FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS

AUTOR
DIMAR EMILIO ACOSTA GALVÁN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES, HUMANIDADES Y ARTES
PROGRAMA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BUCARAMANGA
2017

FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS

AUTOR
DIMAR EMILIO ACOSTA GALVÁN

Trabajo de Grado para obtener el Título de Magister en Educación

DIRECTOR
DOCTORA LENIS SANTAFE ROJAS

Grupo de investigación: Investigación y lenguaje

Línea de Investigación: Prácticas pedagógicas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES, HUMANIDADES Y ARTES
PROGRAMA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BUCARAMANGA
2017

"La irrupción de las nuevas tecnologías
nos obliga a educar a los niños, niñas y jóvenes
de una manera diferente"
Howard Gardner

A mi linda familia: a mi hija Glaudy, mi hijo Danny, a mi esposa Nubia,
A mi madre por enseñarme el don de la humildad
A mis hno. Jesús + y hna. Diorelda +
A Diolaida, Lourdes y Paola,
A mi familia Instecnista
A mis estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento al todo poderoso, Dios omnipotente, por haberme permitido vivir la experiencia de estudiante de maestría hasta lograr la meta.

Un agradecimiento especial a mi directora de Tesis Doctora Lenis Santafé Rojas por orientarme en la ejecución de este trabajo, por animarme y darme seguridad en la aplicación del mismo.

Agradecimiento a mis formadores de Maestría de la Universidad Autónoma de Bucaramanga: Alhin Vera, Diego Báez, Astrid Portilla, Adriana Ávila, Eduard Bacca, María Acuña, James Velazco, Elgar Gualdrón por el gran aporte a mi formación docente.

Agradecimiento al rector del Instituto Técnico Municipal los Patios Mario Pezzotti Lemus por su colaboración en la ejecución del proyecto, al coordinador general Armando Parada Ussa por facilitar la organización de sala telefónica, a los docentes del INSTEC en especial a la coordinadora de la jornada de la tarde de la sede principal Judith Rangel Camargo y a mis compañeros del área de matemáticas Miguel Claro y Euclides Portilla, por permitirme algunos espacios y por animarme a conseguir los objetivos.

Resumen

En este trabajo se describe un estudio de investigación cualitativa con metodología investigación-acción, acerca de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando el software Geogebra para fortalecer el proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios. El desarrollo de la propuesta se hizo en tres proyectos pedagógicos de aula: acercamiento al concepto de función, la función cuadrática y la ecuación cuadrática. Estos fueron planteados, en primer lugar con situaciones de variación como la trayectoria parabólica, la caída libre y situaciones de área, que sirvieron para que los participantes abordaran el objeto de estudio en situaciones de la vida cotidiana y en segundo lugar desde diferentes registros de representación de la función como el simbólico algebraico, el cartesiano y el registro tabular y la traducción entre estos. Esta propuesta se diseñó para mejorar el componente numérico variacional, ya que en el análisis de los resultados de los estudiantes en las pruebas saber de los años 2015 y 2016 se evidenciaron debilidades y se constituyeron en una gran oportunidad para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento.

El análisis de la información se realizó a través de diferentes fuentes de recolección de la información como el diario pedagógico, fotografías, la observación directa, videos, pre-test y pos-test. En conclusión se obtuvo que los niveles de razonamiento de Van Hiele y el software Geogebra fueron apropiados para mejorar los aprendizajes de los estudiantes en el estudio de la función cuadrática, porque permitió desde situaciones específicas generar habilidades como análisis de gráficos, evaluación de expresiones algebraicas y dominio de un sistema de representación a otro todo dentro de un ambiente dinámico e interactivo.

Palabras clave: función cuadrática, niveles de Van Hiele, proceso de aprendizaje, Geogebra, pensamiento variacional.

Abstract

This paper describes a qualitative research study with research-action methodology, about the quadratic function in the framework of the Van Hiele model using Geogebra software to strengthen the learning process of the ninth grade students of the Instituto Técnico Municipal Los Patios. The development of the proposal was done in three pedagogical projects of classroom: approach to the concept of function, the quadratic function and the quadratic equation. These were first raised with situations of variation such as the parabolic trajectory, free fall and area situations, which served for the participants to approach the object of study in situations of daily life and secondly with different records of representation of the function as the algebraic symbolic, the Cartesian and the tabular register and the translation between them. This proposal was designed to improve the variational numerical component, since in the analysis of the students' results in the knowledge tests of the years 2015 and 2016 weaknesses were evidenced and they were a great opportunity to implement pedagogical improvement actions

The analysis of the information was made through different sources of information collection such as the pedagogical journal, photographs, direct observation, videos, pre-test and post-test. In conclusion it was obtained that the levels of Van Hiele reasoning and the software Geogebra were appropriate to improve the learning of the students in the study of the quadratic function, because it allowed specific situations to generate skills such as analysis of graphics, evaluation of algebraic expressions and mastery of one system of representation to another all within a dynamic and interactive environment.

Key words: quadratic function, Van Hiele levels, learning process, Geogebra, variational thinking.

Contenido

Lista de Figuras

pág.

Lista de Tablas

pág.

Lista de Anexos

pág.

Introducción

El presente trabajo de investigación se enfocó en el estudio del objeto de conocimiento la función: la función cuadrática, fundamentado en el Modelo Van Hiele, como estrategia didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje del pensamiento numérico variacional, de los estudiantes del grado noveno A de la jornada de la tarde del Instituto técnico Municipal Los Patios. El primer capítulo detalla la contextualización de la problemática a desarrollar, retomando el resultado de los estudiantes en las pruebas SABER. En este sentido, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo fortalecer el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando el software GeoGebra, en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios? A partir de esta se fijan unos objetivos, se analiza el qué, el por qué y el para qué del trabajo que se inicia.

El segundo capítulo describe los antecedentes realizados a nivel internacional, nacional y regional, relacionadas con el objeto de estudio. En estos se analizaron los alcances de las estrategias allí implementadas. Además, se efectúo una revisión del modelo pedagógico implementado por la institución, en este caso el Modelo pedagógico constructivista, seguidamente, se analizó el Modelo de razonamiento de Van Hiele, el software GeoGebra y la importancia de su implementación en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; de igual manera, se mencionó la normatividad legal relacionada con el tema de investigación.

El tercer capítulo, describe las características del proceso de investigación, durante el desarrollo de indagación se seleccionó el tipo investigación que para el proyecto corresponde a investigación-acción, implementada durante la intervención, permitiendo al investigador un análisis crítico de las prácticas de aula, las problemáticas de sus educandos, el análisis del contexto, los recursos existentes, con el fin de realizar e implementar una propuesta que diera solución a las problemáticas encontradas. Dicha investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo, que permitió hacer un análisis, apoyado en la recolección de información a través de la observación directa, los diarios pedagógicos y grabaciones de video, pretest y postest realizadas en el aula de clase.

De igual forma, en este capítulo se explica el proceso de diseño de la propuesta, el cual inicia con la revisión documental del Proyecto Educativo Institucional PEI (2013), El análisis de los resultados de los estudiantes de los grados noveno en la prueba SABER para esa sede, en el área de matemáticas, la elaboración y la aplicación de una prueba diagnóstica. Luego se especifica la implementación de los proyectos de aula, con los tiempos, actividades y recursos asignados. En dicho proceso se realizó un trabajo de reflexión pedagógica, que finalizó con el análisis y la discusión de los resultados obtenidos. El proceso de intervención fue aplicado a una población de 70 estudiantes de los dos grupos de noveno grado de la jornada de la tarde de la sede principal, de los cuales la muestra correspondió a un grupo de 35 estudiantes, que pertenecen al grado 9A.

El cuarto capítulo contiene la presentación de la propuesta, que estructura de manera organizada los proyectos pedagógicos de aula diseñados. Lo constituyen tres proyectos divididos en sesiones, que contienen diversas actividades y que a la vez la conforman varias tareas.

1. Contextualización de la Investigación

La educación del siglo XXI exige grandes cambios en las prácticas pedagógicas, las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones han hecho que los formadores realicen innovaciones en el aula, implicando el uso de estrategias didácticas, elementos de hardware como tabletas y computadores para el desarrollo de procesos de aprendizaje, y recursos didácticos como el uso de software libre entre otros. Autores como Nicholls (citado por Marcelo, 2013) definen la innovación como "una idea, objeto, o práctica percibida como nueva por un individuo o individuos, que intenta introducir mejoras en relación a objetivos deseados, que por naturales tiene una fundamentación, y que se planifica y delibera" (p. 38).

De la misma manera Montero & Gewerc (2011) afirman que "la innovación se puede conceptualizar como aquel proceso interno de la escuela que, en algún sentido, altera las condiciones y características de su trabajo" (p. 307).

El proyecto FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS, se plantea como una oportunidad para innovar, experimentar y colocar en práctica, elementos que llevaron a los estudiantes hacia la comprensión coherente de los conceptos matemáticos estudiados, modificar la acción de orientar la clase con el tablero y marcador a otra forma de representación de los objetos, como lo fue el uso de los medios tecnológicos, dando la oportunidad a que los jóvenes construyeran su propio conocimiento y que realizaran actividades diferentes a las acostumbradas.

Fue la oportunidad de aplicar por un lado un modelo de aprendizaje como el de los esposos Van Hiele puesto a prueba al final de la década de los cincuenta (utilizado en varios trabajos para el aprendizaje de las matemáticas especialmente en Geometría) y por otro lado la eficacia de la utilización del software de uso libre como en este caso GeoGebra, programa que permite la interacción gráfica y algebraica.

El Modelo de Van Hiele propone 5 niveles para el desarrollo del razonamiento matemático, como una forma de estructurar el aprendizaje de las matemáticas especialmente la Geometría, en ese sentido el MEN (1998) en su documento lineamientos curriculares de matemáticas, describe que el proceso de construcción del pensamiento geométrico es una evolución lenta, donde el modelo de Van Hiele parece ser la propuesta que describe con bastante exactitud este proceso (p. 38). Este modelo de razonamiento matemático ha ido tomando más aceptación a nivel internacional, es así tal que no solamente se ha estado trabajando en el pensamiento geométrico sino también en situaciones que tienen que ver con el pensamiento numérico y variacional. En ese sentido Gutiérrez (1998) menciona el Modelo de Van Hiele como tema de actualidad que, "además de describir el progreso de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes, aporta pautas para la organización del currículum de matemáticas, en particular de geometría, de los diferentes niveles educativos" (p. 4). De esta manera fue acertado fundamentar las bases de este proyecto en el modelo de razonamiento de Van Hiele con el planteamiento de situaciones que llevaron a los participantes a los niveles de reconocimiento y análisis principalmente.

Sobre el software GeoGebra hay muchas investigaciones que dan cuenta sobre el gran recurso que es para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, autores cómo Ruiz, Ávila & Villa (2013) afirman que:

> GeoGebra puede asumirse como una herramienta didáctica, puesto que es un elemento físico o simbólico que, dentro del aula de clase, provee de cierta ventaja al maestro para la presentación de una temática particular, y que a la vez le proporciona al estudiante una forma de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados en el estudio de ciertos conceptos o procedimientos (p. 3).

De la misma manera Hohenwarter & Fuchs (2004) quien inicia el diseño de un software donde se pudiera combinar de forma dinámica la geometría, álgebra y cálculo, Desarrollan para en su tesis de maestría de la Universidad Salzburg (University of Salzburg) Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra, un sistema de software que integra las posibilidades de la geometría dinámica y álgebra computacional en una herramienta para la educación matemática. Para los autores GeoGebra es; "un programa interactivo de geometría, que también ofrece posibilidades algebraicas como entrar directamente ecuaciones. Está dirigido a estudiantes (de 10 a 18 años) y los maestros de las escuelas secundarias".

> El programa anima a los estudiantes a acercarse a las matemáticas de forma experimental. Por ejemplo, es posible investigar los parámetros de la función cuadrática arrastrando la

> gráfica con el ratón. Por otro lado, los estudiantes también pueden manipular directamente la ecuación y ver la parábola modificada en el área de trabajo (p. 2).

Se pudo verificar que los participantes tuvieron un ambiente de aprendizaje divertido, motivados a resolver las situaciones planteadas, concentrados en los temas y talleres programados, donde pusieron en práctica las tareas propuestas en las diferentes actividades. El cambio de la representación de la información del tablero al ambiente que muestra GeoGebra permitió al docente ser más ágil para la construcción de ejemplos, también le posibilitó usar una serie de aplicaciones construidas por otros pares disponibles en la web de fácil acceso.

A manera de cierre el modelo de razonamiento de Van Hiele y el software GeoGebra se ha convertido una estrategia didáctica para potencializar el pensamiento matemático en los estudiantes de esta institución Instituto Municipal Los Patios

1.1 Situación Problémica

1.1.1 Descripción del problema. La UNESCO (2016) con sus estudios Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), los estudiantes de tercero y sexto que presentaron las pruebas mostraron deficiencias tanto en los dominios como en los procesos (p. 18).

De igual manera, los resultados de las pruebas saber de la entidad Territorial para Norte de Santander durante el año 2016 en la competencia comunicación se muestra que el 77% de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos, el 72% de los estudiantes no establecen relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas, el 69% de los estudiantes no identifica características de figuras gráficas cartesianas en relación con la situación que representan y el 69% de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.

Trasladando el análisis de los resultados de las pruebas saber de la institución Instituto Técnico Municipal Los Patios (INSTEC), para el grado noveno en matemáticas, encontramos que durante los años 2013 al 2016, se puede evidenciar, que un alto porcentaje de estudiantes que presentaron la prueba, se encuentran en los niveles de desempeño mínimo e insuficiente: con un 58% y 13% respectivamente en el 2015 y un 49% y 16% en el 2016; se puede observar también que aproximadamente un 28% en el 2015 y un 30% en el 2016 se encuentra en el nivel satisfactorio y sólo el 1% y 5% en nivel avanzado en los años 2015 y 2016 respectivamente. La siguiente figura muestra el resumen de esos resultados:

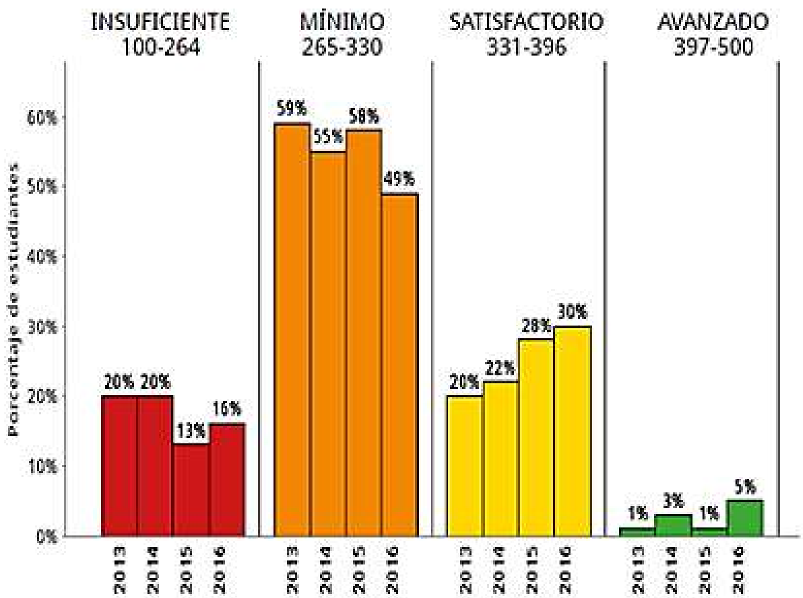
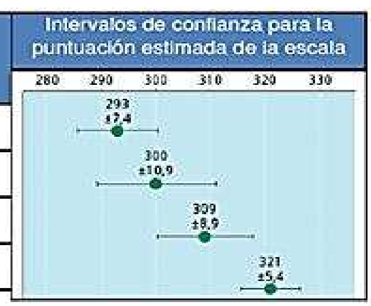


Figura 1. Histórico de los resultados de los estudiantes en las pruebas saber Noveno del INSTEC

Al entrar en detalles acerca de los promedios entre el 2013 y 2016 el ICFES publica que existen diferencias estadísticamente significativas entre el puntaje promedio del establecimiento educativo en 2016 y su puntaje promedio en 2015 como lo ilustra la tabla 1.

Tabla 1. Promedios de los resultados en matemáticas de las pruebas saber noveno del INSTEC

Año	Puntaje Promedio	Margen de estimación	Intervalo de confianza
2013	293	±7,4	(285,6 - 300,4)
2014	300	±10,9	(289,1 - 310,9)
2015	309	±8,9	(300,1 - 317,9)
2016	321	±5,4	(315,6 - 326,4)



El ICFES describe que existen diferencias estadísticamente significativas entre el puntaje promedio del establecimiento educativo en 2016 y su puntaje promedio en 2013. El puntaje promedio del establecimiento educativo en 2016 es superior a su puntaje promedio en 2013.

Sin embargo, Si se hace el análisis comparativo de Índice sintético de Calidad (ISCE) del año 2015 al 2017 se evidencia un desmejoramiento de entre el 2016 y el 2015.

BÁSICA SECUNDARIA

Año	Desempeño	Progreso	Eficiencia	Ambiente	ISCE	MMA
2018						6,17
2017	2,52	0,03	0,89	0,75	4,19	5,89
2016	2,43	2,03	0,98	0,75	6,19	5,67
2015	2,48	1,54	0,84	0,74	5,60	

Figura 2. Detalle del ISCE para la básica secundaria del INSTEC

Al analizar el listado de aprendizajes para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento, en la competencia comunicación, el 81% de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos, el 73% de los estudiantes no establece relaciones de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas, El 71% de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación y el 70% de los estudiantes no identifica características de las gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.

Con el ánimo de implementar acciones pedagógicas de mejoramiento, y observando detenidamente los resultados, las deficiencias y al realizar un análisis más profundo de la población objeto de estudio, se han podido identificar algunas situaciones donde se evidencian las siguientes debilidades: rechazo hacia el aprendizaje de las matemáticas en muchos estudiantes, bajo rendimiento académico en la mayoría de ellos, falta de interés por parte del educando hacia la preparación de las evaluaciones, desmotivación, algunos afirman que están cansados de la forma como reciben la información por parte del profesor, falta de uso de ambientes de aprendizaje diferentes o actualizados que despierten su interés. Otra situación que afecta el ambiente de aprendizaje escolar tiene que ver con que el estudiante no ve la importancia de abordar temáticas porque no ve dónde se aplica a la vida cotidiana; por último se pueden percibir algunas debilidades que no fueron superadas durante la primaria y en el comienzo de la básica secundaria.

De la misma manera, si revisamos el ISCE de la media para los años 2015 al 2017 se muestra un desmejoramiento entre 2015 y 2016, y un leve aumento entre 2016 y 2017. Pero sin superar el MMA.

Año	Desempeño	Progreso	Eficiencia	ISCE	MMA
2018					7,57
2017	2,49	0,58	1,90	4,98	7,46
2016	2,39	0,00	1,98	4,37	7,38
2015	2,42	3,05	1,89	7,36	

Figura 3. Detalle del ISCE para la Media del INSTEC

De continuar la situación descrita, los estudiantes de la básica secundaria y de la media del INSTEC seguirán mostrando resultados con desempeños mínimos en las pruebas Internas y externas, los cuales se verán reflejados en el ISC.

Al hacer un análisis del Proyecto Educativo Institucional (PEI), se cuenta con proyecto en constante actualización, mostrándose el último ajuste en el año 2016. En este documento El Instituto Técnico Municipal los Patios Asume el modelo pedagógico constructivista donde establece que la meta educativa es que la persona acceda, progresiva y secuencialmente a la etapa superior de su desarrollo intelectual de acuerdo a sus necesidades y condiciones particulares. El enfoque pedagógico del INSTEC es Humanista, se interesa por el estudio subjetivo y cualitativo que son característicos de la especie humana. PEI (2016)

Después de las consideraciones anteriores, se implementaron estrategias didácticas que conllevaron al fortalecimiento del pensamiento matemático, específicamente en el componente numérico variacional, por medio de ambientes de aprendizaje diferentes como la aplicación de software mediadores para potenciar procesos de pensamiento, estrategias didácticas, donde las TIC sean un recurso importante y una herramienta que facilite la apropiación de los conceptos, todo esto en miras a una formación integral de los educandos y el cambio en la realidad actual descrita en la IE.

De lo anterior nacen varias inquietudes ¿Qué estrategias de aprendizaje se deben implementar en los educandos para mejorar los resultados de las pruebas internas y externas de la institución? ¿Qué recursos didácticos mediados por TIC serían apropiados para el aprendizaje?, ¿qué estrategias pedagógicas pueden implementar para el aprendizaje de la función cuadrática? ¿Qué teorías de aprendizaje son apropiadas para el aprendizaje de las matemáticas? ¿El modelo de Van Hiele es pertinente para ser aplicado y mejorar el proceso de aprendizaje en las niñas, niños y juventud del INSTEC? ¿Cuál modelo para el aprendizaje de las matemáticas sería conveniente colocar a prueba en la institución?

1.1.2 Formulación del problema. ¿Cómo fortalecer el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando el software GeoGebra, en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios?

1.1.3 Objetivos

1.1.3.1 Objetivo general. Analizar el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele empleando el software GeoGebra en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios.

1.1.3.2 Objetivos específicos. Caracterizar los pre-saberes y saberes que tienen los estudiantes de noveno grado acerca del conocimiento de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele.

Diseñar estrategias pedagógicas en el marco del modelo de Van Hiele, utilizando como recurso didáctico el software "Geogebra".

Implementar las estrategias pedagógicas diseñadas para el aprendizaje de la función cuadrática.

Evaluar la efectividad de las estrategias implementadas en el marco del modelo de Van Hiele, utilizando como recurso didáctico el software GeoGebra con estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios.

1.2 Justificación

Según Programme for International Student Assessment (PISA), (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos), proyecto de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), cuyo objetivo es evaluar la formación de los alumnos cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, hacia los 15 años, en su última evaluación, los estudiantes evaluados de Colombia no mostraron buenos resultados en Matemáticas financiera, ubicándose en el último lugar de los países evaluados con 379 puntos; en ese mismo sentido Aristizabal, Esteban & Ximénez, (2014) muestran en su (Ver Anexo 1) en detalle de los resultados PISA entre los años 2006 y 2012, detallando que la mayoría de los estudiantes de Colombia evaluados han estado por debajo de la media establecida por la OCDE que para el 2012 era de 494 (p. 916).

La UNESCO (2016) con sus estudios Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), donde se evalúan matemáticas, lectura, escritura y ciencias en niños de 3ro y 6to, en diferentes dominios y procesos. Sobre los resultados de esas pruebas que aparecen en el documento Aportes para la enseñanza de las Matemática, los estudiantes de Colombia evaluados de tercer grado se encuentran por debajo de la media regional en el dominio numérico, métrico, estadístico y de variación. En los procesos de reconocimientos de objetos y elementos, de resolución de problemas simples, y complejos se ubican por debajo del promedio regional, igualmente para sexto grado, en el campo numérico y de la medición, nos encontramos por debajo de la media, en cambio en el campo geométrico, estadístico y variacional si superamos la media regional (p. 18-25).

Sobre las pruebas nacionales, el ICFES (2016) publica los resultados de las pruebas SABER de matemáticas de 3°, 5° y 9° donde se pueden ver las diferencias entre la educación pública y privada con diferencias significativas: las privadas obtienen buenos porcentajes en nivel avanzado mientras que en las entidades oficiales bajos porcentajes en ese mismo nivel y se puede observar altos porcentajes en el nivel mínimo. De la misma manera Al analizar los resultados de las pruebas saber de la entidad Territorial para Norte de Santander para el año 2016 se observa que se deben reforzar lo referente a establecer relaciones entre propiedades de las gráficas, identificar características de las gráficas cartesianas y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.

De manera semejante al analizar los resultados de los estudiantes que presentaron las pruebas en el año 2016 del INSTEC se ve la oportunidad de fortalecer la competencia comunicación y el pensamiento numérico variacional donde se refleja desempeños por debajo de la media nacional, en la siguiente figura se muestran las debilidades y fortalezas de estas pruebas en los diferentes componentes que evalúa las pruebas saber:

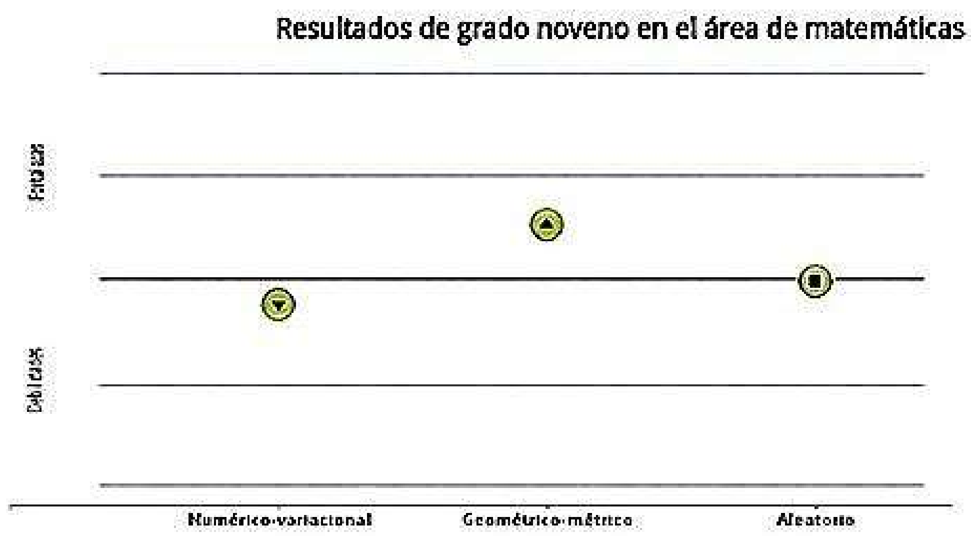


Figura 4. Resultados de debilidades y fortalezas para el grado noveno en los pensamientos de matemática. Del INSTEC, Icfes 2017

El proyecto FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS reúne características para mejorar los aprendizajes de la competencia comunicación y el pensamiento numérico-variacional que es donde se refleja mayor acción de mejoramiento pedagógico.

Esta estrategia se considera innovadora por los elementos que la sustenta como el Modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, y por el recurso didáctico como el software Geogebra que la potencia, de esta manera se tiene un estudiante motivado, con una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas y al docente una herramienta que agiliza el proceso de enseñanza-aprendizaje. Respecto de la importancia de la innovación al interior del aula el MEN describe que:

Cuando la innovación parte de acciones de investigación que cuestionan lo que sucede en la cotidianidad educativa (deserción, repitencia, desinterés y desmotivación), transformamos el conocimiento en resultados, acercándonos a procesos de indagación que nos permiten construir respuestas, planteamientos renovadores y modelos de trabajo que rompen los esquemas existentes. Las situaciones innovadoras surgen con el deseo o identificación de necesidad de cambio y se afianzan en procesos de investigación y transformación social y cultural (Ministerio de Educación Nacional, 2013, p. 16).

De esta forma se siguió un proceso de indagación, analizando los resultados de las pruebas saber, verificando los recursos existentes, detectando las situaciones de mejoramiento, diseñando y aplicando estrategias de mejoramiento para producir transformación en la actitud hacia el aprendizaje y cambios en el ambiente de aprendizaje que posibilite al estudiante una mejor comprensión de las matemáticas.

Se tomó como fundamento teórico para este proyecto de investigación El Modelo de Van Hiele, debido a que El MEN en los Lineamientos Curriculares de matemáticas menciona lo menciona como un método para la construcción del pensamiento geométrico, en el mismo sentido Fouz & De Donosti (2005) explica que el modelo de Van Hiele no es un Modelo reciente pero con la interpretación de los niveles a la didáctica actual, no ha perdido ninguna vigencia y sus ideas principales. También expresa que:

> Los niveles de aprendizaje y fases para una didáctica adecuada que facilite el paso de un nivel a otro, tienen gran interés para la elaboración de currículos abiertos de Geometría. Los niveles ayudan a secuenciar los contenidos y las fases organizan las actividades que podemos diseñar en las unidades didácticas (p. 92)

De la misma manera Archer (2010), menciona que este modelo además de ofrecer una forma interesante para identificar las características del razonamiento de un individuo o de un grupo, permite evaluar la calidad de razonamiento, comparte también "se puede utilizar en cualquier "conducta reflexiva" para evaluar los niveles de razonamiento o para facilitar el aprendizaje, para facilitar la enseñanza de las matemáticas" (p. 144).

A demás se utilizaron las TIC como herramienta para desarrollar procesos de aprendizaje en ambientes especiales, en ese sentido MEN (1998) en su documento lineamiento curriculares para matemáticas, sobre la incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de Colombia cuyo propósito se resume con el aprovechamiento de las herramientas tecnológicas y uso de software como herramienta de mediación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde:

> Constituyen herramientas de apoyo muy potentes para el estudio de funciones por la rapidez de respuesta a los cambios que se introduzcan en las variables y por la información pertinente que pueda elaborarse con base en dichas respuestas y en los aspectos conceptuales relacionados con la situación de cambio que se esté modelando. Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar. El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra. Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar (p. 17-18)

De esta manera se los participantes contaron con el uso de las tabletas dotadas por el MEN a través de Computadores para Educar, donde se instaló a 40 tabletas de ellas la aplicación GeoGebra, que se accedió de forma gratuita desde Google Play, contando con una calculadora gráfica para fortalecer el aprendizaje de las matemáticas.

Para la elección del software se revisaron y analizaron software como CaRMetal, Microsoft Mathematics 4.0, Cabri Geometry, Graph, seleccionando GeoGebra por las características del entorno de trabajo y por la fácil comprensión del uso de las herramientas, Hohenwarter & Fuchs (2004) quien inicio su diseño describe a GeoGebra como un programa interactivo que ofrece varias vistas como la algebraica y la gráfica, y está dirigida a estudiantes entre 14 y 18 años (p.2)

En ese mismo sentido observando la puesta en práctica del software García (2011) describe “lo apropiado que es el software donde expresa lo efectivo que es para mejorar las actitudes hacia las matemáticas debido al gusto y confianza que ellos depositaron en su uso para contenidos geométricos” (p. 524), de igual manera Poza (2013) describe que los Sistemas dinámicos son:

> Un apoyo en el aula como lo es cualquier otra herramienta cognitiva, según lo analizado a lo largo del trabajo, pero la solución de los problemas del aula necesita de respuestas

integrales en las cuales sí pueden tener cabida los SGD, pero siempre como una pieza más del engranaje, nunca la solución en los mismos (p. 33).

Con referencia a lo anterior, el uso del software facilitó el proceso de aprendizaje de la función cuadrática, de una forma que generalmente no son de fácil comprensión, pero que a través de este se pueden generar en el estudiante el deseo de explorar de una manera más dinámica contenidos del pensamiento geométrico-métrico-numérico y variacional.

A partir de esta implementación los estudiantes participantes del proyecto: FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS, se beneficiaron directamente 35 estudiantes de la jornada de la tarde de la sede Principal. Sobre los beneficios que recibieron los jóvenes tienen que ver con el cambio de ambiente de aprendizaje, el mejoramiento de la concentración e interés, el fortalecimiento del pensamiento matemático, mejoramiento de la autoestima. Entre algunos beneficios a nivel institucional en la aplicación del proyecto tenemos:

- Fortalecimiento en las pruebas externas.
- Aprovechamiento de herramientas tecnológicas para el aprendizaje existentes en la IE.
- Abordaje desde la investigación problemáticas que se presentan en el aula con posibles soluciones.
- Innovación con el modelo de aprendizaje Van Hiele con un enfoque constructivista y el uso del software de uso libre.
- Mejoramiento en las prácticas de aula, que se pueden heredar a otros docentes.

1.3 Contexto

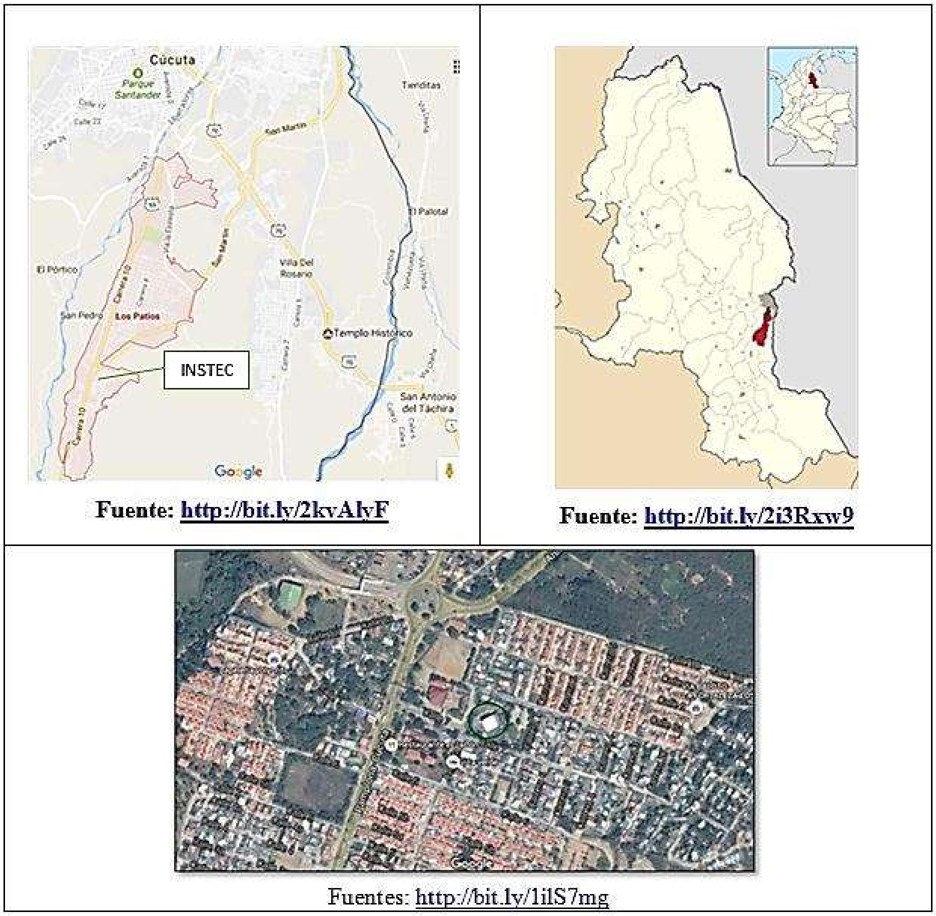


Figura 5. Ubicación geográfica del INSTEC municipio de Los Patios (Norte de Santander) Colombia

1.3.1 Contexto local. El Municipio de los Patios donde se desarrollará la propuesta pertenece a la zona metropolitana de Cúcuta, en Norte de Santander. Se encuentra a 7 kilómetros en la vía Cúcuta- Pamplona

Cuenta aproximadamente con 77.588 habitantes según el censo 2012 y su economía está basa en la actividad agrícola en el área rural y comercial en la parte urbana.

1.3.2 Contexto institucional. El Instituto Técnico Municipal Los Patios (INSTEC), nació como institución educativa bajo los parámetros de la administración municipal en el año 1995 por acuerdo del Concejo Municipal 0045 en la administración del señor Alcalde Dr. Ignacio Duarte Gómez (Instituto Técnico Municipal Los Patios, 2013).

El primer nombre dado al Instituto fue COLEGIO INDUSTRIAL DE LOS PATIOS, nombre dado por la administración municipal y con el cual pidieron la aprobación de estudios a la Secretaría de Educación. Posteriormente con el aval de la Alcaldía y la Secretaría de Educación se le dio el nombre de COLEGIO TÉCNICO DEL MUNICIPIO DE LOS PATIOS, según documentos oficiales.

Su puesta en marcha se realizó el 02 de febrero de 1996, con 220 niños matriculados para el grado sexto con una planta física de 17 aulas de clase, una sala máxima como auditorio, sala para biblioteca, dos canchas polifuncionales para la recreación y el deporte, 500 pupitres donados por la administración y 6 docentes que asumieron este reto. El 16 de marzo de 1996 se inauguró oficialmente el Colegio Técnico Municipal de Los Patios. En el marco de la descentralización de la educación y la reorganización administrativa del sector de la educación ordenado por la ley 715 del 2002, La Gobernación del Departamento Norte de Santander y la Secretaría de Educación del Departamento Norte de Santander, mediante el decreto 00842 del 30 de Septiembre de 2002, creó el INSTITUTO TÉCNICO MUNICPAL LOS PATIOS, y a su vez ordenó la fusión de las instituciones: Colegio Técnico del Municipio de Los Patios, Escuela Urbana Kilómetro Ocho, Escuela La Buena Esperanza, Escuela Urbana Pisarreal, Escuela Urbana Llanitos, Escuela Urbana Montebello. A través del Decreto 00924 del 23 de octubre de 2002 fue designado como rector de la institución el Dr. Mario Pezzotti Lemus.

Se hizo énfasis, entonces, en la necesidad de formar individuos capaces de atender las expectativas del empleo o de generarlo, mediante la preparación real en las modalidades ofrecidas y/o impulsando la creación de pequeñas empresas para beneficio personal y de su entorno social.

Se ha venido trabajando durante los últimos años en la consolidación de la institución, en vincular una nómina de directivos, docentes y administrativos idónea y suficiente, en la ampliación del equipamiento, en el mejoramiento de la planta física, en la organización integral que nos permita asumir con éxito los nuevos retos del mejoramiento de la calidad de la prestación del servicio y la construcción y apropiación de una identidad institucional que integre a todos los estamentos de las diferentes sedes, niveles y áreas.

La Población estudiantil es aproximadamente 4000 educandos. La sede principal de la institución cuenta con conectividad a internet, 3 salas audiovisuales, computadores, 600 tabletas, y un sitio vive digital plus. Cuenta con 6 Medias Técnicas en articulación con el SENA (Gestión ambiental, asistencia administrativa, instalaciones eléctricas en baja tensión, sistemas y construcción de estructuras metálicas soldadas, ventas y servicios).

1.3.3 Filosofía de la institución. El Instituto Técnico Municipal de Los Patios, se identifica como una comunidad educativa plural, inclusiva y respetuosa de la diversidad, que tiene como propósito fundamental formar niños, niñas y adolescentes integrales aptos, a través de convenios de articulación de la educación Media Técnica con el SENA, para competir con éxito en el campo laboral y universitario, con miras al mejoramiento de la calidad de vida y en procura de integrarse en forma constructiva con su entorno natural, social y cultural con sentimientos democráticos y transformadores.

1.3.4 Visión. El Instituto Técnico Municipal Los Patios en el 2020, será reconocido a nivel Departamental como una institución de calidad con principios de educación inclusiva, en articulación con el Servicio Nacional de Aprendizaje SENA, formando personas en valores, con capacidad de innovación para ser promotores de desarrollo".

1.3.5 Misión. "El Instituto Técnico Municipal Los Patios ofrece educación de calidad a los niños, niñas y jóvenes Patienses, en los niveles de preescolar, básica y media técnica en articulación con el SENA, priorizando la formación en valores humanos y la apropiación de conocimientos, que le permitan un desempeño exitoso en el campo laboral y académico, contribuyendo al mejoramiento de la convivencia social y del medio en el que interactúa".

1.3.6 Principios institucionales. El Instituto Técnico Municipal Los Patios en su quehacer educativo opta por los siguientes principios:

- Democrático: Por cuanto se fomenta el pluralismo ideológico, la participación activa y el respeto por la diferencia.

- Autonomía: Formamos jóvenes capaces de tomar sus propias decisiones con responsabilidad y asertividad.

- Investigativo: Propicia un ambiente para la consulta y la investigación.
- Tolerancia: Se desarrolla la capacidad para convivir en el respeto por la diferencia y muy especialmente por los estudiantes que presentan necesidades educativas especiales.
- Equidad: Se crea un ambiente propicio para la justicia.
- Solidaridad: Se fomenta el espíritu de compañerismo y de ayuda mutua.
- Respeto: Se valora la dignidad del ser humano y se fomenta la autoestima en los estudiantes.
- Libre expresión y participación: Propicia espacios para la expresión del pensamiento, desarrolla el sentido crítico y participación en las diferentes manifestaciones artísticas, culturales y deportivas.
- Sana convivencia: Orienta a las relaciones armoniosas a nivel individual, grupal, institucional y comunitario.
- Compromiso: Permite afianzar el sentido de pertenencia por la institución y la responsabilidad compartida en el proceso de aprendizaje.
- Interdisciplinariedad: Destreza para el manejo de las diferentes áreas del conocimiento.
- Eficacia: Conlleva a capacitar a los jóvenes para que su desempeño en las diferentes áreas del saber y en el mundo laboral sean exitosos.
- Eficiencia: Formar y capacitar a los educandos con una mentalidad capaz de entender el mundo de hoy, participar activamente en su transformación y lograr desarrollar su propio proyecto de vida.

