Para encabezado, a cumplimentar por el editor

Diseño de una propuesta didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Gustavo Cote Uribe.

Rónal Darío Villamizar (IE Gustavo Cote Uribe)

Fecha de recepción: A cumplimentar por el editor
Fecha de aceptación: A cumplimentar por el editor

Resumen

En este trabajo se diseñó una secuencia didáctica para el estudio de las líneas y puntos notables del triángulo en el grado octavo (alumnos entre los 13 y 17 años de edad), siguiendo el Modelo de Van Hiele para caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes y estructurar las actividades para el fortalecimiento de su pensamiento espacial, además se propició la exploración activa usando material reciclable como las tapas plásticas de gaseosa y el cartón para el descubrimiento guiado de los conceptos y propiedades. En el marco de una metodología cualitativa, se reflexionó en cada una de las fases en las que está inmerso el investigador docente para obtener mejores resultados en el desempeño de los estudiantes, se precisaron además, qué materiales son pertinentes para la exploración de los objetos de estudio.

Palabras clave

Secuencia didáctica, líneas y puntos notables del triángulo, Modelo de Van Hiele, Pensamiento espacial, exploración activa, material reciclable, metodología cualitativa.

Title

Design of a didactic proposal to strengthen the spatial thinking of eighth grade students at Gustavo Cote Uribe Public School.

Abstract

This project presents the design of a didactic sequence aimed at studying the notable lines and points of triangles. It was implemented with a group of eighth graders, age 13 to 17. The Van Hiele Model was followed to characterize the students' reasoning level as well as to structure activities to strengthen their spatial thinking since it had been previously observed some weaknesses on these aspects. Additionally, guided discovering of the concepts and properties was fostered trough active exploration and the use of recyclable materials such cardboard and plastic bottle caps. Based on the qualitative research methodology, the teacher-researcher reflected on each of the stages to identify students' needs, to choose the most suitable materials for the exploration and to improve their overall performance.

Keywords

Didactic sequence, notable lines and points of triangles, Van Hiele Model, spatial thinking, active exploration, recyclable material, qualitative research methodology.

1. Introducción

La presente investigación a través del diseño de una secuencia didáctica para abordar el tema de los puntos y líneas notables del triángulo en el grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe de la ciudad de Bucaramanga, que busca fortalecer el pensamiento espacial de los estudiantes, se hace como punto de partida para realizar una reflexión de la forma en que se asume el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula y reorientarla a la manera en que evoluciona el pensamiento de los estudiantes, en especial el de geometría, para lo cual se realizó una revisión de las recomendaciones de los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia. El interés de esta investigación, nace del análisis de los bajos resultados en las pruebas saber de los grados quinto, noveno y décimo, respectivamente, a su vez, de los bajos índices en el ISCE, el bajo rendimiento de los estudiantes de la institución y la necesidad de innovar las prácticas en el aula de clase.

Se seleccionó la asignatura de geometría por varios aspectos que se evidenciaron durante las observaciones previas al planteamiento del problema, como el gusto de los estudiantes por el dibujo y las manualidades, el énfasis ambiental de la institución que promueve el reciclaje y la revisión bibliográfica donde se resalta el potencial de la geometría para desarrollar habilidades en los estudiantes, tal como lo señala Howard Gardner en su trabajo sobre las inteligencias múltiples al afirmar que la geometría es "esencial para el desarrollo del pensamiento científico", por otra parte, tiene muchos elementos que son prácticos para muchas ocupaciones y profesiones, además por la dinámica que se puede dar en clase con la manipulación de materiales para descubrir elementos y propiedades, lo que puede resultar motivante para el estudiante; por lo anteriormente expuesto, su no abordaje excluye del aula una asignatura propicia para que el educando mejore su nivel de razonamiento y se acerque a otros saberes implícitos como el dibujo, el diseño, la construcción, entre otros.

En el marco de la metodología cualitativa, este estudio se apoyó en las observaciones de clases que se describen en el diario pedagógico, las fotos tomadas en las mismas para evidenciar las actividades y el desarrollo de las guías de cada una de las sesiones de aprendizaje; para el diseño de la secuencia didáctica se reflexionó en cada momento de la investigación (antes, durante y después de su aplicación), sobre aspectos como el gusto de los estudiantes por las actividades, el material con el que se apoyaron estas, que resultaran atractivas hacia ellos y permitieran la exploración de conceptos y propiedades, teniendo en cuenta que para la asignatura se carece de material didáctico y de recursos tecnológicos como tabletas y computadores como mediadores instrumentales en el proceso de enseñanza-aprendizaje; de este modo, esta investigación es un punto de partida para toda el área de matemáticas, puesto que muchas temáticas del álgebra y la aritmética pueden recibir un tratamiento geométrico.

2. Contextualización de la Investigación

La investigación se realizó en la Institución Educativa (IE) Gustavo Cote Uribe, ubicada en el Barrio María Paz del norte de Bucaramanga, que presta servicios educativos en la tres jornadas: diurna, vespertina y nocturna; en la primera, cursan los grados de preescolar, quinto y secundaria (de sexto a undécimo); en la segunda, de preescolar a cuarto y en la tercera se ofrece educación para adultos en el programa de Ciclos Lectivos Integrados (CLEI), respectivamente, gracias a esto, la Institución cuenta con aproximadamente 1000 estudiantes, donde la mayoría de los grupos oscilan entre 36 y 54 estudiantes aproximadamente.

Un considerable porcentaje de los estudiantes de la IE Gustavo Cote Uribe provienen de poblaciones en condición de vulnerabilidad, algunos desplazados de otras regiones por el conflicto armado, además, en el aula de clase se evidencia a diario un importante número de inasistencias por inestabilidad en el núcleo familiar, desmotivación, pocos o nulos hábitos de estudio, entre otros factores, lo cual arroja como resultado que muchos de ellos no concluyan su año escolar o no alcancen las competencias necesarias para ser promovidos. Sumado a lo anterior, los resultados de la prueba SABER de los años 2012- 2014 de los grados tercero, quinto y noveno muestran un aumento en el porcentaje de estudiantes en insuficiente.

Después de las consideraciones anteriores, se puede deducir que si no se hace una intervención pronta, el número de estudiantes que no asistirán regularmente a clase se mantendrá, repercutiendo negativamente en el porcentaje de estudiantes que reprueban cada año, estudiantes que al persistir en las dificultades académicas muy probablemente van a optar por no continuar sus estudios.

Por todo lo anterior, nos hemos planteado como pregunta de investigación, **¿cómo fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución educativa Gustavo Cote Uribe mediante el diseño e implementación de una propuesta didáctica?**

2.4 Justificación y objetivos

Una habilidad espacial es primordial en muchas actividades y un valor agregado a muchas ocupaciones y más aún si en ella se necesita visualizar, medir, construir y crear; se puede decir entonces que la geometría por sus elementos prácticos y la posibilidad de usar un número considerable de materiales, muchos de ellos reciclables, puede ser usada para la exploración y el descubrimiento de propiedades, lo cual, indudablemente propicia el desarrollo del pensamiento espacial, que está ligado a otras habilidades tales como lo sugiere Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias:

> El pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios, es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física y matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial (MEN, 1998, p. 37).

Paradójicamente, en muchas instituciones el estudio de la geometría ha sido abandonado, se limita a las últimas unidades del año escolar, o simplemente se trata de una serie de definiciones acompañada de un puñado de propiedades desprovistas de aplicabilidad y sentido, que repercuten negativamente en el interés de los estudiantes y no se aprovechan las potencialidades de esta asignatura para que el educando se apasione desde ella por la matemáticas.

Así pues, para que no se presente lo anterior en el aula de clase, los lineamientos curriculares del (MEN, 1998,pp. 37-38) señalan entre otras, algunas consideraciones importantes que se deben tener presente en el momento de enseñar geometría:

- "Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento.
- La moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento espacial indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela. El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que adquiere cada vez mayor aceptación en lo que se refiere a geometría escolar"

No obstante, la mayoría de las asignaturas en matemáticas tienen contenidos muy extensos y su desarrollo es acelerado, contrario a la evolución que esta tuvo a lo largo de la historia, lo cual hace

que muchos estudiantes sean apáticos y vean las matemáticas como algo muy complejo e incluso inentendible.
De este modo y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, que orientan la geometría en el ámbito académico, en este trabajo se diseñará e implementará una secuencia didáctica cuyo objetivo general es "**Fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución educativa Gustavo Cote Uribe mediante el diseño e implementación de una propuesta didáctica";** y para lograrlo se han establecido los siguientes objetivos específicos:

- Identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes del grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe.
- Diseñar e implementar una secuencia didáctica que permita fortalecer el pensamiento espacial de los estudiantes de grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe.
- Evaluar la efectividad de las estrategias implementadas con los estudiantes del grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe.

