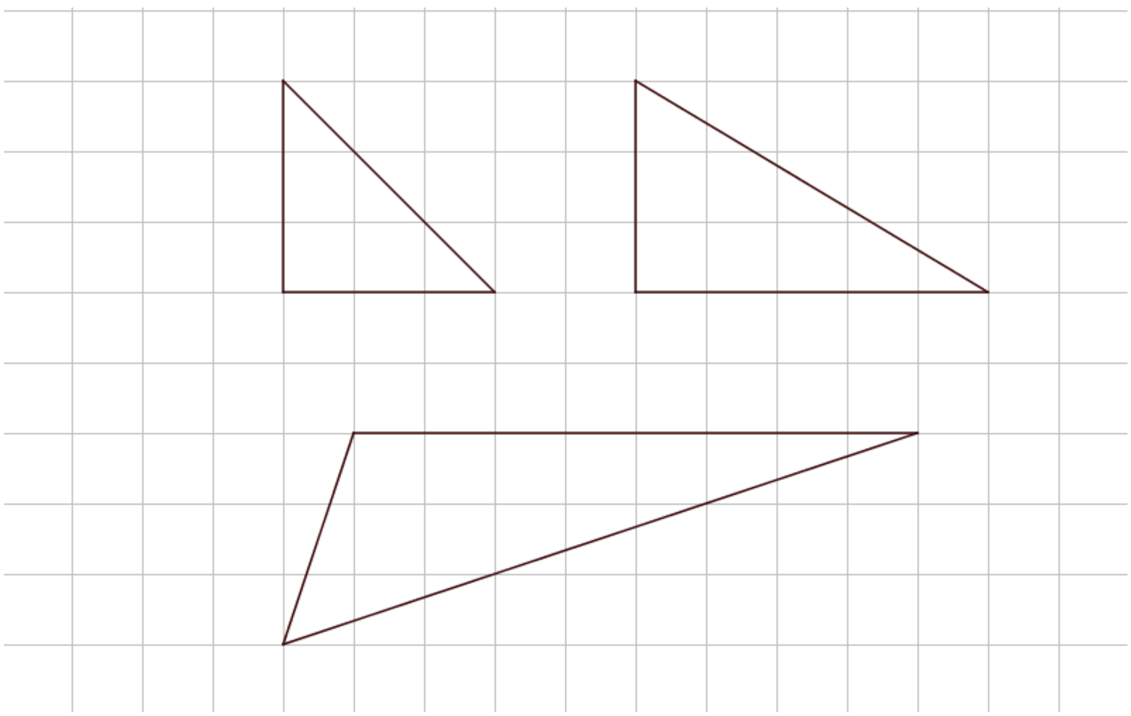
IV. Materiales

- 3 triángulos de cartón
- Lápiz

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	**Docente** Rónal Villamizar	
	Guía No. 7 Mantener en equilibrio.		

¡MANOS A LA OBRA!

- Ubique el punto de equilibrio de los siguientes triángulos

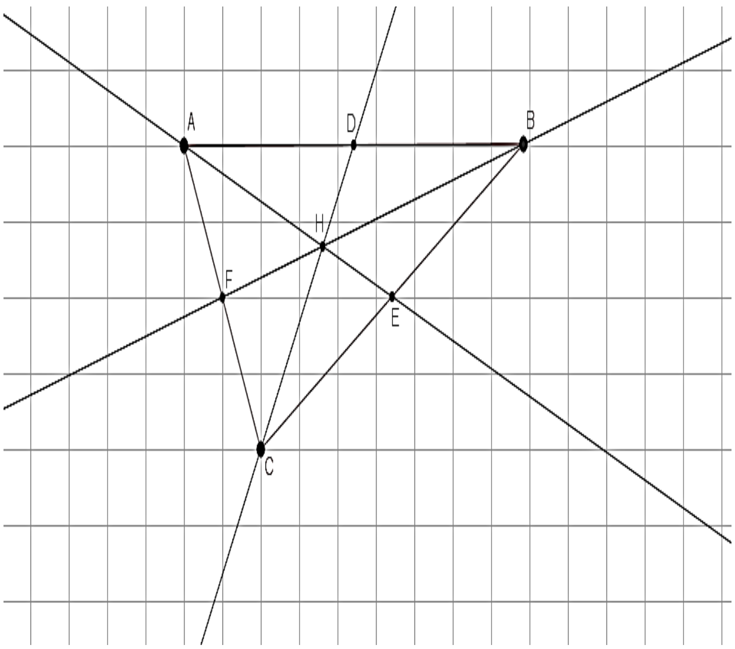


- Trace rectas que partan desde el vértice y pasen por el centro. ¿Por cuál puntos del segmento del triángulo pasa?