2. Marco Referencial

2.1 Antecedentes Investigativos

2.1.1 Antecedentes internacionales. Sobre los antecedentes internacionales existen muchos trabajos de tesis doctorales y de maestría donde sus conclusiones dejan de manifiesto lo que resulta ser el proceso de aprendizaje de los estudiantes, el modelo de razonamiento de Van Hiele, también la mediación de las TIC para el desarrollo de habilidades de pensamiento, y el uso del Software GeoGebra, que a continuación se detallan:

En la tesis doctoral: La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri; Cabello (2013), plantea una investigación sobre la implementación curricular del modelo de Van Hiele y la comprobación experimental de su eficacia. La propuesta consiste en aplicar el aspecto prescriptivo o metodológico de dicho modelo, partiendo del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos, de sus conocimientos previos y errores, utilizando el software de Geometría Dinámica Cabri, para constatar la significatividad del aprendizaje de la Geometría. De dicha experimentación se han obtenido prescripciones instructivas para la aplicación del modelo de Van Hiele insertada en la dinámica del aula. Previamente se han estudiado las teorías sobre la comprensión de la Geometría y la formación del concepto geométrico y se han analizado las investigaciones realizadas con dichos marcos teóricos, determinando su viabilidad en el aula.

La innovación de este trabajo radica, por una parte, en el punto de partida para la aplicación del modelo, que consiste en el conocimiento de las imágenes conceptuales y errores de los alumnos. Para ello se diseñaron dos instrumentos metodológicos, el primero, un cuestionario de detección de errores (y de imágenes conceptuales) que sirve para medir el rendimiento en Geometría y, el segundo, unas unidades didácticas, basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y elaboradas teniendo en cuenta dichas imágenes conceptuales y errores, y utilizando el software de Geometría Dinámica Cabri. Se analizaron dichos errores y las respuestas del grupo experimental a determinadas cuestiones, lo cual permitió, identificar el nivel de razonamiento de los alumnos y, establecer los criterios y prescripciones instructivas para la aplicación de dicho modelo, lo cual constituye el segundo aspecto innovador de la Tesis (p. 11).

Esta investigación contiene elementos que son comunes con este proyecto, como la aplicación del modelo de razonamiento de Van Hiele y la utilización de un software dinámico como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas, en miras del fortalecimiento del proceso de aprendizaje en los estudiantes, en la dinamización de las prácticas de aula y generación de espacios que motiven el gusto por las matemáticas.

Tesis de maestría: enseñanza de las simetrías con uso de GeoGebra según el modelo de Van Hiele, Maldonado, L. (2013), en la Universidad de Chile*,* esboza entre sus objetivos entregar a los docentes de matemática una propuesta de trabajo para la enseñanza de la geometría, integrando un modelo de razonamiento con el uso de las tecnologías de información y comunicación. Para esto se diseñaron guías de aprendizaje, según los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, para la enseñanza del objeto geométrico Simetrías, a través del software Geogebra. El trabajo con estos talleres permite a los estudiantes pasar de lo más simple a lo más complejo en el estudio de las simetrías, visualizar, manipular y resolver los problemas planteados a través de applets construidos con Geogebra. Es importante señalar que la puesta a prueba de estos recursos permite verificar si el aprendizaje de las simetrías es más significativo al usar el modelo de Van Hiele, o integrando este modelo con el uso de Geogebra, o utilizando la metodología tradicional del establecimiento. Para validar y probar esta propuesta se implementó con un grupo de alumnos de la comuna de Maipú (p. 7).

Esta investigación hace aportes a este trabajo en cuanto a lo efectivo que resulta ser el modelo de Van Hiele y el software GeoGebra donde se demostró que el aprendizaje es más significativo cuando se integra el modelo de Van Hiele y el software GeoGebra comparado con el modelo tradicional o aplicando el modelo de Van Hiel solamente.

En la Tesis de maestría: mediación del software GeoGebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria, describe en su resumen; Bello, J. (2013) de la Pontificia Universidad Católica del Perú realiza una investigación está centrada en la enseñanza de la Programación Lineal mediada por el software GeoGebra con alumnos del quinto grado de educación secundaria, de la Institución Educativa N° 1136 “John F. Kennedy”. Este tema forma parte del Diseño Curricular Nacional y por tanto del libro texto de quinto grado de educación secundaria; sin embargo, o bien no se considera en la programación curricular anual o bien se enseña la haciendo construcciones geométricas usando lápiz y papel. Investigaciones como Malaspina (2008) y Moreno (2011), detectaron que la mayoría de alumnos no tiene nociones sobre Programación Lineal, porque no las estudiaron en el colegio, esto se debe a que la mayoría de docentes no las incluyeron en su programación curricular anual. Moreno (2011) y Reaño (2011) propusieron usar lápiz y papel para enseñar Programación Lineal, mientras que Paiva (2008), propuso usar calculadoras gráficas y el programa matemático Solver aplicado en Excel, por otra parte Sánchez & López (1999) y Coronado (2012) trabajaron con diseños y aplicaciones interactivas en Programación Lineal para internet. Nosotros proponemos usar GeoGebra como mediador de la enseñanza de la Programación Lineal, pues pensamos que con este software y las situaciones de aprendizaje propuestas a través de una serie de actividades lograremos que los alumnos puedan manipular, conjeturar, esbozar y plantear posibles soluciones mientras construyen el conocimiento sobre este tema y transitar por los Registros de Representación verbal, algebraico y gráfico de manera natural y espontánea, de ahí que el marco teórico elegido sea la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y el método de investigación propuesto es cualitativo y está basado en Hernández, Fernández & Baptista (2007). Finalmente, los alumnos usando algunos comandos de GeoGebra mostraron habilidad y destreza al resolver problemas de Programación Lineal, modelaron matemáticamente situaciones reales, lograron tener mayor precisión en la intersección de regiones evitando distorsiones en los mismos, graduaron escalas y visualizaron las representaciones algebraicas de las inecuaciones a través de las representaciones gráficas vistas en la ventana de GeoGebra mostrando así un tránsito coordinado y adecuado de registros de manera natural y espontánea (p. 4).

Este trabajo hace aportes en cuanto a la aplicación del software dinámico GeoGebra en el pensamiento numérico y variacional donde se detallan situaciones de la recta, ecuaciones con dos variables, inecuaciones lineales entre otros donde se pone de manifiesto la solución de problemas mediante el uso del software mostrándose cómo una herramienta mediadora para el aprendizaje de objetos matemáticos.

En la tesis doctoral: evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula, García, M. (2011), en la Universidad Almería, con el estudio llevado a cabo con estudiantes de Secundaria siguiendo una metodología de investigación-acción, muestra en su trabajo la exploración de la influencia de Geogebra en la transformación de actitudes relacionadas con las matemáticas y en el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes. También se analizan cuáles de las características del software intervienen en dicha transformación actitudinal y desarrollo de competencias matemáticas. Para ello se ha diseñado, puesto en práctica y evaluado una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en el uso de Geogebra, empleando el procedimiento del análisis didáctico, la cual puede considerarse una aportación importante del trabajo. Asimismo, este estudio aporta una caracterización de actitudes y una caracterización de competencias, así como los instrumentos de observación diseñados para la recogida de datos durante la puesta en práctica de la experiencia en el aula. Los resultados han puesto de relieve las mejoras producidas por el uso de Geogebra, destacando ciertas actitudes y competencias, por la mejora experimentada por la mayoría de los estudiantes debido al trabajo con Geogebra. El efecto de Geogebra ha contribuido a potenciar en mayor grado determinadas actitudes y competencias, encontrando ciertos atributos y ventajas de Geogebra asociados a tal mejora.

Esta investigación muestra aportes valiosos para el presente trabajo por 3 aspectos fundamentales, el primero es que corresponde a una investigación cualitativa siguiendo la metodología investigación-acción, donde esta práctica investigativa ha sido utilizada en el ámbito educativo por sus aportaciones que ayudan al perfeccionamiento del profesorado y de las instituciones; el segundo aspecto es sobre la utilización y efectividad del software GeoGebra como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas, donde se mostró como una herramienta que potencializa las competencias matemáticas y el tercero tiene que ver con la transformación actitudinal que genera la utilización de las herramientas tecnológicas donde el estudiante permanece activo, más autónomo, sensación de disfrute, gusto por la herramienta, respuestas rápidas que con el uso de lápiz y papel resulta menos motivadora entre otras, características encontradas en el objeto de estudio de este trabajo.

Después de lo anterior expuesto, las investigaciones de Cabello, A. (2013), Maldonado, L. (2013), Bello, J. (2013), García, M. (2011) dan soportes valiosos al proyecto: Fortalecimiento del proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra en los estudiantes del grado noveno del instituto técnico municipal los patios

2.1.2 Antecedentes nacionales. Sobre los antecedentes nacionales se encontraron trabajos de maestría relacionados en primer lugar con el uso del modelo de razonamiento de Van Hiele que ayuda a secuenciar los aprendizajes de los estudiantes a través de niveles de razonamiento y en segundo lugar el software GeoGebra, donde se muestra la importancia de la mediación del software dinámico para el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático, que a continuación se particularizan:

En la tesis de maestría: Comprensión de las razones trigonométricas mediante el software Geogebra en el contexto del Modelo de Van Hiele, Rios, J. & Oyola, A. (2016) de la universidad de Antioquia, propuso determinar los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para ubicar el nivel en que los estudiantes se encontraban haciendo uso del software GeoGebra, diseñar un módulo de aprendizaje enmarcado en el modelo de Van Hiele mediante el software de uso libre Geogebra (p. 15); describen entre sus conclusiones que "el diseño de actividades en las fases de aprendizaje de Van Hiele y el uso del software GeoGebra permitieron que los estudiantes avanzaran en su nivel de comprensión, en relación a los conceptos asociados a las razones trigonométricas" (p. 63). Los autores también mencionan que "son muchos los conceptos y propiedades que se pueden estructurar a partir del software GeoGebra y la secuencia que sugieren los niveles y fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, los cuales están integrados en cada una de las actividades del módulo de aprendizaje (p. 175).

En este proyecto se pudo comprobar que el software GeoGebra es una herramienta que enriquece el modelo de razonamiento de Van Hiele, a causa de la interfaz que ofrece, permitiendo el entorno gráfico y algebraico simultáneamente, permitiendo que el estudiante pueda proponer sus propias construcciones.

En la tesis doctoral: una aproximación al aprendizaje de la semejanza de triángulos en GeoGebra, Llantén, J. & Bermúdez, M. (2014), de la universidad del Valle, muestran la adaptación, implementación y análisis de una secuencia didáctica en GeoGebra para el estudio de la semejanza de triángulos, con estudiantes de grado octavo de la Educación Básica del colegio Mayor Santiago de Cali. Para ello, se toma como referentes teóricos algunos elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) para el diseño y análisis de la secuencia didáctica y de la Orquestación Instrumental para dar cuenta de cómo el medio, en este caso Geogebra, logra que el estudiante a través del arrastre tenga un aprendizaje significativo y hacer explícito el tipo de relación que se establece entre el medio y el estudiante. En la parte metodológica se tendrá en cuenta un estudio de caso, de tipo cualitativo, estructurado a partir de tres fases: la fase preactiva, en la cual se construye el marco teórico y se adapta la secuencia; la fase interactiva, en la cual se realiza la experimentación y/o implementación de la secuencia; y la fase postactiva, en la que se analizan los datos recogidos en la fase interactiva. Para ello se toma como eje central las fases de acción, formulación y validación planteadas desde la TSD y se resalta la gestión didáctica del profesor en el desarrollo de la secuencia didáctica (p. 12).

El trabajo en mención hace aportes referentes al recurso didáctico que es el software GeoGebra para el aprendizaje de las matemáticas, detallando las ventajas como la herramienta arrastre: que permite la selección de un objeto en el área de trabajo del software y luego trasladarlo, herramienta que se utilizó en este proyecto en el aprendizaje de la función cuadrática.

En la tesis de maestría: la circunferencia. Una propuesta didáctica usando modelo de Van Hiele y geometría dinámica, Moreno, C. & Willy, J. (2011) de la universidad Nacional de Colombia, plantea un trabajo que se fundamenta en una propuesta didáctica que utiliza la geometría dinámica, la visualización y el Modelo de Van Hiele para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula de clases para la apropiación del concepto de circunferencia por parte de los estudiantes y un aporte a la profundización del tema para los docentes. El desarrollo del enfoque utiliza la geometría sintética como base para abordar la circunferencia, sus nociones, proposiciones y teoremas básicos. La construcción del concepto se realiza desde una perspectiva histórico-epistemológica y disciplinar, fortaleciéndolo con la aplicación de teorías y Modelos didácticos que facilitan el desarrollo del pensamiento geométrico, convirtiéndose es una herramienta didáctica para que los docentes potencien e innoven las prácticas pedagógicas en la escuela.

Este antecedente contiene aspectos relevantes para el proyecto, en primer lugar el Modelo de Van Hiele para mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula, y en segundo lugar la aplicación de un software dinámico como Regla y Compás, recurso didáctico que sirve como mediador en este caso la circunferencia donde se puede estudiar algunas de sus propiedades y Teoremas, para comprobar, analizar, inferir, refutar resultados, hacer demostraciones desde situaciones geométricas que permitan la relación entre la definición y su salto epistemológico en situaciones que involucran sistemas computacionales (software geométrico) (p. 2).

2.1.3 Antecedentes locales. A nivel regional se encuentran se encuentran investigaciones donde el modelo de Van Hiele y el uso del software GeoGebra están por separados, como se especifica a continuación:

En la tesis de maestría: el concepto de derivada y el Modelo de Van Hiele en estudiantes de licenciatura en matemáticas e informática de la Universidad Francisco de Paula Santander, Rodríguez, E. (2016) de la Universidad Francisco de Paula Santander, realizó una investigación donde se realizó una caracterización de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele aplicados al concepto de derivada en una muestra de 40 estudiantes de cálculo diferencial, integral y multivariado del plan de estudios de licenciatura en matemáticas e informática, en el cual se describe, determina y compara los diferentes niveles encontrados, la investigación realizada mostró que es posible aplicar los niveles de razonamiento geométrico del modelo educativo de los esposos Van Hiele aun concepto propio de la matemática. El autor usa el modelo de Van Hiele para caracterizar los niveles de razonamiento geométrico en el que se encontraban estudiantes de cálculo diferencial, integral y multivariado, midió las variables los cinco niveles de razonamiento geométrico del modelo: Visualización o reconocimiento, Análisis, Ordenación o clasificación, Deducción formal y Rigor. Entre los resultados de la investigación se pudo observar que los estudiantes se ubican en los cuatro primeros niveles de razonamiento geométrico del Modelo de Van Hiele. Rodríguez afirma que “La investigación mostró que es posible aplicar los niveles de razonamiento geométrico del modelo educativo de los esposos Van Hiele a un concepto propio de las matemáticas, para evaluar el nivel en el que se encuentran los estudiantes siendo este el punto de partida para aplicar las fases de aprendizaje del mismo modelo para reestructurar y mejorar un concepto previamente trabajado”.

Con esta experiencia se muestra alguno de los trabajos realizados localmente y aporta ideas como la aplicación del modelo de los Esposos Van Hiele en la construcción o estudio de un concepto matemático.

En la Tesis de maestría: prácticas pedagógicas para el desarrollo del componente geométrico y espacial a través del uso del software GeoGebra en estudiantes de séptimo grado, Parra, R.

(2015) de la Universidad Francisco de Paula Santander, propuesta que tuvo como propósito determinar las prácticas pedagógicas que desarrollan el Pensamiento Geométrico y Espacial, debido a que actualmente son pocas las instituciones que se preocupan por profundizar en la enseñanza de las matemáticas a través de la Geometría. El Ministerio de Educación Nacional (MEN) está apoyando de forma permanente el uso de las Tic en todas las áreas, especialmente hacia las matemáticas. El presente estudio, se enmarca dentro de los denominados diseños mixtos junto con los instrumentos de recolección de información; la población objeto de estudio son tres docentes participantes del área Matemáticas y 143 estudiantes de séptimo grado de Educación Básica Secundaria del Instituto Técnico Municipal los Patios. Los resultados se evidenciaron en torno las Prácticas Pedagógicas con un buen dominio conceptual en torno a la parte Curricular del área de Matemáticas; sin embargo, en el quehacer enseñanza aprendizaje en el aula no se presentó coherencia entre los temas enseñados y la formación competitiva a través de los estándares establecidos por el MEN; por lo tanto el modelo de aprendizaje reflejado es el tradicional, esto quiere decir que los profesores no tienen en cuenta el modelo constructivista dialogante establecido por la Institución; este comportamiento de aprendizaje tradicional refleja dificultades de aplicación didácticas especialmente hacia el uso de herramientas tecnológicas.

Este antecedente es de gran importancia para este trabajo porque es un trabajo que fue aplicado en una sede del INSTEC y es sobre la aplicación del software GeoGebra como recurso didáctico, se convierte en un antecedente importante a la hora de valorar el recurso didáctico empleado para el fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes.

En el artículo: descriptores específicos de los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos, Gualdrón, É. (2014), se presentan los resultados preliminares de una investigación que estudia las formas y la evolución del razonamiento que tienen los estudiantes al abordar tareas relacionadas con la semejanza. En una primera etapa se elabora una caracterización a priori de los descriptores de nivel de Van Hiele basados en estudios previos de Gualdrón & Gutiérrez (2007), los cuales se confirman y amplían mediante una intervención, usando una unidad de enseñanza diseñada siguiendo las líneas de Lemonidis (1991) y el modelo de razonamiento de Van Hiele siguiendo las líneas de Gutiérrez & Jaime (1998). La muestra del estudio es un grupo de estudiantes de noveno grado (14-15 años) de un colegio de Pamplona, Norte de Santander (Colombia). Los análisis preliminares del conjunto de datos muestran interesantes formas de resolución de ciertas tareas en las cuales los participantes utilizan un lenguaje rico y muestran variadas formas de razonamiento (p. 1).

Este antecedente menciona el Modelo de Van Hiele como excelente referente teórico, para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría y demuestra que los estudiantes alcancen un nivel de razonamiento 3 para el tema de semejanzas. Cabe agregar que la población objeto de estudio corresponde a noveno grado similar a la edad de los participantes en esta investigación, referente importante para aplicar situaciones de semejanzas basados en los niveles de razonamiento.

2.2 Marco Teórico

En este capítulo se abordaran cuatro componentes que soportan este trabajo de investigación, el primer componente es el proceso de aprendizaje, donde se describe el concepto de aprendizaje desde la mirada de varios autores, la relación entre el constructivismo y el aprendizaje, el aprendizaje significativo como proceso para fortalecer el pensamiento matemático y el proceso de aprendizaje de los estudiantes donde se hace referencia a sus competencias actitudinales, matemáticas acerca del objeto de estudio. El segundo componente tiene que ver con la didáctica de las matemáticas, donde el Modelo de razonamiento Van Hiele con sus niveles especialmente el de reconocimiento y el de análisis han servido para estructurar el aprendizaje del objeto de estudio direccionado desde situaciones de variación. El tercer componente aborda el objeto disciplinar del proyecto, donde se detallan los contenidos del acercamiento al concepto de función, la función cuadrática y la ecuación cuadrática. El cuarto y el último componente se relaciona con el uso de las TIC que se resume con la aplicación del software GeoGebra cómo recurso didáctico y que se presenta como engranaje del proceso de aprendizaje de las matemáticas.

2.2.1 Proceso de Aprendizaje

2.2.1.1 El aprendizaje como proceso de desarrollo cognitivo. Al indagar acerca de todo lo que tiene que ver con el aprendizaje humano, debemos hacer mención acerca de lo que abarca este concepto y lo que algunos teóricos han descrito sobre lo que se entiende por aprendizaje. En ese sentido para los teóricos no hay una definición de aprendizaje humano aceptada como universal Dale H. Shuell (como se citó en Schunk, 2012) describe una definición que considera que reúne casi todos los criterios de la mayoría de los profesionales “el aprendizaje es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia. Dale H. Schunk menciona también los tres criterios para examinar la definición de aprendizaje: El aprendizaje implica un cambio, el aprendizaje perdura a lo largo del tiempo y el aprendizaje ocurre por medio de la experiencia (p. 3)

En el mismo sentido, Ardila (1979) describe que el aprendizaje es un cambio relativamente permanente del comportamiento que ocurre como resultado de la práctica, y menciona también los tres aspectos que debe tener la definición: el aprendizaje implica cambio, relativamente permanente y resulta de la práctica (p. 18). EL aprendizaje cognitivo conduce a un cambio en el significado de la experiencia: la verdadera educación cambia el significado de la experiencia humana (Novak & Gowin, 1984; Alcaraz (2002). Alcaraz expresa que aprender es tomar algo del exterior e incorporarlo ciegamente a otros saberes anteriormente acumulados por el mismo proceso (p. 195). De igual manera Papalia, et al. (2005) escriben que el aprendizaje puede definir como un cambio relativamente permanente en el comportamiento, que refleja adquisición de conocimientos o habilidades a través de la experiencia, y que pueden incluir el estudio, la instrucción, la observación o la práctica.

Travers (1982) establece que el aprendizaje puede ser considerado, en su sentido más amplio como un proceso de adaptación; el hombre adquiere nuevos modos de comportamiento o ejecución, con el objeto de hacer mejores ajustes a las demandas de la vida. Otra definición es la descrita por Wittrock (1992) El aprendizaje es el proceso de adquirir cambios relativamente permanentes en la comprensión, actitud, conocimiento, información, capacidad, a través de la experiencia. Desde la perspectiva de la psicobiológica (Pinel, 2001), El aprendizaje consiste en la inducción de cambios neuronales relacionados con la conducta como consecuencia de la experiencia. La memoria mantiene el aprendizaje y la expresión del cambio conductual (p. 479).

El aprendizaje incluye cambios o transformaciones en la persona, ya sea en sus estructuras mentales, en su comportamiento, sentimientos, en el significado de la experiencia. En los marcos de las definiciones anteriores, el aprendizaje se da a través de la experiencia, y es sobre estos aspectos que se concentrará este trabajo de investigación.

2.2.1.2 El aprendizaje en el constructivismo. El constructivismo es un enfoque educativo que supone un esfuerzo por integrar diversas teorías psicológicas del aprendizaje y la epistemología de la construcción de conocimientos (Pozo, 1989; Carretero, 1994). En la teoría del constructivismo se destaca el papel de los conceptos, las relaciones entre ellos; el papel que juegan los conocimientos previos y el lenguaje para dar forma, codificar, y adquirir nuevos significados (Novak, 1987).

Según lo establece la epistemología de la construcción de conocimientos, la interacción entre el pensamiento y la realidad es la fuente del conocimiento; los conocimientos que se van adquiriendo no son los últimos ni los definitivos, sino que su proceso de formación sigue un dinámica real por la que el conocimiento anterior ejerce influencia en el presente o actual y éste a su vez interviene en el conocimiento futuro, es por esto que cualquier conocimiento que sea adquirido, por muy universal o verdadero que sea, representa sólo una perspectiva de la realidad. Para el constructivismo el aprendizaje es un proceso activo y dinámico, fruto de una construcción personal, en la que intervienen e influyen otros factores como la enseñanza (contenidos, metodología, recursos) y los contextos culturales, que se constituyen como partes fundamentales para la construcción. En este sentido, se considera que el desarrollo personal, el desarrollo intelectual, el aprendizaje y la educación son procesos que se encuentran profundamente interrelacionados.

La teoría del constructivismo se apoya en modelos de desarrollo, que resaltan la dimensión activa y dinámica del que aprende en el proceso de enseñanza y aprendizaje, partiendo del hecho que es necesario aprender conceptos pero también es fundamental aprender procedimientos y desarrollar actitudes. En el estudio de Novak (1987) se sintetizan las diversas perspectivas teóricas de la corriente constructivista, y de la teoría de Ausubel sobre aprendizaje, y se establece que la construcción de nuevos conocimientos es la principal forma de aprender significativamente, porque, realmente, lo que se busca y se consigue es crear nuevos significados.

El constructivismo en el Instituto Técnico Municipal Los Patios. El INSTEC fundamenta sus bases pedagógicas en el modelo constructivista y lo describe en su El proyecto Educativo Institucional PEI donde menciona algunos teóricos como Piaget, David Ausubel, Leev Vigosky, Maslow, Roger, Frank, Feurestein y Subiría. El PEI describe sobre el constructivismo lo siguiente:

> El modelo pretende la formación de personas como sujetos activos, capaces de tomar decisiones y emitir juicios de valor, lo que implica la participación activa de profesores y alumnos que interactúan en el desarrollo de la clase para construir, crear, facilitar, liberar, preguntar, criticar y reflexionar sobre la comprensión de las estructuras profundas del conocimiento.
>
> El eje del modelo es el aprender haciendo. El maestro es un facilitador que contribuye al desarrollo de capacidades de los estudiantes para pensar, idear, crear y reflexionar. El objetivo de la escuela es desarrollar las habilidades del pensamiento de los individuos de modo que ellos puedan progresar, evolucionar secuencialmente en las estructuras cognitivas para acceder a conocimientos cada vez más elaborados.
>
> En este modelo, la evaluación se orienta a conceptualizar sobre la comprensión del proceso de adquisición de conocimientos antes que los resultados La evaluación es cualitativa y se enfatiza en la evaluación de procesos.
>
> - Metas: Estructuras mentales cognitivas
> - Método: Creación de ambientes aprendizaje
> - Desarrollo: Progresivo y secuencial.
> - Contenidos: Experiencias. Apoyo creativo
> - Relación Maestro – Alumno: Facilitador. Motivado (p. 33).

Es importante tener en cuenta el referente de los niveles de Van Hiele como soporte institucional, pues las bases del modelo de razonamiento para el aprendizaje de las matemáticas tiene sus raíces en el constructivismo, y resulta efectivo, sobre todo para el aprendizaje de la geometría y cualquier objeto de estudio matemático.

La inclusión del modelo en las prácticas de aula sería un componente de innovación con bases sólidas del constructivismo. Y si sumamos las nuevas tecnologías como software de uso libre y el uso de tabletas y/o computadores serán un complemento para ayudar a los jóvenes a motivarlos al aprendizaje de las matemáticas.

2.2.1.3 Aprendizaje significativo. Se ha tomado como referencia teórica el aprendizaje significativo, que se considera una importante teoría psicológica y educativa en el aula desarrollada por Ausubel y sus colaboradores que profundiza en el significado y sentido del aprendizaje (Ausubel, Novak & Hanesian, 1983). Se constituye como una teoría psicológica porque se centra en los procesos propios del sujeto cuando aprende, haciendo énfasis en todo lo que sucede en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación (Ausubel, 1976).

Ausubel (1973, 1976, 2002) le dio un marco teórico que pretendió dar cuenta de los mecanismos por los que se lleva a cabo la adquisición y la retención de los grandes cuerpos de significado que se manejan en la escuela. Esta teoría expone que un aprendizaje es significativo cuando "puede relacionarse de modo no arbitrario y sustancial, con lo que el alumno ya sabe". Esto significa que, un aprendizaje es significativo cuando se puede incorporar a las estructuras de conocimiento anterior o previo que ya posee el estudiante.

Para Pozo (1989) la Teoría del Aprendizaje Significativo se constituye como una teoría cognitiva de reestructuración; se trata de una teoría psicológica que se gesta y se construye bajo la orientación de un enfoque organicista del sujeto y que está basado y centrado en el aprendizaje generado en un contexto escolar. En la teoría de Ausubel se da gran importancia al hecho de diferenciar el aprendizaje mecánico o memorístico del aprendizaje significativo; cuando el sujeto, no establece relación o conexión, con los conceptos que posee en su estructura cognitiva al enfrentarse a nuevos conocimientos, se considera que aprende de forma memorística. Por el contrario, si es capaz de relacionar la nueva información con las ideas o conceptos previos que posee en su estructura mental, entonces está aprendiendo de manera significativa, y esa es la intencionalidad directa de las actividades que hemos seleccionado para este estudio (p. 39).

En el aprendizaje significativo se relaciona un nuevo conocimiento con la estructura cognitiva de la información que posee, que ha sido aprendida de forma no arbitraria y sustantiva. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje (Ausubel, 1976, 2002; Moreira, 1997). La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo (Moreira, 2000).

El aprendizaje significativo es un proceso que requiere una serie de condiciones o requisitos establecidos por Ausubel en su teoría, los cuales se mencionan a continuación y fueron considerados para esta investigación: (a) El estudiante debe contener ideas o conceptos para incluir en su estructura cognitiva, de tal forma que este tipo de conceptos con significados más concretos permitan entender y comprender la nueva información dándole significado y sentido; (b) Las situaciones de aula demuestran que es fundamental que el estudiante tenga una actitud o disposición favorable para aprender de manera significativa; es decir, el alumno debe estar motivado y dispuesto a relacionar el conocimiento nuevo que está aprendiendo con lo que ya conoce, esto con el fin de modificar los esquemas de conocimiento; (c) Del significado lógico al psicológico. El significado lógico que corresponde a la estructura científica propia de la materia debe convertirse en significado psicológico, el que alcanza una persona cuando asimila un significado lógico dentro de su propia estructura mental, que se consigue con la ayuda de los conceptos que pueden ser incluidos; y (d) Contenidos potencialmente significativos. El material presentado debe poseer significado para el sujeto que aprende, sus elementos deben estar relacionados y estructurados entre sí. Dependiendo de la organización del nuevo conocimiento, de su claridad y estabilidad, será mejor su acomodación y su retención en la estructura mental del individuo.

2.2.1.4 El proceso de aprendizaje de los estudiantes. Este trabajo se centró en el aprendizaje de las matemáticas como área disciplinar, específicamente en el pensamiento variacional; con el fin de realizar el análisis de este proceso en los estudiantes del Instituto Técnico Municipal los Patios, se plantearon inicialmente un conjunto de categorías de análisis, que desde el marco de las actitudes, comportamientos, competencias básicas y conocimientos previos consideramos pertinentes como indicadores de desempeño en el aprendizaje de la función cuadrática y que se detallan a continuación:

Actitudes para el aprendizaje de las matemáticas. La actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas es la base que mueve toda conducta, y permite provocar cambios tanto a nivel escolar y en otros ámbitos; es el elemento primordial para aumentar el desempeño en el aula. Según Tapia (1991) Hace parte de la motivación, que es un factor relevante que conlleva el éxito en cualquier área. Este autor afirma que: “querer aprender y saber son las condiciones personales básicas que permiten la adquisición de nuevos conocimientos y la aplicación de lo aprendido de forma efectiva cuando se necesita”. Para (Nieves 1993; Meza, 2012), “las actitudes hacia la matemática influyen, en el tiempo y el esfuerzo dedicados a trabajar cuestiones relativas a esa asignatura y esto, a su vez repercute en el rendimiento, la nota obtenida y una actitud positiva facilita el aprendizaje mientras que una actitud negativa lo dificulta” (p. 20) Otros autores como (Del Puerto & Minnaard, 2003; García, 2011), afirman que las actitudes hacia las matemáticas influyen en el aprendizaje matemático y consideran que los alumnos con actitudes positivas obtienen generalmente logros matemáticos superiores a los que alcanzan los alumnos con actitudes negativas; del mismo modo, un alumno con facilidad para esta disciplina disfrutará más que aquel que tiene problemas en su estudio (p. 67).

Con referencia a lo anterior, para que un estudiante obtenga un aprendizaje debe existir por parte de él buena disposición e interés, el rol del docente en cuanto a la motivación antes, durante y después del aprendizaje y la estimulación de las acciones logradas por el estudiante marcaran un ambiente positivo hacia nuevos aprendizajes.

2.2.2 Modelo de Van Hiele. El Modelo de razonamiento de Van Hiele nació de la necesidad de buscar soluciones a problemáticas que sucedían en el aula en la enseñanza-aprendizaje de la geometría. Finalizando la década de los cincuenta, Los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof publican sus investigaciones donde analizan y muestran sus hallazgos de la forma como los estudiantes desarrollan el razonamiento matemático, memorias que se pueden detallar en sus tesis doctorales (Van Hiele, 1957).

El modelo de Van Hiele está formado por dos grandes aspectos, Pastor (1993) describe la primera como descriptivo, ya que se identifica una secuencia de tipos de razonamiento, llamados “niveles de razonamiento” (p. 4) en esta parte el estudiante va progresando y mostrando la capacidad de razonamiento matemático desde que inicia su aprendizaje hasta alcanzar el máximo nivel de aprendizaje; el segundo aspecto del modelo da a los profesores las directrices de cómo deben guiar a los estudiantes para que puedan lograr llegar al nivel superior de razonamiento, Gutiérrez & Jaime (1998) lo denominan aspecto prescriptivo o “fase instructiva”, estas pautas se conocen con el nombre de “fases de razonamiento”, Sobre estos componentes se menciona; Salvador (1994) describe cuatro afirmaciones que sirven de resumen para caracterizar el Modelo de Razonamiento de Van Hiele:

1. Es posible encontrar diferentes niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes de Geometría (y, en general, de matemáticas).
2. Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.

> 3. Si una relación matemática no puede ser expresada de forma comprensible para el nivel de razonamiento actual de los estudiantes, es necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
> 4. No se puede enseñar a una persona a razonar mediante una determinada forma; sólo aprende a razonar mediante la propia experiencia. Pero sí se puede ayudar a esa persona, por medio de una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que adquiera lo antes posible la experiencia necesaria para que llegue a razonar de esa manera (p. 14).

El Modelo de Van Hiele hace énfasis a la existencia de diferentes formas de razonamiento en matemáticas, así que los docentes deben tener en cuenta la capacidad de razonamiento de sus estudiantes al decidir el rigor de sus clases (Salvador, 1994, p. 14).

Una manera de ayudar al estudiante a que perfeccione sus niveles de razonamiento acerca de un objeto matemático de estudio, es darle la posibilidad a que lo manipule desde varias perspectivas (con situaciones de la vida cotidiana que sean de su interés, con software que simule situaciones relacionadas, que le dé la posibilidad de construir y manipular las diferentes características del objeto de estudio) para que al final que el sujeto termine por hablar en el lenguaje que se requiere.

Para terminar Van Hiele señala que "no hay un método panacea para alcanzar un nivel nuevo pero, mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede predisponer a los estudiantes a su adquisición".

2.2.2.1 Niveles de razonamientos. Los niveles de razonamiento de Van Hiele son cinco, algunos investigadores hablan de cuatro niveles pero mencionan los niveles del cero al cuarto nivel. Se describirá el Modelo con los niveles de la misma forma que lo hacen algunos investigadores como Pastor (1993), Gutiérrez & Jaime (1998), Fouz & De Donosti (2005), Archer (2010), Vargas & Araya (2013), Hernández, Wilches & Robles (2015), Aravena, Gutiérrez & Jaime (2016).

Tabla 2. Características de los Niveles desde las perspectivas de los estudiantes

NIVELES	CARACTERISTICAS DESDE LAS PERSPECTIVAS DEL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES
Nivel I Visualización o Reconocimiento	1) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes. 2) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una ventana, etc) No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto. 3) No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo
Nivel II Análisis	1) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación. 2) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades no pueden elaborar definiciones. 3) Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades 4) Sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.
Nivel III **Ordenación o Clasificación**	Antes de señalar las características del nivel conviene señalar que, en el anterior nivel, los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes. Alcanzar este nivel significa que... 1) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren. 2) Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. 3) Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.
Nivel IV Deducción Formal	1) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. 2) Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. 3) Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado. Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, se tiene una visión globalizadora de las Matemáticas.
Nivel V Rigor	1) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías. 2) Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

Fuente: Fouz, F. & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. ¿Cambiarán las computadoras la forma de enseñar geometría? Sigma Revista de Matemáticas, 1(245), 92-102.

Sobre las propiedades generales de los niveles de razonamiento, Fouz & De Donosti (2005), Rodríguez (2016) describen algunas propiedades del Modelo de Van Hiele:

En primer lugar tenemos “la jerarquización y secuencialidad”: en la adquisición de los niveles: no es posible alterar el orden de la adquisición de los niveles de razonamiento. Un estudiante ha adquirido el razonamiento del nivel tres, necesariamente tiene que haber superado los niveles dos y uno. Van Hiele (1986, citado por Rodríguez (2016) expresa que “el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel” “Lo que es implícito en un nivel se vuelve explícito en el siguiente nivel”.

Fouz & De Donosti (2005) describe un esquematiza en una tabla para esclarecer esta idea:

Tabla 3. Elementos explícitos e implícitos entre los niveles de Van Hiele

Niveles	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
Nivel 2	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de las figuras y objetos
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades de las figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	Relación entre teoremas (sistemas axiomáticos)

En segundo Lugar tenemos *“El Lenguaje”* que es específico para cada nivel. “No se trata sólo de adquirir conocimientos matemáticos sino también mejorar y ampliar las capacidades referidas al lenguaje en cada nivel” Fouz, F. expresa que en este modelo el Test-entrevista, donde se da mucha importancia a que los estudiantes expliquen lo que saben y cómo lo saben.

La tercera propiedad es que el paso de nivel se hace de una manera *“continua discreta”* de una manera *“continua o discreta”*. La idea, eterno dilema, es si el salto es repentino o se hace de forma gradual. Nos parece lógico pensar que se hace de forma continua mediante pequeños saltos que conexos que nos darán el paso final de nivel. Esto está más de acuerdo con las teorías cognitivas modernas del aprendizaje que señalan cómo creamos esquemas significativos de pensamiento, mejores pero cercanos a los que teníamos, que se interconectan entre sí y que, a su vez, podemos reemplazar por otros nuevas más sencillos y prácticos que los anteriores.

Para construir o mejorar estos esquemas tiene mucha importancia la interacción alumno(a)-profesor(a). Lo señalado en el párrafo anterior (test entrevista) sería ya el punto de partida para conocer estos esquemas de pensamiento.

Aravena, Gutiérrez & Jaime (2016) describen las características de los procesos matemáticos de los primeros 4 niveles, se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 4. Características de los procesos matemáticos en cada nivel de razonamiento de Van Hiele

Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento y descripción	De atributos físicos	De propiedades matemáticas		
Uso de definiciones		Definiciones con estructura simple	Definiciones con cualquier estructura	Se acepta la equivalencia de las definiciones
Formulación de definiciones	Listado de propiedades	Listado de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Se demuestra la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusiva basada en atributos físicos	Inclusiva (exclusiva) si la estructura lógica es simple (compleja)	Inclusiva o exclusiva de acuerdo con las definiciones usadas	
Demostración		Empírica, verificación de ejemplos	Deductiva, abstracta, informal	Deductiva, abstracta, lógico - Formal

2.2.2.2 Fases de aprendizaje. Las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele serán tomadas de las descritas por autores cómo Fouz & De Donosti (2005) y Rodríguez (2016).

Tabla 5. Fases de enseñanza del modelo de Van Hiele

Fase 1a: PREEGUNTAS – INFORMACIÓN Se trata de determinar, o acercarse lo más posible, a la situación real de los alumnos/as. Se cumpliría la famosa afirmación de Ausubel: "Si tuviera que reducir toda la Psicología Educativa a un solo principio diría lo siguiente: el factor más importante que el influye en el aprendizaje es lo que el alumno/a sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia" (Ausubel, 1978). Está fase es oral y mediante las preguntas adecuadas se trata de determinar el punto de partida de los alumnos/as y el camino a seguir de las actividades siguientes. Se puede realizar mediante un test o preguntas individualizadas utilizando actividades del nivel de partida. Cabe señalar que muchas veces el nivel no lo marca tanto la pregunta coma la respuesta, es decir, diseñamos una pregunta pensando en un nivel concreto y, la respuesta recibida, nos puede señalar un nivel distinto del pensado inicialmente.
Fase 2a: ORIENTACIÓN DIRIGIDA Aquí es donde la importancia de la capacidad didáctica del profesor/a más se va a necesitar. De su experiencia señalan que el rendimiento de los alumnos/as (resultados óptimos frente a tiempo empleado) no es bueno si no existen una serie de actividades concretas, bien secuenciadas, para que los alumnos/as descubran, comprendan, asimilen, apliquen, etc las ideas, conceptos, propiedades, relaciones, etc que serán motivo de su aprendizaje en ese nivel.
Fase 3a: EXPLICACIÓN (EXPLICITACIÓN) Es una fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre alumnos/ as y en la que el papel del profesor/a se reduce en cuanto a contenidos nuevos y, sin embargo, su actuación va dirigida a corregir el lenguaje de los alumnos/as conforme a lo requerido en ese nivel. La interacción entre alumnos/as es importante ya que les obliga o ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás.
Fase 4a: ORIENTACIÓN LIBRE Aparecen actividades más complejas fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos, para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser de varias respuestas válidas conforme a la interpretación del enunciado. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más potente.
Fase 5a: INTEGRACIÓN. La primera idea importante es que, en esta fase, no se trabajan contenidos nuevos sino que sólo se sintetizan los ya trabajados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía. Como idea final podemos señalar como en esta estructura de actividades se pueden integrar perfectamente actividades de recuperación para los alumnos/as que presenten algún retraso en la adquisición de los conocimientos geométricos y, por otra parte, rehaciendo adecuadamente los grupos profundizar algo más con aquellos alumnos/as de mejor rendimiento Aunque no se ha explicitado las actividades de evaluación, también se integrarían fácilmente en esta estructura de actividades.