3. Marco Teórico

En este apartado se hace una revisión de los fundamentos curriculares, las temáticas, los modelos pedagógicos y las estrategias didácticas que sirven de sustento de la propuesta didáctica.

Los estándares y lineamientos curriculares de matemáticas brindan algunas orientaciones básicas respecto al sentido de la geometría, qué y cómo enseñarlas, al respecto (MEN, 1998,p.56) define el pensamiento espacial como "…el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales"

En la mayoría de los textos escolares, la geometría es presentada como un conjunto de objetos ya sean figuras planas o sólidos y se enuncian algunas clasificaciones, propiedades, transformaciones sin un contexto de aplicación, como si solo sirviera para la asignatura, contrario a esta práctica tan común en el aula, (MEN, 2006,p.61) señala la importancia de "relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial"

3.1 Fundamentos de la didáctica de las Matemáticas y Teoría sobre el abordaje de la geometría

(Chavellard, 1997) En el artículo ***La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,*** define la transposición didáctica como "un contenido del saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza" (p.16). En otras palabras, para enseñar algo, se aísla ese algo de alguna de sus propiedades y se adapta al contenido escolar.

Las consideraciones anteriores al sugerir la importancia de realizar la transposición didáctica, llevan al surgimiento de algunos nuevos interrogantes para el quehacer docente: ¿Qué rol debe asumir el profesor y el estudiante en la transposición didáctica?, ¿qué se debe evitar en la transposición didáctica?, y ¿qué situaciones se deben plantear en el aula de clase para que sea didáctica?, Las tres primeras preguntas relacionadas con el rol del docente y alumno, lo que se debe evitar en la transposición didáctica y las situaciones didácticas, encuentran su respuesta en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, en su libro Fundamentos y Métodos de la didáctica de las Matemáticas, (Brousseau, 1986) que tiene como propósito considerar los elementos básicos que debe reunir una propuesta didáctica para que sea útil, completa y coherente; además, preguntas relacionadas con el nivel de razonamiento y las fases de aprendizaje de geometría, entre otras, encuentran su respuesta en el Modelo de Van Hiele, para lo cual se realizará un enfoque en las interpretaciones de Jaime y Gutiérrez (1990).

Dentro de los fenómenos que señala Brousseau que deben controlarse en la transposición didáctica se encuentran:

- Cuando en una situación, repetidamente se minimizan las condiciones para que el estudiante la pueda resolver, pero luego de sucesivos cambios se ha alejado del conocimiento que se quería aprender y los estudiantes terminan resolviendo una situación trivial. Esto es conocido como el fenómeno **Topaze**.
- Usar situaciones que son muy fáciles e inferir de ello que el estudiante ya tiene conocimientos del tema. Esto se conoce como el fenómeno **Jordain**.
- En el ámbito escolar es habitual explicar un ejemplo y luego proponer otros similares, los alumnos resuelven el problema por una lectura de lo que el docente acostumbra hacer en clase, mas no por la lectura del problema. Esto se denomina: **Uso abusivo de analogías**.
- Reproducir las mismas historias y situaciones a estudiantes con diferentes características; esto se conoce como **El envejecimiento de las situaciones de enseñanza**.

Brousseau, decía que

> "la concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los "problemas" que le propone. Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar y evolucionar por sí mismo. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No solo puede, sino que también debe, pues solo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada a-didáctica." (Brousseau, 1986, p. 14).

Dadas las anteriores consideraciones, surgen otros cuestionamientos, ¿cómo adaptar un contenido tal como es concebido en geometría a un contenido acorde a las habilidades de los estudiantes? , ¿Cómo determinar el grado de habilidad del estudiante?, y finalmente ¿qué etapas seguir en el desarrollo de una temática que ha sido adaptada a la necesidad de los estudiantes?, en esta apartado, se retomarán los lineamientos curriculares, que señalan que el modelo de Van Hiele describe con bastante exactitud el proceso de construcción del pensamiento geométrico; a continuación se mostrará en qué consiste dicho modelo, su principales características y recomendaciones para la evaluación del nivel de razonamiento y el proceso de aprendizaje de los estudiantes para ayudarles como docentes a alcanzar un nivel superior de razonamiento.

En razón a esto, el modelo que explica el porqué de los anteriores problemas, así como su posible salida se puede resumir de la siguiente manera según (Jaime & Gutiérrez, 1990, p. 305):

- “Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
- Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela
- No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma, pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma”

A continuación se describirán las características de cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, que se reflejan en las actividades de los estudiantes de (Jaime, A., y Gutiérrez, A.; 1990;).

Niveles de razonamiento	Descripción	Características
Nivel 1. De reconocimiento	Asocian los nombres a determinados tipos de figuras. Cada vez que se presenta a los estudiantes algún concepto geométrico nuevo, estos van a pasar por el nivel 1.	• Describen las figuras por su apariencia o parecido con algo, aspecto que se evidencia en las descripciones de las figuras con aspectos irrelevantes. • La descripción de las figuras se basan en su aspecto físico (forma, tamaño, color, grosor,…). • Las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (con frases como “se parece a…”, “tiene forma de…”, etc.). • No reconoce las partes ni propiedades de las figuras.
Nivel 2. De análisis	Los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades a través de la observación y la experimentación.	• Los estudiantes reconocen las partes y ciertas propiedades de las figuras. • Pueden deducir propiedades a partir de la experimentación. • No son capaces de relacionar unas propiedades con otras.
Nivel 3. De clasificación	Establece relaciones entre las diferentes propiedades de las figuras.	• Reconocen las implicaciones entre algunas propiedades. • Pueden describir una figura de manera formal. • Clasifica figuras de acuerdo a sus propiedades. • Comprenden los pasos de una demostración pero no son capaces de construirlas por sí mismos. • No comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.
Nivel 4. De deducción formal	Es capaz de realizar las demostraciones de lo que ya habían demostrado informalmente con anterioridad y descubrir y demostrar nuevas propiedades más complejas.	• Entienden y realizan razonamientos lógicos formales. • Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas. • Son capaces de partir de distintas premisas para llegar a los mismos resultados.

Tabla 1 Niveles de razonamiento de Van Hiele. Adaptado Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990).

Si el docente quiere organizar y desarrollar su clase usando el Modelo de Van Hiele, debe primero plantear actividades con el lenguaje acorde al nivel de razonamiento de los estudiantes, si el tema es nuevo para ellos, se debe trabajar desde el nivel de reconocimiento de las figuras y propiciar actividades que paulatinamente permitan el avance a un nivel de razonamiento superior. Los métodos que se usan para determinar el nivel de razonamiento son, según (Jaime & Gutiérrez, 1990) los siguientes:

- Realización de entrevistas individuales entre el profesor y el estudiante, durante las cuales el docente plantea diversas actividades y dialoga con el estudiante sobre su solución.
- Cuestionarios con las siguientes características:
    - Preguntas cuyas respuestas sean largas para determinar su forma de razonar.
    - Incitar a los estudiantes a explicar sus respuestas con frases como: Por qué…, explica cómo encontró la solución…
    - Lo más importante no es determinar si contestan bien o mal, sino saber cómo contestan.
    - Las actividades deben cubrir los 4 niveles, en el caso de los primeros niveles de secundaria los tres primeros.
    - A las preguntas no se les debe asignar un nivel, puesto que una misma pregunta puede ser resuelta correctamente de diferente forma por estudiantes que están en diferentes niveles de razonamiento.

En este sentido, es importante reconocer entonces que la tarea de los docentes para ayudar a sus estudiantes a subir al siguiente nivel de razonamiento se basa en planear las actividades de acuerdo a cinco fases que hemos interpretado de (Jaime & Gutiérrez, 1990).