- ¿Cómo ubicar el punto de equilibrio trazando rectas?

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	**Docente** Rónal Villamizar	
	Guía No. 8 La mediana y el baricentro		
Estudiante:			**Grado: 8-**

La siguiente ilustración muestra la solución del reto No. 3. Buscar el punto de equilibrio de un triángulo.

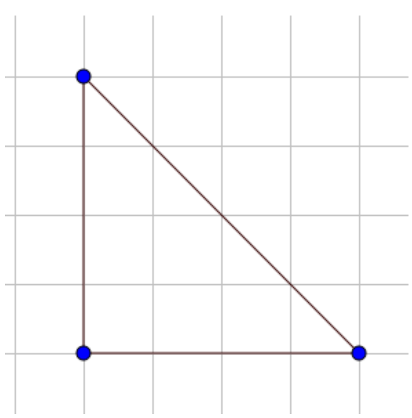


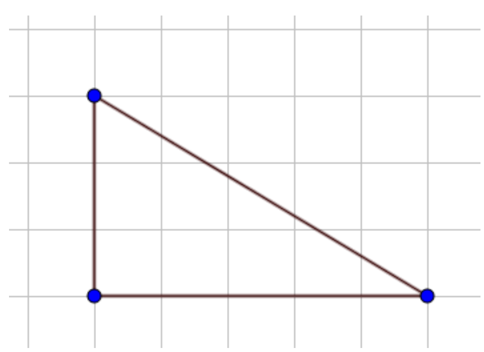
Pasos para construir el Baricentro

1. Ubicar el punto medio de cada uno de los lados del triángulo.
2. Unir con una recta un vértice con el punto medio del lado opuesto. Esta recta se llama **MEDIANA.**
3. El punto de corte de las tres rectas se llama **BARICENTRO**.

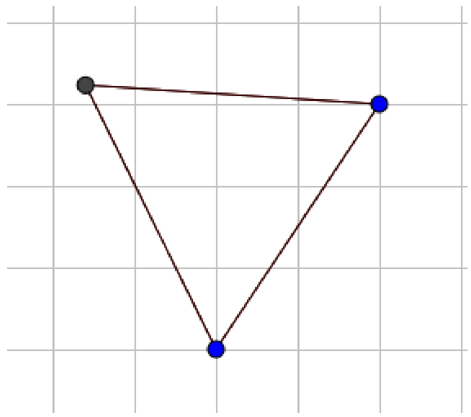
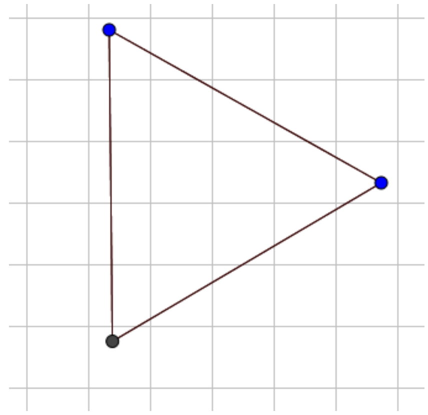
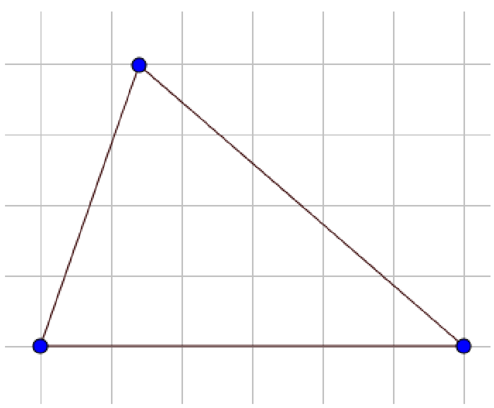
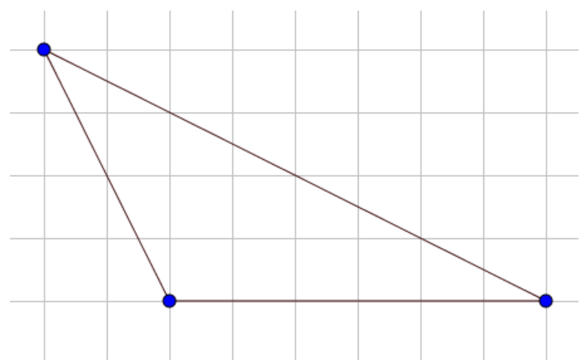
Actividad No. 1.