2.2.2.3 Evaluación en el modelo de Van Hiele. Fouz & De Donosti (2005) describe las que "la evaluación es una de las claves de este modelo ya que la asignación de niveles, el punto de partida para la didáctica, el seguimiento del avance en las fases, etc. debe hacerse con una evaluación adecuada". Como ya señalamos anteriormente el test-entrevista es la herramienta que se considera más útil para realizarla y, para ello se deben tener en cuenta algunas ideas previas, así apuntamos que:

1. El nivel de razonamiento de los alumnos depende del área de las Matemáticas que se trate.

2. Se debe evaluar cómo los alumnos contestan y el porqué de sus respuestas, más que lo que no contestan o contestan bien o mal.

3. En las preguntas no está el nivel de los alumnos/as sino que está en sus respuestas.

4. En unos contenidos se puede estar en un nivel y, en otros diferentes, en nivel distinto.

5. Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro puede resultar difícil determinar la situación real en que se encuentran.

2.2.2.4 El modelo de Van Hiele y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Resulta oportuno describir que el uso del Modelo de razonamiento de Van Hiele fue pensado para encaminar al estudiante hacia la comprensión de un objeto matemático, así lo expresa (Pastor, 1993; Van Hiele, 1986) donde da un ejemplo en el campo de la aritmética, cuando describe:

> La diferencia entre los objetos del segundo y el tercer niveles se pueden observar también por diferentes formas de escritura. El segundo nivel, los cálculos se basan en relaciones entre números concretos: $4 . 3 = 12,\ 6 + 8 = 14$. En el tercer nivel de pensamiento, se basan en generalización de resultados: $a\,x\,(b + c) = (a\,x\,b) + (a\,x\,c)$ (p. 5).

Gutiérrez & Jaime (1998) en uno de sus textos deja entrever que no solamente el modelo de razonamiento matemático es exclusivo para el estudio de los conceptos de la Geometría donde describe:

> Los niveles constituyen la aportación fundamental del modelo. Se establece que la forma como se conciben los conceptos geométricos (matemáticos) no es siempre la misma y varía cuando se va progresando en la comprensión de la geometría (de las matemáticas) (p. 27).

Archer (2010), menciona que este modelo además de ofrecer una forma interesante para identificar las características del razonamiento de un individuo o de un grupo, permite evaluar la calidad de razonamiento, comparte también “se puede utilizar en cualquier “conducta reflexiva” para evaluar los niveles de razonamiento o para facilitar el aprendizaje, para facilitar la enseñanza de las matemáticas” (p. 144).

Bedoya (2014) expresa que “la creación del modelo de van Hiele fue tomando auge con el paso de los años y se aplicó tanto a la Geometría cómo al Análisis Matemático” (p. 31).

Llorens Fuster, J. L., & Prat Villar, M. (2015) describen el modelo de una forma donde lo hacen en general para las matemáticas, describiéndolo de la siguiente manera:

> Existen distintos niveles de razonamiento de los estudiantes, referidos a las Matemáticas. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante sólo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento. Por tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que ese progreso se haga de un modo rápido y eficaz (p. 16).

Finalmente un aporte importante sobre el hecho de realizar esta investigación en el marco del modelo de Van Hile tiene que ver con que su base es constructivista, cómo lo expresa Cabello, (2013) donde se pone de manifiesto lo siguiente:

> Teniendo en cuenta que el modelo de Van Hiele se enmarca en una concepción constructivista del aprendizaje informada por la Gestalt, Hoffer (1983) presenta los niveles de pensamiento comparando dicho aprendizaje con un proceso inductivo en el que va aumentando el grado de comprensión:
>
> Los niveles de pensamiento que van unidos al aprendizaje de una materia particular son de naturaleza inductiva. En el nivel n-1 lo estudiado son ciertas versiones limitadas de los objetos. Algunas relaciones entre los objetos están establecidas de manera explícita; sin embargo existen otras relaciones posiblemente accesibles que no están explícitamente establecidas. En el nivel n los objetos estudiados son ahora los enunciados que fueron formulados explícitamente en el nivel n-1, además de aquellos enunciados que estaban solamente implícitos en el nivel $n-1$. En efecto, los objetos que hay en el nivel n consisten en extensiones de los objetos del nivel $n-1$
>
> Con esta diferenciación de niveles se pretende identificar los obstáculos que tienen los alumnos tanto a nivel de conceptos como de lenguaje. Si un alumno que está pensando en el nivel n-1 se enfrenta a un problema que requiere pensamiento del nivel n, será incapaz de comprenderlo (p. 43).

De esta manera el proyecto FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS queda fundamentado en un modelo de razonamiento matemático con base constructivista de la misma forma que es el modelo pedagógico de la institución. Después de lo anterior expuesto, realizar la interpretación del modelo de Van Hiele en un objeto matemático como la función, que no corresponde directamente a la geometría, es un referente para posteriores investigaciones.

2.2.3 Pensamiento variacional y sistemas algebraicos. El MEN en su documento los lineamientos curriculares de Matemáticas (LC) menciona al pensamiento variacional y sistemas algebraicos como uno de los 5 ejes de conocimientos básicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como uno de los logros para alcanzar en la educación básica.

El documento del MEN (1998) describe algunos núcleos conceptuales en los que está involucrada la variación cómo:

l. Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
2. la función como dependencia y modelos de función;
3. las magnitudes;
4. el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
5. modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.

Abordado así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas. Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas. Otros elementos a tener en cuenta para iniciar el estudio de función, es la tabla, herramienta necesaria para la comprensión de la variable, pues el uso de las filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que una variable puede tener un número infinito de valores de reemplazo. Otros elementos son el estudio de patrones que se debe iniciar desde la primaria.

Los contextos de la variación proporcional integran el estudio y comprensión de variables intensivas con dimensión, así como también ayudan al estudiante a comprender el razonamiento multiplicativo. Particularmente la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.

Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para "enlazar" patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) encapsulan modelos de variación como la proporcionalidad.

La introducción de la función en los contextos descritos prepara al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de los conjuntos en que se le define, así como a la relación establecida entre ellos. Es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica. A la conceptualización de la función y los objetos asociados (dominio, rango...) le prosigue el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, cuadrático, exponencial, priorizando en éstos el estudio de los patrones que los caracterizan (crecientes, decrecientes) (p. 50).

La calculadora gráfica se constituye en una herramienta didáctica necesaria para lograr este propósito. El uso o software de uso libre como Cabri Géomètre, CaRMetal, GeoGebra, Graph, o el uso de la calculadora de Microsoft o la calculadora científica son herramientas importantes para el estudio de funciones.

2.2.3.1 La función. Unos de los conceptos más importantes de las matemáticas es el concepto de función. La idea de función nace con las primeras observaciones de relaciones entre dos variables cuando civilizaciones como los babilonios y los egipcios realizaron las tablas de los cuadrados y cubos de los números naturales. En el Siglo XVII el matemático René Descartes mostró en sus trabajos de Geometría los conceptos de variable y función cuando realizó la clasificación de curvas algebraicas según sus grados (Sánchez, 2015, p. 70).

2.2.3.1.1 Desarrollo histórico de la función en los siglos XIX y XX. Vargas (2011) esboza los conceptos de función en esos momentos de la historia de los matemáticos más sobresalientes que contribuyeron al desarrollo de la misma, entre estos se tienen:

Fourier (1772 – 1837). Definía una función así: "Una función así: $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitraria". Esta definición contempla singularidades, pero considera que el dominio es numerable, ya que se trata de una sucesión.

Cauchy (1789 – 1857). Toma como punto de partida el concepto de límite, eliminando del concepto de función las referencias algebraicas, para fundamentarla sobre el concepto de correspondencia.

Lobachevski (1792 – 1856). Definía una función de la siguiente manera: "La concepción general requiere que una función de x sea definida como un número dado para cada x , variando gradualmente con x. El valor de la función puede ser dado bien por una expresión analítica o por una condición que aporta un modo de examinar todos los números y elegir uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir y resultar desconocida".

Dirichlet (1805 – 1859). Fue el primero en considerar la noción de función como una correspondencia arbitraria y restringió a un intervalo el dominio de una función. Definió una función de la siguiente forma: "y es una función de la variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además es irrelevante como se establece esa correspondencia". Dirichlet es el primero en mostrar una función que no está dada por una expresión analítica ni tiene una gráfica o curva que la represente.

Riemann (1826 – 1866). Realiza la distinción entre continuidad y diferenciabilidad. Sus trabajos aportaron puntos de vista nuevos sobre la teoría de las integrales elípticas, sobre el calor, la luz, la teoría de los gases, el magnetismo, la mecánica de fluidos y la acústica.

Weierstrass (1815 – 1897). Dio las primeras definiciones de límite en términos de ε y δ y de continuidad en un intervalo, mostrando que es continua en cada punto de ese intervalo. En 1861 planteó la construcción de una función continua que no es derivable en ningún punto, demostrando que era falso que todas las funciones continuas fueran derivables. La función de

Weierstrass contradecía la idea intuitiva de la mayor parte de sus contemporáneos que apuntaba a que las funciones continuas eran diferenciables excepto en 'puntos especiales'.

Cantor (1845 – 1918). Define una función como: “toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjuntos numéricos y no numéricos”.

Goursat (1858 – 1936). En 1923, dio la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día: “Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y, esta correspondencia se indica mediante la expresión $y = f(x)$

Bourbaki (1935 -). También formuló una definición de función como un conjunto de pares ordenados, “una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano ExF”. La forma de ver una función por Bourbaki difiere del punto de vista de Dirichlet en que el dominio y el codominio no están restringidos al conjunto de números reales (p. 10).

Jaimes (2012) cita a Stewart, 2008; Purcell, 2007; Hoffman, 2001 y Leithold, 1998 para referirse a las definiciones que se encuentran en diversos textos universitarios, sobre ellos describe:

> Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E (Stewart, 2008). Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto –denominado dominio- un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto (Purcell, 2007). Una función es una regla que asigna a cada objeto de un conjunto A, exactamente un objeto en un conjunto B. El conjunto A se denomina dominio de la función y el conjunto de objetos asignados en B se denomina Rango (Hoffman, 2001). Intuitivamente consideramos que una cantidad y es una función de otra cantidad x si existe una regla por medio de la cual se asigne un único valor a y para cada valor correspondiente de x (Leithold, 1988).

De esta manera se tienen diferentes definiciones de función incluyendo algunos que aparecen en textos para la educación de la básica de las matemáticas en estudiantes de secundaria y media de Colombia.

2.2.3.1.2 Sistemas de representación de la función. Ruiz (1998), citado en Jaimes 2012) menciona; siete concepciones que se resumen en distintas representaciones simbólicas usadas:

1. Identificación de regularidades: Desde la época prehelénica y durante varios siglos, se han asumido situaciones ligadas a los fenómenos naturales en cuyos estudios se incorporan magnitudes físicas que cambian. Se usan tablas para registrar medidas de cantidades, sobre las que se consiguen relaciones entre cantidades de magnitudes variables, que permiten identificar regularidades en fenómenos sujetos al cambio La invariante que se asocia a la caracterización de esta concepción es el establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa y efecto.

2. Razón o proporción: Desde la matemática Helénica, hasta los matemáticos como Oresme y Galileo, las proporciones se emplearon para establecer relaciones entre magnitudes variables del mismo tipo, pero posteriormente con la introducción de igualdades en el álgebra nace la posibilidad de formular una relación de dependencia entre variables. Se asocian situaciones relacionadas con magnitudes físicas, en particular en el campo de la geometría y la astronomía. Las invariantes que caracterizan esta concepción son las relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.

3. Gráfica (visión sintética): Debido a que en el siglo XIV, no se disponía aún de un continuo numérico para representar el movimiento, Oresme utiliza la continuidad de los segmentos para representar los cambios de la intensidad de magnitudes cualitativas y así poderlos describir, comparar y analizar la dependencia.

Las invariantes asociadas a esta concepción son la proporcionalidad entre magnitudes y la relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que describe la cantidad de una determinada cualidad en relación con otra de la cual depende.

4. Curva (analítico-geométrica): Esta concepción se da en situaciones que conectan problemas de la geometría y el álgebra (s. XVIII). Descartes estudia las ecuaciones a través del significado de la curva, mientras que Fermat estudia el comportamiento de estas y sus propiedades definidas por ecuaciones. Nace la geometría analítica y con ella una amplia gama de nuevas curvas. Se gesta la noción de dependencia entre dos cantidades variables.

En cuanto al método cartesiano, Descartes no habla de ejes, ni de abscisas, ni de ordenada. Para la representación de las curvas, escoge una recta en posición horizontal, señala en ella un punto fijo O; luego toma puntos en la curva y a cada uno de estos puntos asocia otro en la línea horizontal y analiza cómo cambia la distancia entre los puntos correspondientes respecto al punto fijo O. De esta manera, la posición de los puntos de la curva quedaba especificada por los números de las longitudes de los dos segmentos determinados.

Invariantes: Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva (Descartes).

5. Expresión analítica: Descartes reduce áreas y volúmenes al manejo de segmentos obteniendo expresiones básicas del álgebra, más tarde Euler habla de expresión analítica, y Lagrange la ampliará a toda expresión del cálculo. Esta concepción se da en situaciones meramente matemáticas así como en situaciones externas a las matemáticas como por ejemplo en problemas de astronomía y física relacionadas con el estudio del movimiento curvilíneo y las fuerzas que lo afectan, este estudio continúa con los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y Leibniz (s. XVII) en los inicios del cálculo infinitesimal y continúa con los trabajos de Bernoulli, Lagrange y Euler (s. XVII-XVIII).

Representación analítica (Leibniz, 1673): la representación analítica de (Leibniz, 1673): f $x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ Invariantes: se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas: "una función de una cantidad es una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes".

6. Correspondencia arbitraria: aplicación: La discusión del problema de la cuerda vibrante (s. XIX) crea la necesidad de una noción más general del concepto de función. Dirichlet (1805-1859) fue el primero en considerar la noción de función como una "correspondencia arbitraria" y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función. A partir de los trabajos de Dirichlet, el concepto de función adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica.

En cuanto a la representación, para simbolizar la función se emplea la expresión $f(x)$ o y. En las representaciones gráficas se emplean los ejes cartesianos, y aparecen los diagramas de Venn con fines didácticos.

Invariantes: Se llega a la noción de correspondencia arbitraria: Si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

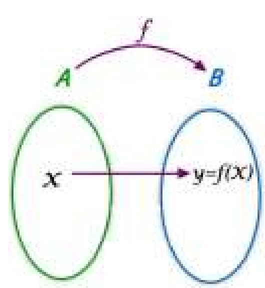
En el proceso de intervención en el aula se utilizarán tipos de representaciones como tabla de valores, diagrama sagital, diagrama cartesiano, fórmula o expresión algebraica.

2.2.3.1.3 La definición de función y sus elementos. Una función Es una regla o correspondencia entre dos conjuntos $A\ y\ B$, que asigna a cada elemento de A uno y sólo un elemento de B.

Generalmente, para nombrar una función se usan letras minúsculas como f, g, h, entre otras. Además se escribe $f\colon A \to B$ para indicar que la función se ha definido del conjunto de partida A, en el conjunto de llegada B.

Luego $si\ \boldsymbol{x} \in A, y\ \boldsymbol{y} \in B$, la expresión y = f(x), entonces se dice que $\boldsymbol{x}$ está relacionado con **y** mediante la función $f\ \ y\ se\ lee$ "$\boldsymbol{y}\ es\ igual\ a\ f\ de\ \boldsymbol{x}$".

A **y** se le denomina "La imagen de $\boldsymbol{x}$" mediante $\boldsymbol{f}$. La figura muestra la representación de una función f mediante un diagrama sagital. $A\ \boldsymbol{x}$ se le denomina **variable independiente** y a $\boldsymbol{y}$ se le denomina **variable dependiente** ya que el valor que toma depende del valor de $\boldsymbol{x}$.



Elementos de una función; En una función $f\colon A \to B$ se distinguen los siguientes elementos:

Dominio: conjunto de partida $(Dom\ f)$.

Codominio: conjunto de llegada. $(conjunto\ B)\ (Cod\ f)$.

Rango: Conjunto formado del codominio, que son la imagen de los elementos del dominio (Ran f).

Grafo: conjunto formado por todas las parejas ordenadas de la forma (x, y) tales que $x \in$ $Dom\ f$ y $y\ al\ Ran\ f$.

Representación de funciones: Para representar una función se puede utilizar la forma verbal, la fórmula, la tabla de valores y la gráfica.

Tabla 6. Tipos de representación de funciones tomados para este trabajo de investigación

Forma verbal: relación entre las variables que se realiza por medio de un enunciado, es decir, una descripción con palabras.
Fórmula: expresión algebraica de la función. Esta expresión se simboliza $y = f(x)$ donde x es la variable independiente $(V.I.)$ y representa los elementos de $Dom\,f$, y y es la variable dependiente $(V.D.)$ que representa los elementos de $Ran\,f$.
Tabla de valores: arreglo con dos filas, o dos columnas en la fila superior o primera columna se ubican los valores que toma la $V.I.$ y en la fila inferior o segunda columna se ubican los valores de la $V.D.$
Gráfica: diagrama sagital o diagrama cartesiano, en el cual se ubican los elementos del dominio en el eje horizontal y los elementos del codominio en el eje vertical.

Una función se puede representar con cualquiera de estas 4 formas, aunque en ocasiones se describe mejor de una forma que de otra.

Funciones de variable real: una función de variable real es aquella cuyo dominio y rango son el conjunto de números reales o subconjuntos de números reales. En la función d indicar todas las parejas ordenadas que constituyen una función real, por tanto se utiliza la fórmula $y = f(x)$ para referirse a estas funciones. La gráfica de una función real f es el conjunto de puntos (x, y) del plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la fórmula de la ecuación. Como no es posible representar todos los puntos en la gráfica de una función, entonces, solo se ubican algunos de ellos y se unen mediante un trazo, teniendo en cuenta los valores para los cuales la función está definida, es decir, que pertenezca al dominio de la función. De esta manera se obtiene el bosquejo de la gráfica de una función real.

Método gráfico para identificar funciones en un plano cartesiano. Para comprobar que una gráfica describe una función, se trazan líneas rectas verticales y se verifica que cualquier recta vertical corte la gráfica en máximo un solo punto. En el caso de que una recta corte a la gráfica en más de un punto, se afirma que la gráfica no corresponde a una función.

Tabla 7. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

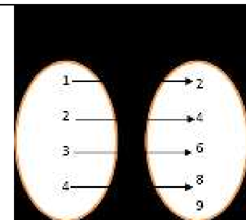
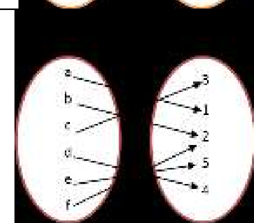
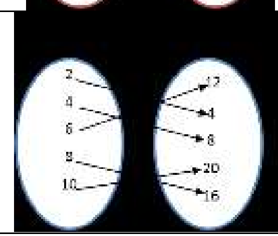
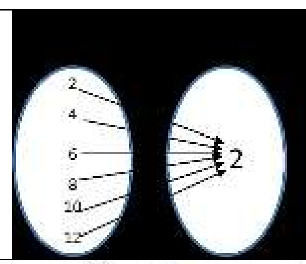
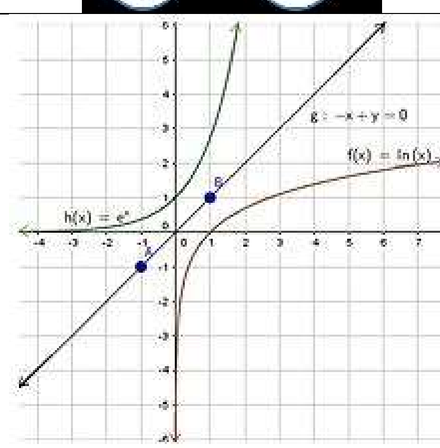
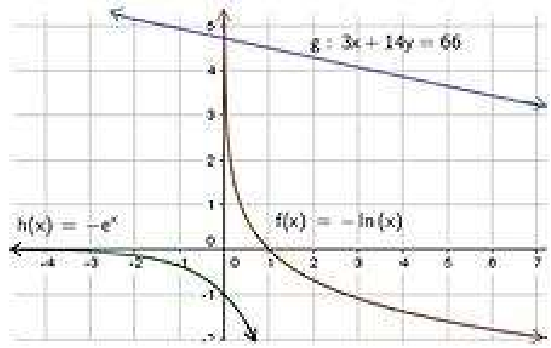
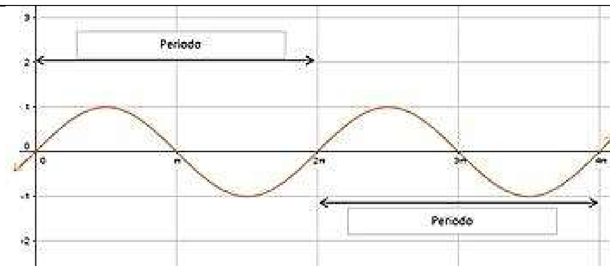
Función inyectiva o uno a uno: si a cualquier par de elementos distintos del dominio les corresponden imágenes distintas del conjunto de llegada. Si x_1 y x_2 $\in$ al dominio de $f(x),\ y\ x_1 \neq x_2,\ f(x_1) \neq f(x_2)$ *Prueba de la línea horizontal: un gráfico corresponde a una función uno a uno si al trazar líneas horizontales estas cortan la gráfica en un solo punto.	
Función sobreyectiva: si el rango de la función coincide con el codominio. Es decir, todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio. $Ran\ f(x) = Cod\ f(x)$	
Función biyectiva: si es inyectiva y sobreyectiva	

Tabla 8. Funciones constante, creciente, decreciente y periódica

Función constante: Una función $f(x)$ es constante en un intervalo I si para todo x_1, x_2 $\in$ al intervalo I, se cumple que si: $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$.	
Función creciente: Una función f(x) es creciente en un intervalo I, si para todo x_1, x_2 $\in$ al intervalo$I$, se cumple que: si $x_1 < x_2$, entonces $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) < \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$. A medida que crecen los valores del dominio, los valores del rango también crecen. En las gráficas se muestran 3 ejemplos de funciones crecientes.	

Función decreciente: Una función $f(x)$ es decreciente en un intervalo I, si para todo x_1, $x_2 \in$ al intervalo I, se cumple que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$. A medida que crecen los valores del dominio, los valores del rango disminuyen.	
Función periódica: Una función $f(x)$ es periódica si existe un número real T, llamado periodo, tal que para todo $x \in Dom\, f$ se cumple $f(x) = f(x+T)$. Gráficamente se puede determinar cuándo se observa que la gráfica muestra comportamientos iguales en intervalos del dominio diferentes.	

2.2.3.2 La función cuadrática como objeto de conocimiento. A continuación se describirán algunos aspectos importantes sobre el estudio de la función cuadrática como la revisión histórica del concepto y sus sistemas de representación semiótica, el concepto que se trabajó para los participantes, y los diversos elementos.

2.2.3.2.1 Revisión histórica de la función cuadrática. Mesa & Villa (2009 citado en Vivas, (2010) describen un rastreo histórico a través de fuentes primarias y secundarias. Estos autores sostienen que las nociones asociadas a lo "cuadrático" atravesaron por lo menos cuatro momentos: las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones. Vivas (2010), en su estudio La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina hace un recuento del concepto de función en diversas culturas.

El concepto de ecuación es uno de los más importantes del análisis matemático actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas. En Babilonia las "nociones cuadráticas" se encontraron asociadas a situaciones en donde el concepto de cuadrado tenía una concepción aritmética con ciertos niveles básicos de generalización.

En Grecia, los griegos marcaron un hito aún más especial en la construcción de las nociones cuadráticas. Se puede hablar en la cultura griega de dos aspectos: uno de carácter aritmético y el otro geométrico. Con respecto al primero, la escuela pitagórica establece razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones, haciendo una articulación con la geometría en relación con los números figurados. Se observa también en sus trabajos cierta captación de algunas variaciones y predicciones a través de pequeños incrementos. Por su parte, lo geométrico, tiene como representante a Euclides (330 a.C. - 275 a.C.) quien en los Elementos, en el libro I, ofrece una noción más estructurada del concepto de cuadrado. El cuadrado se da a conocer en los siguientes términos: "…entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es equilátero y equiángulo…" (Extraído del libro "Elementos. Libros I-IV". Euclides).

En su trabajo, Euclides evidencia los vínculos entre la aritmética y la geometría dado que la noción de cuadrado aparece como figura y área a la vez.

Como consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían reconocer la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. Esta limitación operacional junto a un deficiente sistema de numeración que utilizaba las letras del alfabeto para representar los números enteros, con la consiguiente dificultad para realizar las operaciones, impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes, por tanto los griegos tenían que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes. El abismo infranqueable que se había abierto entre número y magnitud continua impedía someter las magnitudes geométricas a manipulaciones algebraicas. En el Libro II de Los Elementos de Euclides, los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas. Con gran habilidad en la práctica geométrica, los griegos hicieron de su Álgebra Geométrica un poderoso instrumento para la resolución de ecuaciones, mediante el método de la aplicación de las áreas, de ascendencia pitagórica.

Por su parte, los árabes logran darle generalidad a sus procedimientos aritméticos recurriendo a la geometría para demostrar la validez de sus razonamientos. Esto supone un avance hacia la generalidad y permite evidenciar un obstáculo en la concepción de las raíces de una ecuación, ya que éstas eran referidas a segmentos y las cantidades negativas carecen de representación, aunque conocían por influencias hindúes el trabajo con los negativos.

En el recorrido histórico se puede determinar otro momento que cumplió un papel muy importante en la conceptualización de "lo cuadrático". En la cultura griega, llama particularmente la atención la formulación de las secciones cónicas realizadas por Apolonio (262 a.C. - 190 a.C.) quien las estudia aproximándose de una forma sorprendente al estudio de coordenadas. Para él las secciones cónicas eran por definición las curvas formadas por un plano que interseca la superficie de un cono. En su famoso libro Las cónicas se introdujeron términos tan familiares hoy en día como parábola, elipse e hipérbola.

De la literatura revisada se puede inferir que, de no ser por los pocos recursos conceptuales de los que disponía, Apolonio hubiese dado un paso importante hacia la creación de la geometría analítica. Es importante además el significado de "parábola" como equiparación, con lo cual se puede inferir entonces que la concepción cuadrática se refiere a un proceso también de conversión de áreas.

El siglo XVII se caracteriza por tratar de definir las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado, en x e y, por lo que el estudio de los lugares geométricos establece un puente entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones.

Las cónicas, y en particular la parábola, se consideran en la actualidad como referentes importantes de relaciones cuadráticas, sin embargo se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones de variación y cambio relativas al concepto de función.

Asimismo, es importante remarcar el continuo vínculo que existió entre las matemáticas y la física, en la cual se puede visualizar procesos de modelización asociados a la explicación de fenómenos de la naturaleza que se convierten en motivo para generar actividad matemática.

Galileo Galilei (1564-1642) realiza importantes aportes a la construcción epistemológica del concepto de "función cuadrática", que se encuentra vinculada de manera explícita a los procesos de modelización de los fenómenos de variación. Un elemento importante en su trabajo es la instauración del método experimental, que puede entenderse como una forma de modelización, con esto pretendía dar explicaciones a fenómenos de variación en la naturaleza.

Con Galileo se inaugura un gran momento para la consolidación del concepto de función cuadrática, estableciendo la ruptura en la concepción de parábola como figura para ser considerada como el resultado del comportamiento de algunas variables. Afirma que la parábola es un punto en movimiento por lo cual podría pensarse a las cónicas como objetos matemáticos que, en relación con el movimiento, permite identificarlas como el producto de la trayectoria de un cuerpo que se mueve de acuerdo a una ley, a un patrón o a una causa. Por lo tanto la gráfica se construye de acuerdo con la relación de la variación entre las cantidades. Así, por ejemplo, una gráfica de caída libre no puede comprenderse como la vertical respecto a la horizontal, sino que ésta debe considerar las variables en juego, en una relación de dependencia que las determina, siendo para este caso importante en la medida en que da cuenta de la variación (o razón de cambio).

Finalmente, se puede observar que el concepto de función como tal, es un concepto con raíces muy antiguas pero con una consolidación muy reciente. Uno de los primeros en cimentar formalmente al concepto de función es Isaac Newton (1643-1727). Este matemático y físico utiliza el álgebra simbólica y la geometría analítica para construir el cálculo diferencial. En su obra Los Principia se encuentra "lo cuadrático" asociado a fenómenos naturales con un carácter más funcional.

En el trabajo de Newton se observa que las situaciones cuadráticas se representan mediante una expresión algebraica para después interpretarse como puntos que relacionan dos magnitudes en una determinada cantidad. Una vez analizado el comportamiento de la curva construida por medio de una ecuación cuadrática, se puede distinguir un tipo de relación unívoca entre cantidades, que posteriormente fue llamada función cuadrática. (p. 169)

2.2.3.2.2 Sistemas de representación de la función cuadrática. Gómez & Carulla (1999) y Vivas (2010) describen cinco sistemas de representación relevantes para la descripción de la función cuadrática: Verbal, Simbólico, Gráfico, Geométrico y numérico. Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables. Según Vivas (2010) hace una descripción de los 5 sistemas de representación de la función cuadrática.

El sistema de representación verbal: es el que utiliza el lenguaje común para darnos una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional. Nos permite introducir el análisis fenomenológico de la función cuadrática. Esto es, la diversidad de fenómenos en los que este concepto está involucrado. Allí se encuentran fenómenos propios de la física (como la caída de cuerpos y la optimización de áreas), de la ingeniería (como las antenas parabólicas, las lámparas y los lentes) y propias de lo numérico. Es decir, este sistema tiene que ver con la manera cómo, a partir del lenguaje común, podemos representar funciones tanto del mundo real como del mundo de las matemáticas, para las cuales el modelo que las describe es la función cuadrática o conceptos ligados a ella.

En el sistema de representación simbólico: encontramos cuatro formas simbólicas (estándar, canónica, multiplicativa y de foco). Cada una de estas formas involucra una serie de parámetros que determinan características particulares de la función. Los parámetros se encuentran relacionados entre sí. Todas las características gráficas de la función cuadrática encuentran obviamente su expresión en este sistema de representación.

En el sistema de representación geométrico: es posible apreciar características de la función cuadrática. Allí aparecen diversos elementos, (puntos de intersección con los ejes, eje de simetría, vértice, crecimiento, concavidad, variaciones y períodos constantes, máximos, mínimos, etc.) que permiten apreciar el papel de los parámetros mencionados en el párrafo anterior.

El lenguaje gráfico en general: constituye una forma de conocimiento y de transmisión de la información y dentro de este lenguaje, las gráficas cartesianas son un excelente instrumento para expresar la dependencia entre dos variables. El conocimiento de este lenguaje, es decir, la capacidad para leer, interpretar y construir gráficas cartesianas, permite establecer la relación existente entre las dos magnitudes representadas, pero al mismo tiempo su conocimiento es un instrumento a través del cual pueden construirse nuevos conceptos como la idea de variación de una función (intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes, etc.).

En el sistema de representación geométrico: es posible apreciar características de la función cuadrática desde la perspectiva de la construcción geométrica de la parábola. Esta construcción se puede hacer en el plano o en el espacio, siendo ésta última la construcción que da origen a todas las cónicas. En este sistema de representación se identifican otros elementos que aportan a la descripción del objeto.

Aunque la representación numérica es muy utilizada en las matemáticas escolares, su carácter discreto restringe la descripción de un objeto visto desde la dimensión funcional. En este sistema trabajamos con los valores numéricos de la función. Se pueden representar los valores de distintas formas: por un lado dándole valores específicos a x, como por ejemplo, aquellos en donde se anula la función, la imagen da cero, etc. y por el otro, a través de tablas de valores.

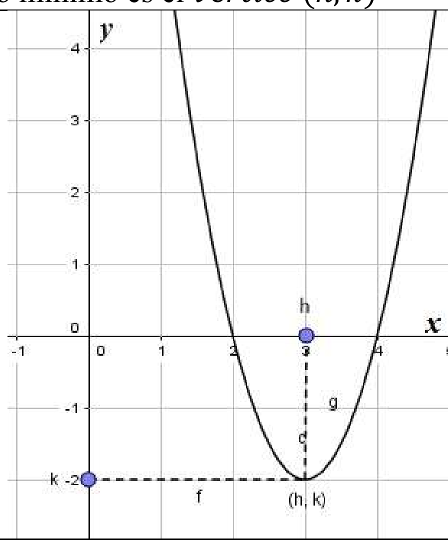
El aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro.

2.2.3.2.3 Definición y elementos de la función cuadrática

Definición. Una función cuadrática es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b\ y\ c\ \in\ \mathbb{R}\ y\ a\ \neq\ 0, c$ es el término independiente. A las funciones también se les denomina funciones de segundo grado.

Gráfica de la función cuadrática y sus elementos. La representación cuadrática de una función cuadrática es una curva llamada parábola, la cual se puede abrir hacia arriba o hacia abajo. Si la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que a > 0, la parábola abre hacia arriba. En cambio, si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ se cumple que a<0 la parábola abre hacia abajo.

Cuando una parábola abre hacia arriba el punto mínimo es el $vértice\ (h, k)$	Cuando una parábola abre hacia abajo el punto máximo es el $vértice\ (h, k)$



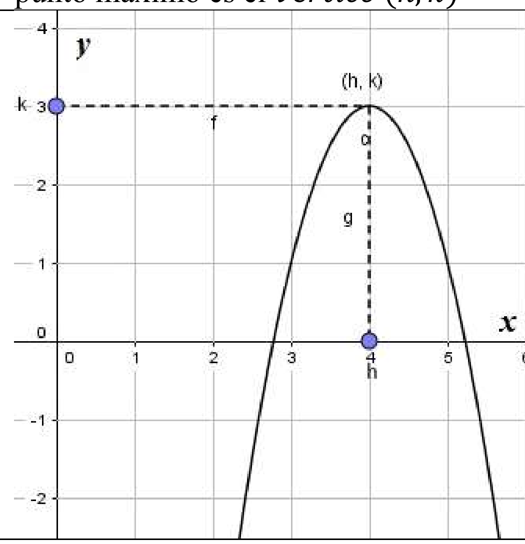


Figura 6. Vista de la concavidad de la función cuadrática

Vértice: Las coordenadas del vértice V se representan (h, k) y se determinan mediante las expresiones $h = \frac{-b}{2a}$ y $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

El Dominio: de una función cuadrática es el conjunto de los números Reales: $\mathbb{R}\ = (-\infty, \infty)$.

El rango: se decide luego de obtener el vértice. V=(h, k). Si a>0 entonces la parábola tiene punto mínimo y el rango es [k, ∞). Si a<0 entonces la parábola tiene punto máximo y el rango es $(-\infty, k]$.

Eje de simetría: La recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola se denomina ele de simetría y se representa como $x = h$.

Intercepto con el eje x: se halla reemplazando $y = 0$.

Intercepto con el eje y: se halla reemplazando $x = 0$ en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, en este caso $y = c$.

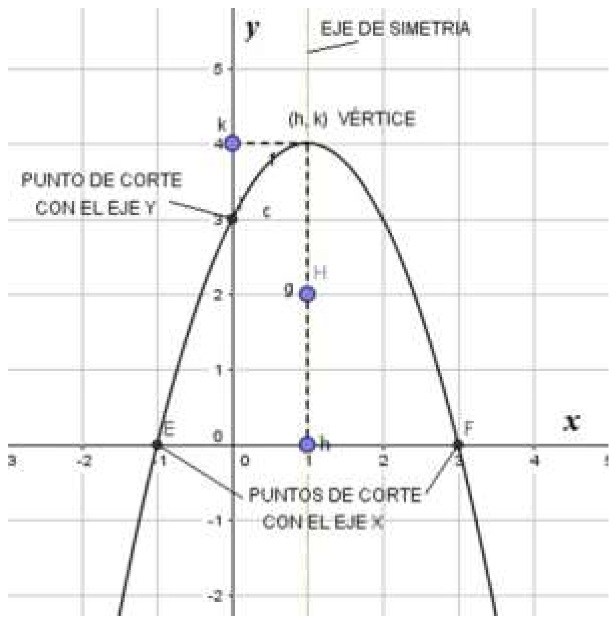


Figura 7. Elementos de la función cuadrática

Tipos de gráficas de las funciones cuadráticas. Según los valores de a, b, c en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, hay cuatro casos que se pueden tener en cuenta para graficar una función cuadrática: $f(x) = ax^2$, $f(x) = ax^2 + c$, $f(x) = ax^2 + bx$ y $f(x) = ax^2 + bx + c$

Caso1: $f(x) = ax^2,\ b = 0\ y\ c = 0$. Las parábolas de esta forma tienen como vértice el punto (0,0) y el eje de simetría es el $eje\ Y$.

* Tienen como vértice (0,0), $V = (h, k) = (0,0)$

* Eje de simetría es el $eje\ Y$, x=0

* Si $a > 0$ abre hacia arriba

* Si $a < 0$ abre hacia abajo

* Si $|a| > 1$ es más estrecha

* Si $0 < |a| < 1$, la parábola es más ancha

*Caso 2***.** $\mathrm{f(x) = ax^2 + c, \ b = 0.}$

* Tienen como vértice $(0, c)$ $V = (h, k) = (0, c)$

* Eje de simetría es el $eje\ Y$, $x = 0$

*S$i\ c > 0$ Traslación hacia arriba

* Si $c < 0$ Traslación hacia abajo

*Caso 3***.** $f(x)=ax^2 + bx, \quad c=0$

* Tienen como vértice $\mathrm{V = (h, k)}$ $\mathrm{h = \frac{-b}{2a}}$ $\quad \mathrm{k = f(h) = f\left(\frac{-b}{2a}\right)}$

* Eje de simetría es el eje y $\mathrm{x = \ h = \frac{-b}{2a}}$

Caso 4. $f(x) = ax^2 + bx + c$

La gráfica se obtiene trasladando c unidades la gráfica $\mathrm{f(x) = ax^2 + \ bx}$. Cuando $\mathrm{c > 0}$, la traslación es hacia arriba y cuando $\mathrm{c < 0}$ la traslación es hacia abajo.

Ceros, raíces o soluciones de una cuadrática. Los ceros, raíces o soluciones de una función cuadrática son los puntos de corte de la parábola con el eje x. Dependiendo de que los puntos de corte existan o no existan, se presentan tres casos:

Caso 1. La parábola corta el eje x en un solo punto. En este caso, se dice que la función tiene una sola raíz real y está ubicada en el vértice.

*Caso 2***.** La parábola corta el eje x en dos puntos En este caso, se dice que la función tiene dos raíces reales y está ubicada en el vértice.

Caso 3. La parábola no corta el eje x la función no tiene solución en los números reales. Sus raíces y ceros son números complejos.