La fase 1 lleva por nombre **Toma de Contacto**, donde se informa el campo de estudio a trabajar, el tipo de problemas y los materiales a usar. En esta etapa los estudiantes aprenderán a utilizar dicho material y algunos conocimientos básicos necesarios para el trabajo de clase. Para el docente también es una fase vital que permite identificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema a abordar y su nivel de razonamiento.

La fase 2 se llama **Orientación Dirigida,** propicia que el estudiante explore usando el material proporcionado para descubrir nuevas figuras, conceptos y propiedades o comprender lo que ya conoce. Las actividades deben ser encaminadas de tal manera que los conceptos y propiedades se den en forma progresiva.

La fase 3 se conoce como **Explicitación** y busca que los estudiantes intercambien sus experiencias referidas a lo que observaron, las estrategias o formas de solución; en ella, pueden aprender nuevo vocabulario correspondiente al nivel que se está queriendo alcanzar; es una fase de transición entre el vocabulario que los estudiantes usan para describir los elementos de geometría al usual, dicha fase, no debe entenderse como una etapa que necesariamente debe estar presente en todas las fases del aprendizaje

La fase 4 tiene por nombre **Orientación libre**, la cual consiste en aplicar los conocimientos y lenguajes adquiridos a otras situaciones de las presentadas inicialmente, preferiblemente que se plantee variedad de problemas, algunas deben ser situaciones nuevas. Se pueden dar algunos indicios relacionados con la solución pero que deban aplicar los conceptos y razonamientos ya vistos, además deben ser más complejos que los de la fase anterior.

La fase 5 recibe el nombre de **Integración, y,** como su nombre lo indica trata de integrar los conocimientos nuevos con otros adquiridos anteriormente. En esta fase se compara, acumula y combina lo que ya se sabe.

3.2 Conceptos relacionados con las temáticas de la propuesta didáctica

Las definiciones y propiedades corresponden a los puntos y líneas notables del triángulo y son traducidos del inglés del libro ***Geometry Revisited.*** El punto del centro del círculo circunscrito[1] alrededor de un triángulo hemos acordado llamarlo el ***circuncentro*** del triángulo, y llamamos el círculo, el **circuncírculo** del triángulo. El **circuncentro O** es la intersección de las tres perpendiculares que bisecan[2] los lados del triángulo. El radio del circuncírculo ha sido denotado por la letra R.

Figura 1 El circuncentro O (Geometry revisited, P.7)

Los segmentos que unen los vértices de un triángulo a los puntos medios de los lados opuestos son llamados **medianas**. En la ilustración 9, la líneas $\boldsymbol{AA'}$, $\boldsymbol{BB'}$ y $\boldsymbol{CC'}$ son medianas, de modo que $\boldsymbol{BA'} = \boldsymbol{A'C}$, $\boldsymbol{CB'} = \boldsymbol{B'A}$ y $\boldsymbol{AC'} = \boldsymbol{C'B}$. Las tres medianas son concurrentes.[3] Su punto común, G, es llamado el centroide[4] del triángulo. Si un triángulo fuera cortado con material de densidad uniforme, se equilibraría si se suspendiera en este punto, común a las medianas. En otras palabras el centroide es el "centro de gravedad" del triángulo.[5]

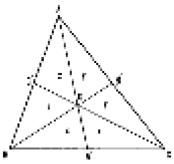


Figura 2 Las medianas del triángulo (Geometry revisited, P.8)

Los segmentos[6] AD, BE, CF, perpendiculares a BC, CA, AB, respectivamente, son llamados las ***alturas*** del $\Delta\boldsymbol{ABC}$**.** Su punto común $\boldsymbol{H}$ es llamado el **ortocentro.** Los puntos ***D, E, F*** se llaman naturalmente los pies de las alturas. Uniendo los pies en pares obtenemos $\Delta\boldsymbol{DEF}$**,** el triángulo ***órtico***

[1] "Círculo circunscrito a un polígono es el que tiene por puntos de su circunferencia todos los vértices de este polígono; de suerte que polígono inscrito en un círculo y círculo circunscrito a un polígono, expresan una misma cosa". (Oriol, 1847)
[2] Entendemos por bisecar, dividir en dos partes iguales (RAE, 2017)
[3] Entendemos que las líneas o segmentos son concurrentes cuando pasan a través de un mismo punto(Geometry revisited, P.16)
[4] En muchos textos escolares se usa la palabra baricentro en lugar de centroide. "El término baricentro proviene del griego βάρος ("peso", "carga") y κέντρον ("aguijón", "centro")". (Oxford, 2000, pág. 101)
[5] Arquímedes (hacia 287-212 a.C) obtuvo el centroide como el centro de gravedad de una placa triangular de densidad uniforme. (Coxeter H. , 1988)
[6] En el texto "Geometry revisited" aparece la expresión "***cevian"*** en lugar de segmento que fue lo usado en nuestra traducción, ***the cevian*** se referiere a los segmentos de línea que unen un vértice del triángulo a algún punto sobre el lado opuesto. (Geometry revisited, P.4)

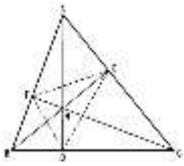


Figura 3 Las alturas del triángulo (Geometry revisited, P.8)

Otro importante conjunto de segmentos[7] son las tres bisectrices de ángulos internos. La ilustración 11, muestra un de tales bisectores ***AL.*** Las bisectrices internas de los tres ángulos de un triángulo son concurrentes.

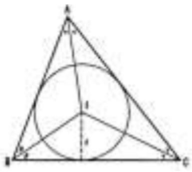


Figura 4 Las bisectrices del triángulo ABC

El círculo con centro I y radio R (ilustración 11) tiene los tres lados por tangentes y es así el círculo inscrito o in-círculo. Llamamos ***I*** el ***incentro*** y ***r*** el ***inradio.***

4 Diseño Metodológico

4.1 *Tipo de investigación.*

Para el desarrollo de este proyecto se va a realizar una investigación cualitativa; según (Gibbs, 2012,p.12), "la investigación cualitativa pretende acercarse al mundo… y entender, describir y algunas veces explicar fenómenos sociales…Las maneras que usa para tal fin se basan en el análisis de las experiencias, interacciones y comunicaciones de los individuos o grupos las cuales se ven reflejadas en los registros de las prácticas, informes, videos, fotos,…"

Además, se usará como enfoque la **Investigación Acción** que se define según (Elliot, 1993,p.88) como "el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción dentro en la misma"

Para los docentes, la situación social que se plantea es cómo mejorar la práctica educativa, lo cual supone una serie de observaciones, actividades, reflexiones y asimismo, una postura al cambio, con el fin de producir una mejora en el ámbito educativo.

4.1 Proceso de investigación.

(Llinares, 1991), citado en (MEN, Lineamientos Curriculares de Matemátics, 1998, p.22) se refiere a la indagación que el docente debe hacer antes, durante y después del proceso de enseñanza, proceso que denomina por fases, llamándolas fases pre-activa, interactiva y pos-activa, que junto a la investigación en el aula llevan al desarrollo profesional del docente; así pues, la fase pre-activa es la preparación de un bosquejo del qué y cómo enseñar.

---

[7] ***The cevians*** acá lo hemos llamado segmento y debe tener el sentido de tener un extremo en el vértice del triángulo y su otro extremo en algún punto del lado opuesto.

Acorde a lo anterior, dentro de esta fase se realizó una revisión bibliográfica sobre la temática de interés y las recomendaciones didácticas, se realizó una revisión curricular, teórica , y didáctica de la enseñanza de la geometría, donde se profundizó sobre algunas características y propiedades de los triángulos, específicamente los puntos y líneas notables del triángulo, la transposición didáctica, la teoría de las situaciones didácticas y el modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría.

La fase interactiva, por su parte, se refiere a la puesta en acción del bosquejo, y trata de las interrelaciones entre docentes y estudiantes para establecer significados a partir de una situación problemática. Dentro de esta fase, para minimizar los errores en el momento de la aplicación de la propuesta, se realizó una prueba piloto en el año 2016, donde se afinaron las actividades de la secuencia didáctica, para su posterior aplicación en el año 2017, se hizo también una prueba diagnóstica para detectar el nivel de razonamiento espacial desde el modelo de Van Hiele de los estudiantes.