Construir el baricentro de los siguientes triángulos.





	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	**Docente** Rónal Villamizar	
	Guía No. 8 La mediana y el baricentro		

Actividad No. 2

Responda las siguientes preguntas.

1. ¿Es posible que el baricentro se ubique afuera del triángulo? ¿Por qué?

2. ¿El baricentro tiene aplicaciones en la vida real? , ¿Qué usos puede tener?

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE **Guía No. 9. Aplicaciones del Baricentro**	**Docente** Rónal Villamizar	
Estudiante:			**Grado: 8**

Actividad No. 1

Para una fiesta se van a construir triángulos de diferentes colores que cuelguen de un solo hilo y que cada uno se mantenga en forma horizontal.

Orientación

Utiliza los triángulos de la actividad del reto de "Mantener en equilibrio" para comprobar si es posible colgar los triángulos.

Materiales

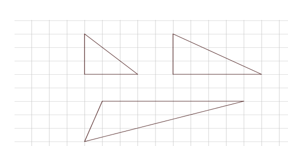
- Triángulos de cartón
- Hilo

Materiales

- Palillos
- Plastilina
- Colbón

Actividad No. 2

Construya pirámides de diferentes bases triangulares.



Orientación

Al construir las pirámides recuerde que la altura de este, debe situarse en el baricentro de la base.

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	Docente	
	Guía No. 10 Las alturas del triángulo	Rónal Villamizar	

Estudiante:	**Grado: 8-**

I. Reto

Mida las tres alturas del triángulo

IV. Orientación

Ubique el triángulo verticalmente cambiando la base sobre la cual se apoya en la superficie y mide la altura. La altura va de la base al vértice opuesto, para ello la regla o escuadra se debe ubicar en forma perpendicular a la base.

II. Actividad

3) Construya tres triángulos en cartón. (Puede usar los mismos del reto "mantener en equilibrio").
4) Determine las alturas de los tres triángulos.

III. Materiales

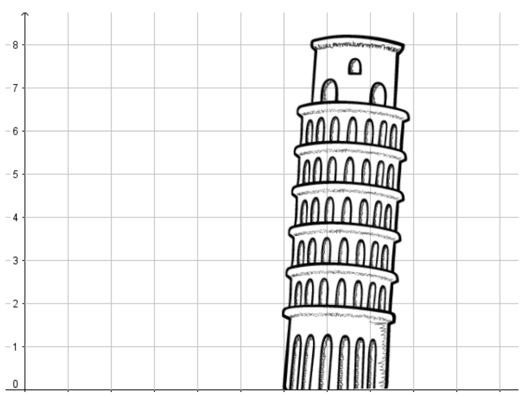
- 3 triángulos de cartón
- Regla

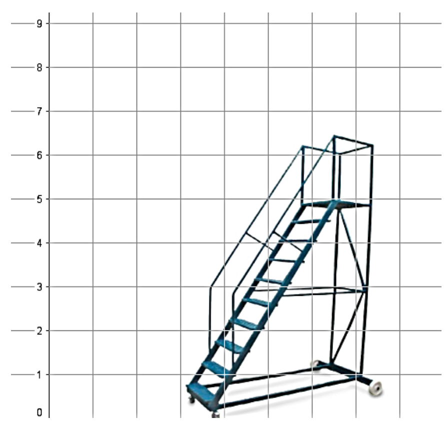
	I.E. GUSTAVO COTE URIBE **Guía No. 11 Más sobre las alturas**	**Docente** Rónal Villamizar	
Estudiante:			**Grado: 8-**

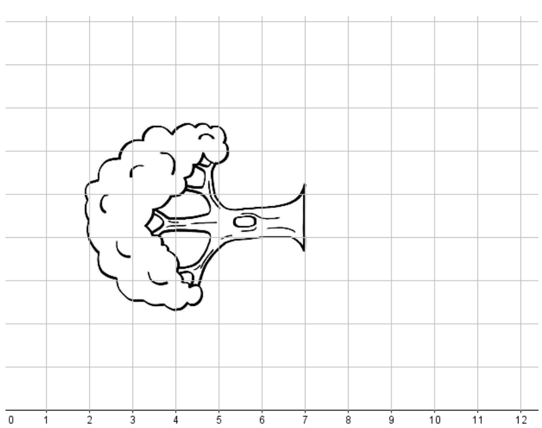
Actividad No. 1

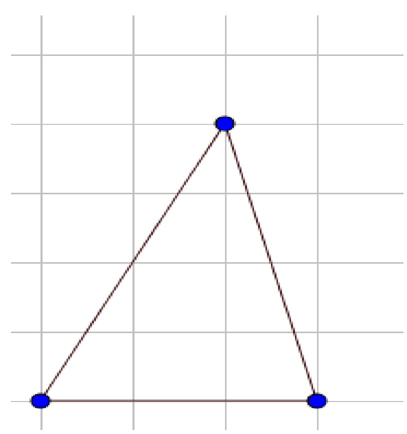
Trace la altura de los siguientes objetos.