La siguiente figura ilustra ejemplos de cada caso:

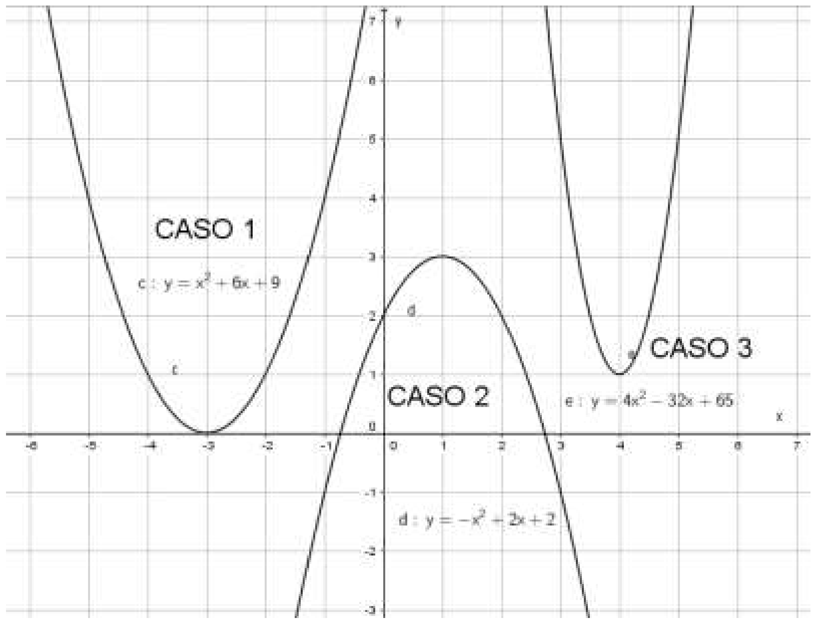


Figura 8. Casos de las raíces de la función cuadrática

La ecuación cuadrática. *Es una ecuación de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$*, con a, b, c* $\in \mathbb{R}$ *y a≠0.* Se clasifican en **incompletas** y **completas** dependiendo de los valores de b y c. Resolver una ecuación cuadrática significa encontrar el valor o los valores de las incógnitas que hacen verdadera la igualdad.

Gráficamente, la solución de una ecuación cuadrática corresponde a los puntos de corte si los hay, de la parábola con el eje x.

Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas. Toda ecuación cuadrática puede tener dos raíces reales diferentes, dos raíces complejas diferentes o una sola real

Ecuaciones de la forma. $ax^2 = 0$ Este tipo de ecuaciones se resuelven así:

- ax^2 =0 Ecuación dada
- ax^2=0 se divide entre a

- $x = 0$

Por tanto, todas las ecuaciones de esta forma tienen como solución única $x = 0$

Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$**.** Para resolver ecuaciones cuadráticas que tengan esta forma se realizan los siguientes pasos:

- $ax^2 + bx = 0$
- $x(ax + b) = 0$ se factoriza
- $x = o$ ó $ax + b = 0$ se iguala a cero cada factor
- $x_1 = 0$ ó $x_2 = \frac{-b}{a}$ se resuelve la ecuación

Este tipo de ecuaciones tienen dos soluciones diferentes

$x_1 = 0$ ó $x_2 = \frac{-b}{a}$ se resuelve la ecuación.

Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$**.** Para resolver ecuaciones cuadráticas que tengan esta forma se realizan los siguientes pasos:

- $ax^2 + c = 0$ecuación dada
- $ax^2 = -c$se resta c a ambos lados de la igualdad
- $x^2 = -\frac{c}{a}$ se divide entre a ambos lados de la igualdad
- $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ se extrae raíz cuadrada, Por tanto, estas ecuaciones tienen dos soluciones

x_1=$\sqrt{-\frac{c}{a}}$ y x_2= - $\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Solución de ecuaciones cuadráticas completas. Una ecuación cuadrática completa, es decir de la forma $ax^2+bx+c=0$, con a, b, c ∈ $\mathbb{R}$ y $a\neq0$, se puede resolver utilizando algunos métodos de factorización, completando cuadrados o por la fórmula general.

Solución por factorización:

- Se organiza la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$
- Se factoriza si es posible el trinomio $ax^2 + bx + c = 0$y se iguala a cero cada factor

Se resuelve cada ecuación lineal para hallar las soluciones

Solución completando cuadrados:

- Se organiza la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$
- Se resta c en ambos lados de la igualdad $ax^2 + bx + c = 0$, con la cual se obtiene la expresión $ax^2 + bx = -c$
- Se divide por $\boldsymbol{a}$ en ambos miembros de la igualdad
- $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$
- Se suma a ambos lados de la ecuación el término $\left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^{\mathbf{2}}$, luego se factoriza el trinomio cuyo término es x^2, se resuelve la potencia y se suman las fracciones.

Se extrae la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación y se despeja x.

Solución por fórmula general: Completando cuadrados se puede deducir una fórmula general para hallar las raíces de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Se deduce la expresión $\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$

Donde obtenemos dos soluciones:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{-\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{x}_2 = \frac{-\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

Naturaleza de la función cuadrática. Una ecuación cuadrática puede tener dos soluciones reales, una solución real o dos soluciones complejas diferentes. Para determinar qué tipo de soluciones tiene una ecuación cuadrática, se toma la fórmula general o fórmula cuadrática.

$$x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Luego, se analiza el discriminante, de la ecuación que corresponde a la expresión $b^2 - 4ac$. Dependiendo del valor del discriminante, se puede analizar cómo son las soluciones de la ecuación cuadrática según los siguientes tres casos:

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes. En este caso la gráfica de la función tiene dos puntos de corte con el eje x.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución que corresponde a un número real. En este caso la gráfica de la función tiene un punto de corte con el eje x.

Si $b^2 - 4a < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas diferentes. En este caso la gráfica de la función no tiene puntos de corte con el eje x.

Diferentes registros simbólicos algebraicos de la función cuadrática. Mencionaremos dos formas, que se describen en Gómez & Carulla (1999, p. 29) donde presentan las formas simbólicas más utilizadas por los docentes en el distrito capital.

Forma normal $f(x) = ax^2 + bx + c$. Representa las formas descritas sobre los casos de las familias de las funciones cuadráticas, donde $a, b\ y\ c\ \in \mathbb{R}\ y\ b \neq 0$. Donde el vértice $V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$, que partiendo de la forma normal $f(x) = ax^2 + bx + c$, y completando cuadrados se transforma hasta tomar la forma $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, donde se obtiene los valores de $h = \frac{-b}{2a}$ y $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

2.2.4 Las Tic en la educación. Las tecnologías de la información y las comunicaciones revolucionaron la enseñanza aprendizaje, El MEN (2013) en su documento *competencias TIC para el desarrollo profesional docente* explica las políticas de innovación de Colombia y da la respuesta a la presunta ¿cuál es el papel de las TIC en la innovación educativa? Y expresa:

> Al preguntarnos acerca de lo que es un ambiente innovador de aprendizaje, seguramente nos viene a la mente un aula en donde se utilizan las TIC; y aunque esta es una posible interpretación, es importante no hacer énfasis en esa idea y optar en cambio por una perspectiva más amplia e integral en la cual los estudiantes desarrollan pensamiento crítico, autónomo y creativo mediante el trabajo en equipo y por supuesto, con la utilización de las nuevas tecnologías.
>
> La innovación involucra la generación de ideas que pueden ocasionar mejoras en los procesos educativos pero que no necesariamente está vinculada con algún tipo de tecnología. Entonces, ¿por qué formar para la innovación educativa con el uso de TIC? Por un lado, la reciente digitalización del mundo, producto del desarrollo y popularización del computador y el Internet, ha cambiado el modelo de distribución de la información y ha dado lugar a la Sociedad del Conocimiento donde las ideas y sus aplicaciones cobran cada vez más valor y las interconexiones entre lugares, personas, economías y disciplinas se hacen cada vez más evidentes. Este mundo globalizado demanda nuevos saberes (p. 18).

Ante la aceleración de las tecnologías de la información y las comunicaciones ha hecho que los gobiernos generen políticas educativas encaminadas a generar cambios importantes. La UNESCO (2004) entre sus recomendaciones planteó:

> Invertir más en una educación de calidad para todos, a fin de garantizar la igualdad de oportunidades…. El acceso a la educación y calidad de esta deben concebirse como necesidades y derechos interdependientes e inseparables; la educación debe preparar a los educandos para afrontar los desafíos del siglo XXI y Multiplicar los lugares de acceso comunitario a las tecnologías de la información y la comunicación, para facilitar la comunicación entre redes.

Las TIC ha hecho que docentes y estudiantes encuentren recursos para mediar en la enseñanza y los aprendizajes. Poco a poco se ha venido afianzando los diferentes recursos que son creados bajo el lenguaje de programación Java, y de fácil acceso. La mayoría de ordenadores tienen instalado este programa que permite la visualización de los applets que muchos investigadores y autores publican en diversas páginas web educativas, algunos con acceso en línea, otros cómo los recursos de GeoGebra que permiten descargarse y copiarlos en los ordenadores.

2.2.4.1 GeoGebra (GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone). GeoGebra es un software de uso libre, dinámico que permite un ambiente agradable tanto para el estudiante como para el profesor, sus autores Hohenwarter & Fuchs (2004), quienes inician el diseño de un software donde se pudiera combinar de forma dinámica la geometría, álgebra y cálculo la definen a GeoGebra como:

> Un programa interactivo de geometría, que también ofrece posibilidades algebraicas como entrar directamente ecuaciones. Está dirigido a estudiantes (de 10 a 18 años) y los maestros de las escuelas secundarias. El programa anima a los estudiantes a acercarse a las matemáticas de forma experimental. Por ejemplo, es posible investigar los parámetros de la ecuación de un círculo arrastrando el círculo con el ratón. Por otro lado, los estudiantes también pueden manipular directamente la ecuación y ver el círculo modificado en el cuadro geometría (p. 2).

El protocolo de construcción de GeoGebra permite volver a hacer construcciones en cualquier momento, insertar nuevos elementos e incluso cambie su orden en retrospectiva. Siempre que los estudiantes están entrando o eliminar las expresiones que deben estar al tanto de las dependencias funcionales.

Según Hohenwarter, M., & Fuchs, K. "Los objetos básicos en GeoGebra son puntos, vectores, segmentos, polígonos, líneas rectas, todas las secciones cónicas y funciones en x. Con GeoGebra se pueden hacer construcciones dinámicas como en cualquier otro sistema de geometría dinámica. Estas construcciones se pueden alterar de forma dinámica, arrastrando los objetos libres. Además, es posible introducir coordenadas de puntos o vectores, ecuaciones de líneas, secciones cónicas o funciones y números o ángulos directamente.

Por lo tanto, desde el principio el software ha sido diseñado para el uso en las escuelas. El tratamiento de los problemas no debe verse afectada por las traducciones causada por el sistema. Manipulaciones, debería ser posible de una manera familiar. Se han hecho grandes esfuerzos para permitir la entrada en la notación de la escuela: Por ejemplo, una línea de g puede introducirse como $g\colon 3x + 4y = 7$ o un círculo c como $c\colon (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$."…

GeoGebra es un software de uso libre. Su página web oficial es www.geogebra.org accediendo a ella se muestra en su página de inicio sus recursos creados por sus usuarios, iniciar

GeoGebra en line y su link de descargas del software para Tabletas, para celulares y computador de escritorio.

En la siguiente figura se pueden observar los diferentes elementos del triángulo, donde podemos determinar una cantidad de conceptos matemáticos aplicados que no son tan fáciles de explicar en el pizarrón. Esta fue diseñada para ser presentada en un trabajo en el seminario de Tendencias de la educación del siglo XXI a la UNAB en Agosto de 2015.

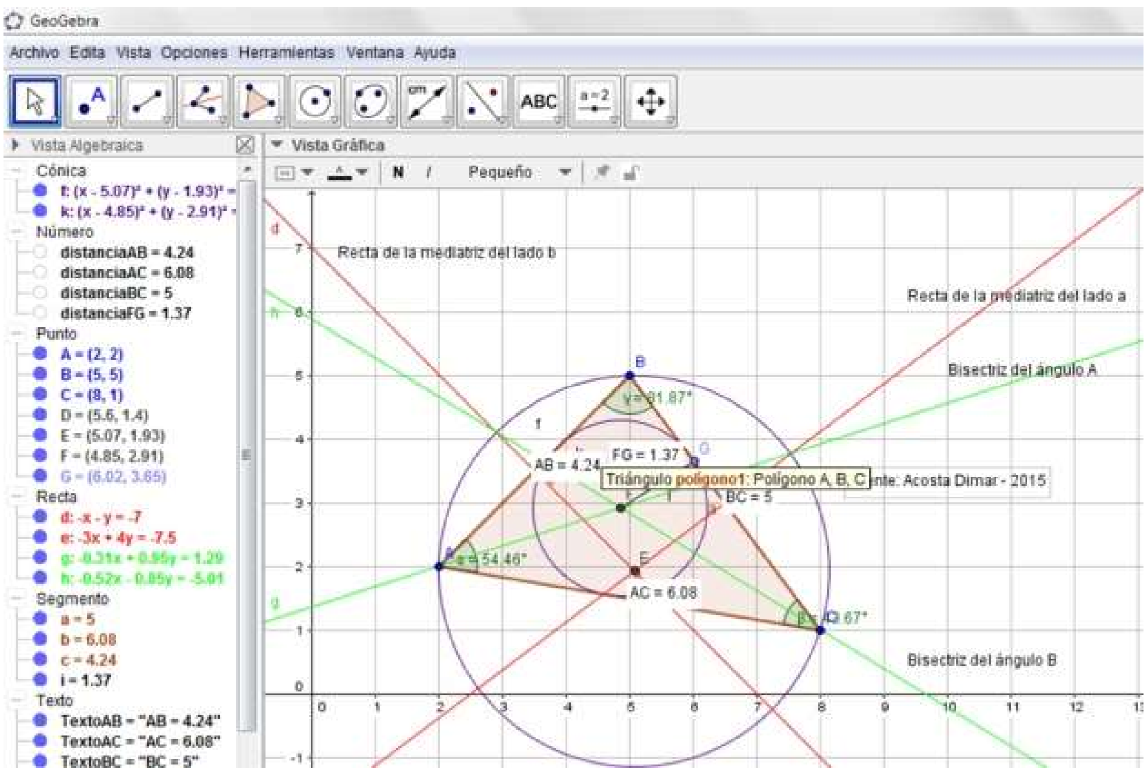


Figura 9. Vista de diferentes elementos de un triángulo con sus líneas notables usando el recurso Geogebra

Fuente: Autor del Proyecto.

2.2.4.2 Geogebra cómo herramienta didáctica. Ruiz & Villa (2013) afirman que:

> GeoGebra puede asumirse como una herramienta didáctica, puesto que es un elemento físico o simbólico que, dentro del aula de clase, provee de cierta ventaja al maestro para la presentación de una temática particular, y que a la vez le proporciona al estudiante una forma de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados en el estudio de ciertos conceptos procedimientos (p. 448).

En sus conclusiones "las herramientas como el Software GeoGebra son recursos útiles en el aula de clases de Matemáticas, ya que permiten que los estudiantes muestren a través de la puesta en práctica de aquellos conocimientos previos lo que han logrado interiorizar hasta el momento".

García (2011) expresa en una síntesis a través de una figura (características de Geogebra asociadas al desarrollo de actitudes matemáticas) los atributos de GeoGebra con sus ventajas, siendo esta parte de su conclusión en uno de sus objetivos.

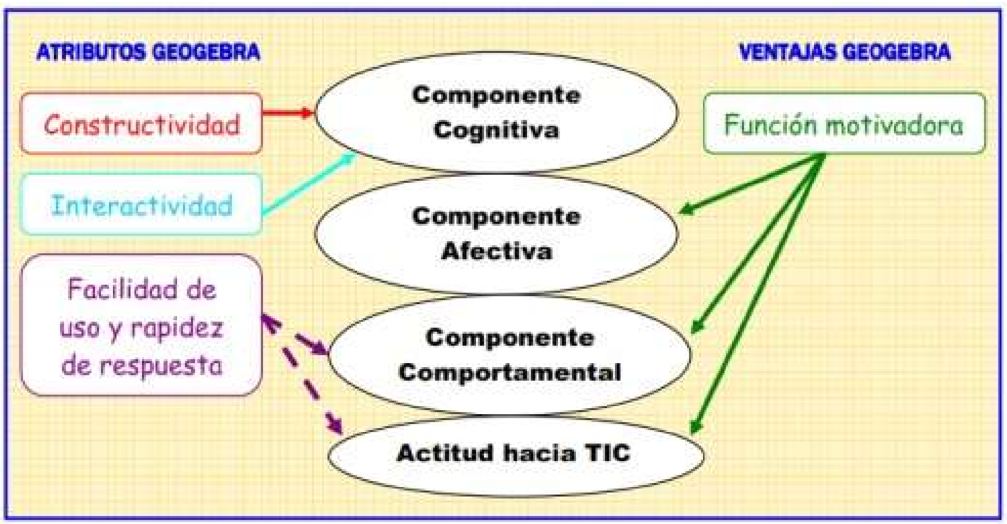


Figura 10. Atributos y ventajas de GeoGebra

Fuente: García, M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. Tesis doctoral, Almería, Universidad de Almería.

Tomando como base de las consideraciones anteriores, y resumiendo la experiencia con el grupo de participantes, GeoGebra se mostró como un recurso didáctico, práctico, entendible que motiva el aprendizaje de las matemáticas, mostrándose en el presente trabajo como una herramienta donde se evidenció en sus participantes concentración, interés en abordar actividades planteadas, facilidad en el manejo del software, un ambiente agradable de aprendizaje, entre otros.

2.3 Marco Legal

El Ministerio de Educación nacional (MEN) ha hecho diferentes esfuerzos para incentivar el mejoramiento de las prácticas de aula en áreas del conocimiento cómo matemáticas, lenguaje ciencias sociales y ciencias naturales, desde su introversión como miembros del proceso de enseñanza aprendizaje, fortaleciéndolo a través de programas como todos aprender 2.0, supérate con el Saber, Ser pilo Paga, becas de excelencia docente, todo con el ánimo mejorar la calidad educativa y estar acordes a los cambios de la educación del siglo XXI.

La Ley 115, Ley General de Educación es la carta de navegación de todo lo que tiene que ver con educación en Colombia, entre sus disposiciones preliminares en el Artículo 1o. Objeto de la ley, dice "La educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes". Esta Ley en sus artículos 21, 22 y 23 se establecen los objetivos para cada uno de los ciclos de enseñanza de las matemáticas, y sus otras áreas obligatorias (Ministerio de Educación Nacional, 1994).

La ley 715 de 2001 donde se dictan las normas orgánicas para organizar la prestación de los servicios de educación y otros, en su artículo 5 explica las competencias de la nación relacionadas con la prestación de servicio público de la educación en sus niveles preescolar, básico y media, en el área urbana y rural, en cuyo contenido explica:

[…] la necesidad establecer las normas técnicas curriculares y pedagógicas para los niveles de educación preescolar, básica y media, sin perjuicio de la autonomía de las instituciones educativas y de la especificidad de tipo regional, definir, diseñar y establecer instrumentos y mecanismos para la calidad de la educación, entre otros.

El MEN, C. (1998) con el documento Los lineamientos curriculares de matemáticas, que sustenta el área de conocimiento con el objeto de fomentar su estudio y apropiación, estos proporcionan orientaciones, horizontes, guías y recomendaciones para la elaboración de planes y programas por parte de las instituciones educativas, buscando el respeto a la diversidad multicultural y étnica del país pero garantizando el preservar el principio de la unidad como nación […] (Ministerio de Educación Nacional, 1998) en sus apartes se detallan los conocimientos básicos distribuidos en sus pensamientos matemáticos, Los proceso generales presentes en la actividad matemática, y el contexto de cómo debe ser la evaluación.

Los contenidos matemáticos se constituyen en herramientas para desarrollar en otros pensamientos cómo también se describen el documento del MEN (2006) los estándares básicos de competencias (EBC), que describen cinco pensamientos matemáticos: Pensamiento numérico y los sistemas numéricos, Pensamiento espacial y los sistemas geométricos, Pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas, Pensamiento aleatorio o sistemas de datos, Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos

Estos pensamientos matemáticos están inmersos en los diseños curriculares que se han propuesto para cada grado de básica primaria, secundaria y media. Cabe aclarar que los pensamientos deben ser desarrollados a partir de los procesos generales donde en documento del MEN (EBC) los nombra como las competencias matemáticas, en el documento propone las siguientes competencias que también contempla los Lineamientos curriculares publicados por el MEN, son: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

Las TIC como agente mediador para el aprendizaje, aporta en innovación y formación a los educandos, en ese sentido El Ministerio de Educación Nacional (MEN) a través de los Lineamientos curriculares (LC) ha establecido las orientaciones generales, y criterios nacionales sobre el cur1rículo de las matemáticas, con nuevos enfoques para comprenderlas y enseñarla. En el documento se afirma que:

> Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar. El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra. Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar. El uso efectivo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes. Los cambios que se han venido dando en cuanto al uso de la tecnología, hacen que de alguna manera cambie la didáctica para la enseñanza de las matemáticas (1998, p. 18).

Nuestra sociedad actual exige educación adaptada a los cambios tecnológicos, de esta manera las políticas de innovación en Colombia a través de leyes y decretos, algunos que nombraremos a continuación.

En la Ley de Ciencia y tecnología 1286 de 2009 se propone que promover la calidad de la educación, en los niveles de media, técnica y superior para estimular la participación y desarrollo una nueva generación de investigadores, emprendedores, desarrolladores tecnológicos e innovadores, es una de las bases para la consolidación de una política de Estado en ciencia, tecnología y sociedad.

Plan Decenal de Educación 2006-2016: definido como pacto social de derecho a la educación, cuya finalidad es servir de ruta y horizonte para el desarrollo educativo del país. En este plan se establecen como desafíos de la educación en Colombia, entre otros:

Renovación pedagógica y uso de las TIC de la educación, a través de la dotación de infraestructura tecnológica, el fortalecimiento de procesos pedagógicos, la formación inicial y permanente de docentes en el uso de las TIC, innovación pedagógica e interacción de actores educativos.

Ciencia y tecnología integradas a la educación; mediante el fomento de una cultura de la investigación, el fortalecimiento de política pública, la formación del talento humano y la consolidación de la educación técnica y tecnológica.

3. Diseño Metodológico

3.1 Tipo de Investigación

Para el inicio de este proceso se seleccionó el tipo de investigación necesario como punto de partida para la realización de la observación y análisis de las diferentes situaciones que rodean al aula de clase, el rol del maestro, el estudio del contexto, las dificultades de los participantes, entre otros, con el fin de dar solución a las realidades encontradas, el tipo de investigación seleccionado se detalla a continuación:

Investigación cualitativa. Se enfoca en comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto, Hernández Sampieri, et al. (2010) refiere al estudio de los diferentes situaciones de la vida diaria de los participantes que penetra a través de los sentidos, y explorando el medio que nos rodea profundizando en sus experiencias (p. 364).

Esta investigación fue diseñada bajo un enfoque cualitativo, y se sustenta a través de: las observaciones en el aula de clase, plasmadas en el diario pedagógico, las opiniones o participaciones realizados por los participantes de manera directa, el análisis de resultados en pruebas tanto externas como internas realizadas por los estudiantes, de la prueba diagnóstica y de la prueba final entre otras.

Entre los diseños metodológicos cualitativos se ha seleccionado para esta investigación la investigación-acción, que se utilizará para estudiar los avances y características en este caso en el campo educativo y más exactamente en las matemáticas. Elliott (2000) define la investigación acción como:

> el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma, su objetivo consiste en proporcionar elementos que sirvan para facilitar el juicio práctico en situaciones concretas y la validez de las teorías e hipótesis que genera no depende tanto de pruebas "científicas" de verdad, sino de su utilidad para ayudar a las personas a actuar de modo más inteligente y acertado la investigación acción se convierte en una oportunidad para ayudar a los estudiantes a identificar sus problemáticas de aprendizaje y buscar alternativas de solución (p. 88).

El autor también refiere algunas características de la investigación acción que se enumeran a continuación:

> 1. La investigación-acción en las escuelas analiza las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas por los profesores como:
> (a) inaceptables en algunos aspectos (problemáticas);
> (b) susceptibles de cambio (contingentes),
> (c) que requieren una respuesta práctica (prescriptivas).
> 2. El propósito de la investigación-acción consiste en profundizar la comprensión del profesor (diagnóstico) de su problema.
> 3. La investigación-acción adopta una postura teórica según la cual la acción emprendida para cambiar la situación se suspende temporalmente hasta conseguir una comprensión más profunda del problema práctico en cuestión.
> 4. Al explicar "lo que sucede", la investigación-acción construye un "guión" sobre el hecho en cuestión, relacionándolo con un contexto de contingencias mutuamente interdependientes, o sea, hechos que se agrupan porque la ocurrencia de uno depende de la aparición de los demás.
> 5. La investigación-acción interpreta "lo que ocurre" desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema, por ejemplo, profesores y alumnos, profesores y director.
> 6. Como la investigación-acción considera la situación desde el punto de vista de los participantes, describirá y explicará "lo que sucede" con el mismo lenguaje utilizado por ellos.
> 7. Como la investigación-acción contempla los problemas desde el punto de vista de quienes están implicados en ellos, sólo puede ser válida a través del diálogo libre de trabas con ellos.
> 8. Como la investigación-acción incluye el diálogo libre de trabas entre el "investigador" (se trate de un extraño o de un profesor/investigador) y los participantes, debe haber un flujo libre de información entre ellos (p. 6).

El ciclo básico de actividades de la investigación-acción es la representada por Kemmis (citado por Elliot, 2000, p. 88) que consiste en Identificar una idea general, reconocimiento de la situación, efectuar una planificación general, desarrollar la primera fase de acción, implementarla, evaluar la acción y revisar la planeación general, a partir de este bucle de la espiral para desarrollar la segunda fase de la acción y luego iniciar de nuevo las actividades: implementarla, evaluar el proceso, revisar el plan general, y de esta manera se repite el ciclo hasta que se desee culminar el proceso de investigación.

La investigación-acción fue pertinente para este trabajo porque se desarrolló en el ámbito educativo, donde se analizó las prácticas de aula, que se mejoraron fortaleciéndolas das con el modelo de razonamiento de Van hiele y el uso de las TIC, de la misma manera se abordaron problemáticas de los participantes que corresponden a estudiantes del grado noveno del INSTEC, analizando sus dificultades de aprendizaje donde se emplearon estrategias didácticas enriquecidas con prácticas coherentes hacia el aprendizaje de las matemáticas.

3.2 Proceso de Investigación

El proceso de investigación se dio inicio en el año a mediados del 2016, haciendo observación en el aula, explorando estrategias para la enseñanza-aprendizaje, diseñando e implementando estrategias hasta conseguir la apropiada para fortalecer los aprendizajes de los educandos. En la siguiente imagen se muestra el desarrollo proceso de investigación:

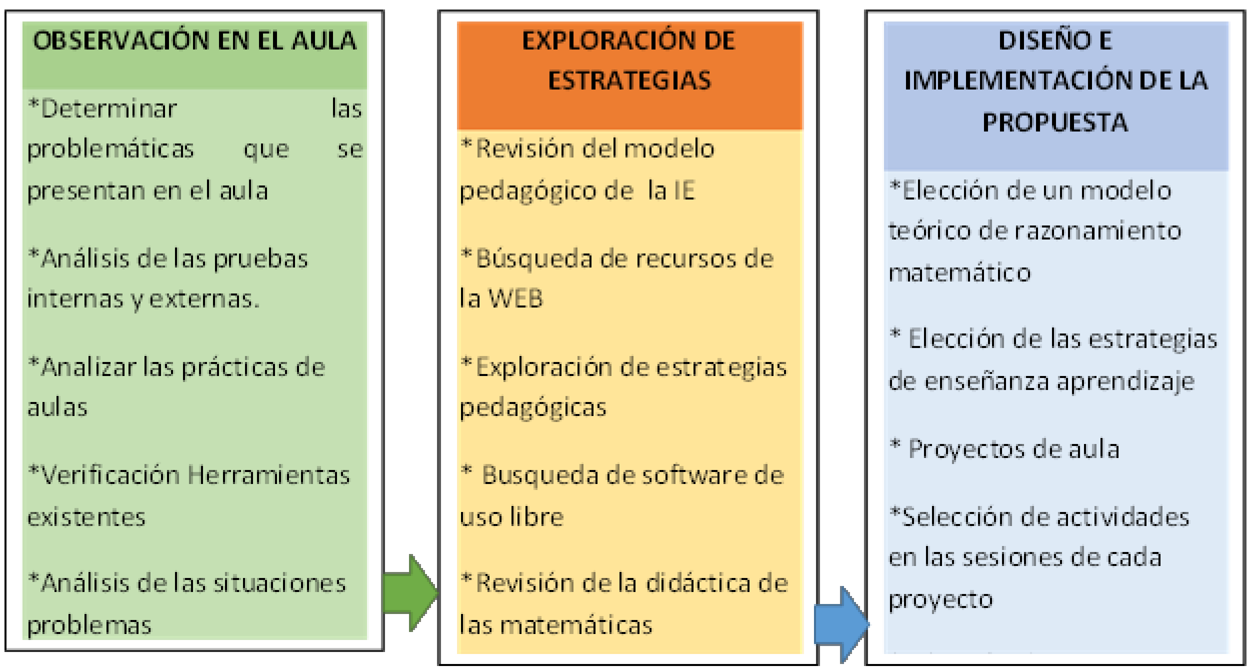


Figura 11. Resumen del proceso de investigación

3.2.1 Observación en el aula. Al analizar la población objeto de estudio se pudo determinar que se evidencia rechazo hacia el aprendizaje se las matemáticas, dicho por los mismos participantes, cuando se les preguntó sobre el gusto por las matemáticas, se pudo observar también bajo rendimientos en el primer semestre los en el primer semestre del año 2016, se pudo verificar falta de interés hacia la preparación de las evaluaciones, desmotivación hacia el aprendizaje de las matemáticas. Algunos estudiantes manifiestan que ellos atienden y entienden las explicaciones, pero cuando van a responder las evaluaciones los resultados no son muy buenos.

La población estudiantil se queja que reciben las clases siempre de la misma forma, que los ambientes de aprendizajes en los que siempre están es tablero, salón de clase, evaluación. Otra problemática observable es que los estudiantes no conservan las bases que reciben en primaria o en grados anteriores, los jóvenes muestran que no saben o no recuerdan las operaciones con números racionales ó evaluar una expresión algebraica, tareas que debieron superar en grados anteriores.

Al realizar un análisis en cuanto a los desempeños de las pruebas saber del grado noveno de la jornada de la tarde entre los años 2012-2016, se observó la ubicación de altos porcentajes en el nivel mínimo, y 0% en el 2012, 2013 y 2015 para el desempeño avanzado.

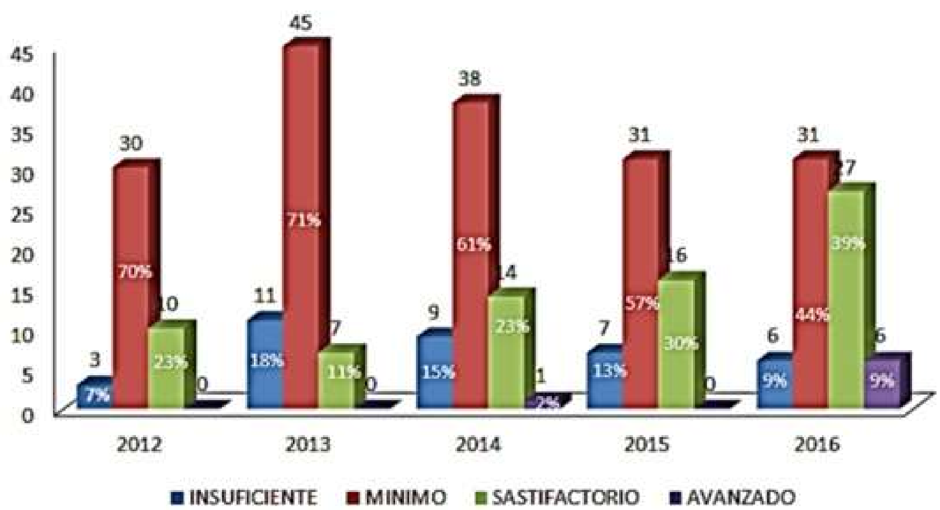


Figura 12. Histórico de los resultados de las pruebas saber para el grado noveno, sede Principal Jornada de la tarde INSTEC

Según la gráfica se experimentó mejoría en el nivel avanzado entre el 2015 y el 2016 pasando del 0 al 9%. Y se puede observar incremento en los porcentajes en el nivel satisfactorio del 30% al 39%.

Al analizar las prácticas de aula podemos verificar que a pesar de que la institución concentra sus bases pedagógicas en el modelo constructivista, las prácticas de los docentes tienden a ser más tradicionales. Se refleja poca existencia de aplicación de software educativo, poco uso del portal Colombia aprende, debido a la falta de elementos necesarios en los salones de clase para acceder a la web, falta de recursos como Videobeam o televisor Smart, sonido, en cada uno de los salones, situación que debe irse mejorando con el paso de los años. Es evidente que la IE debe invertir algunos recursos para que los ambientes de aprendizaje mejoren y de esta manera tengamos estudiantes más motivados.

Para la ejecución del proyecto, la administración de la IE direccionó la organización del salón Telefónica de la institución, dotándolo con un videobeam con su telón, 40 tabletas, regletas y tomas para la carga de las tabletas y acceso a la web para un computador por medio de señal wifi y con un ambiente agradable para concentrarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.2.2 Exploración de estrategias. Para abordar las diferentes estrategias que se pueden aplicar en las intervenciones, se debe tener en cuenta el modelo pedagógico de la institución. Respecto a los modelos pedagógico Samper (2006), los conceptualiza "como el resultado práctico de las teorías pedagógicas, que dan cuenta al para qué, cuándo y el con qué del acto educativo. Todo modelo pedagógico adopta una postura frente al currículo, en cuanto a sus propósitos, contenidos y secuencias".

El INSTEC fundamenta sus bases pedagógicas en el modelo constructivista y lo describe en su El proyecto Educativo Institucional PEI (2013) y que se describe en Acosta (2017, p. 37).

Al realizar una búsqueda de herramientas y de recursos en la web que pueden ser importantes en las diferentes intervenciones, se analizaron varios recursos, algunos de esos recursos se detallan en la siguiente tabla:

Tabla 9. Algunos recursos consultados en la web en la búsqueda de recursos didácticos

Dirección web de interactividades	Característica
www.colombiaaprende.edu.co	Portal de Colombia aprende con sus contenidos para aprender con OVAS que presentan un entorno de aprendizaje para los derechos básicos de aprendizaje.
www.educaplus.org	Que posee applets de todas las áreas
www.educaplay.com	Herramienta para encontrar recursos y para producir recursos.
www.wix.com **www.webnode.com.co**	Para construir páginas web y poder compartir recursos con los estudiantes

Dirección web de interactividades	Característica
www.geogebra.org	Aplicación donde se puede trabajar las matemáticas en general, software de uso libre
www.youtube.com	Un portal que muestran videos que se pueden utilizar como recursos secundarios para que los estudiantes reafirmen, repasen lo aprendido en clase.
http://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com.co/2011/10/las-aventuras-de-troncho-y-poncho-nos.html	Son una serie de videos que contienen temas y los muestran a través de videos y con unos personajes muy especiales.
Búsqueda de software de uso libre en línea y descargable para tabletas y para sistema Adroid y Windows, se identificaron los siguientes: software CaRMetal, Microsoft Mathematics 4.0, GeoGebra, Cabri Geometry, Graph	Se seleccionó GeoGebra por ser de uso libre, y poseer más herramientas y mostrar varias vistas cómo la geométrica, algebraica y otros recursos. Además se encuentra cómo aplicación de Play Store para sistema operativo Android y Windows.

Para algunas intervenciones se tuvieron en cuenta algunos videos de los contenidos para aprender del portal Colombia aprende, algunos videos de Troncho y Poncho y algunos videos de Youtube, y en especial el uso del software GeoGebra.

Algunas herramientas de hardware identificadas y seleccionadas para las los proyectos de aula son: Video beam, 40 Tabletas dotadas por el MEN, computador, amplificador de sonido.

El software de uso libre GeoGebra se instalará en cada tableta desde Play Store, se aclara que este software es de uso libre y se puede descargar para celulares, tabletas y computadores, y está disponible para Android, Windows y Macintosh, Linux.

3.2.3 Proceso de aplicación de estrategias. La aplicación de estrategias de aprendizaje está dividida en 2 fases. La primera tiene que ver con la aplicación de los primeros diseños del diagnóstico y de algunas guías para el grado 9A de la jornada de la tarde, aplicado en el año 2016 de agosto a noviembre, y la segunda fase la aplicación de la propuesta afinada Con otro grado también 9ª de la jornada de la tarde de la sede principal de Enero a Abril 2017.

3.2.3.1 Fase 1. La fase 1 del proceso de investigación fue importante, porque durante ese tiempo donde se estuvo analizando y colocando a prueba estrategias para fortalecer los aprendizajes de los estudiantes. En la siguiente tabla se muestran las intervenciones para esta fase que corresponden de agosto a noviembre de 2016:

Tabla 10. Tiempos de intervenciones 2016

INTERVENCIÓN	FECHA	ACTIVIDAD	TIEMPO	
Intervención 1	10/08/2016	Instalación del software GeoGebra en las tabletas	5 Horas de matemáticas	5x 55 min
Intervención 2	17/08/2016	Exploración de herramientas del software GeoGebra	03:15 p.m. – 5:05 pm	2 x 55 min
Intervención 3	24/08/2016	Actividad Elementos del triángulo, líneas notables del triángulo	4:10 p.m. – 5:20 p.m.	1 x 55 min
Intervención 4	07/09/2016	Rectas paralelas y perpendiculares	03:15 p.m. – 5:05 pm	2 x 55 min
Intervención 5	10/09/2016	La función lineal y función afín	03:15 p.m. – 4:10 pm	1 x 55 min
Intervención 6	21/09/2016	Corrección de la guía función lineal y afín	03:15 p.m. – 4:10 pm	1 x 55 min
Intervención 7	18/10/2016	Aplicación del diagnóstico, concepto de función	03:15 p.m. – 4:10 pm	1 x 55 min
Intervención 8	19/10/2016	Proyecto I - Sesión 1 – Actividad 1	4:10 p.m. – 5:05 pm	1x55 min
Intervención 9	26/10/2016	Proyecto I - Sesión 1 – Actividad 2	03:15 p.m. – 4:10 pm	1 x 55 min
Intervención 10	09/11/2016	Proyecto I – Sesión 2– Actividad 1	03:15 p.m. – 4:10 pm	1 x 55 min
Intervención 11	16/11/2016	Proyecto I - Sesión 3 – Actividad 1	03:15 p.m. – 4:10 pm	1 x 55 min
Intervención 12	23/11/2016	Proyecto II - Sesión 1 – Actividad 1	03:15 p.m. – 4:10 pm	1 x 55 min

Luego de identificar los diferentes elementos que se incorporaron en la propuesta, se dio inicio a las intervenciones del 2016, que se inició en la segunda semana del mes de agosto con la instalación del software GeoGebra en 40 tabletas. Este proceso tardó una semana. El proceso fue de mucho trabajo porque había que registrar las tabletas con una cuenta en gmail, descargar GeoGebra desde Google Play. Para este proceso se seleccionaron estudiantes de noveno y once grado para que colaboraran en la configuración e instalación de algunas aplicaciones, los estudiantes dejaron las Tablet listas para la exploración de GeoGebra.

En la tercera semana de agosto se hizo la exploración del software GeoGebra en esta sesión se le asignó una Tablet a cada estudiante con el software instalado, se les dieron las instrucciones de trabajo, las reglas y la forma de evaluación de la actividad. Se trabajaron las herramientas de GeoGebra como: elegir, punto, características de la línea, polígonos, circunferencia, las herramientas de ángulo; para esta actividad se utilizaron dos horas.

En la cuarta semana se trabajan un tema relacionado con los elementos de los triángulos como sus propiedades, los ángulos, mediatriz, bisectriz, alturas. Se dieron una serie de instrucciones y los estudiantes cumplieron con las actividades asignadas. Se pudo apreciar el interés de los participantes por explorar los contenidos mostrados. Esta prueba se realizó también con otros grupos de estudiantes de noveno grado y de once grado. Se reflejó un estado de confort, interés, fijación en las instrucciones, concentración en lo que se proyectaba en el área de trabajo y del software. Estas actividades sirvieron para afianzar el conocimiento del profesor, medir los tiempos y dificultades en la aplicación del software. Se puede afirmar que los participantes lucieron motivados al aprendizaje de los temas de matemáticas propuestos.

En Septiembre se realizan dos sesiones de trabajo una sobre la rectas paralelas y perpendiculares, y la otra de la función lineal y afín; el diseño de las guías orientadoras están fundamentadas en el modelo de Van Hiele en niveles 1 y 2, y en tareas con el programa GeoGebra.