Finalmente, la fase pos-activa según es una fase de reflexión donde se confrontan lo resultados y lo que se esperaba, para ello, se realizó una triangulación teniendo en cuenta la teoría, la práctica y la reflexión a lo largo de todo el proceso de investigación.

Acorde con lo anterior, (Rodríguez, D y Valldeoriola, J, 2012,63) afirma que “la investigación acción se orienta hacia la resolución de problemas mediante un proceso cíclico que va desde la "actividad reflexiva" a la "actividad transformadora". Los momentos que constituyen la investigación acción pueden verse en la siguiente figura”.

Figura 5 Momentos de Investigación Acción (Carr y Kemmis, 1988, pág.197).
Recuperado de http://bit.ly/2bPQqwy

4.2 Población y muestra

La población objeto de estudio está compuesta por 72 estudiantes del grado 8-1 y 8-2 de la jornada de la mañana de la I.E. Gustavo Cote Uribe de la ciudad de Bucaramanga(Colombia), que pertenecen a poblaciones en condiciones de vulnerabilidad, algunos viven en asentamientos, otros que fueron favorecidos con la viviendas gratis del gobierno, presentan en sus comunidades problemas de intolerancia e inseguridad, además existen familias desplazadas por el conflicto armado, desempleados, familias disfuncionales y sin formación profesional. La muestra corresponde a 36 estudiantes (15 chicas y 21chicos) del grado 8-2 de edades que oscilan entre los 14 y 17 años.

4.3 Técnica e instrumentos de la recolección de la información

Para diagnosticar, diseñar, implementar y evaluar la efectividad de la propuesta didáctica de geometría en los estudiantes del grado octavo de la IE Gustavo Cote Uribe, se utilizaron técnicas para la supervisión de las actividades, registro de las observaciones, lo que sucedía durante la aplicación de los instrumentos y reflexión sobre sus alcances, limitaciones y dificultades. Para ello se utilizaron las siguientes técnicas:

- Diario de campo: La cual contiene las narraciones de las observaciones, reflexiones, recomendaciones y aspectos directamente relaciones con la forma en que los estudiantes se enfrentan a las actividades, las emociones del docente, todo lo que se perciba que puede afectar el normal desarrollo de las actividades, para esto, la investigación se apoyó en las siguientes categorías: Educando, docente y enseñanza-aprendizaje de la geometría.

- La prueba diagnóstica, que consta de 8 preguntas abiertas que buscan identificar cómo responden los estudiantes y de esta manera determinar su nivel de razonamiento, a priori se determinó para cada nivel cómo podían contestar los estudiantes y se contrastó con los resultados obtenidos.

- Guías de trabajo, en las cuales los estudiantes registraron la solución a cada una de las situaciones que se plantean para cada sesión programada, al final de la clase el docente recogía las guías para su posterior análisis y una vez hecha esta tarea se les devolvían al estudiante, señalando aquellas actividades que se podían mejorar.

- Registro fotográficos, los cuales evidencian las actividades más relevantes y que muestran entre otras la organización del salón, el trabajo colaborativo, la manipulación de material como tapas, cartón, palillos,…, la creatividad de los estudiantes y la dinámica de clase.

4.4 Validación de los instrumentos

Para la validación de los instrumentos se realizó una prueba piloto con el grupo 8-1 en el año 2016, es decir, los instrumentos tuvieron una corrección previa a su aplicación en el grupo 8-2. Además, los instrumentos recibieron la aprobación por parte de la directora del proyecto la Dra. María Eugenia Serrano, quien tiene experiencia en el modelo de Van Hiele, puesto que este fue parte de su proyecto de pregrado y de maestría.

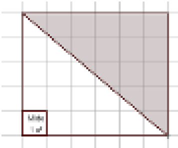
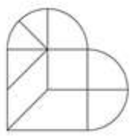
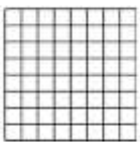
4.5 Resultado y discusión

Las respuestas de prueba diagnóstica, evidenciaban algún nivel de razonamiento que puede tener un estudiante según el Modelo de Van Hiele, que en forma general lo podríamos resumir de la siguiente manera:

- **Sin nivel**: Cuando el estudiante deja las preguntas sin responder o sus respuestas no tienen nada que ver con lo que se plantea.
- **Nivel 1**: Incluye en sus respuestas aspectos globales (se parece a, se asemeja a,…).
- **Nivel 2**: Reconoce propiedades de las figuras o transformaciones en el plano.
- **Nivel 3**: Establece relaciones entre las propiedades.

Figura 6 Aplicación prueba diagnóstica en 8-2

Para dar más claridad, a continuación se incluye una tabla con las preguntas y previamente se estableció lo que se esperaba como respuesta de los estudiantes para clasificarla dentro de un nivel, una vez revisada la prueba diagnóstica, se ajustó aún más tabla, puesto que el proceso de investigación es cíclico.

Preguntas	**Respuesta que se espera según nivel de razonamiento**	
	Nivel 1. Reconocimiento	**Nivel 2. Análisis**
1. ¿Un triángulo rectángulo puede ser isósceles? Explique su respuesta.	Construye un triángulo cualquiera o expresa que todos los triángulos son iguales o diferentes.	Construye el ejemplo de un triángulo rectángulo que tiene sus dos catetos iguales o expresa esto en palabras.
2. Si el área del cuadrado pequeño mide 1 u^2.  a. ¿Cuánto mide el área de todo el rectángulo? (Explique cómo halló el resultado).	Halla el área contando el número de cuadrados en el rectángulo.	Halla el área multiplicando la base por la altura.
3. ¿Cuánto mide el área del triángulo sombreado? (Explique cómo halló el resultado).	Halla el área triángulo recubriendo con cuadrados de $1u^2$.	Halla el área dividiendo el área del rectángulo entre dos.
4. Coloree el triángulo[8] o los triángulos que observa en el siguiente corazón. ¿Por qué las demás figuras no son triángulos? 	Reconoce que el triángulo tiene tres lados.	Reconoce que el triángulo tiene tres lados rectos.
5. ¿Los ángulos de un triángulo suman 180°? Explique su respuesta.	No hay distinción entre ángulos y lados del triángulo.	Muestra ejemplo particulares donde la suma es de 180°
6. Dibuje un triángulo rectángulo en la siguiente cuadrícula. ¿Por qué a ese triángulo se le llama triángulo rectángulo? 	Dibuja la figura un triángulo que tiene un ángulo recto.	Explica que se llama triángulo rectángulo porque tiene un ángulo recto.
7. ¿La siguiente figura corresponde a un triángulo? ¿Por qué? 	No observan un triángulo porque es una figura de cuatro lados.	No puede corresponder a un triángulo porque corresponde a la familia de cuadriláteros.
8. El eje de simetría de una figura es una línea imaginaria que divide la figura en dos partes iguales. ¿Es posible que una figura tenga más	Muestra ejemplos de figuras con un eje de simetría.	Muestra ejemplos de figuras con más de un eje de simetría.

[8] Se acordó con los estudiantes que se trataba de colorear la superficie triangular.

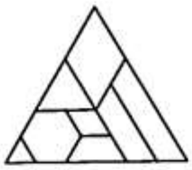
de un eje de simetría? Explique.		
9. Coloree las figuras que corresponden a paralelogramos y escriba todas sus características relacionadas con sus lados, ángulos y diagonales. 		Identifica el rombo y romboide como paralelogramos.

Tabla 2 Prueba Diagnóstica

Los resultados de la prueba diagnóstica permitieron identificar 9 estudiantes que no muestran algún nivel de razonamiento, es decir, la mayoría de preguntas las dejaron en blanco o respondieron cosas que nada tienen que ver con la temática, aunque presentan algunos elementos del siguiente nivel; por su parte, 21 estudiantes se encuentran en el *nivel 1 de reconocimiento*, 9 de los cuales presentan elementos del siguiente nivel , en todo caso estos 21 estudiantes son capaces de asignar nombres a algunas figuras geométricas y sus descripciones se basan en el aspecto físico o parecido a alguna figura geométrica, y solo un estudiante está en el *nivel 2 Análisis*, es decir, es capaz de reconocer propiedades de la figuras geométricas.