Orientación: La altura es perpendicular a la base, acá vamos a considerar la base como el lado donde se origina la figura.







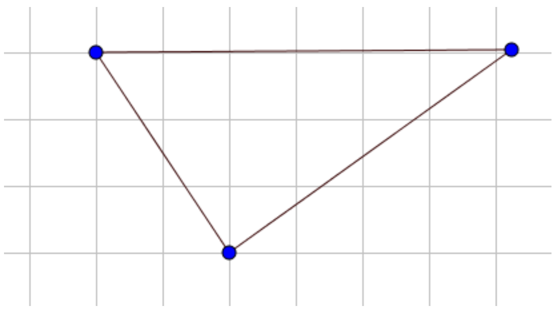


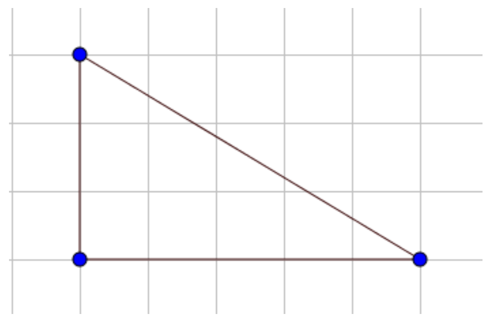
Actividad No. 2

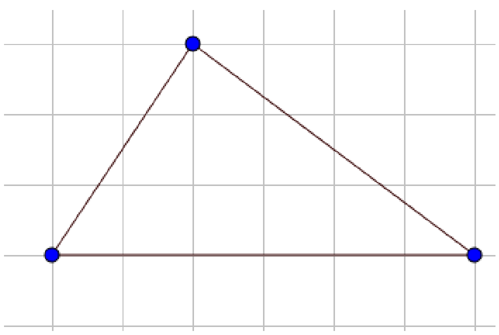
Trace la tres alturas del triángulo.

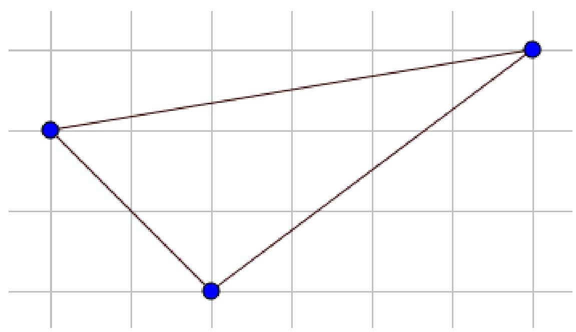
Orientación

La altura se traza uniendo un vértice mediante un segmento perpendicular al lado opuesto.



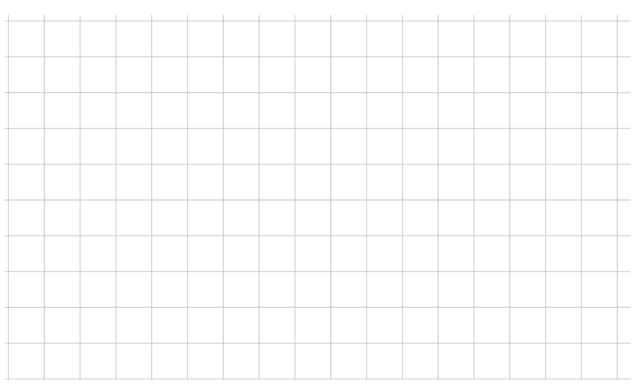






Actividad No. 3

Construya un triángulo cuyas alturas y mediatrices coincidan.



	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	Docente	
	Guía No. 12. Buscando el camino	Rónal Villamizar	
Estudiante:			**Grado: 8-**

Reto

Un agrónomo se dirige desde su casa hasta la ciudad a caballo pero debe pasar por el río para que el animalito tome agua. Su casa y la ciudad quedan del mismo lado del rio. Ayúdale a encontrar el camino más corto para ir de su casa a la ciudad pasando por el rio.