En la segunda semana de septiembre se aplica la primera guía diseñada en el marco del Modelo de Van Hiele y el uso de GeoGebra, cuyos temas correspondían a rectas paralelas y perpendiculares. Esta guía de trabajo estaba constituida por 8 tareas. Los participantes siguieron las instrucciones y describieron de acuerdo a las preguntas abiertas sobre la situación planteada. Los participantes mostraron estar en el nivel 1 de los niveles de razonamiento de Van Hiele. También mostraron una actitud positiva ante uso de herramientas tecnológicas y al completar la guía de trabajo. Para el experimentador fue interesante porque se evidenció que se debe mejorar en la construcción de las guías de trabajo, sobre todo en las instrucciones para que los estudiantes puedan interpretarlas. Los participantes siguieron algunas instrucciones desde el tablero sin que el profesor les hiciera la tarea. Algunas de ellas debían hacerse iguales para todos, otras no necesariamente.

En la tercera semana se aplica la actividad 2 que trata de la función lineal y función afín, dando unas herramientas base para que entendieran la aplicación con GeoGebra. La mayoría de los estudiantes llegó a la cuarta tarea. Una hora no fue suficiente. En esta intervención se pretendía que los estudiantes abordaran la función lineal y afín para que a través de la observación dedujeran algunas características como crecimiento o decrecimiento, lo que sucede con la representación gráfica de la función $y = a.x$ cuando el valor de a cambia, la función constante, y las rectas cuya pendiente es indeterminada (las paralelas al eje y).

En la cuarta semana se realizó la revisión de los puntos que faltaban desde el tablero y la corrección de las primeras 4 tareas. La experiencia para los jóvenes fue interesante, porque se tuvo la oportunidad de mostrar de forma interactiva las características que se requerían estudiar. Algo para resaltar es la construcción de rectas paralelas y perpendiculares a una dada desde GeoGebra. Se vio la necesidad de reforzar en la función lineal, en el dominio y rango de una función. Por mejorar se evidencia que no se realizó diagnóstico de pre saberes de la función y hay falencias en la determinación de dominio y rango. Para las siguientes sesiones se tendrán en cuenta un diagnóstico inicial.

Luego de estudiar la forma de organizar las guías orientadoras, de verificar los aprendizajes que evalúa las pruebas saber, de revisar los aprendizajes que se deben reforzar mostrados en el informe para el colegio de las pruebas saber, de haber estudiado el modelo de Van Hiele, de haber explorado las ventajas que ofrece el software GeoGebra se retoma la estrategia de formar tres proyectos de Aula para fortalecer el pensamiento numérico y variacional y las competencias de comunicación. Se diseñaron dos proyectos pedagógicos de Aula primero acercamiento al concepto de función y el segundo tipos de función: la función cuadrática.

En la tercera a semana de octubre se aplicó un diagnóstico de 12 preguntas relacionadas con el concepto de relación y el concepto de función, enmarcada en el modelo de Van Hiele. Las preguntas son abiertas para poder analizar qué tanto comprenden la situación que se les plantea. También se les brinda información para que la relacionen con las situaciones que se les pregunta. Las preguntas no superan el nivel 2 de razonamiento según los niveles de razonamiento de Van Hiele. Sobre este diagnóstico se hace la respectiva socialización. Las dificultades que fueron más frecuentes tienen que ver con la forma de justificar si una relación es función o si una gráfica representada en el plano cartesiano es función o no.

Luego del diagnóstico se inicia la aplicación de un proyecto pedagógico de aula, que se ha diseñado teniendo en cuenta los referentes del MEN, llamado, acercamiento al concepto de función.

El proyecto contiene 3 sesiones de trabajo. La primera sesión está compuesta por dos actividades. Las tareas de la primera actividad se relacionan con el concepto de relación y una breve historia de las funciones que se muestra a través de dos videos que no sobrepasan los 15 minutos. El propósito es motivar a los estudiantes en el conocimiento del concepto de función y la importancia de esta en la historia y como se aplica en la cotidianidad. Sobre estas actividades se pudo verificar que los participantes hacen observaciones sin considerar algún concepto matemático, sin embargo tratan de describir que es una relación según una imagen mostrada.

En la cuarta semana de octubre se refuerza el concepto de función y se empieza a trabajar el pensamiento variacional en la competencia comunicación a través de situaciones de variación puesta en sistema de representación de plano cartesiano, todas las tareas enmarcadas en los niveles de razonamiento de Van Hiele. En esta segunda parte de la sesión se establecieron 10 tareas para introducir el concepto de función, sus elementos (grafo, dominio, codominio y rango), y tipos de representación de la función como tabular, cartesiana y representación algebraica, diagrama sagital. Esta actividad fue importante para los estudiantes porque les permitió asimilar la relación entre dos variables a través de una situación de movimiento, la lectura, comprensión mostrándose en las respuestas. La dificultad detectable tiene que ver con relacionar la gráfica con la representación simbólica algebraica, evaluar y verificar valores de puntos que pertenecen a la gráfica.

En la segunda semana de noviembre se trabaja la sesión 2 que corresponde al método gráfico para identificar funciones en el plano cartesiano. Esta actividad se realizó en grupo de 4 estudiantes, presenta 6 tareas donde se pone de manifiesto el concepto de función y la forma de justificar cuando una gráfica en el plano representa o no una función. La dificultad que se encontró en los estudiantes fue al extraer puntos del plano cartesiano, en especial los de coordenadas cuya abscisa y ordenada eran decimales.

En la tercera semana se plantea la sesión 3, la forma de trabajo es en grupos de 4 estudiantes, y la actividad contiene en siete tareas, la mayoría son preguntas abiertas sobre una nueva situación de variación, que incluyen el estudio del crecimiento, decrecimiento o constancia de una función en un intervalo de la variable independiente, representada en un plano cartesiano. También se socializa los tipos de funciones inyectivas, sobreyectivas e inyectivas. Faltó ampliar para la clasificación de función creciente, decreciente, constante y periódica, igualmente la sesión con GeoGebra.

En la cuarta semana se alcanza aplicar una sesión del proyecto II, donde se aborda una situación de variación con trayectoria parabólica y una serie de tareas enmarcadas den el modelo de Van Hiele. Las dificultades encontradas en estas tareas tienen que ver con la descripción que realizan de la gráfica, lo hacen con cortas palabras. Una forma de apoyar la descripción sería darle un grupo de palabras para que armen la descripción con estas. Otra dificultad observable y que se reforzó, tiene que ver con que algunos grupos no identificaron que en un movimiento parabólico que se puede hacer corresponder en dos tiempos diferentes, la misma altura.

A manera de conclusión, sobre la fase 1 se establece mejorar el diagnóstico para la aplicación en el siguiente año; sobre el proyecto I se establece hacer cambios a la sesión 1, aumentar en actividades a la sesión 2, para que se realice el proceso de dominio y rango de una función desde un plano cartesiano e incluir una secuenciación usando GeoGebra. De la misma manera terminar la aplicación de las sesiones de tipos de función: la función cuadrática que por efecto de culminación de año escolar no se llevó a cabo. El trabajo en grupo de 4 estudiantes no se recomienda para estas actividades, se recomienda grupos de dos estudiantes pero cada uno con su guía de trabajo. Se puede decir que se establece una propuesta para implementar nuevamente en el siguiente año, con las mejoras pertinentes. Sobre el modelo de Van Hiele se considera pertinente porque ayuda a armar secuencias de lo más sencillo a lo más complejo, de lo más fácil a lo más difícil.

Los participantes de esta fase fueron fundamentales en el inicio del proyecto, porque con ellos se realizó la exploración del software GeoGebra, la puesta en marcha del uso del software en las tabletas dotadas por el MEN, la instalación del software con el sistema androide, la manipulación de las herramientas sin el uso del mouse, la prueba del uso del software en algunos temas donde se podía aplicar: la recta y sus elementos, pendiente, ángulos, algunos teoremas de Thales, ángulos entre paralelas y una recta secante que intersecan a las paralelas, simetrías, transformaciones, homotecias, entre otros. No se continuó con los mismos participantes porque se dispersaron entre las 6 modalidades que ofrece el INSTEC ya que en décimo grado los estudiantes eligen la modalidad técnica que desean seguir.

3.2.3.2 Fase 2. Para este año 2017 no se pudo dar la continuidad con el grupo del 2016, pero la asignación académica para el docente investigador corresponde a los grados novenos de la jornada de la tarde. Se decidió elegir nuevos participantes, los estudiantes del grado 9A de la jornada de la tarde del Instituto técnico Municipal Los Patios.

Se da nuevamente inicio la estrategia diseñada, se hizo una reestructuración del material, en los tiempos, en las actividades en los contenidos dedicando más tiempo al estudio del aprendizaje de la función cuadrática. La estrategia está constituida por un el diagnóstico inicial, y por tres proyectos pedagógicos de aula, con tres o dos sesiones para cada proyecto y una evaluación final.

En los siguientes párrafos se narrará las descripciones por cada proyecto pedagógico de aula. Cada sesión está compuesto por actividades y cada actividad por tareas. La sesión agrupa conceptos, características o elementos del objeto de estudio. Cada tarea puede ser una pregunta simple o una pregunta para hacer pensar al participante, o acercarlo a los conceptos matemáticos; una tarea también puede ser el llenado de una tabla o puede ser responder una pregunta contextualizada. Con estos términos entraremos a describir el proceso de las intervenciones del año 2017, que inician a finales de enero y terminan en Abril. En la siguiente tabla se muestran las fechas y los tiempos mínimos para cada actividad.

Tabla 11. Tiempos de Intervenciones del proyecto I

Intervención	*Fecha*	*Actividad*	*Tiempo*	
Intervención 1	30/01/2017	Aplicación del diagnóstico	12:55 p.m. – 1:50 pm	1 x 55 min
Intervención 2	08/02/2017	Exploración de las herramientas del software de uso libre GeoGebra	12:05 p.m. – 2:40 pm	3 x 55 min
Intervención 3	08/02/2017	Proyecto I - Sesión 1- Actividad 1: Acercamiento al concepto de función	4:10 p.m. – 5:20 p.m.	1 x 55 min
Intervención 4	09/02/2017	Proyecto I - Sesión 1- Actividad 2: El concepto de función	5:05 p.m. – 6: p.m.	1 x 55 min
Intervención 5	10/02/2017	Proyecto I - Sesión 2- Actividad 1 identificar funciones en un plano cartesiano	4:10 p.m. – 5:05 pm	1x55 min

Intervención	*Fecha*	*Actividad*	*Tiempo*	
Intervención 6	13/02/2017	Proyecto I - Sesión 2- Actividad 2 Dominio y rango a partir de un gráfico cartesiano	12:55 p.m. – 1:40 pm	1x55 min
Intervención 7	15/02/2017	Proyecto I – Sesión 2- Actividad 3 Usando GeoGebra	3:15 p.m. – 4:10 pm	1x55 min
Intervención 8	17/02/2017	Proyecto I – Sesión 3 – Actividad 1 Clasificación de funciones	4:10 p.m. – 5:05 pm	1x55 min
Intervención 9	20/02/2017	Proyecto I – Sesión 3 – Actividad 2 Comparación entre gráficas	12:55 p.m. – 1:40 pm	1x55 min

Diagnóstico. El diagnóstico se aplicó en la última semana de enero, Este lo constituyen 17 preguntas enmarcadas en el modelo de razonamiento de Van Hiele, con preguntas generalmente abiertas para verificar el nivel de razonamiento de los participantes. Las preguntas 1, 7 y 15 conservan la misma característica y se les ha dado una calificación de nivel 1 en el modelo de razonamiento de Van Hiele por ser situaciones de observación o reconocimiento. Los Ítems 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12 y 16 del cuestionario se han ubicado en el nivel 2 del modelo de razonamiento de Van Hiele. Son preguntas donde el estudiante debe hacer comparaciones entre los elementos de las figuras y algunas definiciones dadas, y de esta manera extraer los elementos y aplicar reglas involucradas en el concepto de relación y función. Las preguntas 3, 9, 13, 14 y 17 se le han asignado preguntas de Nivel 3 de razonamiento, porque implica tener en cuenta una serie de argumentos para poder explicar y dar razones precisas a cerca de las preguntas en cuestión.

Los participantes deben decidir si la situación planteada y construida por ellos mismos corresponde a una propiedad matemática de estudio como lo es la función. Con el análisis del diagnóstico se da el punto de partida para llevar a los participantes a mejorar sus aprendizajes y conocimientos de la función y la función cuadrática basados en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Se pudo verificar que la mayoría supera el Nivel 1 según los niveles de razonamiento de Van Hiele, pero muy pocos llegan a razonar en los niveles superiores.

Exploración de las herramientas del software GeoGebra. El propósito de la intervención con GeoGebra era acercar al estudiante al manejo del software en sistema android y el reconocimiento del ambiente de trabajo. No hay una guía de trabajo precisa, pero se abordó en orden todas las herramientas bases para la aplicación con los proyectos pedagógicos de aula: acercamiento al concepto de función y la función cuadrática. Fue muy dinámica y productiva, se puede decir que los participantes quedaron encantados con el manejo del programa, es así que todos realizaron las tareas asignadas, con características similares a la del año 2016.

3.2.3.2.1 Proyecto I: Acercamiento al concepto de función. Del proyecto I se tienen 8 intervenciones todas en el mes de febrero. Detallaremos en general el proceso en cada intervención. Todas las actividades se llevaron a cabo en grupo de dos estudiantes, pero cada uno de ellos contó con su guía de trabajo.

Con este proyecto se pretende que los participantes adquieran conocimientos sobre el concepto de función, los elementos y características, a través de actividades planeadas en el marco del modelo de Van Hiele, también que el participante sea capaz de emplear diferentes sistemas de representación, la traducción de los mismos. Se presentas 3 sesiones de trabajo.

Sesion1-Actividad 1: Acercamiento al concepto de función. Se presentan 4 tareas donde se pretende inducir al estudiante al concepto de relación y de función. En esta actividad el participante realizó observaciones e hizo descripciones de las imágenes que se le presentaban, una de ellas tiene que ver con llenar una representación tabular desde los datos que se presentan en una imagen. Luego se muestran dos videos cortos sobre la función a través de la historia con, el propósito de motivar y dar la importancia al estudio de funciones. Los participantes se mostraron receptivos.

Sesión 1 - actividad 2: el concepto de función. Se presentan 10 tareas donde el estudiante debe identificar las características de gráficas cartesianas y usar y relacionar diferentes representaciones de funciones. En esta actividad se socializa el concepto de función, los elementos de una función y las representaciones de función. Se identifica que lo más complicado para el estudiante fue justificar el concepto de función en algunas tareas, y relacionar una tabla de valores de datos con la gráfica y su correspondiente registro de representación algebraico. Se hizo el correspondiente refuerzo de la actividad.

Sesión 2 - actividad 1: Método gráfico para identificar funciones en un plano cartesiano. Se abordó una situación inicial para recordar el concepto de función, luego se hizo la lectura de cómo identificar si una gráfica en el plano cartesiano pertenece o no a una función se realizaron varios ejemplos y luego se direccionó para que los estudiantes realizaran las tareas restantes. Lo más complicado para los participantes fue justificar porque una gráfica no era función y determinar estimar los puntos del plano con números decimales para justificar.

Sesión 2 - actividad 2: Dominio y rango a partir de un gráfico cartesiano. En esta actividad se da explicación a los participantes sobre notación de intervalos para que luego sean usados en la determinación del dominio y Rango de una función. Luego de varios ejemplos se pasó a las actividades que corresponde a 4 tareas que básicamente consistieron en la determinación del dominio y rango de las representaciones de las cuatro gráficas, además de establecer si es o no es función y la correspondiente justificación. En esta actividad se hace un aparte para explicar que el dominio o el rango también pueden elementos enteros y que no se expresan en notación de intervalo si no entre llaves, para describir los elementos.

Sesión 2 - actividad 3: usando GeoGebra. El propósito de esta actividad es hacerles comprender a los participantes que una expresión algebraica puede representar curvas en un plano cartesiano. En esta actividad los estudiantes exploran el programa a través de instrucciones precisas que todos deben seguir. Los estudiantes introducen 4 expresiones algebraicas en el área de trabajo y luego deben cumplir con tareas cómo graficar las mismas gráficas en la guía de trabajo, y completar una tabla donde se exige determinar Dominio, Rango, expresar si es o no función. Al final se realiza una socialización de sus respuestas para tener una puesta en común.

Sesión 3 - actividad 1: clasificación de funciones. Se presenta una situación de variación para que el participante analice la relación entre las dos variables. Se propone siete tareas enmarcadas en el Modelo de Van Hiele, donde el estudiante debe realizar observaciones del comportamiento de la gráfica, luego escribir el análisis en la guía de trabajo relacionada con la tarea asignada. Seguidamente se hace lectura y explicación de la clasificación de funciones inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente, decreciente, constante y periódica.

Sesión 3 - actividad 2: comparación entre gráficas. Se establecen 5 tareas con una propuesta de tres gráficas donde los participantes hicieron una serie de comparaciones de los aspectos del problema planteado. También el participante debió describir las propiedades se gráficas cartesianas según las tareas propuestas. El siguiente punto es resolver una serie de tareas con GeoGebra para que el estudiante dé una clasificación según las gráficas mostradas. Las dificultades más percibidas en los jóvenes tienen que ver detectar cuando una función representada gráficamente, representa una función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Situación que se reforzó nuevamente.

3.2.3.2.2 Proyecto II - Tipos de función: la función cuadrática. El proyecto 2 tiene que ver con el estudio de la función cuadrática, sus elementos y características, su clasificación y algunas aplicaciones en la vida cotidiana. Se llevará al estudiante a explorar situaciones para establezca relaciones entre propiedades de gráficas, y que relacione diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. La siguiente tabla muestra las diferentes intervenciones del proyecto II, que se inició desde el 22 de Febrero hasta el 15 de marzo de 2017. Representa un total de 9 intervenciones. En todas las actividades se establecieron grupo de dos estudiantes y cada uno contó con una guía orientadora para que resolvieran las tareas propuestas.

Tabla 12. Tiempos de intervención del proyecto II

Intervención	***Fecha***	***Actividad***	***Tiempo***	
Intervención 10	22/02/2017	Proyecto II - Sesión 1- Actividad 1: Reconocimiento de la función cuadrática	12:55 p.m. – 1:50 pm	1 x 55 min
Intervención 11	23/02/2017	Proyecto II - Sesión 1- Actividad 2: Evaluando una función cuadrática	12:05 p.m. – 2:40 pm	1 x 55 min
Intervención 12	24/02/2017	Proyecto II - Sesión 1- Actividad 3 - Utilizando GeoGebra	4:10 p.m. – 5:20 p.m.	1 x 55 min
Intervención 13	01/03/2017	Proyecto II - Sesión 2 - Actividad 1 - Tipos de gráfica de la función cuadrática	3:15 p.m. – 5: p.m.	1 x 55 min
Intervención 14	03/03/2017	Proyecto II - Sesión 2- Actividad 2 – Trabajando con GeoGebra	4:10 p.m. – 5:05 pm	1x55 min
Intervención 15	06/03/2017	Proyecto II - Sesión 2- Actividad 3 – Traduciendo registros de representación	12:55 p.m. – 1:50 pm	1x55 min
Intervención 16	10/03/2017	Proyecto II – Sesión 3 – Actividad 1 –Ceros y casos en la función cuadrática	4:10 p.m. – 5:00 pm	1x55 min
Intervención 17	13/03/2017	Proyecto II – Sesión 3 – Actividad 2 - Construye la gráfica y halla las raíces	12:55 p.m. – 1:50 pm	1 x 55 min
Intervención 18	15/03/2017	Proyecto II – Sesión 3 – Actividad 3 – Trabajando con GeoGebra	3:15 p.m. – 4:10: p.m.	1 x 55 min

Proyecto II- Sesión 1 - actividad 1: Reconocimiento de la función cuadrática. El propósito de esta actividad era que el participante hiciera un reconocimiento de la función cuadrática a través de una situación de variación que para este caso es la trayectoria de dos pelotas que son lanzadas desde el mismo punto. Se establecen 4 tareas enmarcadas en el modelo de Van Hiele. Seguidamente se proponen 2 tareas a partir de la visualización de 2 videos cortos acerca de la importancia del estudio de la función cuadrática. Los jóvenes estuvieron atentos y algunos hicieron una síntesis de algunos apartes del video.

Proyecto II - Sesión 1 - actividad 2: Evaluando una función cuadrática. En esta actividad se pretendía que el estudiante evaluara expresiones algebraicas, describiera algunas propiedades de la función cuadrática, construyera gráficas a partir de una tabla de valores. También desde una situación de variación representada desde una representación simbólica algebraica para luego traducir a otros sistemas de representación. Al final se le dirige para que identifique los elementos y algunas características de la función cuadrática. Esta actividad contiene 4 tareas donde se incluyes las actividades ya descritas.

Proyecto II - Sesión 1 - actividad 3: Trabajando con GeoGebra. Luego de definir la forma normal de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c \;\; con\; a, b, c\; que \;\in a\, \mathbb{R}, con\; a \neq 0$. El docente encargó a unos estudiantes a que entreguen los dispositivos de trabajo, seguidamente se indica que sigan las instrucciones de la guía de trabajo. Se pretende con esta guía que a partir de una expresión de la forma $y = ax^2$ y usando la herramienta arrastre, genere otras situaciones. Se plantean tareas específicas que se pueden observar en el área de trabajo y que los participantes deben escribir en la guía. Desde este escenario el participante describe propiedades de las gráficas observables en el área de trabajo de GeoGebra.

Proyecto II - Sesión 2 - actividad 1: tipos de gráficas de la función cuadrática. Inicialmente se socializa los tipos de gráficas de la función cuadrática y se pasa a la actividad que la componen dos tareas, la primera la identificación de funciones cuadráticas y su caso y la segunda el análisis de los diferentes elementos y características componen la función cuadrática. En esta actividad es necesario mostrar varios ejemplos para que asimilen el proceso. Se sugiere mostrarle los caminos a través de un mapa conceptual para que organicen la información. Los participantes realizan las operaciones en una hoja que deben entregar junto con la guía, en la tarea de la guía deben completar la tabla. Hubo dificultades con la identificación. Algunos no relacionaron el cuadrado de la x para determinar si era función cuadrática, otros no identificaron funciones cuadráticas porque la expresión no se encontraba despejada.

Proyecto II - Sesión 2 - actividad 2: Trabajando con GeoGebra. Se establecen 3 tareas para esta actividad. La intención de esta tarea es que el estudiante reflexione sobre el signo del coeficiente de a en expresiones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, ya que el programa permite ver los cambios de una manera rápida y precisa, desde la representación simbólica algebraica y la gráfica misma. Los estudiantes deben describir las semejanzas y diferencias entre las gráficas de los puntos propuestos.

Proyecto II - Sesión 2 - actividad 3: Traduciendo registros de representación. Con esta actividad se pretende reforzar evaluar expresiones algebraicas, tabular y realizar la gráfica respectiva de las expresiones. Esta actividad contiene dos tareas. En la primera tarea la mayoría de los estudiantes evaluaron las funciones correspondientes y realizaron la gráficas de las funciones dadas. Para la segunda tarea se dan las instrucciones a los estudiantes para que a partir de la gráfica se extraiga una tabla de valores para luego verificar con al menos dos valores. Se les sugiere a los jóvenes que desde la gráfica se extraigan los diferentes elementos observables y ya estudiados.

Proyecto II - Sesión 3 - actividad 1: Ceros y casos en la función cuadrática. Se requiere que el estudiante haga comparaciones de las diferentes gráficas que se presentan en la situación inicial. Sobre esa situación se les indicó a los participantes que respondieran las siete tareas que se presentan en la actividad. Estas tareas tienen que ver con observación y análisis y la aplica para comparar gráficas. En las diferencias y semejanzas de las gráficas no son amplios los participantes, realizan descripciones simples. También se observó dificultad en la expansión para convertir la expresión a la forma $y = ax^2 + bx + c$. Se hace la socialización respectiva de la actividad, haciendo que se corrija en el cuaderno.

Proyecto II - Sesión 3 - actividad 2: Ceros evaluando y graficando. Con esta actividad el participante debe evaluar y traducir de una representación simbólica algebraica a la cartesiana, debe estimar las raíces y colocarlas en una tabla que se encuentra en la guía, además deben describir a que caso pertenece la función cuadrática. Sobre esta actividad se reforzó en la estimación de las raíces, pues estas no son enteras y los participantes lucieron confundidos.

Proyecto II - Sesión 3 - actividad 3: Ceros utilizando GeoGebra. Con la actividad de GeoGebra se pretende mostrar al estudiante que existen otras formas simbólicas de la representación algebraica y se da instrucciones a los participantes que incluyan expresiones de la forma $4p(y-k)=(x-h)^2$. Se les indica que exploren las otras formas que muestra el software. Se les pide a los estudiantes que a través de la herramienta arrastre muevan la gráfica y que den 4 ejemplos donde el vértice fuera una coordenada entera. La actividad fue dirigida desde el tablero con el software ejecutado en línea.

3.2.3.2.3 proyecto de aula III: la ecuación cuadrática. En la aplicación del proyecto III las sesiones 1 y 2 tienen que ver con las ecuaciones cuadráticas, para estas sesiones se dieron instrucciones a los estudiantes para que armaran grupos a cabo en grupo de dos estudiantes, y la sesión 3 que se trabajó en grupo de 4 estudiantes tiene que ver con aplicaciones de la función cuadrática.

Tabla 13. Tiempos de intervención del proyecto III

Intervención	*Fecha*	*Actividad*	*Tiempo*	
Intervención 19	17/03/2017	Proyecto III - Sesión 1- Actividad 1: Situación problema cancha de futbol	4:10 p.m. – 5:05 pm	1 x 55 min
Intervención 20	22/03/2017	Proyecto III - Sesión 1- Actividad 2: Rebotes triple de un balón	3:15 p.m. – 4:10 pm	1 x 55 min
Intervención 21	24/03/2017	Proyecto III - Sesión 1- Actividad 3 Utilizando GeoGebra – refuerzo	4:10 p.m. – 5:55 p.m.	1 x 55 min
Intervención 22	29/03/2017	Proyecto III - Sesión 2- Actividad 1 La ecuación cuadrática	3:15 p.m. – 5: p.m.	1 x 55 min
Intervención 23	30/03/2017	Proyecto III - Sesión 2- Actividad 2 La ecuación cuadrática	5:05 p.m. – 5:55: p.m.	1 x 55 min
Intervención 24	31/03/2017	Evaluación proyecto I-II	4:10 p.m. – 5:55 pm	2x55 min
Intervención 25	03/04/2017	Corrección evaluación	12:55 p.m. – 1:50 pm	1x55 min
Intervención 26	06/04/2017	Proyecto III – Sesión 1 Solución de problemas – taller en grupos	4:10 p.m. – 5:55 pm	1x55 min
Intervención 27	28/04/2017	Proyecto III– Sesión 2 – Actividad 2 Exposiciones	12:55 p.m. – 1:40 pm	2x55 min

Proyecto III-sesión 1-actividad 1. La actividad 1 de La sesión 1 corresponde a una situación de una cancha de futbol para que los participantes reflexionen sobre una situación problema donde se hace evidente una función cuadrática. En esta actividad los avances fueron lentos, la ayuda del docente se hizo evidente, pero se realizaron preguntas para llegar de tal manera que los participantes razonaran sobre las diferentes tareas como por ejemplo la expresión para calcular el área del rectángulo y el perímetro del mismo, y como al final al determinar el valor de x, se llegaba a las dimensiones de la cancha.

Proyecto III-sesión 1-actividad 2. La actividad 2 corresponde a una situación donde se cambia el contexto para estudiar el comportamiento de un balón en tres rebotes, se muestra las expresiones que determinan la trayectoria de la altura con respecto al tiempo. Luego se establecieron tareas de razonamiento para identificar las características de las gráficas resultantes, donde algunos participantes hallaron la altura máxima en cada rebote y otros elementos como los cortes con el eje x. En esta actividad se les recordó que debían utilizar el vértice, luego asimilaron la situación. Algunos estudiantes dedujeron los puntos de corte con el eje X conociendo el vértice de la parábola más alta. El problema despertó interés en su estudio por la forma cómo fue presentado.

Proyecto III- sesión 1-actividad 3. Esta actividad consiste en representar las expresiones del problema mostrado en la actividad 2, pero en la calculadora. Los participantes siguieron las instrucciones representando las situaciones planteadas, activando el modo CAS de GeoGebra haciendo y=0 e introduciendo las expresiones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Con la aplicación resolvieron las ecuaciones de orden 2.

Proyecto III- sesión 2 - actividad 1. El contexto de esta actividad trata de un círculo inscrito en un cuadrado donde las esquinas representan la zona verde de un parque. Los participantes hicieron sus razonamientos de acuerdo a las tareas asignadas. Sirvió esta actividad para recordarle a los estudiantes sobre cómo determinar el área de una región son respecto a dos figuras geométricas. Seguidamente se socializó la solución de ecuaciones cuadráticas incompletas: $ax^2 = 0,\ ax^2 + bx = 0,\ ax^2 + c = 0$ y se mostraron ejercicios para que los participantes asimilaran los procedimientos

Proyecto III- sesión 2 - actividad 2. En esta intervención se socializa la solución de ecuaciones cuadráticas completas por factorización, completando cuadrados y por la formula general. Se le representan dos ejemplos para cada método. Seguidamente los participantes trabajaron una situación de variación relacionada con una piscina donde se daba el perímetro del rectángulo que forma la piscina y el área de la misma. El proceso fue dirigido hasta el quinto punto. Con este modelo el estudiante tenía que construir uno propio dando áreas entre 1 y 300 metros cuadrados. En este proceso se detectó que la mayoría de los estudiantes no reconocían que las raíces cuadradas de números negativos tienen soluciones en los números complejos. Igualmente descubrieron que no se puede asumir cualquier área para el problema.

Proyecto III- sesión 3. Para esta sesión se dio la oportunidad a los estudiantes que explicaran través de exposiciones la solución de situaciones problemas cuyos contextos eran diferentes. Estas fueron realizadas algunas en PowerPoint y otras en carteleras. La calidad de las exposiciones se reflejó en la mitad de los grupos de trabajo, y se pudo evidenciar la apropiación de la exposición por parte de algunos estudiantes. La mayoría de las situaciones fueron resueltas por los estudiantes, y algunas reforzadas con las respectivas correcciones del docente. Sobre esta experiencia se observó que algunos no asumen la responsabilidad en cada grupo. Se refleja falta de compromiso. Al final de esta actividad la mayoría de los participantes presentaron la corrección de la solución de todos los problemas exigida como síntesis de la sesión.

3.3 Población y Muestra

La población corresponde a los sujetos o participantes que intervienen en la investigación, Fracica (1988 citado por Bernal, 2010) define la población como “el conjunto de todos los elementos a los cuales se refiere la investigación. Se puede definir también como el conjunto de todas las unidades de muestreo” (p. 161), de la misma manera Según Jany (1994), población es “la totalidad de elementos o individuos que tienen ciertas características similares y sobre las cuales se desea hacer inferencia” (p. 48).

La población objeto de estudio en esta investigación corresponde a los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios de la jornada de la tarde.

Tabla 14. Población Grados noveno jornada de la tarde INSTEC

Grado	9 A	9 B
Cantidad de estudiantes	35	35

La muestra es la parte de la población que se selecciona, de la cual realmente se obtiene la información para el desarrollo del estudio y sobre la cual se efectuarán la medición y la observación de las variables objeto de estudio (Bernal, 2010, p. 161).

La muestra corresponde a 35 estudiantes correspondientes al grado 9A del Instituto Técnico Municipal Los Patios de la Sede Principal, jornada de la tarde. Las familias a las que pertenecen los participantes se encuentran en estratos 1, 2 y 3 ubicándose la mayoría en estrato 2 con un 70% y un 15% para estrato 1. El 70% de los participantes son mujeres y el 30% hombres. Las áreas de enseñanza que más prefirieren están distribuidas de la siguiente manera:

Tabla 15. Preferencias de asignaturas de los participantes en la investigación

ÁREA	MUJERES	HOMBRES	TOTAL
Artística	9	3	12
Matemáticas	3	3	6
Ciencias naturales	1	0	1
Ingles	8	1	9
Lengua castellana	3	1	4
Filosofía	0	1	1
Educación física	2	0	2

Las intervenciones del proyecto se llevaron a cabo en la Sede Principal del INSTEC en la Jornada de la tarde. El aula donde se llevó a cabo el desarrollo del proyecto es la Sala Telefónica; contiene mesas trapezoidales para dos estudiantes, cuenta con conectividad a Internet, Video beam, ambiente agradable para concentrarse, disponibilidad de tabletas dotadas por el MEN a través de Computadores para educar, computador del docente.

Figura 13. Vista del aula telefónica
Fuente: Autor del Proyecto.

La siguiente tabla un breve perfil de los participantes de esta investigación que presenta sus nombres y apellidos, la edad, su género, el sector donde habitan, el lugar de nacimiento, una frase con la que se identificaron y su pasatiempos favorito.

Tabla 16. Perfil de los participantes – estudiantes del grado 9A de la jornada de la tarde 2017 del INSTEC

Código	Apellidos y Nombres	Edad	Género	Barrio	Lugar de Nacimiento	Frase	Pasatiempos favorito
E1	Nasly Karina Arredondo Camargo	15	F	El Sol	Toledo – N. de S.	Soldado avisado no muere en guerra	Leer libros
E2	Julian Alexis Ayala Mendoza		M	Once de Noviembre	Los Patios	Camarón que se duerme se la lleva la corriente	Jugar futbol
E3	Maria Del Carmen Barrera Cercado	14	F	Llanitos	Cúcuta	Tengo hambre	Modelar, jugar futbol
E4	Yeny Marcela Basto Pérez	14	F	Villancep	Bucaramanga	Ojo por ojo diente por diente	Hacer dibujos cuando estoy aburrido
E5	Mitchel Yesid Bernal Torres	14	M	Montebello I	Cúcuta	Vencer todas las dificultades que se me presenten	Jugar futbol
E6	Danna Alejandra Bueno Zapata	14	F	Urbanizació n la Campiña	Cúcuta	Soldado avisado no muere en guerra y se muere es por …	Escuchar música
E7	Chelsea Dailling Buitrago Delgado	14	F	Pisarreal	Los Patios	Con el poder de Dios todo se puede	Escuchar música
E8	Maria Daniela Delgado Becerra		F	La campiña	Cúcuta	Si él puede yo por qué no	Leer
E9	Marialex Andrea Flórez Meneses	14	F	Videlso	Cúcuta	La vida es una guerra que nunca termina	Jugar, patinar nadar
E10	Maria Gabriela Garcia Contreras	13	F	Pisarreal	Cúcuta	Compañerista	Jugar futbol y leer
E11	Jorge Andrés González Rincón	15	M	Villaverde	Los Patios	Todo lo puedo en dios que me fortalece	El futbol
E12	Diana Lucia González Vargas	14	F	Llanitos	Los Patios	Hay que sonreírle a la vida	Me gusta jugar futbol y nadar

Código	Apellidos y Nombres	Edad	Género	Barrio	Lugar de Nacimiento	Frase	Pasatiempos favorito
E13	Laura Vanessa Herrera Villafañe	13	F	San Nicolás 3	Cúcuta	La humildad lo es todo	Jugar futbol, escuchar música
E14	Abdul Ernesto López Montañez	14	M	Tierralinda	Garagoa, Boyacá	Se perseverante y lucha por lo que quieres	Ver documentales o jugar ajedrez, etc.
E15	Danna Abril Mendoza Hernández	14	F	Carmen del Tonchalá - Cúcuta	Los Patios	Todo tiene su porqué….y su perdón	Jugar futbol, hacer aseo
E16	Chirlis María Monsalve Chalarcá		F	Pensilvania	Cúcuta	No hay nada en la vida que no contenga sus lecciones, si estas vivo siempre tendrás algo para aprender	Leer
E17	Paula Andrea Muñoz Preciado	14	F		Bogotá	De los errores se aprende	Escuchar música
E18	Paula Andrea Ortiz Muñoz	15	F	Montebello I	Los Patios	Todo lo puedo, creo en mí	Leer, pasar tiempo con mis amigos
E19	Nathalia Vanessa Parada Torres		F	Pisarreal	Pamplona	Yo soy fuerte	Escuchar música
E20	William Alberto Ramon Osorio	15	M		Cúcuta		La actuación y el baile
E21	Robert Alejandro Rangel Pérez	15	M		Ocaña	Todo tiene un tiempo y un lugar	Leer libros
E22	Angie Yheraldine Riascos Bravo	14	F	Villancep	Pradera, Valle del Cauca	Nunca tengas miedo	Jugar basquetbol y mirar televisión o celular
E23	Angie Daniela Rivera Silva		F	El sol	Cúcuta	No hay peor ciego que el que no quiera ver	Jugar futbol
E24	Natalia Andrea Rodríguez Ogliastri	14	F	Betania	Cúcuta	Lucha por tus metas	Jugar futbol
E25	Edwar Johan Sanabria Ascanio	15	M	San Nicolás 3	Los Patios	Si caes mil veces, siempre levántate	Jugar básquet y estudiar
E26	Adriana Lucía Sandoval Delgado	14	F	Pisarreal	Cúcuta	La responsabilidad ante todo	Leer, escuchar música y dibujar
E27	Cesar David Santos Uscategui	14	M	El sol	Ibagué-Tolima	La disciplina es la clave del éxito	videojuegos
E28	Jhon Jaider	16	M	Daniel	Yopal-		Futbol

Código	Apellidos y Nombres	Edad	Género	Barrio	Lugar de Nacimiento	Frase	Pasatiempos favorito
	Severiche Silva			Jordán	Casanare		
E29	Nathalia Tarazona Bautista	13	F	El Sol	Los Patios	Soldado avisado no muere en guerra	Escuchar música o leer libros
E30	Jessica Tatiana Torres Buitrago	13	F	Tierralinda	Tibú	Soldado avisado no muere en guerra y si muere es por descuidado	Escuchar música
E31	Angie Yarithza Urbina Urbina	14	F	Videlso	Cúcuta	Lograr lo que nos proponemos	Jugar futbol
E32	Angelith Vera Ruiz	14	F	Llanitos	Los Patios	Si ves a alguien haciendo algo malo, no lo critiques, simplemente no lo copies	Leer
E33	Mariel Yamile Villalba Hernández	14	F	Altamira	Cúcuta	Que más cómo te fue	Molestar con mi sobrina y estar con mi familia
E34	Carlos García	17	M	Tierralinda	Cúcuta	Si quieres algo consíguelo por ti mismo	Internet
E35	Andrés Juan Martínez Rivera	14	M	Tierra linda	Bogotá	Nunca sabes lo que tienes hasta que lo puerdes	Jugar futbol
E36	Álvaro Daniel Martínez Rivera	16	M	Tirralinda	Cúcuta	El que a hierro mata a hierro morirá	Jugar futbol

3.4 Instrumentos para la Recolección

La recolección de los datos en una investigación cualitativa permite obtener información relevante para analizarla, compararla y encontrar características que nos lleven a conclusiones relevantes acerca de un objeto de estudio. Hernández Sampieri, et. al. (2010) describe los principales métodos para la recolección de información:

> La observación, la entrevista, los grupos de enfoque, la recolección de documentos y materiales, y las historias de vida. El análisis cualitativo implica organizar los datos recogidos, transcribirlos a texto cuando resulta necesario y codificarlos. La codificación tiene dos planos o niveles. Del primero, se generan unidades de significado y categorías. Del segundo, emergen temas y relaciones entre conceptos. Al final se produce teoría enraizada en los datos (p. 406).

Entre los instrumentos para la recolección de la información se tiene el diario pedagógico, datos fotográficos, la observación directa, videos, pre-test y pos-test herramientas que sirvieron para el análisis de la información y el reflejar los resultados de la presente propuesta, a continuación se detallan estos instrumentos:

3.4.1 Diario pedagógico. El instrumento para la recolección de información es el diario pedagógico, cuyo contenido tendrá las descripciones correspondientes a la aplicación de los proyectos de aula en el aprendizaje de la función: la función cuadrática, a través del modelo de razonamiento de Van Hiele y la aplicación de GeoGebra como recurso didáctico. La idea es aplicar y reflexionar sobre el proceso de aprendizaje, verificar aprendizajes significativos, o con situaciones a mejorar.