Acorde al objetivo específico de diseñar una secuencia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial, se creó la siguiente secuencia didáctica para abordar temas relacionados con los puntos y líneas notables del triángulo, lo cual se muestra en el número de estudiantes sin nivel de razonamiento, la mayoría se encuentran en el nivel 1 de reconocimiento. Algunos de los ejes temáticos y problemas se muestran en la tabla y sigue las etapas de planteamiento del problema, exploración y aplicación.

Temas de la secuencia didáctica	**Retos o actividades que dan inicio al tema dentro de la secuencia didáctica**	
La mediatriz	**# 1**. En una granja hay dos corrales y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales. Determina al menos 10 posibles ubicaciones del grifo.[9]	**# 2**. En una granja se amplió el número de corrales de dos a tres y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia a cada uno de los corrales. Determina la ubicación del grifo.[10]
La mediana	**# 3.** Dado un triángulo[11] hecho en cartulina tratar de equilibrarlo con la punta de un lápiz.	

[9] En (Garcia & López, 2008,p.40) el problema aparece "Carlos vive a la misma distancia de la casa de Ara (punto A) que de la de Bety (punto B). Marca con puntos cinco lugares diferentes donde puede estar la casa de Carlos".

[10] En (Garcia & López, 2008,p.68) el problema aparece como "se va a construir un centro comercial y se desea que esté a la misma distancia de las tres unidades. Identifique con un punto el lugar donde se tendría que construir el centro comercial. Haga la construcción en su cuaderno".

[11] Se acordó con los estudiantes que nos referíamos a la superficie triangular

La altura	**#4** Construir un triángulo con palillos y medir las alturas.
La bisectriz	**# 3.** Un agrónomo se dirige desde su casa hasta la ciudad a caballo pero debe pasar por el río para que el animalito tome agua. Su casa y la ciudad quedan del mismo lado del rio. Ayúdale a encontrar el camino más corto para ir de su casa a la ciudad pasando por el rio.

Tabla 3 Actividades iniciales que inician dan inicio a las actividades de la secuencia didáctica

Para la mediatriz de un triángulo, que consta de 6 guías, y va desde un reto inicial para identificar la mediatriz como un conjunto de puntos con ciertas características hasta el circuncentro como un punto que resulta de la intersección de tres mediatrices, los retos propician la exploración con materiales concretos, tales como las tapas plásticas de la gaseosa , las cuales fueron recolectadas por los estudiantes del grupo, además de cumplir una función pedagógica fueron entregadas al final en la campaña de la Fundación SANAR, quienes recolectan las tapas plásticas para obtener recursos económicos para el tratamiento de niños con cáncer.

Figura 7 Donación de tapas en las urnas de la fundación SANAR

De esta manera podríamos describir que pretendía cada guía alrededor de la mediatriz.

Guía	Retos o actividades	Objetivo
1	En una granja hay dos corrales y se necesita instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales.	Identificar la mediatriz como un conjunto de puntos con ciertas características. • Puntos con igual distancia a dos puntos fijos • Puntos en línea recta. • Puntos infinitos.
2	Dado un conjunto de puntos identificar cuáles están a igual distancia de los extremos de un segmento.	Identificar la mediatriz como un conjunto infinito de puntos que se encuentran a igual distancia de los extremos un segmento.
3	Usando acetatos que tienen la forma de la letra L, verificar si las rectas son las mediatrices del segmento AB y corregir aquellas que estén mal.	Identificar la mediatriz como una recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.
4	En una granja se amplió el número de corrales de dos a tres y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia a cada uno de los corrales.	Identificar el circuncentro como el punto a igual distancia de otros tres puntos fijos.
5	Ubicar el circuncentro de los triángulos.	Identificar el circuncentro como la intersección de las mediatrices del triángulo.
6	Aplicaciones del circuncentro en la construcción.	Resolver situaciones problemáticas relacionadas con el circuncentro. Reconocer que el circuncentro es el centro del círculos cuya circunferencia toca todos los vértices

		del triángulo

Tabla 4 Actividades y objetivos de la mediatriz y el circuncentro

Una nueva situación con el nombre de reto, resultó muy interesante, ¡otra forma de abordar un problema!, algo diferente a lo que cotidianamente se hacía en geometría, ante la limitaciones tecnológica no nos detuvimos en generar actividades de la geometría activa.

Figura 8 Proceso de solución del primer reto usando tapas

El primer reto de la **guía No 1** pedía ubicar 10 puntos que estuvieran a igual distancia de dos puntos fijos, en una situación problema “En una granja hay dos corrales y se necesita instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales”, además, los estudiantes tuvieron que identificar el punto más cercano que cumple las ya mencionadas características, todos los equipos de trabajo lograron resolver correctamente el reto.

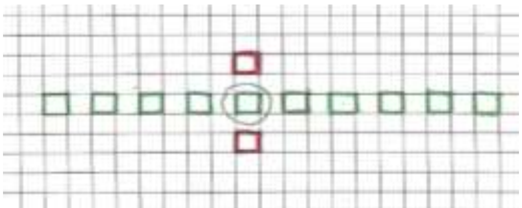


Figura 9 Grifos a igual distancia de dos corrales (Solución de un estudiante de 8-2)

Los cuadrados verdes representan los grifos y los rojos los corrales, el cuadrado en un círculo representa el grifo a menor distancia, esta solución es la representación de lo que cada grupo construyó con las tapas, además se observa que identificó el punto de menor distancia a los dos corrales, sin embargo la mayoría no lograron identificar la de menor distancia.

Para la ***guía No. 2***, previamente se le dio nombre a algunos elementos como al punto de menor distancia (**punto medio**) y al conjunto de puntos a igual distancia (**la mediatriz**), explicando detalladamente sus características y acorde al *nivel 1 de visualización en la fase de información*.

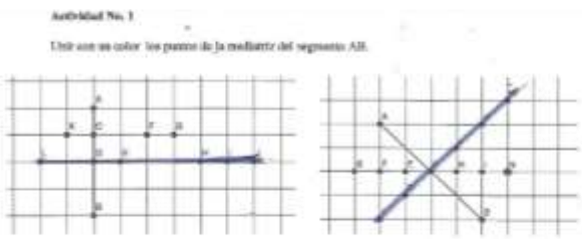


Figura 10 Los puntos de la mediatriz (solución de estudiante un de 8-2)

Para la ***Actividad No. 2***, dar dos instrucciones en un mismo punto generó algo de confusión, por una parte se pedía trazar la mediatriz y por otra, unir con segmentos de colores los pares de puntos con igual distancia.

Figura 11 Los puntos que pertenecen a la mediatriz (solución de un estudiante de 8-2)

La ***Actividad No. 3***, pedía dibujar la mediatriz y no se daba ninguna instrucción de cómo, 19 de los 27 estudiantes la resolvieron satisfactoriamente.

Figura 12 Construcción de la mediatriz usando puntos (solución de un estudiante de 8-2)

Para el desarrollo de estas actividades el estudiante debía ya estar familiarizado con lo ya ha visualizado, pero para esta tarea debía empezar a hacer acciones concretas como verificar distancias y que estas distancias fueran iguales.

La guía 3, buscaba explorar la definición[12] de la mediatriz, fíjese que primero se exploró una propiedad y luego la definición, esto se hizo puesto que en la prueba piloto se observó que para los estudiantes, visualizar una recta perpendicular era difícil y se buscó asociar la perpendicular con algo y se pensó en la letra **L,** y para facilitar la exploración en un acetato con la forma de la letra **L**.

Figura 13 Estudiantes de 8-2 usando los acetatos en forma de L

La ***Actividad No. 1*** correspondiente a identificar las mediatrices de los segmentos fue hecha correctamente por 16 de los 28 estudiantes.