Orientación

- Usa dos tapas, una para representar la casa y otra para la ciudad.
- Representa el rio con una hilera de tapas.
- Pinta con tiza diversos trayectos que vayan de la casa al río y del río a la ciudad.
- Registra los datos en la tabla, para determinar, el mejor camino.

Actividad 1

a. Representar la situación que plantea el reto usando tapas y demarcando los caminos con tiza.
b. Determina el camino más corto (use la tabla).

Materiales

- 20 tapas de gaseosa.
- Tiza.
- Regla.

	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	Docente	
	Guía No. 12. Buscando el camino	Rónal Villamizar	

Actividad No. 1 Registra las distancias en la siguiente tabla.

Distancias	**Trayectos**					
	1	2	3	4	5	6
De la casa al río.						
Del río a la ciudad						
De la casa a la ciudad						

Actividad No. 2 Dibuje los posibles trayectos y con otro color delinee la solución.

Actividad No. 3 Para descubrir

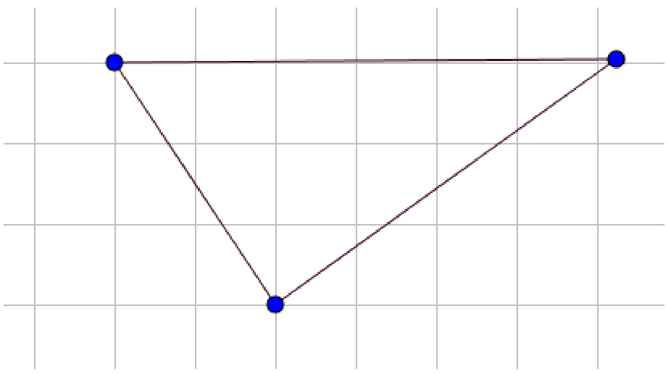
Doble la hoja por la línea que representa el río y calque el punto que representa la ciudad, una vez hecho esto una con una línea el punto de la casa y el punto calcado. Compare su solución con la línea que se obtuve y explique cómo debe ser la solución del reto.

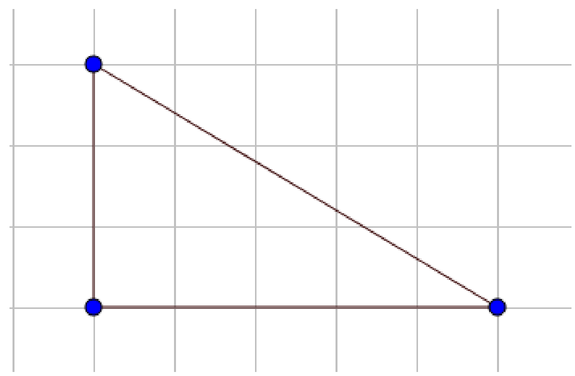
	I.E. GUSTAVO COTE URIBE	Docente Rónal Villamizar	
	Guía No. 13. La bisectriz		
Estudiante:			**Grado: 8-**

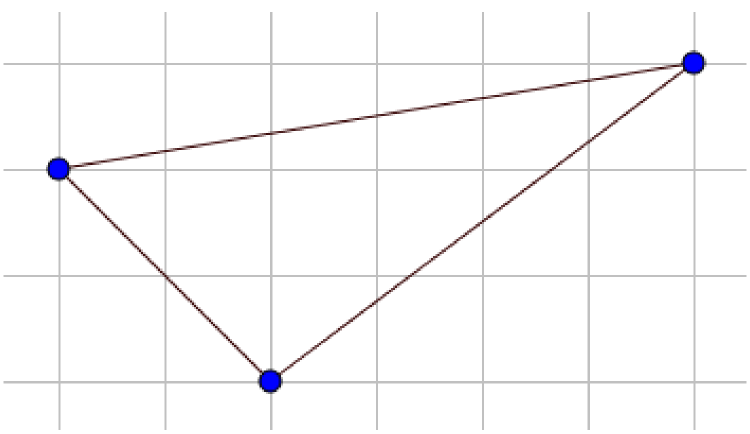
Actividad No. 1

Construya la bisectriz de los siguientes triángulos.

Orientación: Dibuje la bisectriz doblando los triángulos de tal manera que coincidan dos lados consecutivos.







Actividad No. 2

Con un transportador mide cada uno de los ángulos del triángulo y el ángulo que se forma entre cada lado del ángulo y la bisectriz. ¿Qué puedes concluir?