Porlan & Matín (1998) en su obra El diario del profesor, menciona el diario cómo guía para la investigación, que permite ser usado como instrumento para detectar problemas, y posibilitar el intercambio de información entre el estudiante y el profesor, convirtiéndose según Porlan en un instrumento para transformar las prácticas de aula. Para el autor, el diario del profesor es: "una guía para la reflexión sobre la práctica, favoreciendo la toma de conciencia del profesor sobre su proceso de evolución y sobre sus modelos de referencia" (p. 23).

En el mismo sentido Fernández & Roldán (2012) describen el diario pedagógico cómo:

> El diario pedagógico se concibe como un texto escrito que,... registra experiencias, sin embargo adquiere un sentido de carácter más epistemológico que narrativo, en la medida: en que no se limita a la narración de anécdotas, sino que éstas tienen un sustento pedagógico originado en los resultados obtenidos por los facilitadores en determinado momento, los cuales dan lugar a prácticas pedagógicas que se deben tener en cuenta como parte de la cualificación del proceso educativo (p. 119).

Estos referentes teóricos sirvieron de base para la construcción de los diarios convirtiéndose en la materia prima para determinar los análisis de las prácticas de aula y los aprendizajes de los estudiantes. En este diario pedagógico se describieron los análisis de las prácticas pedagógicas así como las habilidades y competencias que los estudiantes desarrollaron, desarrollaron con o sin éxito. El formato se resume en el anexo 3.

3.4.2 Datos fotográficos. Las fotografías se convierten en algunos casos en fuente de información para dar muestras de los avances de los estudiantes, Según Elliot (2000) se pueden captar aspectos visuales de una situación, y además expresa que en el contexto de la investigación acción en el aula, pueden recoger los siguientes aspectos visuales:

- Los alumnos, mientras trabajan en el aula.
- Lo que ocurre a espaldas del profesor.
- La distribución física del aula.
- La pauta de organización social del aula; por ejemplo: si los alumnos trabajan en grupos, de forma aislada o sentados en filas mirando al profesor (p. 98).

3.4.3 La observación directa. La observación es una acción o actividad para asimilar información, que puede implicar el registro de la misma. Consiste en examinar atentamente los hechos y fenómenos que perciben nuestros sentidos. Para este trabajo la observación es una herramienta importante que se evidencia en los diarios pedagógicos y corresponde a hechos relacionados con el trabajo de investigación cómo reacción ante los aciertos y antes las dificultades, actitudes, ante el aprendizaje de las tareas asignadas a los participantes. Sobre la observación Stake (1999, citado por Bedoya, 2014) expresa que las observaciones "conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso" (p. 47). En el mismo sentido Hernández Sampieri, et. al. (2010), describe que la observación es un método de recolección de información que "consiste en el registro sistemático, válido y confiable de comportamientos y situaciones observables, a través de categorías y subcategorías" (p. 261).

Esta herramienta de recolección de información permitió tomar información detallada del razonamiento de los estudiantes, así como también de algunas aptitudes y actitudes que se detallan en el diario pedagógico, como sus diferentes comportamientos, de concentración, frustración y de actitud ante las estrategias pedagógicas aplicadas.

3.4.4 grabaciones de videos. Las grabaciones de videos corresponden al uso de elementos como videocámaras donde se observe y escuchen las diferentes intervenciones de los participantes o investigador con la finalidad de verificar situaciones que suceden durante la interacción de estos en una investigación. En el ámbito educativo, los videos pueden usarse para grabar clases, total o parcialmente. Los beneficios de las grabaciones al escucharlas o mirarlas evidencia episodios que resultan interesantes o importantes (Elliot, 2000, p. 99). Se presenta como una herramienta muy útil que además muestra situaciones que no son de fácil observación para el investigador, Se filmaron algunas actividades para analizar algunas situaciones que el profesor no alcanza a observar, sobre todo cuando está orientando a los estudiantes.

De esta manera con las grabaciones de videos se tuvo la oportunidad de mirar la práctica en el aula y de analizar algunos aspectos del grupo en general, cómo los estudiantes que esperan que otros produzcan, cómo los que trabajan en grupo, algunas competencias de comportamiento entre otros.

3.4.5 Pre-test. El pre-test o prueba diagnóstica fue diseñada y aplicada como prueba inicial para verificar los saberes y pre saberes que los participantes tenían acerca de la función y la función cuadrática, con el fin de ubicar a los estudiantes en un nivel de razonamiento inicial, acerca del objeto de estudio. La mayoría de las preguntas correspondía a preguntas abiertas donde los participantes resolvieron sus tareas y cuyas conclusiones sirvieron como punto de partida para el diseño de las estrategias pedagógicas pertinentes.

3.4.6 Pos-test. El pos-test consistió en una prueba de conocimiento acerca del objeto de estudio donde se establecieron 20 preguntas, algunas analíticas otras contextualizadas de selección múltiple con única respuesta. La intención del pos-test fue verificar los diferentes avances del estudiante con miras a establecer diferencias con el pre-test. De esta manera se tuvo la oportunidad de verificar si los estudiantes avanzaron del nivel de reconocimiento al nivel de análisis del estudio de la función cuadrática.

3.5 Validación de los Instrumentos

Según Cisterna (2005) es muy común que en una investigación cualitativa se utilice más de un instrumento para recoger la información. En esta investigación, los instrumentos que se seleccionaron para realizar la triangulación y emitir el análisis final, fueron la observación directa, el diario de campo y los registros fílmicos y fotográficos, el pre-test y pos-test; Así mismo, el análisis del PEI y los resultados en las pruebas saber también fueron instrumentos de recolección de información, estos fueron acordados y validados por el director de tesis. De esta manera la validez de expertos es una de las formas como se sustenta la validación de los instrumentos para este proyecto, en ese sentido Hernández Sampieri et. al. (2010) menciona la “face validity”, o validez de expertos se refiere al grado en que aparentemente un instrumento de medición mide la variable en cuestión, de acuerdo a “voces calificadas” esta se encuentra vinculada a la validez del contenido (p. 204).

En ese orden, sobre el pre-test, pos-test y de las diferentes sesiones de cada proyecto, fueron revisadas una a una, por docentes, pares, especialistas en el área de matemáticas, que realizaron las sugerencias y puntos de vista, cuyos aportes ayudaron a reformar situaciones que no eran tan claras para los estudiantes, estos docentes corresponden a pares idóneos de la institución educativa donde se llevó a cabo el proyecto, dos docentes: Miguel Roberto Claro y Euclides Portilla. Sobre el diario pedagógico, se siguió las recomendaciones en las dadas por los profesores de la maestría de la UNAB donde se estipulan las características ya descritas.

3.6 Resultados y Discusión

La estrategia para el análisis de la información se hará a través de la triangulación. La triangulación es una estrategia para recolectar, analizar y contrastar información de diferentes fuentes con el fin de determinar relaciones que conduzcan a conclusiones y hallazgos de una investigación; Hernández Sampieri, et. al. (2010) “al hecho de utilizar diferentes fuentes y métodos de recolección, se le denomina triangulación de datos” (p. 439).

> Existen cuatro tipos de triangulación 1) triangulación de datos (tiempo, espacio y persona) 2) triangulación de investigador que consiste en el uso de múltiples observadores de un mismo tipo de objeto, 3) triangulación teórica de múltiples perspectivas y 4) triangulación metodológica que puede implicar triangulación dentro de métodos y triangulaciones entre métodos (Valencia, 2000, p. 16).

Para este estudio se va asumir la triangulación metodológica para el análisis de la información usando como fuentes el diario pedagógico, datos fotográficos, y la observación directa, videos, pre-test y pos-test.

Para los resultados y discusión el investigador establece unas categorías iniciales, categorías propuestas como resultado del análisis de las competencias y los proyectos diseñados. Los factores de enseñanza están asociados a los aprendizajes correspondientes a la temática diseñada en las sesiones y actividades para abordar el objeto de estudio desde la óptica de la experiencia del investigador y el análisis de algunos textos. Los factores de aprendizaje se refieren a las habilidades, competencias que los estudiantes deben desarrollar con la implementación de la estrategia pedagógica, en las siguientes tablas se muestran las categorías y subcategorías definidas para el análisis.

Tabla 17. Categorías iniciales - factores de enseñanza

CATEGORIA	SUBCATEGORIA	SUBCATEGORIA1	SUBCATEGORIA2	CODIGO
Función C	Concepto de función C.1			[C.1]
	Elementos de una función C.2	Dominio		[C.2.1]
		Codominio		[C.2.2]
		Rango		[C.2.3]
		Grafo		[C.2.4]
	Función cuadrática C.3	Elementos C.3.1	Vértice	[C.3.1.1]
			Dominio	[C.3.1.2]
			Rango	[C.3.1.3]
			Intervalo de crecimiento	[C.3.1.4]
			Intervalo de decrecimiento	[C.3.1.5]
			Eje de simetría	[C.3.1.6]
		Gráfica		[C.3.2]
		Familias de la función cuadrática		[C.3.3]
		Solución de ecuación cuadrática		[C.3.4]
	Registros de representación C.4	Registro en lenguaje natural		[C.4.1]
		Registro simbólico algebraico		[C.4.2]
		Registro gráfico cartesiano		[C.4.3]
		Registro tabular		[C.4.4]
	Secuenciación C.5	Cambiando el contexto		[C.5.1]
		Traduciendo registros de representación		[C.5.2]
		Tratando el registro		[C.5.3]
		Usando GeoGebra		[C.5.4]
Intervención M	Aclaración			[M.1]
	Corrección			[M.2]
	Retroalimentación			[M.3]
	Reforzar			[M.4]

Tabla 18. Categorías iniciales - factores de aprendizaje

CATEGORIA	SUBCATEGORIA	SUBCATEGORIA 2	CÓDIGO
COMPETENCIAS D	COMUNICACIÓN D.1	características de gráficas cartesianas	[D.1.1]
		Características de las funciones	[D.1.2]
		Representar funciones	[D.1.3]
		Evaluar expresiones	[D.1.4]
		modelar situaciones de variación	[D.1.5]
	TECNOLOGIA D.2	Uso de GeoGebra	[D.2.1]
		Uso de Tablet	[D.2.2]
		Uso de Office	[D.2.3]
		Uso de recursos Web	[D.2.4]
	ACTITUDINALES D.3	Actitud positiva	[D.3.1]
		Predisposición	[D.3.2]
		Interés	[D.3.3]
		Motivación	[D.3.4]
		Atención	[D.3.5]
		Participación	[D.3.6]
		Emoción	[D.3.7]
Aprendizaje significativo A	Producción de ideas		[A.1]
	Razonamiento y observación		[A.2]
	Conocimientos previos		[A.3]
	Reconocimiento de la situación en contexto		[A.4]

Tabla 19. Categorías emergentes - factores de enseñanza

CATEGORIA	SUBCATEGORIA	SUBCATEGORIA1	SUBCATEGORIA2	CODIGO
Función [C]	Concepto de función [C1]	Relación		[C.1.1]
		Variable independiente		[C.1.2]
		Variable dependiente		[C.1.2]
	Elementos de una función [C.2]	Crecimiento		[C.2.5]
		decrecimiento		[C.2.6]
		Elementos [C.3.1]	Puntos de corte con el eje x	[C.3.1.7]
			Puntos de corte con el eje y	[C.3.1.8]
	Reforzar			[M.4]
	Animar			[M.5]

Tabla 20. Categorías emergentes - factores de aprendizaje

CATEGORIA	SUBCATEGORIA	SUBCATEGORIA 2	CODIGO
Competencias [D]	COMUNICACIÓN [D.1]	Traducir registros	[D.1.6]
	TECNOLOGIA [D.2]	Recursos web	[D.2.4]
	ACTITUDINALES [D.3]	concentración	[D.3.7]
Aprendizaje significativo [A]	Puesta en común		[A.5]

Tabla 21. Categoría final de factores de enseñanza

CATEGORIA	SUBCATEGORIA	SUBCATEGORIA1	SUBCATEGORIA2	CODIGO
Función [C]	Concepto de función [C1]	Relación		[C.1.1]
		Variable independiente		[C.1.2]
		Variable dependiente		[C.1.2]
	Elementos de una función [C.2]	Dominio		[C.2.1]
		Codominio		[C.2.2]
		Rango		[C.2.3]
		Grafo		[C.2.4]
		Crecimiento		[C.2.5]
		decrecimiento		[C.2.6]
	Función cuadrática [C.3]	Elementos [C.3.1]	Vértice	[C.3.1.1]
			dominio	[C.3.1.2]
			Rango	[C.3.1.3]
			Intervalo de crecimiento	[C.3.1.4]
			Intervalo de decrecimiento	[C.3.1.5]
			Eje de simetría	[C.3.1.6]
			Puntos de corte con el eje x	[C.3.1.7]
			Puntos de corte con el eje y	[C.3.1.8]
		Gráfica- parábola		[C.3.2]
		Familias de la función cuadrática		[C.3.3]
		Solución de ecuación cuadrática		[C.3.4]
	Registros de representación [C.4]	Registro en lenguaje natural		[C.4.1]
		Registro simbólico algebraico		[C.4.2]
		Registro gráfico cartesiano		[C.4.3]
		Registro tabular		[C.4.4]
	Secuenciación [C.5]	Cambiando el contexto		[C.5.1]
		Traduciendo registros de representación		[C.5.2]
		Tratando el registro		[C.5.3]
		Usando GeoGebra		[C.5.4]
Intervención [M]	Aclaración			[M.1]
	Corrección			[M.2]
	Retroalimentación			[M.3]
	Reforzar			[M.4]
	Animar			[M.5]

Tabla 22. Categorías final de factores de aprendizaje

CATEGORIA	SUBCATEGORIA	SUBCATEGORIA 2	CODIGO
COMPETENCIAS [D]	COMUNICACIÓN [D.1]	características de gráficas cartesianas	[D.1.1]
		Características de las funciones	[D.1.2]
		Representar funciones	[D.1.3]
		Evaluar expresiones	[D.1.4]
		modelar situaciones de variación	[D.1.5]
		Traducir registros	[D.1.6]
	TECNOLOGIA [D.2]	Uso de GeoGebra	[D.2.1]
		Uso de Tablet	[D.2.2]
		Uso de Office	[D.2.3]
		Recursos web	[D.2.4]
	ACTITUDINALES [D.3]	Actitud positiva	[D.3.1]
		Predisposición	[D.3.2]
		Interés	[D.3.3]
		Motivación – ambiente agradable	[D.3.4]
		Atención	[D.3.5]
		Participación	[D.3.6]
		Emoción	[D.3.7]
Aprendizaje significativo [A]	Producción de ideas		[A.1]
	Razonamiento y observación		[A.2]
	Conocimientos previos		[A.3]
	Reconocimiento de la situación en contexto		[A.4]
	Puesta en común		[A.5]

3.6.1 Análisis de resultados I fase: año 2016

3.6.1.1 Resultados de la fase 1. El inicio de esta fase estaba centrado en el uso del software, así que se inició primero la experimentación de cómo los participantes se acoplaban a las características del software, y aunque fue lento en los primeros 5 minutos los estudiantes le fueron tomando confianza.

En las intervenciones de Agosto se puso a prueba la aplicación GeoGebra [D.2.1] descargada de Google Play, verificándose que el uso es adecuado para muchos temas de geometría y de funciones, permitiendo la interactividad entre la vista geométrica y la vista algebraica. Los estudiantes lucieron cómodos, concentrados [D.3.7] en las actividades propuestas. El software y la Tablet se convierten en un agente motivador hacia el aprendizaje de las matemáticas. [D.3.1]

En una de las actividades propuestas, los participantes fueron capaces de seguir instrucciones y verificar características de figuras que se formaron, una de esas tareas fue el trabajar con los puntos medios de un triángulo y formar otro triángulo, y repetir hasta obtener la figura exigida.

Hubo producción diferente en cada estudiante pero mantuvieron las instrucciones. El otro suceso es que se divirtieron en las actividades realizadas, lucieron contentos [D.3.4] y compartiendo con el compañero del lado, los resultados obtenidos. Al revisar el trabajo individual se pudo constatar que la mayoría realizó el trabajo asignado.

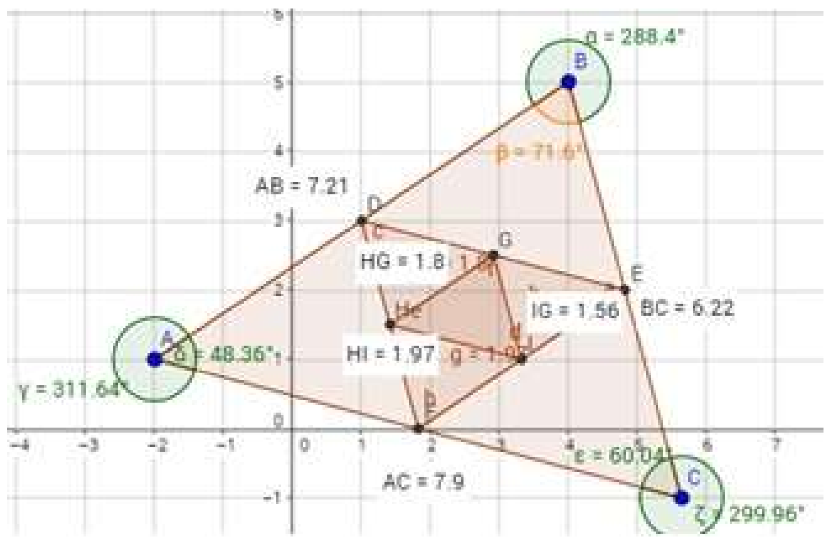


Figura 14. Esquema de una tarea en la actividad 3 2016

Figura 15. Estudiantes realizando tareas con GeoGebra [D.2.1][D.2.2]

Las siguientes conclusiones, corresponden a actividades donde se incluye el Modelo de Van Hiele, el modelo dará soporte didáctico a todas las actividades. Sobre las actividades del mes de septiembre se tienen las siguientes conclusiones:

La combinación del modelo de razonamiento de Van Hiele y GeoGebra se convierte en una estrategia de aprendizaje para animar a los estudiantes a interesarse por las matemáticas. En este taller se pudo observar lo concentrados y animados que estuvieron los participantes. [D.3.7].

Para la actividad 1, Se presenta una situación desencadenante, mostrando situaciones de la vida cotidiana donde las rectas se hacen evidentes. Y se les pregunta ¿Qué características tienen algunas de las líneas que se forman en las figuras [D.1.1]? Algunos estudiantes cómo E10 responde: “En todas las figuras, encontramos diferentes líneas, que forman varias figuras, hay líneas paralelas, otras se entrecortan, forman triángulos, cuadrados, rectángulos, y hay similitudes entre las figuras 2 y 3.”

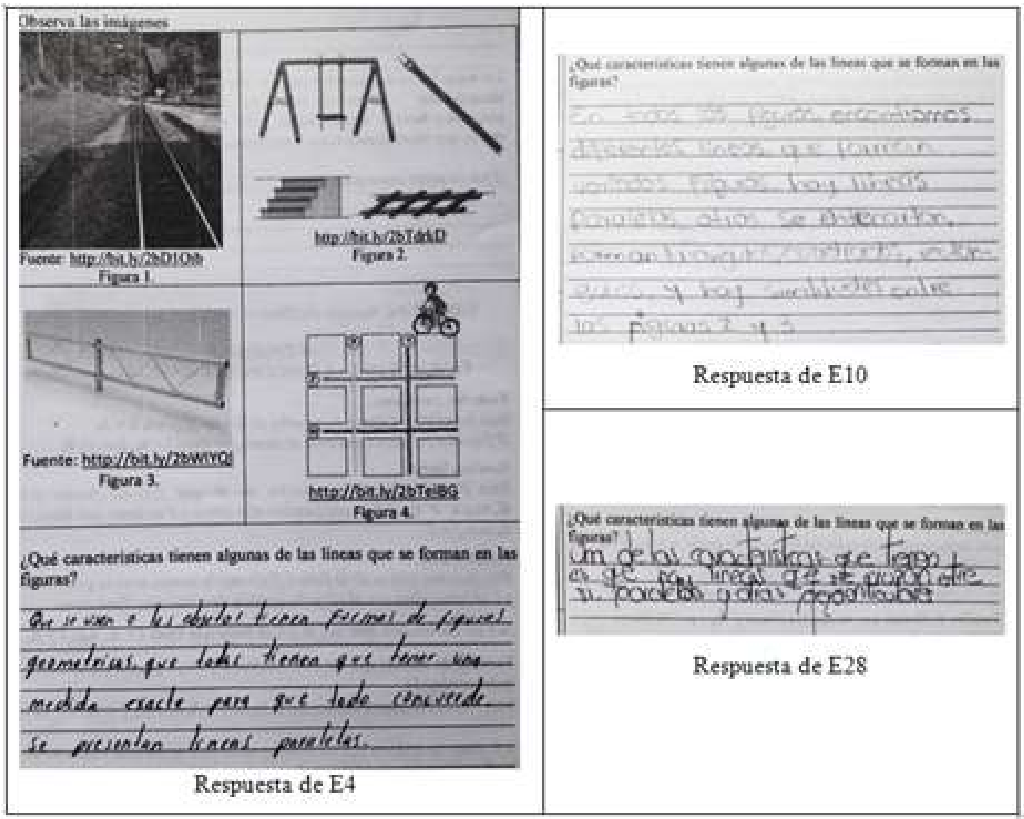


Figura 16. Respuestas de los participantes E10 y E28-paralelas y perpendiculares

Cuando se guía a los participantes para realicen una recta en el área de trabajo utilizando las coordenadas (-1. 2) y (4,3), lo realizan muy bien, el software construye una recta que pasa por los puntos indicados. Al preguntar a los estudiantes sobre ¿Qué es una recta? Algunos participantes se centran en la línea con los dos puntos cómo E22 opina “Es una línea que pasa por dos puntos” cómo también lo hace E2, E7, E9, E12, E14, E16, E18, E20, E23, E26, E28, E29, luego del refuerzo los estudiantes asumieron que son infinitos puntos y que deben ser colineales.

E11 escribe que es “una línea recta que no tiene inicio ni fin” Esa misma idea la comparte E10, E30, E5, E3, E19. E4 expresa que una recta es “una secuencia que se forma al unir dos o más puntos y es infinita, se traza una línea para la unión de los puntos.” La idea de la unión de dos puntos o más, la comparten también E8.

Otra conclusión importante de resaltar de esta actividad es a la pregunta: ¿cuántas rectas pueden pasar por un punto? E18. Responde “pasan muchas rectas, prácticamente es imposible contarlas, son infinitas” La mayoría de los estudiantes dicen que infinitas, cómo E29, E31, E11., E1, E7, E12, E2 y quince estudiantes más. Algunos estudiantes construyen un ejemplo cuando se les dicen que usen el programa para demostrar con una prueba que puede pasar una o más de una recta por un punto. En la siguiente imagen se muestra una evidencia de ella. [D.1.1] [D.1.2]

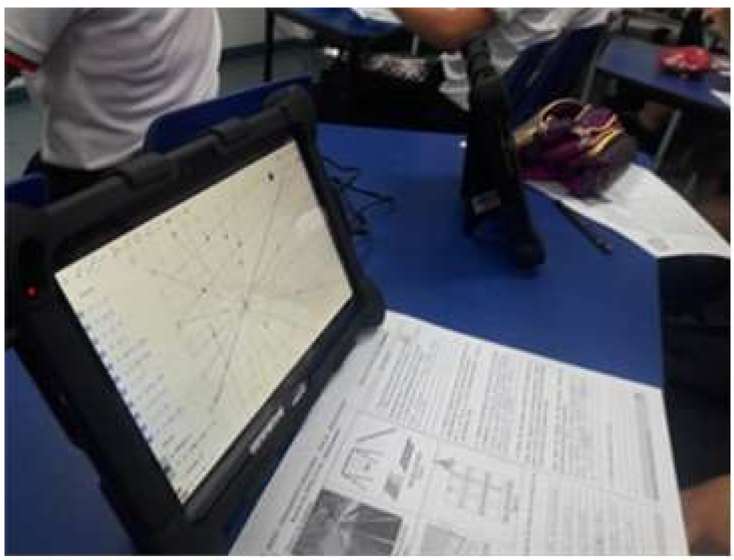


Figura 17. Gráfica para mostrar rectas infinitas por un punto, respuesta de E10

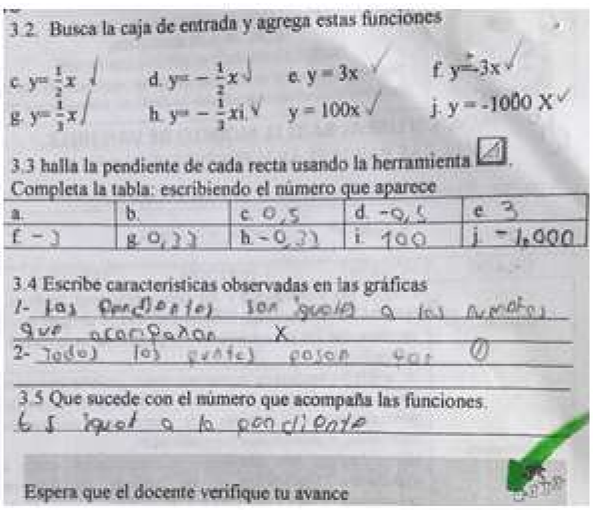
El software se convierte en un artefacto mediador para el aprendizaje de los estudiantes, y se muestra en algunos razonamientos de los estudiantes.

Es bastante significante el uso del recurso GeoGebra, donde rápidamente algunos participantes construyeron una forma rápida de explicar que por un punto pueden pasar infinitas rectas.

Algunos autores como Hohenwarter & Fuchs (2004) expresa que “El protocolo de construcción de GeoGebra permite volver a hacer construcciones en cualquier momento, insertar nuevos elementos e incluso cambie su orden en retrospectiva. Siempre que los estudiantes están entrando o eliminar las expresiones que deben estar al tanto de las dependencias funcionales" De igual forma Ruiz & Villa (2013) afirman que:

> GeoGebra puede asumirse como una herramienta didáctica, puesto que es un elemento físico o simbólico que, dentro del aula de clase, provee de cierta ventaja al maestro para la presentación de una temática particular, y que a la vez le proporciona al estudiante una forma de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados en el estudio de ciertos conceptos procedimientos.

Entre las conclusiones de la actividad 2 los participantes asimilaron que la pendiente en la función lineal corresponde al coeficiente en la expresión de la forma y = ax. E2 muestra el trabajo realizado en su guía de trabajo.



3.2 Busca la caja de entrada y agrega estas funciones

c. $y=\frac{1}{2}x$ d. $y=-\frac{1}{2}x$ e. $y=3x$ f. $y=-3x$

g. $y=\frac{1}{3}x$ h. $y=-\frac{1}{3}x$i. $y=100x$ j. $y=-1000$ X

3.3 halla la pendiente de cada recta usando la herramienta
Completa la tabla: escribiendo el número que aparece

a.	b.	c. 0,5	d. -0,5	e. 3
f. -3	g. 0,33	h. -0,33	i. 100	j. -1,000

3.4 Escribe características observadas en las gráficas

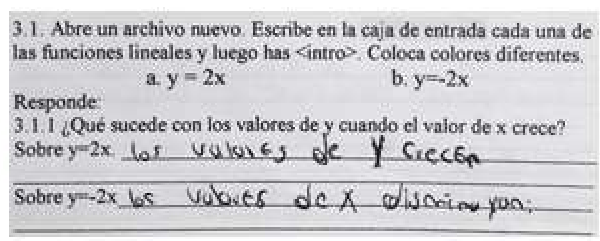
1- los pendientes son iguales a los números que acompañan X

2- Todos los puntos pasan por 0

3.5 Que sucede con el número que acompaña las funciones.

Es igual a la pendiente

Espera que el docente verifique tu avance



3.1. Abre un archivo nuevo. Escribe en la caja de entrada cada una de las funciones lineales y luego has <intro>. Coloca colores diferentes.

a. y = 2x b. y=-2x

Responde:

3.1.1 ¿Qué sucede con los valores de y cuando el valor de x crece?

Sobre y=2x los valores de Y crecen

Sobre y=-2x los valores de X disminuyen.

Figura 18. Respuesta de E2 en taller de función lineal y afín

Cuando se trata de mostrar características de la función lineal de una manera rápida, GeoGebra [D.2.1] permite esta función, es así que en la retroalimentación del taller se realizó de una forma rápida permitiendo estudiar las rectas paralelas al eje **X**, paralelas al eje **Y** y la función afín.

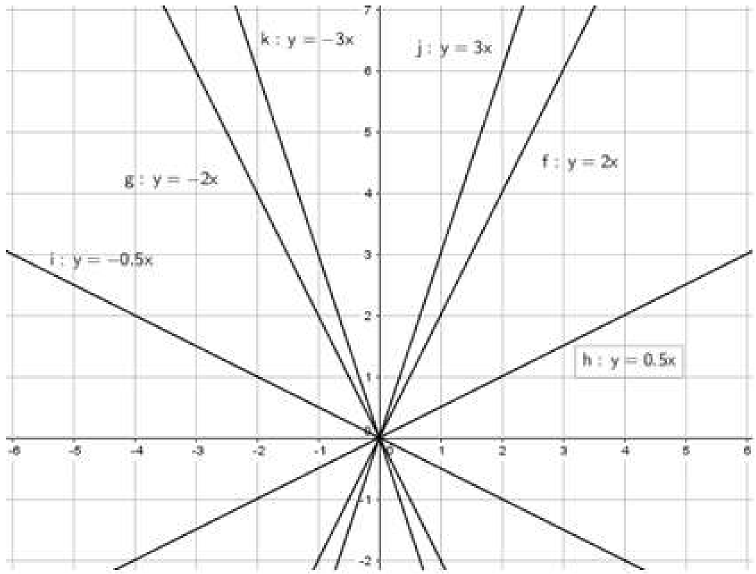


Figura 19. Ejemplo de una tarea del taller de función lineal

En el mes de Octubre luego de establecer un diseño de trabajo con el Modelo de Van Hiele y el software GeoGebra se dispone aplicar un diagnóstico diseñando dos proyectos de Aula el primero acercamiento al concepto de función y el segundo tipos de función la función cuadrática A continuación se mostrará los resultados de algunas sesiones en orden de aplicación.

Diagnóstico. Sobre el diagnóstico los participantes describen situaciones que se observan relacionando algunos objetos con características comunes. Se observa en la forma como los estudiantes responden, cuando se trata de justificar si una relación es función [C.1] o no son tan claros. La mayoría de las respuestas de los estudiantes se encuentran en el nivel 1 de razonamiento E1 y E29 muestran bien el dominio y el rango de la función al igual que 28 participantes. [C.2 – D.1.2 – D.1.1]

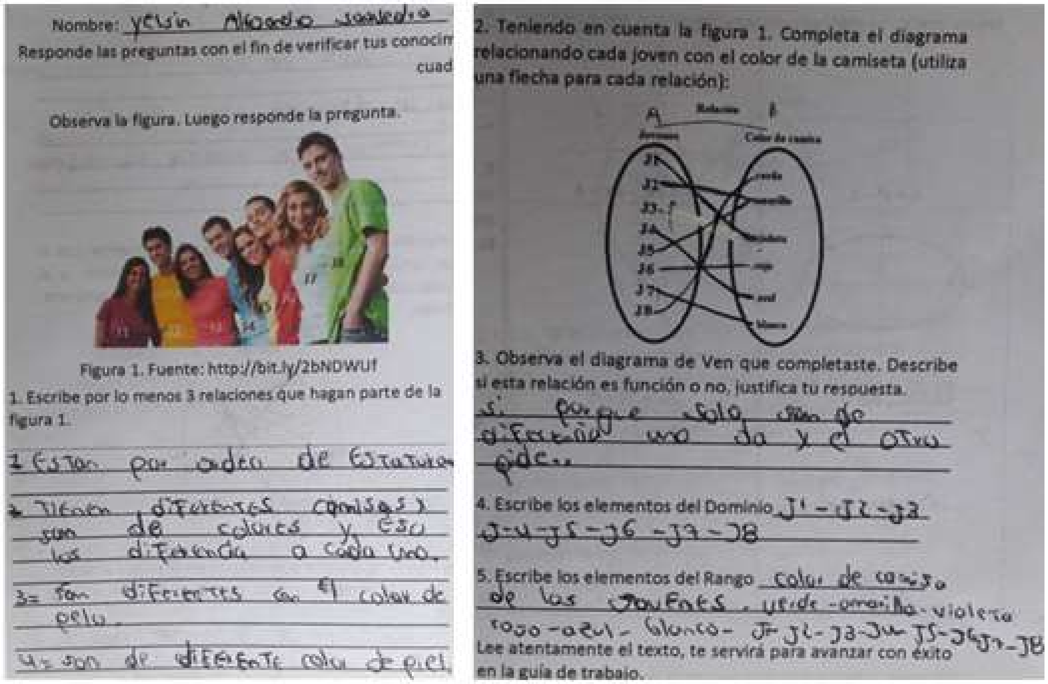


Figura 20. Respuestas de E29 a la preguntas 1,2, 3, 4 y 5 – taller diagnóstico

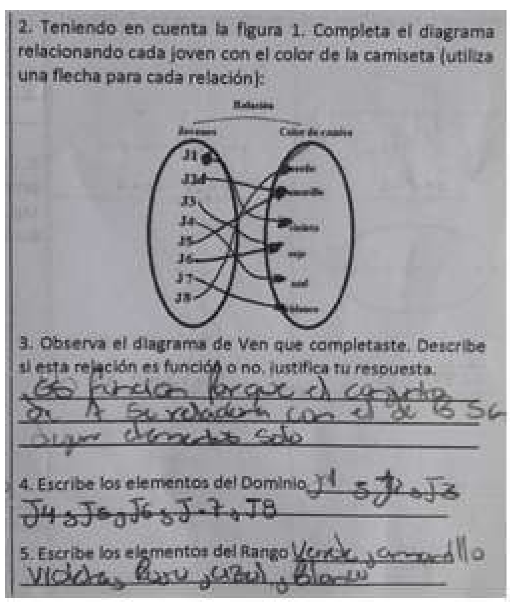


Figura 21. Respuestas de E1 a la preguntas 2, 3, 4 y 5 taller diagnóstico

Cuando se les orienta sobre cómo determinar si una función en el plano cartesiano representa una función 24 estudiantes lo realizan bien E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E19, E20, E21, E29, E30, E31 y E32. Los estudiantes marcan las relaciones en el plano cartesiano que representan funciones; se escriben las respuestas de E10 y E32:

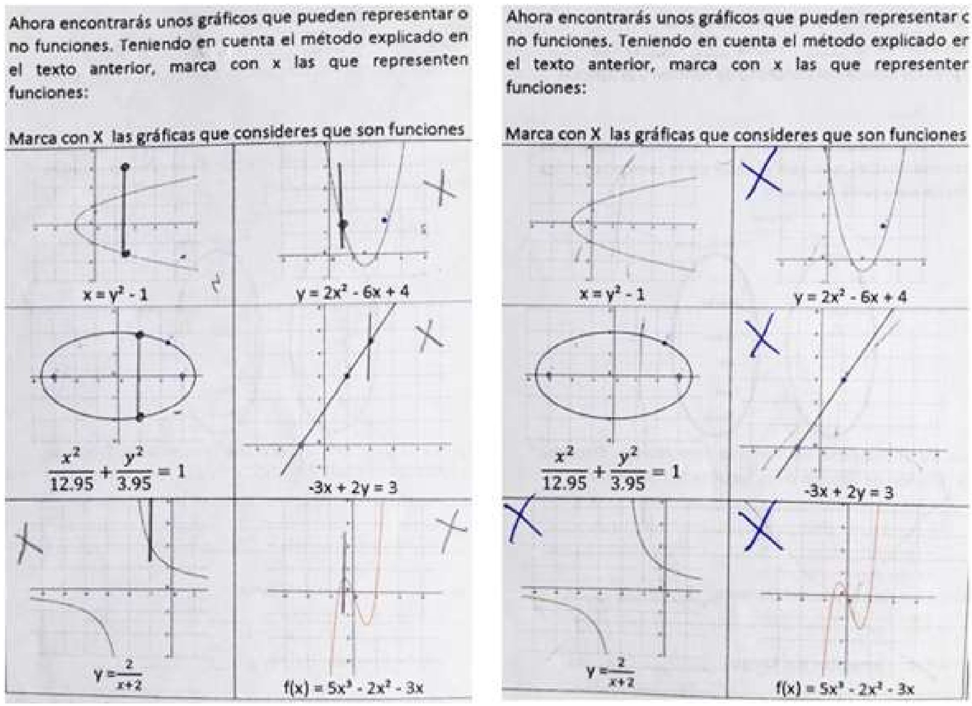


Figura 22. Respuestas de E10 y E32 de la pregunta 6 – taller diagnóstico

Sólo E6, E7, E10, E11, E12, E21, E22 muestran la prueba de la línea vertical en la guía de trabajo. La mayoría de los estudiantes muestran capacidad para responder preguntas de nivel 2. Cuando se analiza las respuestas de las preguntas de nivel 3 la mayoría presenta dificultades para argumentar si un gráfico sagital representa una función. Realizan sus análisis pero algunos participantes se salen del contexto de la pregunta.

Luego de la corrección correspondiente para que todos los estudiantes comprendieran el desarrollo de la situación, se pudo observar que algunos estudiantes les quedó clara la situación.

Proyecto I – sesión 1 – actividad 1. Las tareas de la actividad tenían el propósito motivar al estudiante hacia el estudio de funciones, de mostrarles a los participantes un poco de historia y de ubicar a los estudiantes en el nivel 1 en los niveles de razonamiento de Van Hiele con situaciones para inducir al concepto de relación. Sobre estos aspectos se encontró que los estudiantes realizan operaciones de observación y descripciones acerca de la figura mostradas. Entre los resultados de las tres primeras preguntas se tiene lo siguiente: al solicitarles a los participantes que realicen listas de objetos, personas o cosas con características comunes la mayoría realiza descripciones que correspondes a la situación, a continuación se muestran los desarrollos de E20 y E25:

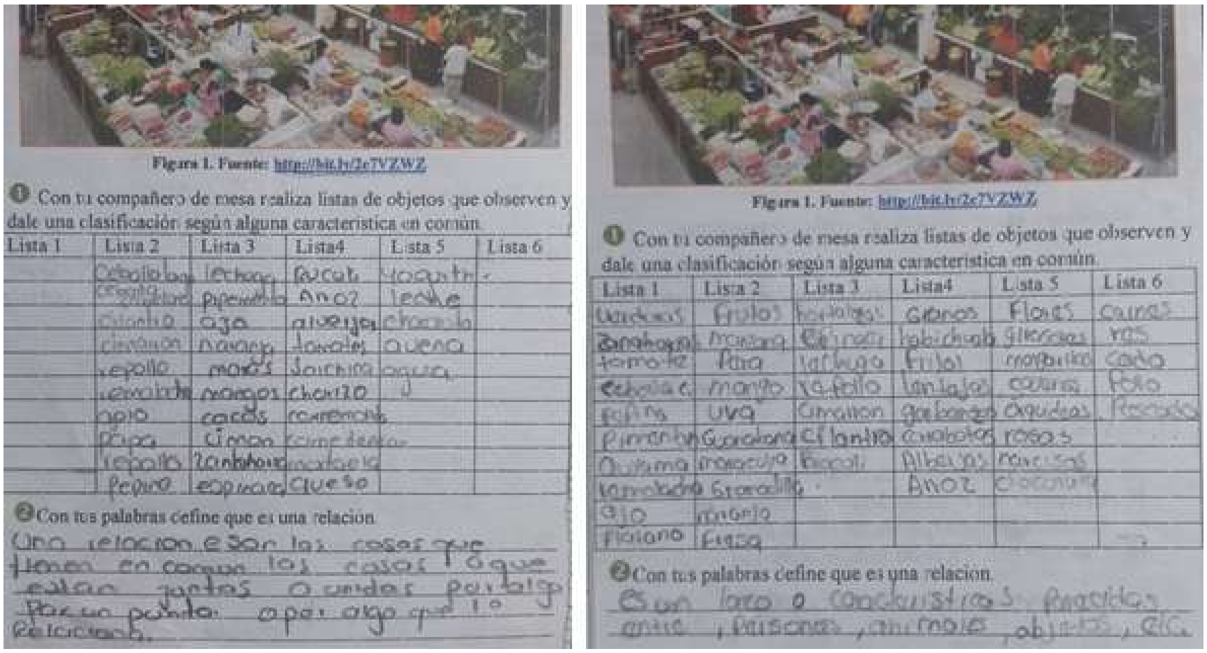


Figura 1. Fuente: http://bit.ly/2c7VZWZ

❶ Con tu compañero de mesa realiza listas de objetos que observen y dale una clasificación según alguna característica en común.