[12] Definición: "Si una recta es perpendicular a un segmento y pasa por su punto medio, entonces en mediatriz del segmento" (Berrío, Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en el proceso de justificación teórica en la resolución de problemas de geometría., 2016, pág. 50)

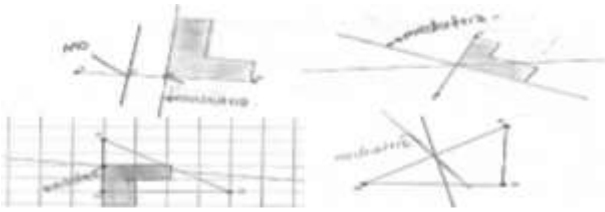


Figura 14 Asociando la recta perpendicular con la letra L (actividad realizada por un estudiante de 8-2)

En la primera pregunta de la ***Actividad No. 2*** ¿La mediatriz de un segmento debe pasar por cualquier punto del segmento? ¿Por qué?, este aspecto que ya se había explorado en las anteriores guías, menos de la mitad de los estudiantes asistentes respondieron correctamente y de muy pocos, argumentan convincentemente, para superar esta dificultad se debió incluir una guía sobre punto medio, algo que no fue previsto en la prueba piloto.

La guía 4, planteaba como un nuevo reto, similar al primero, pero en este caso tenían que ubicar un grifo a igual distancia de tres corrales, se les indicó a los educandos, usar la misma estrategia para determinar los grifos que están a igual distancia de dos corrales y para ello cada grupo disponía de 33 tapas plásticas de gaseosa.

Figura 15 Proceso de construcción del circuncentro

Todos los grupos lograron resolver el reto y a la pregunta ¿cuántos grifos están a igual distancia de los tres corrales?, la mayoría afirmaron que evidentemente había un punto a igual distancia de los tres puntos fijos (corrales).

En la ***guía No. 5***, la mayoría de los estudiantes construyeron con éxito el circuncentro de los triángulos dados. Cuando se añade a un procedimiento una situación problemática, 18 de los 29 estudiantes lo resolvieron apropiadamente y cuando se le pide que expliquen el procedimiento, la mayoría obvia pasos o no utilizan un lenguaje apropiado, solo 5 de los 29 estudiantes describieron el procedimiento adecuadamente.

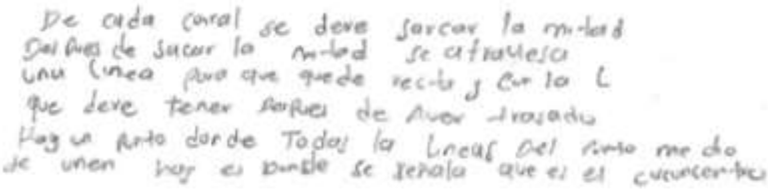

De cada corral se deve sarcar la mitad
Despues de sacar la mitad se atraviesa
una linea para que quede recta y con la L
que deve tener despues de aver trazado
Hay un punto donde Todas la Lineas del punto medio
se unen hay es donde se señala que es el circuncentro

Figura 16 Procedimiento para hallar el circuncentro (solución de estudiante de 8-2)

En la ***guía No. 6***, los estudiantes resolvieron diversas situaciones donde integraba todo el tema alrededor de la mediatriz y el circuncentro, se les preguntó ¿para qué servía la mediatriz y el circuncentro?, la mayoría asociaban su utilidad a un tema netamente para la asignatura, respuestas como: “la mediatriz sirve para ubicar puntos a igual distancia de otros dos”, “el circuncentro sirve para trazar un circulo que pase por los vértices del triángulo"; muy pocas evocaron los ejemplo de los retos precedentes, y señalaron que servían "para ubicar grifos en una granja y para instalar una fuente en el centro"

El eje temático de la mediana, que consta de 3 guías, y va desde un reto inicial para identificar el punto de equilibrio de un triángulo, hasta una guía donde se trabajan dos aplicaciones tales como suspender un triángulo de un hilo y que se mantenga totalmente horizontal hasta la construcción de pirámides de base triangular con la condición de establecer su altura en el punto donde se intersecan las medianas de la base. Los materiales que se usaron fueron triángulo de cartón, palillos y plastilina. Al final la plastilina se recogió para ser utilizada nuevamente.

Guía	Retos o actividades	Objetivo
7	Mantener un triángulo en equilibrio sobre la punta de un lápiz.	Identificar el baricentro[13] como el punto de equilibrio en un triángulo.
8	Ubicar el punto de equilibrio de los triángulos.	Identificar el baricentro como el punto de intersección de las medianas.
9	• Colgar triángulos del baricentro y que se mantenga totalmente horizontal. • Construir pirámides de base triangular cuya altura se ubica sobre el baricentro.	Identificar el baricentro como el punto de equilibrio que se puede aplicar en situaciones cotidianas y de la construcción.

Tabla 5 Actividades y objetivos de la mediana y el baricentro

Los estudiantes se dispusieron a realizar las actividades colmados de muchas expectativas, al escucharse expresiones de admiración ante los descubrimientos, ellos mostraban con orgullos las soluciones, tal como lo hizo hace siglos Arquímedes, quien descubrió este punto equilibrando una superficie triangular de densidad uniformemente distribuida.

La ***guía No 7*** buscaba que ellos por sí mismos descubrieran la forma de ubicar el baricentro del triángulo en una hoja de papel, la mayoría logró describir por cuál parte del lado del triángulo para la línea que viene desde el vértice opuesto y pasa por el punto de equilibrio, a lo que se refirieron con expresiones como "línea que pasa por el punto medio", pero en el momento de describir el procedimiento, la mayoría no logró describir detalladamente el procedimiento, solo dos de los estudiantes dieron una descripción detallada del procedimiento para hallar el baricentro.

Figura 17 Estudiantes buscando el baricentro (centroide), tal como lo hizo Arquímedes

La ***guía No. 8***, tenía como finalidad que los estudiantes lograran ejercitar el procedimiento, lo cual casi todos lograron realizar la construcción de las medianas, además, al preguntárseles ¿es posible

[13] Hemos acordado que cuando nos refiramos al baricentro del triángulo, nos referimos al baricentro de la superficie triangular.

que el baricentro se ubique afuera del triángulo?, todos los educandos asistentes respondieron acertadamente y sus argumentos se basaron en las exploración previas.

La ***guía No. 9***, buscaba que los estudiantes se familiarizaran con otras aplicaciones del baricentro, y para ello se pensó, suspender una superficie triangular con un hilo y que este quedará totalmente horizontal y la construcción de pirámides con bases triangulares y que la altura de ella quedará exactamente sobre el baricentro, fue un tiempo de exploración y diversión, donde los estudiantes usaron variados elementos como cartón, palillos, y plastilina, identificar el baricentro no fue problema, el trabajo colaborativo permitió que algunos estudiantes superan sus dificultades y entre todos los integrantes del grupo lograrán realizar sus construcciones.

Figura 18 Aplicaciones del baricentro

Para la altura de un triángulo se trabajaron 2 guías, y van desde el reto inicial de medir la altura de un triángulo hecho con palillos, hasta el establecimiento de procedimientos, en estas actividades a los estudiantes se les dificultó identificar la altura de los triángulos cuando estos se ubicaban fuera del triángulo, pese a que la actividad inicial se realizó midiendo la alturas de triángulo de cartón apoyándolos sobre cada lado.

Guía	Retos o situaciones	Objetivo
10	Medir la altura de tres triángulos de cartón.	Reconocer que un triángulo tiene tres alturas.
11	• Halla la altura de diferentes objetos, • Hallar la altura de diversos triángulos en la hoja de papel.	Identificar las alturas de un triángulo y realizar correctamente su construcción.

Tabla 2 Actividades y objetivos de la altura y el ortocentro

La ***guía No. 10***, permitió aclarar porqué se habla de las tres alturas del triángulo, para ello se realizó una exploración, donde se construyeron las superficies triangulares y al apoyar cada triángulo sobre cada uno de sus lados se logró identificar las alturas.

La ***guía No. 11***, permitió que los estudiantes ejercitaran un procedimiento para hallar cada una de las alturas, que básicamente era seguir ejercitándose en la construcción de rectas perpendiculares.

Reflexión: En este punto de la propuesta ya se ha hablado de tres tipos de líneas en un triángulo, la mediatrices, las medianas y las alturas, en las actividades se observó que tienen a construir en lugar de una de las líneas otra y que tienden a construir la que consideran más sencilla sin centrarse en la pertinencia de su aplicación.

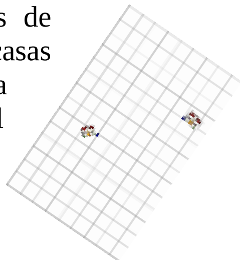
Guía	Retos o situaciones	Objetivo
12	Un agrónomo se dirige desde su casa hasta la ciudad a	Visualizar las bisectriz de del ángulo

	caballo pero debe pasar por el río para que el animalito tome agua. Su casa y la ciudad quedan del mismo lado del rio. Ayúdale a encontrar el camino más corto para ir de su casa a la ciudad pasando por el rio.	de un triángulo en la solución de una situación real.
13	Hallar la bisectriz doblando los triángulos de tal manera que coincidan dos lados consecutivos.	Identificar la bisectriz de un triángulo como un eje de simetría.

Tabla 3 Actividades y objetivos de la bisectriz y el incentro

El eje temático de la bisectriz consta de dos guías, inicialmente se plantea el reto de determinar el camino más corto para ir de un punto a otro tocando previamente un punto sobre una recta; luego se busca identificar un procedimientos para construir la bisectriz, este procedimiento se basa en asignarle a la bisectriz las características del eje de simetría de los lados del triángulo que forman un ángulo.

Acordes a los objetivos de la investigación se planteó una prueba final que constaba de 8 preguntas, una de las cuales era similar a una de las preguntas de la prueba diagnóstica, solución que fue socializada y otra de las preguntas requería un nivel de razonamiento superior a los que se trataron de fortalecer en la secuencia didáctica.

Preguntas	**Nivel de razonamiento**	
	Nivel 1. Visualización	**Nivel 2. Análisis**
1. ¿Es posible que el circuncentro de un triángulo se ubique afuera del triángulo? Explique	Es capaz de plasmar o dibujar líneas y puntos en un triángulo sin tener presente aspectos como punto medio y perpendicular a.	Construye líneas notables del triángulo como la mediatriz, la mediana, las alturas y las bisectrices.
2. El profesor explica que el circuncentro es la intersección de las tres mediatrices del triángulo, pero un estudiante afirma que es suficiente decir qué es la intersección de dos mediatrices, ¿estás de acuerdo? Explique.	Identifica el circuncentro como la intersección de las mediatrices.	Reconoce que donde se cortan dos mediatrices, se cortará la otra mediatriz.
3. ¿Es posible que el circuncentro y el baricentro de un triángulo sea el mismo? (Pista: Piense en triángulos equiláteros, isósceles o rectángulos). Explique.		
4. Los residentes de cada una de las dos casas quieren construir una cerca que esté a igual distancia de cada una de ellas. Explique donde debe ubicar la cerca. 	Reconoce puntos a igual distancia, visualiza cuáles están más distantes y cuáles más cercanos.	Construye la mediatriz usando puntos a igual distancia de otros dos fijados previamente.
5. Cien árboles se ubican a igual	Reconoce puntos a igual	Reconoce que los puntos a

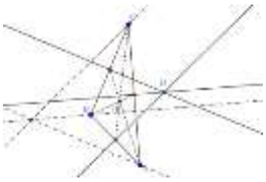
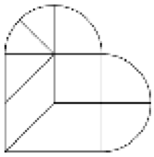
distancia de dos corrales. Si el primer árbol es el más alto y alguien que tiene una estatura inferior a la altura del primer árbol se ubica de frente a este, ¿cuántos árboles puede ver? Explique.	distancia, visualiza cuáles están a mayor distancia y cuáles más cercanos.	igual distancia se ubican en línea recta.
6. ¿Cuál es el circuncentro del triángulo ABC? Explique 	Considera que en la mayoría de triángulos el circuncentro se ubica dentro del triángulo.	Identifica las características de la mediatrices del triángulo.
7. En el siguiente corazón, coloree las figuras que no son triángulos. ¿Por qué las demás figuras son triángulos? 	Reconoce que el triángulo tiene tres lados.	Reconoce que el triángulo tiene tres lados rectos.
8. Se quiere construir una circunferencia que pase por los vértices del siguiente triángulo. Explique el procedimiento.	Realiza la tarea por ensayo y error.	Construye el circuncentro usando las mediatrices del triángulo.

Tabla 4 Preguntas evaluación final

La pregunta 2, relacionada con la afirmación de un profesor al aparecer “el profesor explica…”, en las respuestas de los estudiantes plasmaban la idea de que el profesor no se puede equivocar y “si dijo que el circuncentro es la intersección de tres mediatrices es porque es así”.

La pregunta 3, buscaba que el estudiante estableciera relaciones entre propiedades de los líneas notables, previamente pensamos que iba ser una tarea fuera del alcance del nivel de razonamiento de los estudiantes porque se trabajó solo el reconocimiento y análisis de propiedades, sin embargo un estudiante lo logró.

La pregunta 5, al revisar las respuestas de los estudiantes nos dimos cuenta que el problema estaba mal planteado, lo que buscaba era que los estudiantes reconozcan que los puntos a igual distancia de dos puntos fijos están en línea recta, esta pregunta se había pensado luego de la prueba diagnóstica.

Dadas estas consideraciones se tuvieron en cuenta para el análisis de nivel de razonamiento las preguntas 1, 4, 6,7 y 8.

En la prueba diagnóstica se identificaron 4 estudiantes que no mostraron un nivel de razonamiento ya fuera porque dejaban preguntas en blanco o sus respuestas eran irrelevantes; 14 estudiantes lograron reconocer elementos de las temáticas, ya usaban un lenguaje más acorde a los objetos de estudio y reconocían algunas propiedades de los puntos y líneas notables del triángulo, y 9 estudiantes reconocieron en la mayoría de situaciones las propiedades objeto de estudio. Estos resultados muestran un avance significativo en el nivel de razonamiento de la mayoría de los estudiantes.

5 Propuesta pedagógica

5.1 Presentación de la propuesta

La geometría dentro del área de matemáticas, además de lo que puede lograr para mejorar el razonamiento de los estudiantes, por sus implicaciones prácticas puede tener efectos positivos en la motivación de los mismos, por la posibilidad de usar materiales concretos en las actividades. Para hacer esta labor de enseñanza de geometría en el grado octavo, como primera tarea se hizo una revisión de los lineamientos curriculares, los cuales señalan que la mejor forma de abordar la geometría, es promoviendo la exploración activa, o en otras palabras, manipular objetos para ver sus características y descubrir propiedades; y señala que el modelo pedagógico que mejor se ajusta a su enseñanza es el modelo de Van Hiele, este modelo además de recomendar usar un lenguaje acorde al nivel de desarrollo de los estudiantes, describiendo en varios niveles para caracterizar a los estudiantes de cualquier grado de escolaridad, lo que se determinó en la aplicación de una prueba diagnóstica, da unas fases o etapas para el desarrollo de toda la temáticas.

5.2 Metodología

Las actividades se organizaron de tal manera que el estudiante lograra mejorar su nivel de razonamiento según el modelo de Van Hiele, para propiciar este desarrollo para cada nivel se organizaron siguiendo las 5 fases de aprendizaje de dicho modelo (De información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración), ya descritas en el marco teórico.

En el nivel 1, los estudiantes visualizaron que ciertos puntos y líneas responden a la solución de ciertas situaciones problemáticas y en el nivel 2, que las líneas y puntos que se forman en los triángulos además de responder a la solución de ciertas situaciones problemáticas, tienen ciertas propiedades.

La guía 1 (Actividad 1, 2 y 3), estuvo pensada para desarrollar el nivel 1 en la *fase de información*, con esta actividad se pretende que los estudiantes exploren el material que más frecuente se usará (las tapas), modelen con ellas la situación que plantea en la actividad 1 (llamado reto), tomen distancias que satisfagan las condiciones dadas e ilustren las situaciones planteadas con la tapa en la guía, además de estas actividad se observará que tan conveniente es este material para la disciplina del grupo y que tanto propicia la exploración. La idea es que en esta actividad las tapas representen los puntos que uno representa en un software geométrico y la toma de medidas con una regla la distancia que se toma dando clic de punto a punto. En esta fase deberá quedar claro que las rectas son conjuntos de puntos, en el nivel 2, el estudiante descubrirá que las disposiciones de estos puntos permiten resolver otras situaciones problemas y tienen unas propiedades.