❷ Con tus palabras define que es una relación

Una relacion es son las cosas que tienen en comun las cosas o que estan juntas o unidas por algo por un punto o por algo que lo relaciona.

Figura 1. Fuente: http://bit.ly/2c7VZWZ

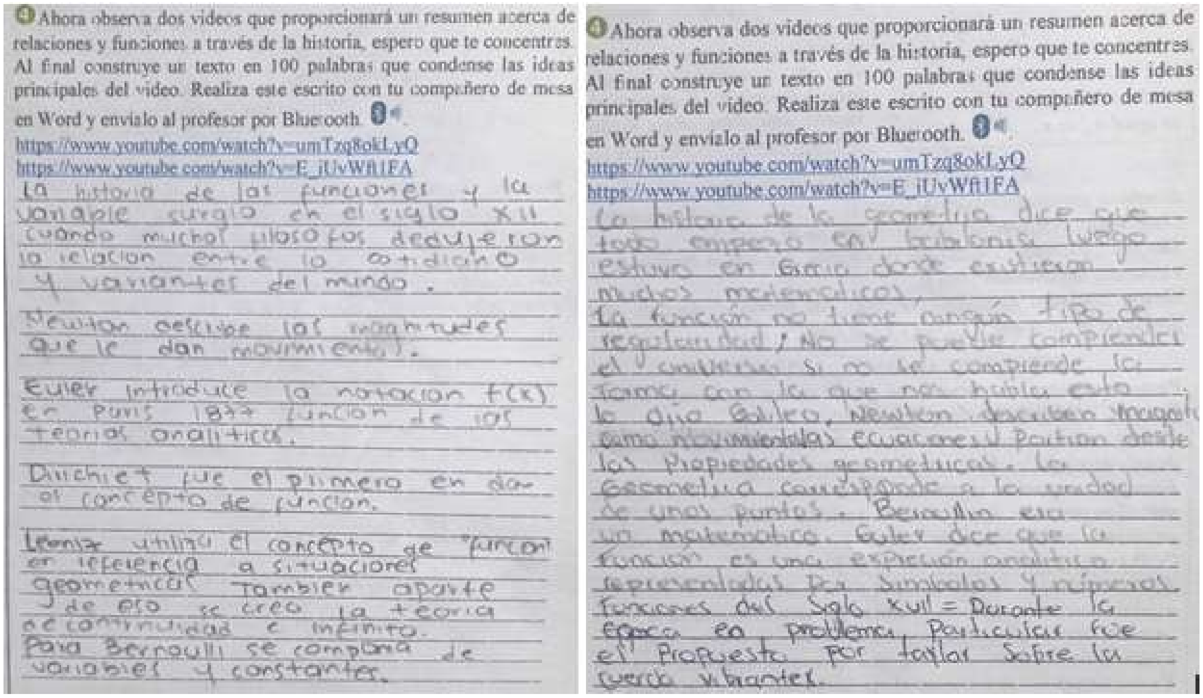
❶ Con tu compañero de mesa realiza listas de objetos que observen y dale una clasificación según alguna característica en común.

❷ Con tus palabras define que es una relación

Es un lazo o caracteristicas parecidas entre, personas, animales, objetos, etc.

Figura 23. Respuestas de E20 yE25 sobre las preguntas 1 y 2, Actividad 1 – Sesión 1

Sobre la pregunta 4 los estudiantes observaron dos videos [D.2.4] cortos hacerla de la historia del concepto de función [C.1] y debían realizar una síntesis acerca de las ideas mostradas. Sobre esta tarea algunos estudiantes realizaron síntesis que luego compartieron con los estudiantes, E6 y E11 muestran un detalle de ese resumen.



Ahora observa dos videos que proporcionará un resumen acerca de relaciones y funciones a través de la historia, espero que te concentres. Al final construye un texto en 100 palabras que condense las ideas principales del video. Realiza este escrito con tu compañero de mesa en Word y envíalo al profesor por Bluetooth.
https://www.youtube.com/watch?v=umTzq8okLyQ
https://www.youtube.com/watch?v=E_jUvWft1FA

La historia de las funciones y la variable surgio en el siglo XII cuando muchos filosofos dedujeron la relacion entre lo cotidiano y variantes del mundo.

Newton describe las magnitudes que le dan movimientos.

Euler introduce la notacion f(x) en Paris 1877 funcion de los teorias analiticas.

Dirichlet fue el primero en dar el concepto de funcion.

Leibniz utiliza el concepto de "funcion" en referencia a situaciones geometricas. Tambien aparte de eso se creo la teoria de continuidad e infinito. Para Bernoulli se compone de variables y constantes.

Ahora observa dos videos que proporcionará un resumen acerca de relaciones y funciones a través de la historia, espero que te concentres. Al final construye un texto en 100 palabras que condense las ideas principales del video. Realiza este escrito con tu compañero de mesa en Word y envíalo al profesor por Bluetooth.
https://www.youtube.com/watch?v=umTzq8okLyQ
https://www.youtube.com/watch?v=E_jUvWft1FA

La historia de la geometria dice que todo empezo en Babilonia luego estuvo en Grecia donde existieron muchos matematicos. La función no tiene ningún tipo de regularidad / No se puede comprender el universo si no se comprende la forma con la que nos habla esto lo dijo Galileo. Newton describen magnitudes como movimientos ecuaciones y Pasition desde las propiedades geometricas. La geometria corresponde a la unidad de unos puntos. Bernoulli era un matematico. Euler dice que la función es una expresión analitica representadas por simbolos y números. Funciones del siglo XVII = Durante la epoca en problemas particular fue el propuesto por taylor sobre la cuerda vibrantes.

Figura 24. Respuestas de E11 y E6 sobre la pregunta 4 actividad 1 - sesión 1

Los recursos de la Web [D.2.4] como videos se convierten en fuente de información para reforzar aprendizajes de los estudiantes, en este caso resultó oportuno brindar información acerca de la historia de la función [C.1] y la importancia de esta en la vida cotidiana. Los estudiantes lucieron motivados durante la actividad al manifestar interés [D.3.3] en la en las tareas asignadas y describir ideas acerca del contexto presentado.

Proyecto I – sesión 1 – actividad 2. Luego de mostrar una definición de función, las formas diferentes de notación de función, sobre los elementos y algunos registros de representación, a través de una lectura que aparece en la guía, se inicia las tareas desde una situación de variación, donde se plantaron 10 tareas enmarcadas en el Modelo de Van Hiele, en esas tareas se pone de manifiesto algunas características de la función y algunos registros de representación. Se enunciarán algunas conclusiones generales de la actividad.

De las 2 primeras tareas se resume que los participantes identifican la variable independiente y dependiente de la situación [C.1]. Sobre la tarea 3 que trata de la traducción de la situación del plano cartesiano al diagrama tabular [C.4], la mayoría identifica los puntos cuyas coordenadas son enteras, pero se confunden cuando se le asignan valores de la variable dependiente para determinar el valor correspondiente de la variable independiente. Sólo 5 participantes logran estimar esas coordenadas. De la tarea 4 todos los participantes interpretan bien la situación. Sobre la tarea 5, 17 participantes cómo E6, E8, E10, E12, E13, E14, E15, E18, E20, E22, E23 y E29 muestran la forma cómo justificaron la relación entre el registro de representación tabular [C.4.4] y representación simbólica algebraica [C.4.2].

Las situaciones de variación [D.1.5] resultan oportunas para el estudio de funciones [C], desde estos contextos se pueden tocar los diversos elementos y características de una función, cómo dominio, rango, codominio, crecimiento o decrecimiento, identificación de la variable independiente, traducción de registros de representación. [C.2 – C.4] Castiblanco, et. al. (2004), comenta la importancia del uso de los registros de representación donde afirma que "las gráficas y tablas son convenientes para modelar situaciones de cambio y la importancia de ejercitar las traducciones de una a otra de las distintas representaciones de una función" (p. 12).

Las siguientes respuestas corresponden E12 y E18 para confirmar como parte de las conclusiones.

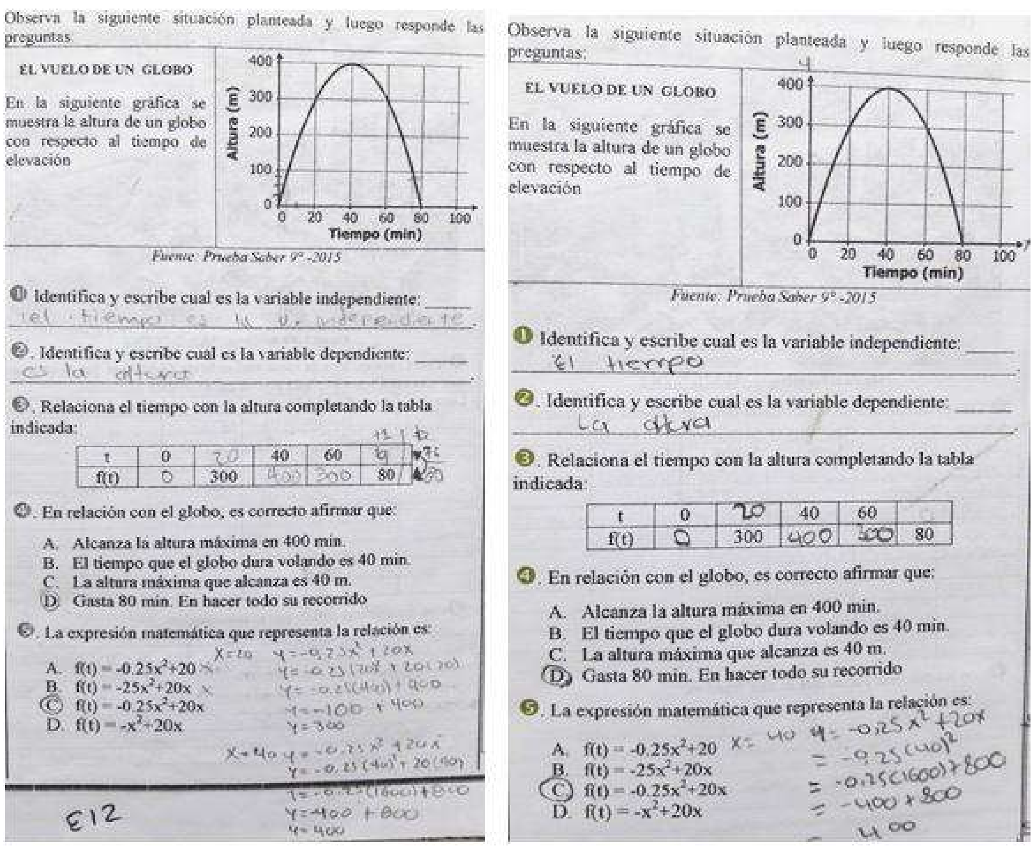


Figura 25. Respuestas de E12, E18 sobre las preguntas de la1 a la 5, actividad 2 – sesión 1

Sobre las tareas de las 6 a la 10 que trata de un diagrama sagital se pretende que desde esta gráfica se traduzca a otros registros de representación y que se identifiquen características cómo dominio, rango y codominio de la relación. Sobre los resultados la mayoría de los estudiantes responden de manera adecuada sobre la determinación del domino, rango y codominio de la situación de diagrama sagital presentada [C.2 – D.1.2], también la mayoría llevan a representación tabular, las expresan en parejas ordenadas. [C.4] En la tarea 10 de justificar si la situación de diagrama sagital representa o no una función, La mayoría respondió que la relación representa una función, pero argumentaron bien E3, E4, E5, E8, E10, E14, E16, E23, E26, E31, E32. A continuación se relacionan las respuestas de E14 y E16.

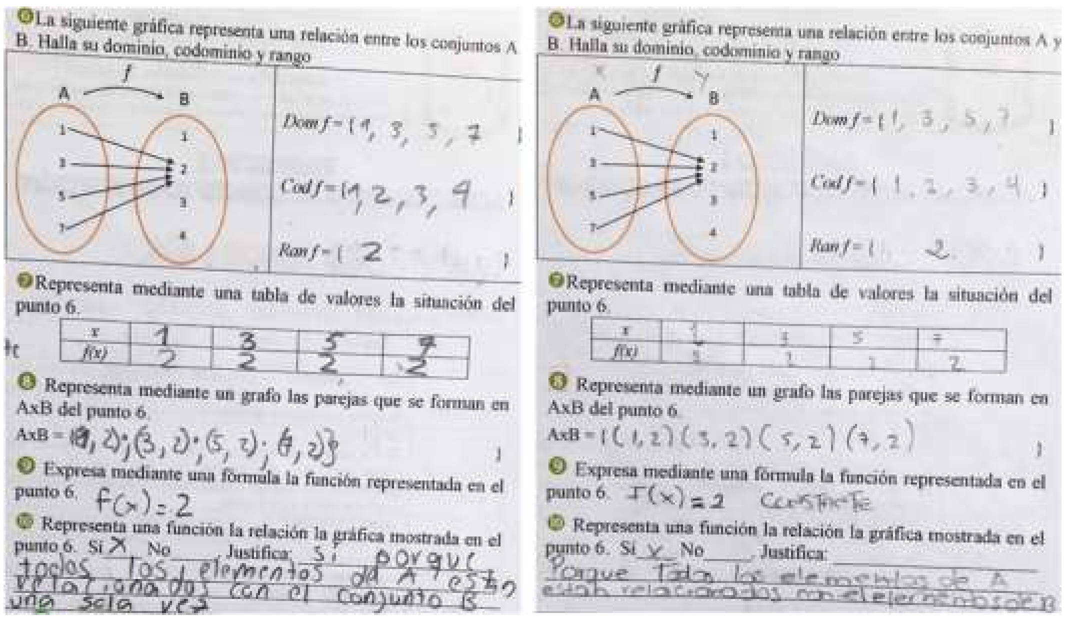


Figura 26. Respuesta de E14 y E15 a las preguntas de la 6 a la 10

Se pudo observar en las respuestas de los estudiantes niveles de razonamientos de nivel 2 reflejado en operaciones como traducción de registros de representación, determinación del dominio y rango de una relación funcional, reconocimiento y análisis de la situación presentada.

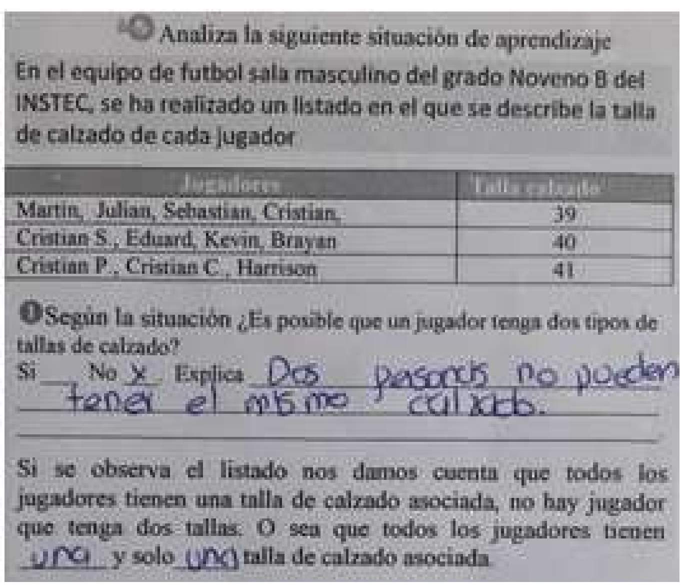
Las actividades de noviembre, se realizaron en grupos de 4 estudiantes para estudiar el rendimiento en trabajo colaborativo.

Proyecto I – sesión 2. La información de esta actividad no se recolecto en forma individual. La actividad la constituyen 6 tareas, donde los estudiantes analizaron 3 contextos diferentes, donde se pone de manifiesto el concepto de función y su identificación a partir de un gráfico cartesiano. La dirección desde el tablero fue permanente, el seguimiento fue más fácil durante la intervención. La tarea 1 consiste en una situación de relación funcional entre unos jugadores de futbol y la talla de calzado asociada. La mayoría de los grupos responden bien a la pregunta afirmando que "no" completando los espacios para justificar. En la guía grupal describen para justificar lo siguiente:

Tabla 23. Respuestas de la tarea 1 – proyecto I - sesión 1

Participantes	Justificación
G1	Porque para esto se hizo la respectiva encuesta y todos tenemos un calzado diferente
G2	Porque hay nos muestra el tipo de calzado que cada uno utiliza y solo puede utilizar y solo puede utilizar una sola talla
G3	porque todos tienen un calzado diferente
G4	Porque para eso se hizo la encuesta
G5	Dos personas no pueden tener el mismo calzado
G6	Parar eso se hizo la encuesta
G7	Porque todos tienen un calzado diferente
G8	Para eso se hizo la encuesta de la talla de calzado

Se muestran las respuestas del grupo 5:



Analiza la siguiente situación de aprendizaje

En el equipo de futbol sala masculino del grado Noveno B del INSTEC, se ha realizado un listado en el que se describe la talla de calzado de cada jugador

Jugadores	Talla calzado
Martin, Julian, Sebastian, Cristian	39
Cristian S., Eduard, Kevin, Brayan	40
Cristian P., Cristian C., Harrison	41

1 Según la situación ¿Es posible que un jugador tenga dos tipos de tallas de calzado?

Si ___ No X Explica Dos pesonas no pueden tener el mismo calxado.

Si se observa el listado nos damos cuenta que todos los jugadores tienen una talla de calzado asociada, no hay jugador que tenga dos tallas. O sea que todos los jugadores tienen una y solo una talla de calzado asociada

Figura 27. Respuestas del grupo5, Actividad 1, sesión2

Las respuestas de los participantes describen que la situación representa una relación funcional [C.1][A.4], cuando describen que un jugador no puede tener dos tallas de calzado diferentes, reconocen en la situación planteada y la definen como relación funcional.

La tarea 2 corresponde a un video [D.2.4] donde se refuerza el concepto de función [C.1] de una forma divertida, los estudiantes se mostraron centrados en la animación presentada. La existencia de recursos cómo videos le permite al docente fuentes de información para retroalimentar las clases. De La tareas 3, 4, 5 y 6 se realizan con respecto una curva de una gráfica cartesiana, con una línea vertical que la corta. En esta actividad los participantes identificaron los puntos de corte entre la línea vertical y la curva. Algunos grupos tuvieron dificultad para estimar los puntos de corte. El apoyo del docente fue vital para que interpretaran esa característica. Algunos grupos ignoraron algún signo o de la abscisa o la de la ordenada.

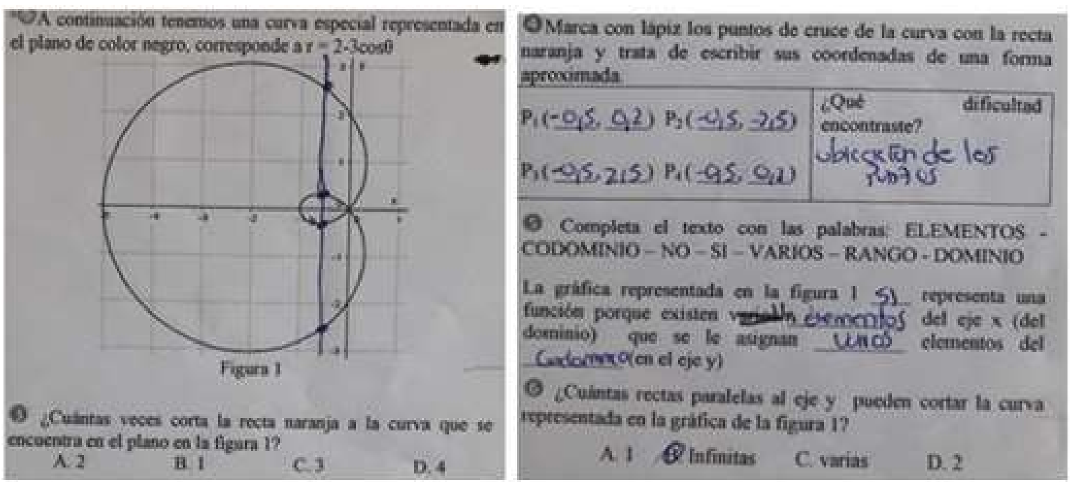
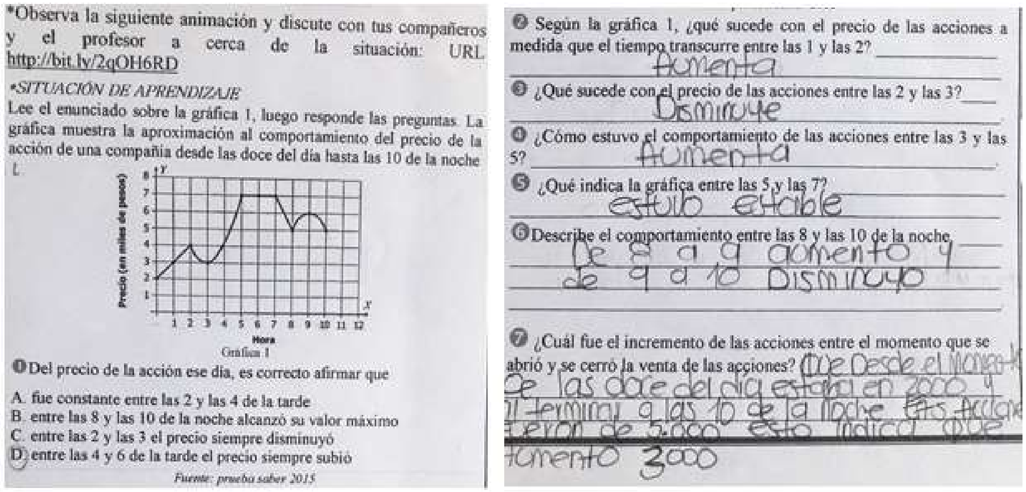


Figura 28. Respuestas del grupo5, tareas 3, 4, 5 y 6; actividad 1-sesión1

Proyecto I – sesión 3. Los resultados de la sesión 3 que corresponde a 7 tareas acerca de una situación de variación [D.1.5], donde permite asignar tareas de nivel 2 según los N.R.V.H. son interpretadas de forma correcta por los participantes, al usar términos cómo creciente, constante y decreciente [C.2.5- C.2.6] en donde correspondía. Se presentaron más dificultades en la tarea 7 cuando se realizó la pregunta ¿Cuál fue el incremento de las acciones entre el momento que se abrió y se cerró la venta de las acciones? Al no ver números, algunos grupos no interpretaron esa situación. La explicación de la pregunta ubica al estudiante en el nivel que se requiere.



*Observa la siguiente animación y discute con tus compañeros y el profesor a cerca de la situación: URL http://bit.ly/2qOH6RD

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Lee el enunciado sobre la gráfica 1, luego responde las preguntas. La gráfica muestra la aproximación al comportamiento del precio de la acción de una compañía desde las doce del día hasta las 10 de la noche

1 Del precio de la acción ese día, es correcto afirmar que

A. fue constante entre las 2 y las 4 de la tarde
B. entre las 8 y las 10 de la noche alcanzó su valor máximo
C. entre las 2 y las 3 el precio siempre disminuyó
D. entre las 4 y 6 de la tarde el precio siempre subió

Fuente: prueba saber 2015

2 Según la gráfica 1, ¿qué sucede con el precio de las acciones a medida que el tiempo transcurre entre las 1 y las 2? Aumenta

3 ¿Qué sucede con el precio de las acciones entre las 2 y las 3? Disminuye

4 ¿Cómo estuvo el comportamiento de las acciones entre las 3 y las 5? Aumenta

5 ¿Qué indica la gráfica entre las 5 y las 7? estuvo estable

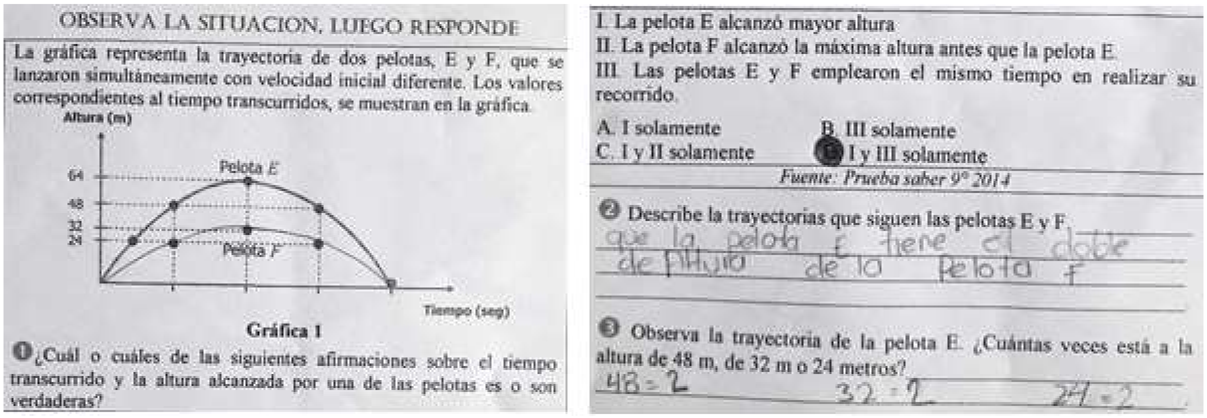
6 Describe el comportamiento entre las 8 y las 10 de la noche. De 8 a 9 aumento y de 9 a 10 Disminuyo

7 ¿Cuál fue el incremento de las acciones entre el momento que se abrió y se cerró la venta de las acciones? Que Desde el Momento De las doce del dia estaba en 2000 y al terminar a las 10 de la noche estas acciones fueron de 5.000 esto indica que aumento 3000

Figura 29. Respuesta del grupo 6, preguntas 1 a la 7, actividad 1, sesión 3

Esta situación de variación permitió socializar otras preguntas: ¿Es funcional? ¿Cuán es el dominio? ¿Cuál es el rango? ¿Cuál es el codominio? ¿Puedes realizar una tabla de valores?. La conveniencia de usar situaciones problémicas con registro de representación cartesiana, anima al aprendizaje de los estudiantes, pues da sentido al estudio de la misma.

Proyecto II – sesión 1. En esta sesión se hace el acercamiento a la función cuadrática [C.3] y se propone de actividad inicial la trayectoria de dos pelotas de tal manera que a través de las preguntas el estudiante tenga la posibilidad de razonar sobre una situación en particular. Al analizar las respuestas de las tareas se pudo observar que para describir situaciones de variación [D.1.5], lo realizan pero de forma corta, la mayoría de los grupos no son tan abundantes en las descripciones. La mayoría de los grupos no interpreta que un objeto de trayectoria parabólica está dos veces a la misma altura en diferentes momentos, y que en la altura máxima es donde sólo hay un tiempo. En el momento de mostrarles los videos, los estudiantes se mostraron interesados en atender. Se les exige una síntesis de lo observado en los videos.



OBSERVA LA SITUACION, LUEGO RESPONDE

La gráfica representa la trayectoria de dos pelotas, E y F, que se lanzaron simultáneamente con velocidad inicial diferente. Los valores correspondientes al tiempo transcurridos, se muestran en la gráfica.

Gráfica 1

❶ ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones sobre el tiempo transcurrido y la altura alcanzada por una de las pelotas es o son verdaderas?

I. La pelota E alcanzó mayor altura
II. La pelota F alcanzó la máxima altura antes que la pelota E
III. Las pelotas E y F emplearon el mismo tiempo en realizar su recorrido.

A. I solamente B. III solamente
C. I y II solamente D. I y III solamente

Fuente: Prueba saber 9° 2014

❷ Describe la trayectorias que siguen las pelotas E y F

que la pelota E tiene el doble de Altura de la pelota F

❸ Observa la trayectoria de la pelota E. ¿Cuántas veces está a la altura de 48 m, de 32 m o 24 metros?

48 = 2 32 = 2 24 = 2

Figura 30. Respuestas del grupo 5, Proyecto 2-sesión 1

Sobre las actividades aplicadas en la fase 1, sirvieron como punto de apoyo para afinar la propuesta general. La cantidad de actividades programadas no se llevaron a cabo, debido a la finalización de año escolar.

Generalizando la aplicación de las actividades durante esta fase 1, se cuenta con un modelo de razonamiento matemático que estará inmerso en las diferentes tareas que se plantearon. GeoGebra será utilizado como una secuenciación para visualizar situaciones de forma rápida y análisis de gráfica. Las situaciones de Variación presentadas se mostraron apropiadas para abordar características de relaciones funcionales y se utilizaron para realizar traducción de registros de representación. Teniendo en cuenta estas consideraciones, en la fase 2 se abordarán nuevamente, y de una forma ordenada las diferentes sesiones de cada proyecto pedagógico de aula.

3.6.2 Resultados y discusión de la fase 2 (propuesta ajustada en el año 2017). En los resultados y discusión de la fase 2 se muestran los hallazgos más representativos de las intervenciones del año 2017, que detallan la relación entre los factores de enseñanza y factores de aprendizaje, utilizando para el análisis la triangulación entre los diferentes instrumentos de recolección de la información.

3.6.2.1 Análisis del diagnóstico de la propuesta de intervención. Para la elaboración del diagnóstico se tuvo en cuenta el objeto de estudio, adecuando preguntas acerca del concepto de relación, el concepto de función y algunas situaciones de la vida cotidiana para la función cuadrática.

Los estudiantes mostraron una actitud positiva [D.3.1] frente a las tareas asignadas durante la actividad. El diagnóstico lo constituyen 17 preguntas. Analizando los resultados de las reflexiones generales, sobre los ítems 1,7 y 15, las respuestas descritas por los participantes describen características observables [A.2] de la situación que se les ha planteado. Otra característica de las respuestas dadas por los estudiantes es que se pueden ubicar en el nivel 1 de razonamiento matemático, porque detallan características muy generales de lo observado. Según Fouz & De Donosti (2005) hacen "descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno" (p. 91). Estas características se pueden observar en las respuestas del participante E16 en la siguiente figura:

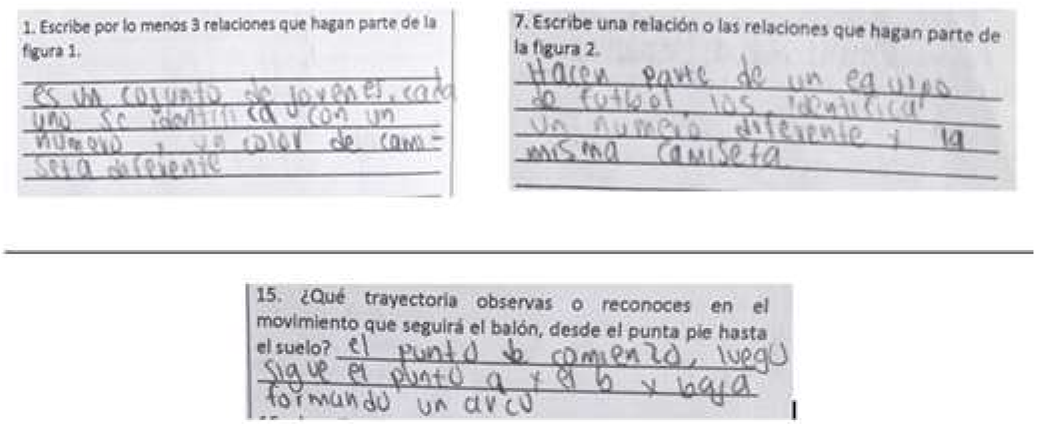


Figura 31. Respuestas de E16, preguntas 1, 7, 15 del diagnóstico

Con la información se puede afirmar que los estudiantes se ubican en el nivel 1 del modelo de razonamiento de Van Hiele.

Los ítems 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12 y 16 han sido seleccionados como preguntas de nivel 2. Sobre estas preguntas podemos traer a colación lo siguiente:

Los participantes muestran inseguridad al responder la pregunta 2 debido a la confusión con los colores, pero en lo demás relacionan como se esperaba. En las preguntas 4 y 5 sólo 8 estudiantes responden bien la situación. A pesar que pueden observar algunas ayudas, la mayoría no entiende o no identifican cuales son los elementos del dominio y el rango [C.2].

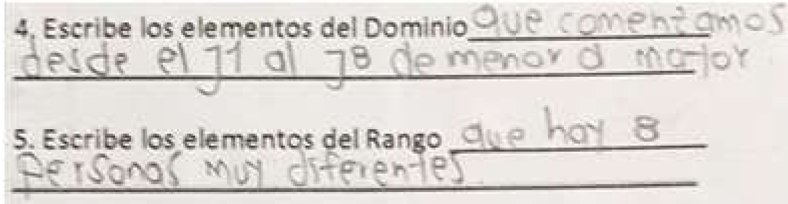


Figura 32. Respuestas de E20, pregunta 4 diagnóstico

El proceso de mediación entre el docente-estudiante o entre pares es lo que logra fortalecer el proceso de aprendizaje. Los estudiantes solos, no van a comprender profundamente los conceptos que se quieren estudiar. Aunque es un diagnóstico de situaciones que no han trabajado o no recuerdan los estudiantes, al indagar sobre estas situaciones las respuestas no son tan significantes, Díaz & Hernández (2002) describen que el estudiante por sí solo no construye su conocimiento, sino que lo hace gracias a la mediación con los otros, y en el ambiente del aula se encuentran el docente y sus compañeros (p. 3), se hace evidente la puesta en marcha de actividades para que el estudiante obtenga los aprendizajes necesarios cómo los elementos y características de la función [C.2][D.1.2]

En las intervenciones de los proyectos se abordaran situaciones para que los estudiantes identifiquen características de las gráficas cartesianas, entre ellas identificar si una gráfica en el plano cartesiano representa o no una función [D.1.1][C.1]. 25 estudiantes de los que presentaron el diagnostico no resolvieron la tarea.

Se evidencia que la mayoría no recuerda que en un conjunto no se deben repetir los elementos, como el caso de E3:

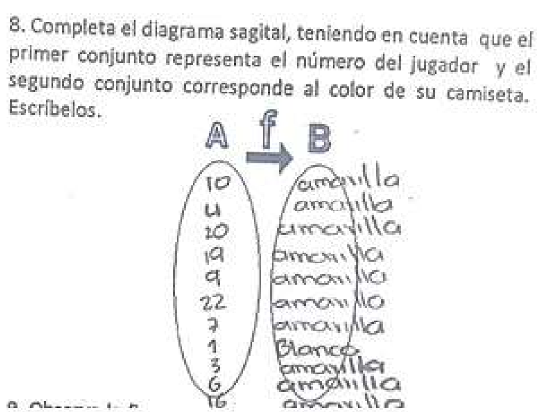


Figura 33. Respuesta del participante E3 a la pregunta 8, diagnóstico

La mayoría de los participantes responden con razonamientos de nivel 1, se necesitan actividades para hacer que los estudiantes entren al nivel 2. Para que los estudiantes alcancen el nivel 2, Fouz & De Donosti (2005) expresa “que los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático”. Se evidencia que se debe fortalecer el aprendizaje de los estudiantes mediante actividades que los conduzcan a estar en el nivel 2 y 3 de razonamiento en los N.R.V.H.

Alguno participantes cómo E7 responden con argumentos errados.

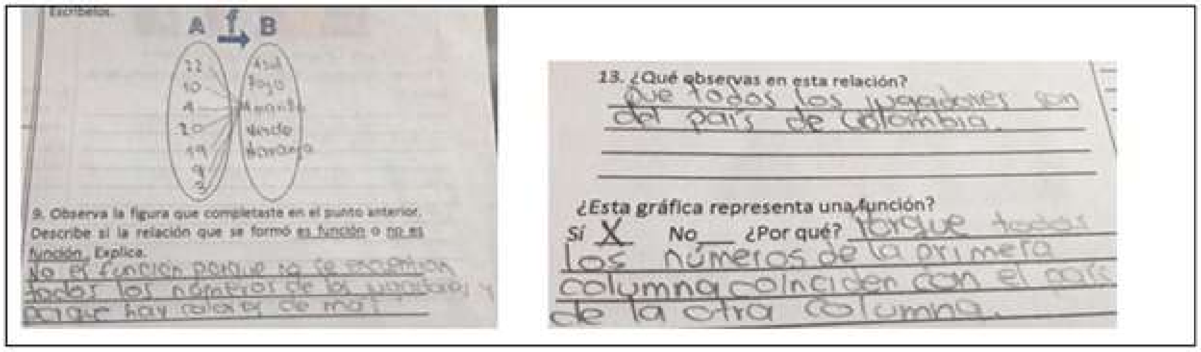


Figura 34. Respuestas de E7, preguntas 9 y 13 del diagnóstico

Sobre las preguntas 3, 9, 13, 14 y 17 se le han asignado preguntas de nivel 3. Al analizar las preguntas que se han considerado como nivel 3 podemos concluir que la mayoría de los estudiantes no dan razones valederas, poco comprenden el significado de los conceptos dados para utilizarlos en ejercicios propuestos, como el caso para decidir cuándo una relación es función [C.1], igualmente desconocen algunas situaciones que tienen que ver con parábola o cuadrática. Se puede decir que se deben reforzar estos conocimientos con actividades.

De esta manera será el punto de partida, para llevar a los estudiantes a niveles superiores, teniendo en cuenta los niveles de razonamiento de Van Hiele, en el objeto de estudio la función, y más específicamente a la función cuadrática y algunas aplicaciones.

A manera de resumen este diagnóstico sirvió para detectar los conocimientos previos de los participantes, verificar como razonan los estudiantes ante situaciones con algunas herramientas. Se puede decir que la mayoría de los estudiantes razonan en el nivel 1 de los niveles de razonamiento de Van Hiele. A través de diversas actividades, y con el uso del software

GeoGebra se ayudará a los estudiantes a avanzar al siguiente nivel teniendo en cuenta el concepto de función y la función cuadrática.

3.6.2.2 Análisis de la Exploración de las herramientas del software de uso libre GeoGebra. El uso de herramientas tecnológicas y software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas, hace cambiar todo lo que se acostumbra a realizar tradicionalmente: para el docente una herramienta de fácil manejo y de fácil cambio de un ejemplo a otro, para el estudiante unos recursos que despierta curiosidad y una sensación de bienestar.

No fue difícil centrarlos en la actividad, se concentraron y cumplieron al 100% las actividades propuestas. Claro algunos lo hicieron con más agilidad que otros.

Se produce la combinación de múltiples competencias, tanto tecnológicas, actitudinales, emocionales todo apuntando a los aprendizajes que se establecieron para el inicio del uso de las tabletas con el software. [D.2] La predisposición para realizar las actividades se hizo notar, el hecho de que cada uno experimentara con sus nuevos recursos despertó gran interés en seguir las diferentes instrucciones. [D.3.3] El trabajo con el compañero de mesa hizo que compararan lo que se estaba proponiendo.

El ambiente que se percibió durante esta sesión fue un ambiente ameno, los jóvenes lucieron cómodos con el uso del software en la Tablet en el sistema android.

El objetivo de la actividad se cumplió, que consistía en iniciar a los estudiantes en el uso de las herramientas más importantes de GeoGebra.

Durante la actividad los jóvenes fijaron la atención a las tareas propuestas, luego de darles instrucciones de construcción de líneas u otros objetos en el área de trabajo, estos podían realizar tareas elegidas por ellos mismos. El docente siempre estuvo atento a hacer seguimientos y aclaraciones [M.1] de las tareas o dificultades de algunos de ellos. Lo estudiantes muestran interés por las actividades propuestas, de esta manera GeoGebra es un “programa que anima a los estudiantes a acercarse a las matemáticas de forma experimental […]” (Hohenwarter & Fuchs, 2004, p. 2).