La guía 2 (Actividad 1 a 4), **la guía 7** (Actividad 1), **la guía 10** (Actividad 1), **la guía 12** (Actividad 1) están diseñadas para desarrollar el nivel 2 en la *fase de información*, en estas actividades el estudiante ya debe ir más allá de lo visual y empezar a identificar regularidades, qué es y qué no es la mediatriz, la mediana, la altura y la bisectriz, en la guía 2 aún no se ha abordado la mediatriz como una línea notable del triángulo.

La guía 3 (Actividad 1- 2), **la guía 7** (Actividades 2-3), **la guía 10** (Actividades 2-3), **la guía 12** (Actividad 2-4) tiene como finalidad desarrollar el nivel 2 en la *fase de orientación dirigida*, en esta guía el estudiante debe seguir procedimientos y dar respuestas específicas sobre propiedades y característica que el estudiante ya debió interiorizar.

La guía 4 (Actividad 1-2), **la guía 5** (Actividad 1-3), **la guía 8** (Actividades 1-2), **la guía 10** (Actividades 1-2) y la **guía 12** (Actividades 1-2) están orientadas en la *fase de orientación libre* en el nivel 2, se trata de nuevos contextos de aplicación de las propiedades que ya ha descubierto.

La guía 6 (Actividad 1-5), **la guía 9** (Actividades 1-2) y la **guía 10** (Actividad 3) están orientados a *la fase de integración en el nivel* 2, y buscan sintetizar todo lo visto hasta ahora, en especial asociarlo con situaciones problemas donde los conceptos vistos son necesarios.

5.3 Fundamento pedagógico

La propuesta además de considerar el contexto de la institución educativa, discurre las recomendaciones del Ministerio de Educación Nacional, que respecto al fortalecimiento de los pensamientos (espacial, métrico, numérico, variacional y aleatorio), según (MEN, Lineamiento curriculares, 1998, p.21) "el hecho de presentar bajo un mismo aspecto los diferentes tipos de pensamiento y los sistemas, podría interpretarse como si cada pensamiento se desarrollara solamente a través del respectivo sistema desconociendo el carácter transistémico de cada tipo de pensamiento". Lo anterior supone que las actividades que se desarrollan en cada asignatura de matemáticas no se restringe al desarrollo de un proceso, por el ejemplo en el caso de geometría al pretender mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes, en esta tarea el estudiante debe desarrollar actividades de comunicación, modelamiento, resolución de problemas y ejecución de procedimientos, por ello en el título de la tesis se habla de "… fortalecimiento del pensamiento espacial…". Cada actividad planteada busca desarrollar estos procesos. Dentro de otras consideraciones el MEN señala que el modelo de Van Hiele es el que mejor describe el proceso de construcción del pensamiento espacial, siguiendo los parámetros de dicho modelo se desarrolló una prueba diagnóstica para clasificar el grupo de estudiantes según sus habilidades en geometría y las actividades se secuenciaron lógicamente, al inicio de cada eje temático se realizó una exploración con objetos manipulables (tapas, palillos, cartón,…), y usando escuadra para usos como tomar medidas y trazar líneas con ciertas características, en el desarrollo de los anteriormente expuesto para el desarrollo de clase se siguieron las etapas o fases del modelo de Van Hiele descritos para este trabajo en la metodología.

Las guías con sus respectivas planeaciones, la evaluación diagnóstica y la evaluación final, se pueden descargar en el siguiente enlace

http://matematicas27.webnode.com.co/news/secuencia-didactica/?_ga=2.99200024.746483327.1499993189-529812198.1499993189

6 Conclusiones y Recomendaciones

Dentro de las conclusiones y recomendaciones se pueden mencionar:

- Se logró evidenciar que las clases tradicionales de geometría producen pobres resultados para el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, esto se observa en los 9 estudiantes que no mostraron algún nivel de razonamiento y los 21 estudiantes que solo son capaces de reconocer aspectos globales e irrelevantes de las figuras geométricas.
- Se logró concluir que el uso de material concreto, en el caso de esta propuesta (tapas de gaseosa plástica, cartón, palillos, plastilina,..), favoreció el reconocimiento de los elementos y propiedades inmersas en las temáticas de puntos y líneas notables de triángulo, propició el

trabajo colaborativo y despertó la curiosidad de los estudiantes para resolver cada una de las actividades propuestas. Esto reafirma una de las recomendaciones de los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia (MEN, 1998) al señalar que "los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento" (p.37).

- Se experimentó también que no todos los materiales son propicios para determinadas situaciones problemáticas, en el caso de las tapas de gaseosas plásticas, son pertinentes cuando el problema requiere que una misma tapa ocupe diferentes posiciones para determinar la más adecuada; en el caso de la lana, se observó que solo cumplió una función decorativa, mas no funcional; en este sentido, identificar los materiales pertinentes es una tarea del docente investigador.
- Organizar las actividades de acuerdo a la forma en que evoluciona el nivel de razonamiento de los estudiantes, permitió que estos se comprometieran más con su proceso de aprendizaje, eso se evidenció en la disciplina, el dinamismo de clase y el desarrollo de la guías.
- Se creó una secuencia didáctica de una temática que se aborda muy brevemente en los textos del grado octavo y que sin embargo, gracias a la revisión bibliográfica se descubrieron una serie de aplicaciones muy interesantes que pueden ser elementos valiosos para que en una futura profesión de diseño y construcción, se desarrolle el proceso con mayor detenimiento y precisión.
- Finalmente, se reflexionó sobre la importancia de ajustar los contenidos en las asignaturas, teniendo en cuenta los siguientes elementos: las habilidades de los estudiantes, su contexto y búsqueda en la aplicación de los temas que permitan a los mismos proyectarse como ciudadanos y profesionales.

Referencias Bibliográficas

Algarín, D. (2013). Caracterización de los niveles de razonamiento específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. Bucaramanga.

Berrío, J. (2016). Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en el proceso de justificación teórica en la resolución de problemas de geometría. Bucaramanga.

Chavellard, Y. (1997). La Transposición didáctica-Del saber sabio al saber enseñado.

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, España. 35, p.p 10-11. 90-106.

Educación, M. d. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Santa Fé de Bogotá: MEN.

Elliot, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

García, S., & López, O. L. (2008). La enseñanza de la Geometría Materiales para apoyar la práctica educativa. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

Gibbs, G. (2012). El análisis de datos cualitativos en Investigación Cualitativa. Madrid.

Guerrero, R. A. (2009). La construcción del concepto de ángulo. México Distrito Federal.

Jaime, A. (1993). Aportación a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Valencia.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. Teoría y práctica en educación matemática, 295-384.

Martínez, C. (2016). Implementación del enfoque resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas. Bucaramanga.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: MEN.

Molfino, V. (2011). Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la Geometría? Sistema de Información Científica Redalyc, 37-61.

Morales, C., & Majé, R. (2011). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros (Doctoral dissertation, Tesis de maestría), Universidad de la Amazonia, Colombia.

Nacional, M. d. (1998). Lineamientos Curriculares . Santa Fé de Bogotá: MEN.

Pruzzo, V. (2005) Aportes para la profesionalización docente: una mirada desde la investigación acción. Praxis Educativa. Argentina, 50-60. Recuperado el 9 de Enero del 2016 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=153120512006

Ramírez, J. C. (2014). Desarrollo del pensamiento espacial, un acercamiento desde la enseñanza de los triángulos, a través de un modulo didáctico. Medellín.

Ramírez, N. (2014). Estrategia Didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientado por el Modelo de Van Hiele y Geogebra. Medellín.

Restrepo Gómez, Bernardo; (2004). La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico. Educación y Educadores, 45-55. Recuperado el 9 de Enero del 2016 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83400706

Santaella, C. M., & García, M. P. (2009). Didáctica-Teoría y práctica de la enseñanza. Madrid: Ediciones Pirámide.

Scaglia, S., Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. Educación Matemática, diciembre, 105-120. Recuperado el 9 de Enero del 2016 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=153120512006

Rónal Darío Villamizar Ángel. IE Gustavo Cote Uribe, Bucaramanga.
Licenciado en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander y Magister en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, con 9 años de experiencia docente. Nombrado desde el 4 de Agosto del 2015 como docente del sector oficial.

Email: ronal_villamizar@hotmail.com
Celular: 3013954425