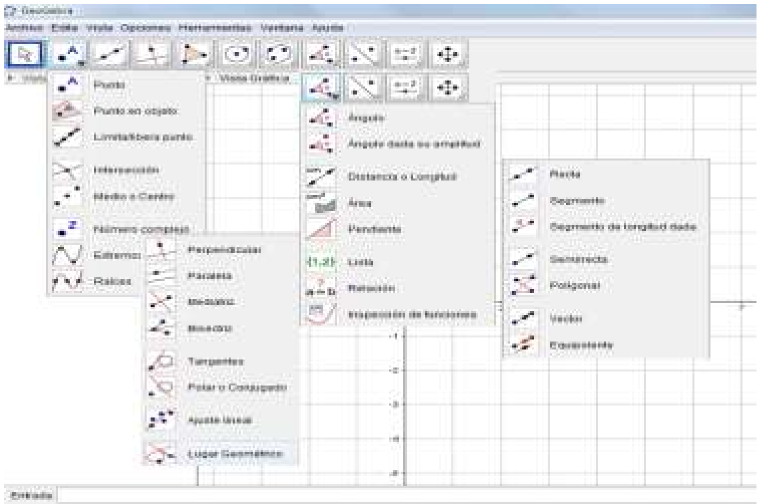
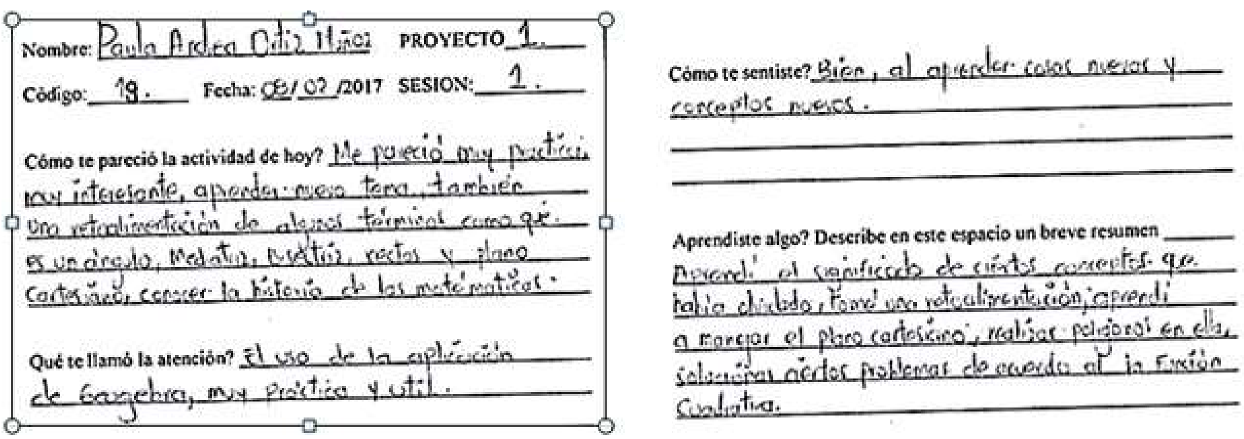


Figura 35. Herramientas exploradas de GeoGebra

García (2011), lo resume explicando que GeoGebra es "una herramienta efectiva para mejorar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes, debido al gusto y confianza que ellos depositaron en su uso para el estudio de contenidos geométricos" (p.524).

E1, E3, E6, E7, E8, E9, E10, E14, E15, E16, E17, E18, E26, E28, E31 manifiestan haberles llamado la atención el uso del software GeoGebra e el sistema Androide como lo hace la estudiante E18, que describe:


Nombre: Paula Andrea Ortiz Muñoz PROYECTO 1.
Código: 19. Fecha: 08/02/2017 SESION: 1.

Cómo te pareció la actividad de hoy? Me pareció muy practica, muy interesante, aprender nuevo tema, tambien una retroalimentación de algunos términos como qué es un circulo, Mediatriz, Vértice, rectas y plano cartesiano, conocer la historia de las matemáticas.

Qué te llamó la atención? El uso de la aplicación de Geogebra, muy práctica y util.

Cómo te sentiste? Bien, al aprender cosas nuevas y conceptos nuevos.

Aprendiste algo? Describe en este espacio un breve resumen
Aprendí el significado de ciertos conceptos que había olvidado, tomé una retroalimentación, aprendí a manejar el plano cartesiano, realizar polígonos en ella, solucionar ciertos problemas de acuerdo a la Evasión Cualitativa.

Figura 36. Respuestas de E18 sobre encuesta de la sesión 1

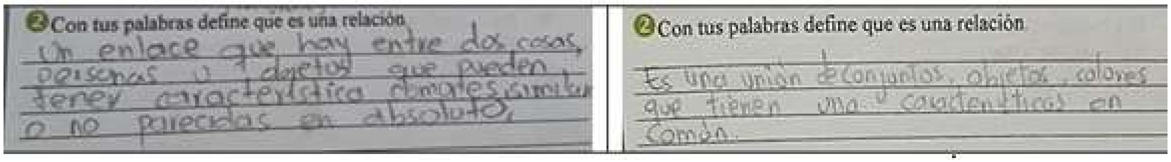
En sus palabras confirma lo que dicen algunos autores "me pareció muy práctica, muy interesante [D.3.3], aprender nuevo tema, también una retroalimentación de algunos términos cómo ángulo, mediatriz, bisectriz, rectas y plano cartesiano. Manifiesta que le ha llamado la atención [D.3.5] la aplicación GeoGebra, por lo muy práctica y útil.”

3.6.2.3 Análisis proyecto de aula 1: acercamiento del concepto de función. Proyecto de Aula 1 - Sesión 1: concepto de función. La investigación en el aula permite al docente tener una mirada acerca de sus prácticas de aula, modificar sus estrategias, colocarlas aprueba, afinar y luego tener una propuesta innovadora que hace que los estudiantes se enamoren del estudio de las matemáticas.

Durante la aplicación de la primera sesión con una estrategia afinada, donde se dio un espacio para que los estudiantes fueran progresando, haciendo razonamientos sencillos y luego razonamientos un poco más avanzados, permite al estudiante ir construyendo los diferentes conceptos, como en este caso el acercamiento al concepto de función [C.1].

Es conveniente mencionar que para el desarrollo de las preguntas de la sesión de trabajo se realizó una interpretación de los N.R.V.H. (niveles de razonamiento de Van Hiele) evidenciándose en cada una de las tareas. Sobre la aplicación de este modelo para el aprendizaje del concepto de función se puede considerar muy adecuado, pues permite al estudiante ir construyendo el concepto, haciendo análisis de la información suministrada, confrontándola con los grupos de trabajo y a la vez permitiendo al docente verificar, hasta qué punto los participantes lograron hacer pertinente las tareas planteadas, al final, los estudiantes confrontaron las respuestas dadas con la de los compañeros, con las respuestas esperadas. De esta manera, se le permite al estudiante ver su avance.

Al realizar el análisis de la actividad 1, Se pudo ver que de un ejemplo sencillo para referirse al concepto de relación, los estudiantes fueron capaces de usar términos que se encuentran en Becerra (2004) “describe que una relación es un conjunto de parejas ordenadas, formadas de la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos” (p. 15), términos cómo los usados por E15 o E17.



❷Con tus palabras define que es una relación

Un enlace que hay entre dos cosas, personas u objetos que pueden tener característica comunes, similar o no parecidas en absoluto.

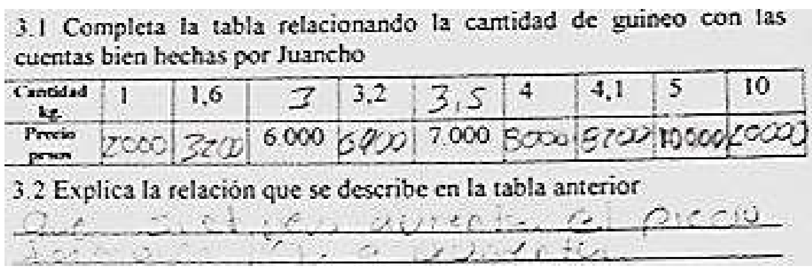
❷Con tus palabras define que es una relación

Es una unión de conjuntos, objetos, colores que tienen una característica en común.

Figura 37. Respuestas de E15 y E17 sobre la pregunta 2, actividad 1

Vemos que los participantes demuestran la capacidad de observación y análisis para relacionar situaciones de un contexto determinado [A.4], clasificarla según su característica, se puede decir que muestran razonamientos de nivel 1 en los N.R.V.H.

A colocar en contexto una situación de variación ligada a la codianidad, los participantes mostraron la capacidad para realizar la representación tabular de la situación que representa el cambio entre dos magnitudes [D.1.5].



3.1 Completa la tabla relacionando la cantidad de guineo con las cuentas bien hechas por Juancho

Cantidad kg.	1	1,6	3	3,2	3,5	4	4,1	5	10
Precio pesos	2000	3200	6.000	6400	7.000	8000	8200	10000	20000

3.2 Explica la relación que se describe en la tabla anterior

[illegible]

Figura 38. Respuestas de E27 , sesión 1- actividad 1

En los resultados de esta tarea muestran que los estudiantes hacen razonamiento matemático, realizando análisis de la situación y llevan a un registro de representación tabular [C.4.4], colocándose de manifiesto el Nivel 2 de razonamiento de Van Hiele.

Los estudiantes colocan de manifiesto el razonamiento y la observación [A.2] pudiéndose decir que están construyendo conocimiento, evidenciándose aprendizaje significativo.

Moreira (1997) expresa que “el aprendizaje significativo es el proceso que se genera en la mente humana cuando asume nuevas informaciones de manera no arbitraria y sustantiva” (p. 2) de ahí expresa Moreira la importancia del interés del estudiante en asumir el reto de aprender, a través de un material que sea potencialmente interesante que le dé al que aprende unas pautas que generen razonamiento, un pensar, un sentir.

El uso de recursos de la web, permite al docente mostrar interactividades que ayudan al estudiante a concentrarse en el objeto de estudio, esos recursos bien seleccionados potencian el aprendizaje del estudiante, motivan al estudiante y les permite dirigir la atención a las actividades propuestas. [D.2.4][D.3.5].

Los estudiantes deben seguir avanzando a través de actividades que lo ayudaran a comprender el objeto de estudio.

Sobre la actividad 2 de la sesión 1, se trae una nueva situación de variación pero mostrando la situación en un plano, en un sistema de representación cartesiano [C.4.3]. Hacer que el estudiante interprete situaciones de variación y que tengan que ver con la vida real, hace acomodar su pensamiento acerca de los cambios entre dos magnitudes, y provocar también la capacidad de traducir [D.1.6] a diferentes registros de representación, coloca al estudiante en un estado de construcción de su pensamiento matemático [D.1.5].

Los sujetos E1, E2, E3, E4, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E16, E17, E21, E22, E25, E26, E31, E32, E33, muestran el análisis de su tarea de la misma forma que el participante E27:

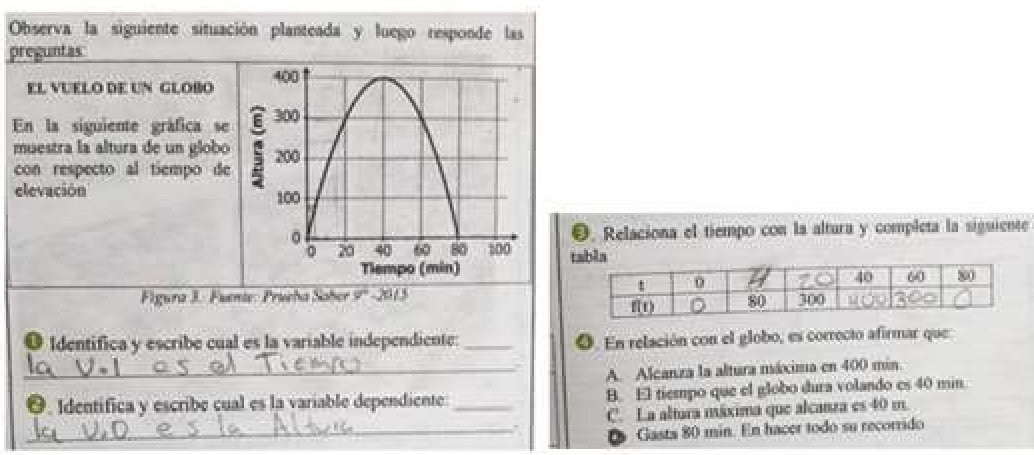


Figura 39. Respuestas de E27, sesión1- Actividad 2

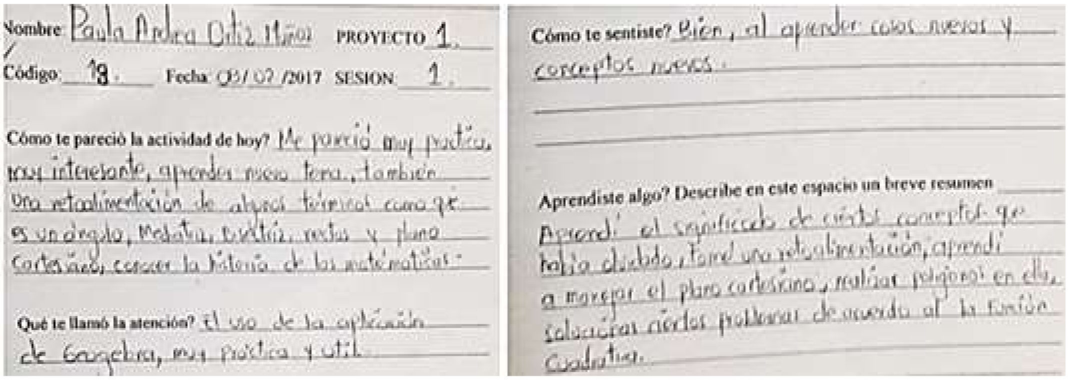
Castiblanco et. al. (2004), describe en un documento del MEN sobre la utilización de situaciones de cambio en tareas asignada a los educandos y afirma la importancia de “las gráficas y tablas para modelar situaciones de cambio y la importancia de ejercitar las traducciones de una a otra de las distintas representaciones de una función” (p. 12) de esta manera se convierten en ambientes para propiciar en los estudiantes el desarrollo de competencias cómo observar y describir situaciones de variación, expresar y traducir [D.1.6] entre diferentes registros de representación [C.4] [C.5.2][D.1.1][D.1.3]

Al seguir avanzando en el análisis de la sesión 1, se tiene una tarea nueva que es la traducción del sistema de representación gráfico al del lenguaje algebraico, esta comparación implica revisar la gráfica en el plano, estimar cuales puntos hacen parte de la curva y luego comparar con expresiones algebraicas o construirla. [C.4.2][D.1.4][M.4] Se evidencia que los estudiantes reflejan poca capacidad para resolver este tipo de tarea. Es aquí donde el docente debe aplicar estrategias para que el estudiante esté en este nivel. Este tipo de tareas se le ha dado un nivel 3 en los N.R.V.H.

Los estudiantes por si solos no van a poder avanzar al siguiente nivel de razonamiento, Salvador (1994) expresa que un estudiante podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada, lo que implica estrategias para que el estudiante logre avance en el nivel de razonamiento que se pretende (p. 14).

Una de las problemáticas en la básica secundaria sobre el pensamiento variacional tiene que ver con determinar el valor de la variable dependiente con respecto a la variable independiente, muchos estudiantes llegan al grado once con esas falencias, por diferentes factores tanto de la didáctica de los docentes cómo la falta de motivación tanto del estudiante cómo del docente. Es necesario crear escenarios donde el estudiante vaya adquiriendo la habilidad o competencia necesaria tanto para las matemáticas como en otras ciencias.

Al finalizar la sesión se dio un momento para que los estudiantes evaluaran la actividad general, encontrando que los estudiantes lucieron motivados, donde se puso de manifiesto lo interesante que fue las tareas realizadas por los participantes, manifestándose sentirse, bien, super bien, chévere dando una calificación a la actividad de interesante, dinámica, buena, divertida, sobre todo cuando se referían a la sesión de la introducción del uso de las herramientas de GeoGebra, que sucedió el mismo día. E18 muestra ese sentido que la mayoría de los participantes vivieron:


Nombre: Paula Andrea Ortiz Muñoz PROYECTO 1.
Código: 18. Fecha: 08/07/2017 SESION 1.

Cómo te pareció la actividad de hoy? Me pareció muy práctica, muy interesante, aprender nuevo tema, también una retroalimentación de algunos términos como qué es un ángulo, mediatriz, bisectriz, rectas y plano cartesiano, conocer la historia de las matemáticas.

Qué te llamó la atención? El uso de la aplicación de Geogebra, muy práctica y útil.

Cómo te sentiste? Bien, al aprender cosas nuevas y conceptos nuevos.

Aprendiste algo? Describe en este espacio un breve resumen
Aprendí el significado de ciertos conceptos que había olvidado, tomé una retroalimentación, aprendí a manejar el plano cartesiano, realizar polígonos en él, solucionar ciertos problemas de acuerdo a la función cuadrática.

Figura 40. Respuestas de E18 de encuesta sobre actividades sesión 1

A manera de conclusión de la sesión1, analizando la producción de los participantes y comprobando las competencias observables y verificadas en lo que describieron, además viendo lo motivadora, interesante, divertida que fue tanto para el docente cómo para los estudiantes la sesión, donde se dio el espacio para nivelar lo que los estudiantes poco comprendieron a través de la retroalimentación y puesta en común y al mismo tiempo adicionándole un modelo de razonamiento matemático como el de los Esposos Van Hiele, es evidente que la actividad fue significativa.

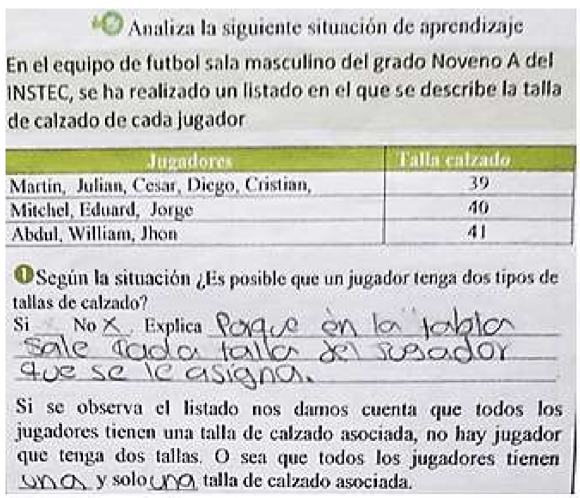
Proyecto de Aula 1 - Sesión 2: dominio y rango de una función. En la actividad 1 se planteó una situación inicial para que los estudiantes reflexionaran y asociaran la situación con el concepto de función. Se puede reflexionar sobre la forma como los participantes dan razones valederas y de forma diferentes. Se hace evidente la producción de ideas para justificar una decisión en este caso para justificar que una relación es función [A.2][C.1]. Las preguntas abiertas dan mucha información del nivel de razonamiento de los jóvenes. Las respuestas de las preguntas abiertas ayudan a analizar la forma cómo los estudiantes interpretan las situaciones de aprendizaje. Pastor (1993) se refiere a este aspecto describiendo que “los ítems o problemas de respuesta libre son las que permiten identificar con mayor precisión el razonamiento de los estudiantes […] Con test escritos se pueden obtener también bastante información sobre el razonamiento de los estudiantes […] permiten evaluar colectivos numerosos” (p. 271).

A continuación se describen las respuestas de los primeros seis estudiantes donde dan muestra de cómo una pregunta abierta se convierte en producción de información relacionada con la pregunta:

Tabla 24. Respuestas de algunos estudiantes situación inicial sesión 2

E1	Porque en la tabla sale cada talla del jugador que se le asigna
E2	Porque la situación no puede ser que tenga dos tallas
E3	Porque en el listado observamos que cada jugador tiene solo una.
E4	Porque es la situación de cada uno de los jugadores
E5	Los pies tienen una talla propia
E6	Cada jugador tiene un solo número de calzado

Igualmente se incorpora una imagen donde E1 responde de la siguiente manera:



Analiza la siguiente situación de aprendizaje

En el equipo de futbol sala masculino del grado Noveno A del INSTEC, se ha realizado un listado en el que se describe la talla de calzado de cada jugador

Jugadores	Talla calzado
Martin, Julian, Cesar, Diego, Cristian,	39
Mitchel, Eduard, Jorge	40
Abdul, William, Jhon	41

1 Según la situación ¿Es posible que un jugador tenga dos tipos de tallas de calzado?

Si ___ No X Explica Porque en la tabla sale cada talla del jugador que se le asigna.

Si se observa el listado nos damos cuenta que todos los jugadores tienen una talla de calzado asociada, no hay jugador que tenga dos tallas. O sea que todos los jugadores tienen una y solo una talla de calzado asociada.

Figura 41. Respuestas de E1, sesión 2 – actividad 1

Continuando con el análisis de la sesión 2, al presentar un video de url: https://youtu.be/Xcv1eUdpob4 **para que los estudiantes observaran un resumen acerca de la representación de funciones [C.4]. Esta fue una forma divertida de atender a información relacionada con representaciones de registro cartesiano, tabular y algebraico de funciones. Fue divertida tanto para estudiantes cómo para el docente. Los recursos de la Web se convierten en un instrumento para acercar las matemáticas a los estudiantes. Se gozó, hubo atención o fijación en el recurso presentado, se pudo ver un ambiente ameno durante la actividad** [D.2.4] [D.3.5][D.3.4].

Cacheiro (2010), comenta sobre la importancia de los videos que se encuentran en la web afirma que estos repositorios se pueden encontrar inclusive por ejes temáticos, cómo el de TeacherTube (url: teachertube) en el que se y que se convierten en documentos de apoyo para el docente y para el estudiante. De la misma manera expongo sobre la importancia del uso del material con excelentes recursos como los encontrados en http://bit.ly/2qO7Q0W, en www.geogebre.org y www.educaplus.org.

En el abordaje de método gráfico para identificar funciones, se les dio información sustancial para su comprensión, primero invitándolos a leer, y comprender la información luego animándolos a realizar las tareas de la nueva situación e ir inspeccionando el avance de estas [M.4].

Los estudiantes reflejan la dificultad para ubicar puntos en el plano cartesiano. Situación que debieron superar en grados anteriores. Se ve la necesidad de reforzar este tipo de situaciones que a pesar de ser fáciles y de observación no han aplicado la forma como se ubican los puntos en el plano. A pesar de advertir que debían tener cuidado con las reglas de la (abscisa, ordenada) o (x, y). El refuerzo a las situaciones donde los estudiantes presentan dificultades se hacen necesarias para que los estudiantes mejoren el nivel de razonamiento. La mediación pedagógica del docente orientador es fundamental para que los estudiantes se ubiquen en el nivel de cada pregunta, el refuerzo es vital para la apropiación. Werstch (2008) describe que la mediación "[…] es una actividad modelada y lo hace una persona, es en primera instancia, el educador o el profesor (p. 3).

Al analizar el reconocimiento de los participantes en si una gráfica representa o no una función se puede decir que lo han superado y se puede ver en las respuestas E1,E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E31, E32, E33. En la siguiente figura se ilustran las respuestas de E3. [C.1][D.1.1]

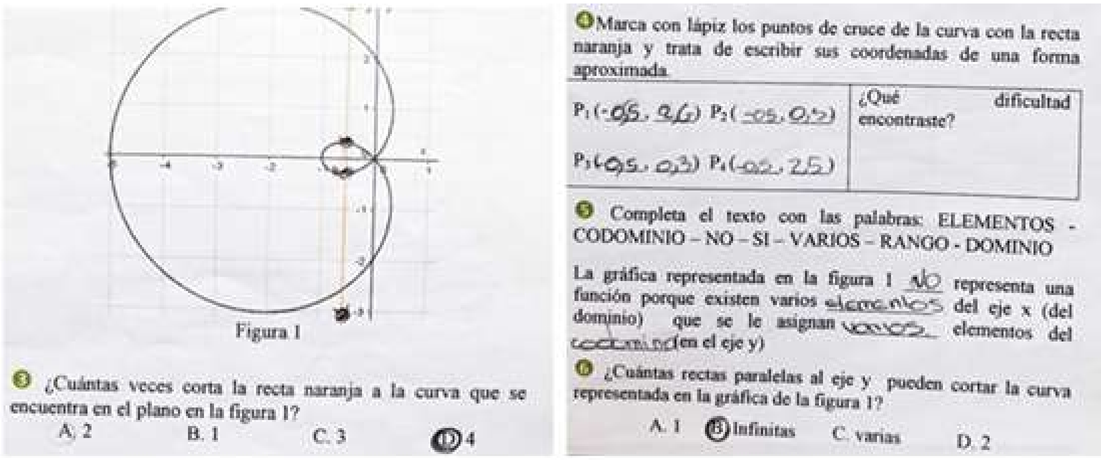


Figura 42. Respuestas del participante E3, sesión 1-actividad 1

La actividad No. 2 trata del dominio y rango de una función a partir de un plano cartesiano [C.2]. Para esta actividad se les indicó a los participantes que hicieran la lectura de la explicación de notación de intervalos. Se deja a los estudiantes para que en grupos de dos discutan y escriban las tareas asignadas. Los resultados muestran que el contenido ofrecido es nuevo, y la interpretación de la información es regular. En la tarea A 16 consideran que lo representado es función, pero solo 8 de 33 participantes justifican el hecho de que la gráfica representa una función:

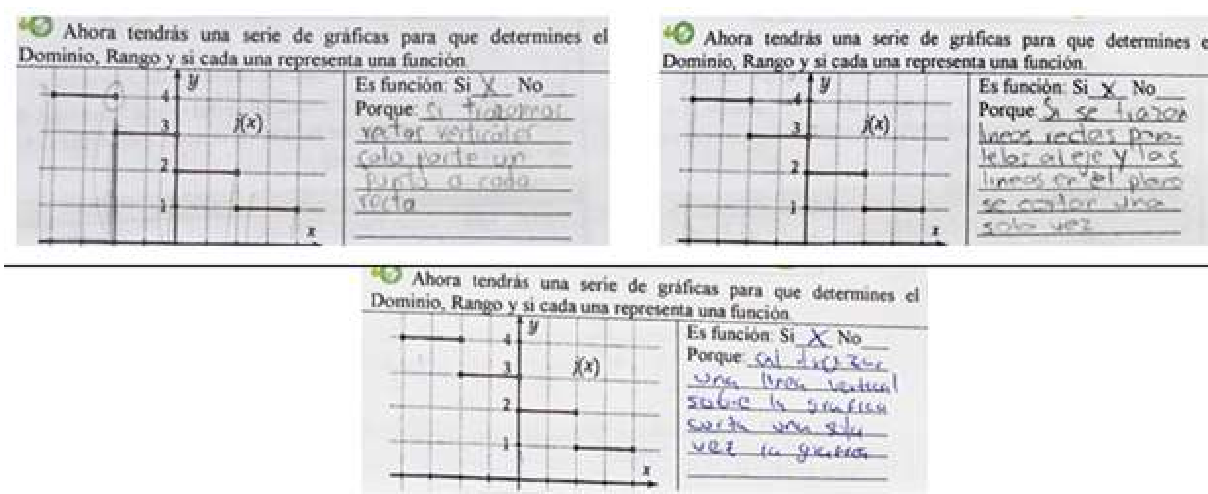


Figura 43. Respuestas de E17, E18 y 27, sesión 2, actividad 2

De la tarea B, 26 consideran que la gráfica representa una función, pero sólo 4 hallan bien el dominio y rango. En la tarea C, 25 estudiantes expresan que la gráfica representa una función y sólo 5 estudiantes justifican bien. En la tarea D, 31 de 33 describen que es función, pero sólo 13 justifica bien. Las respuestas de E25, E29 y E30 muestran las respuestas aunque en la justificación no argumentan con claridad.

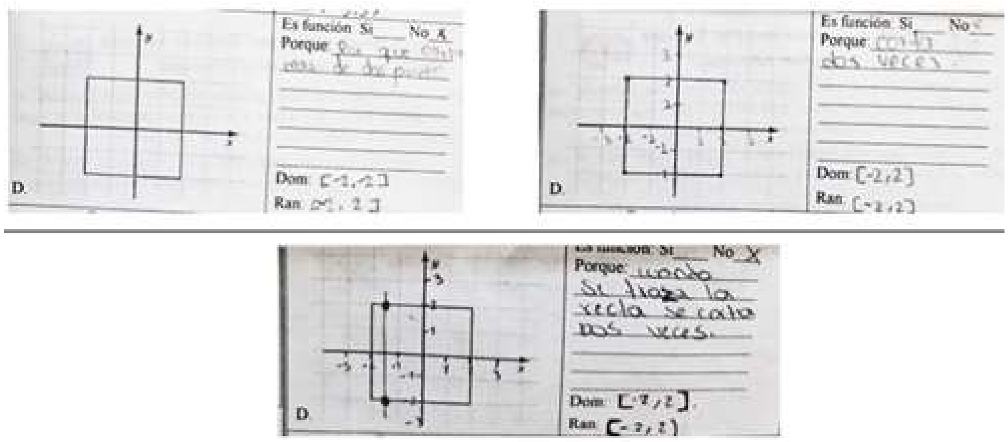


Figura 44. Respuestas de los participantes E25, E29 y E30; sesión 2 – actividad 2

En el refuerzo y corrección los estudiantes asimilaron mejor lo que debían responder en sus tareas sobre todo con el Dominio y Rango de una gráfica en el plano cartesiano [C.2].

En la actividad No. 3 se utilizó el software GeoGebra, y la Tablet, los participantes siguieron una serie de instrucciones y tareas que debían para propiciar un ambiente diferente, con el propósito de centrar al estudiante y proponer tareas nuevas. En esta ocasión el estudiante usa el software pero debe dar cumplimiento en papel sobre tareas asignadas de lo que se muestra en el área de trabajo del software [D.2].

Las tareas propuestas en esta actividad se pueden interpretar en diferentes niveles en los N.R.V.H. la tarea 3 es la que resume la actividad se puede darle un nivel 3, por los diferentes razonamientos a los que hay que llegar, como: determinar si es función la curva mostrada, justificar que no es función a través de una línea trazada sobre la curva que se requiera y obtener los puntos que lo demuestre, determinar algunos elementos como dominio, rango, y establecer razonamientos sobre las diferentes curvas que se muestran en el área de trabajo, reconocimiento, análisis y clasificación.

La Tablet y el software de uso libre se convierten en artefactos mediadores del aprendizaje, Cole (1989, citado por Sarduy, 2008) describe que la mediación "…no es más que la interacción adecuada a la significación que ha hecho el sujeto del artefacto, en virtud de una significación compartida…La aproximación a los artefactos, en este caso tecnológicos, está mediada por significaciones compartidas (p. 3).

El uso del programa GeoGebra es muy práctico, se refleja en la primera tarea los participantes no tuvieron inconvenientes para el ingreso en la caja de entrada las siguientes expresiones, y todas se visualizaban en el mismo área de trabajo, $y = x^2 - 8x + 16$; $x^2 + y^2 = 4$, $-4y^2 + x - 8y = 6$ y $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, aunque algunos lo hacen más rápido que otros al final todos incluyen la información. Se tiene la oportunidad de estudiar los elementos de la función, verificar si una curva en el plano es función [C.2].

Figura 45. Estudiantes realizando tareas asignadas, sesión 2 – actividad 3

Los estudiantes se mostraron concentrados, y se pudo evidenciar en los videos y observaciones del profesor. [D.3.7] .Durante la actividad, se reflejó la ayuda del compañero. El trabajo en grupo, lo colaborativo se evidenció a pesar de que cada uno tenía su guía de trabajo para que trabajara de manera individual.

La planeación de la actividad corresponde a una hora, el docente tiene que administrar los tiempos, puede pasar que el estudiante no alcance a terminar la actividad, y el factor tiempo se vuelve en contra de lo programado. La ayuda del docente se vuelve fundamental, el docente puede establecer instrucciones y creer que todos los estudiantes asimilaron las instrucciones y no es así. La actividad debe ser dirigida.

Figura 46. Estudiantes realizando tareas asignadas, sesión2 – actividad 3

En esta actividad la ayuda del profesor no fue suficiente y por eso la mayoría no terminó la tabla con las características de las gráficas que se mostraban. Los participantes E5, E6, E9, E11, E12, E13, E14, E17, E18, E33, mostraron avances como los de E5.

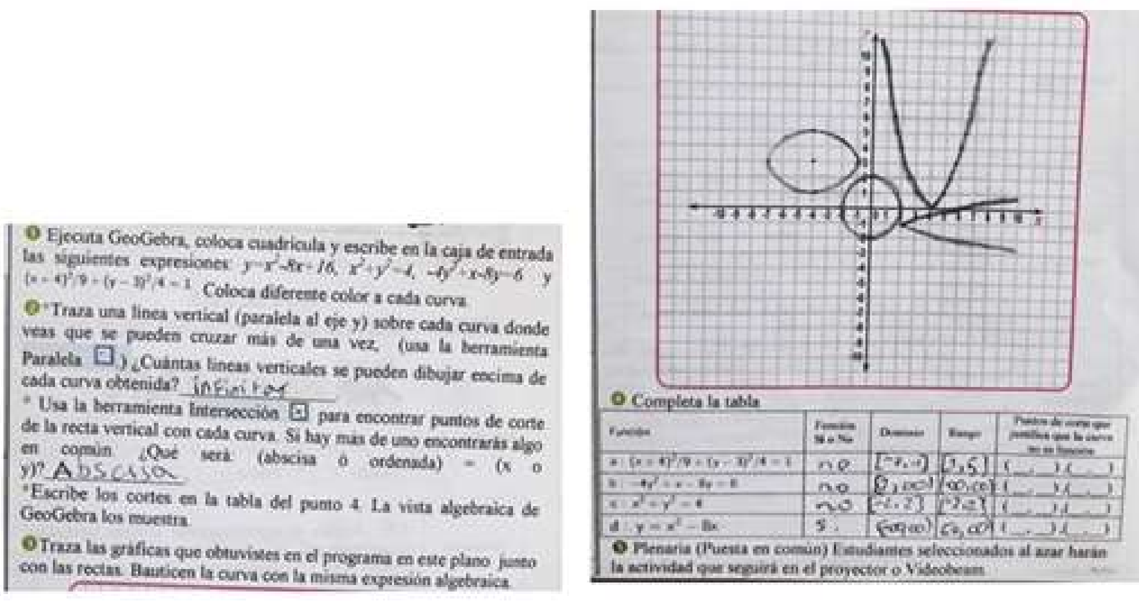


Figura 47. Respuestas de E5 en la actividad con GeoGebra, sesión 2 – actividad 3

A manera de conclusión el trabajo con el software no es una solución a los conceptos que el estudiante no ha asimilado, es simplemente un instrumento para agilizar algunas situaciones que en el momento interesan, cómo verificar las expresiones que son funciones, el dominio, rango y codominio, que el estudiante asimile que de una expresión algebraica con dos variables es posible una gráfica en el plano, entre otros. El docente debe ser muy cuidadoso con lo que se persigue, el software ayuda a mostrar pero la producción es la que el docente requiere.

El software permite la interacción entre el registro algebraico, gráfico cartesiano e inclusive el tabular, que se evidenció cuando los estudiantes debían hacer una réplica de las gráficas en su guía [C.4]. Con las instrucciones indicadas se pueden sacar ventajas cómo el estudio del comportamiento gráfico varias expresiones, verificar si es o no función traduciendo el registro a forma gráfica [C.5.2]. El uso de GeoGebra en clases de matemáticas motiva al estudiante a explorar las matemáticas, que de una forma organizada puede llevar al estudiante a elevar su razonamiento del pensamiento variacional. El uso de la tecnología provoca interés en este mundo cambiante y avanzado en esos campos. Los estudiantes reflejan un ambiente agradable, de predisposición a realizar las tareas y diferentes actividades que se proponen. [D.2.1] [D.2.2] [D.3.4]

Proyecto de Aula 1 - Sesión 3: tipos de funciones. Para la actividad 1 se presentaba una situación de variación entre dos magnitudes, una situación con una gráfica cartesiana con una serie de tareas que implican observación análisis y razonamientos para elaborar conclusiones. En esta situación de cambio aparece involucrada el tiempo, cómo en la mayoría de las situaciones de la vida cotidiana según Castiblanco et. al. (2004) “el poder identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y modelarlo, son las características del pensamiento variacional” (p. 17) [D.1.5][C.4.3][D.1.1].

Los resultados de las 7 tareas de la situación inicial, fue significante la mayoría de los estudiantes hicieron afirmaciones diferentes y coherentes en cada tarea, lo que indica el progreso que inicialmente no se tenía, caracterizada por los patrones creciente, decreciente o constante, se manifiesta razonamiento y observación, por ejemplo para la tarea 4 con la pregunta: ¿Cómo estuvo el comportamiento de las acciones entre las 3 y las 5?

Tabla 25. Respuestas situación de variación – proyecto I sesión 3 –actividad 1

E1, E23, E24	El precio aumentó mucho, subieron los precios
E4,	en esas horas siempre iba subiendo
E6, E7, E15, E16	aumentó, aumenta
E8,	aumentó de una manera extraordinaria
E11	aumentó el precio cada vez que transcurre el tiempo,
E24, E25, E26, E27, E28, E30	Subió constantemente, estuvo aumentando constantemente, sube nuevamente
E12,	El precio subió aún más entre las 3 y las 5
E3, E5, E17, E20, E21, E22	El precio alcanzó un valor máximo, subió hasta su máximo valor, aumenta hasta alcanzar su valor máximo, el precio alcanzó su valor máximo 7000, el precio alcanzó su máximo valor 7000, aumentó a su valor máximo, fue aumentando su valor máximo
E19	el precio alcanzó su valor máximo 7000
E32, E33	Subió cuatro mil pesos

Las respuestas del participante E19 representa un resumen con las características de las respuestas dadas por los estudiantes.

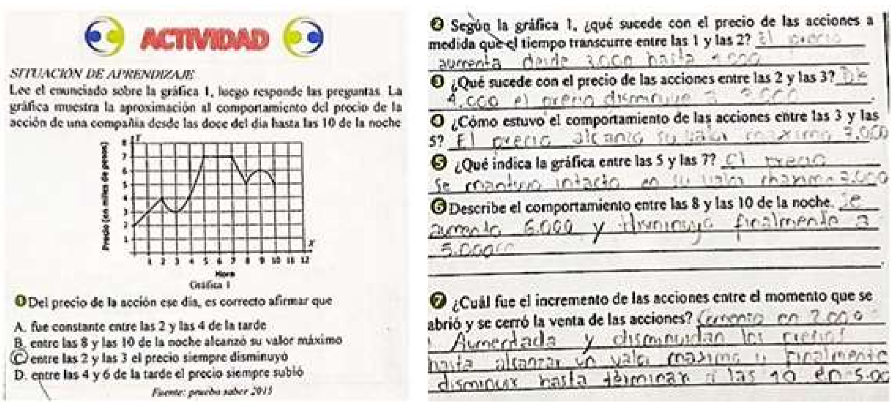


Figura 48. Respuestas de E19 en la sesión 3 - actividad 1

Vemos que las respuestas dadas por los participantes muestran la capacidad de describir la caracterización correspondiente al crecimiento, decrecimiento o constante de la situación. Los estudiantes han realizado un reconocimiento de la situación en contexto y han podido describir la situación a partir de una situación de variación representada en un gráfico cartesiano, hubo muestra de la producción individual e interesante [A.2][D.1.1][D.1.5].

El nivel de razonamiento de los estudiantes se hace evidente, al utilizar términos propios del objeto de estudio, se puede decir que los estudiantes se muestran en el nivel 2 de Van Hiele, por la capacidad de análisis que han generado en la explicación de las tareas. Luego de la actividad se les brinda información a los sujetos participantes sobre funciones biyectivas, creciente, decreciente, constante y periódica para reforzar los contenidos.

La actividad 2 se centra en la comparación entre diferentes gráficas cartesianas que muestran una situación de variación entre tiempo ahora representado en meses y el números de afiliados de una empresa.

Se agregó un factor adicional a la actividad 1, los participantes no sólo deben analizar una gráfica, si dos gráficas adicionales, enfrentándose con más detalles a observar. La actividad la constituyen 5 tareas, que se han ubicado en un nivel de 2 en los N.R.V.H. porque las respuestas implican observación y la descripción del comportamiento de las gráficas presentadas en la situación. La tarea 1 era que respondieran la siguiente pregunta ¿Qué empresa presentó crecimiento durante los dos primeros meses? La mayoría de los participantes respondieron acertadamente como E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E31, E32. A la pregunta ¿Qué empresa ha mantenido la mayor estabilidad? ¿y por qué? Tenemos las siguientes respuestas:

Tabla 26. Respuestas de los estudiantes a la tarea 2 – actividad 2

Participantes	Respuestas
E3, E4, E6	La empresa 2 porque casi en todas estaba en el mismo lugar o sitio
E5, E8	La empresa 2 porque presenta más estabilidad
E7, E15	La empresa 2 y no justifica
E9	La empresa 2 porque mantuvo estable más tiempo
E10	siempre se mantuvo en subida y bajó sólo 1 mes
E11	La empresa 2 presenta más estabilidad gracias a la constancia durante los meses 2-3-4-5-6
E12	se mantiene en un mismo nivel
E18	La empresa 2, porque se mantuvo constante entre los meses 2 y 7
E19, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E32, E33	Se mantuvo más tiempo en cada uno de los meses, porque en los meses del 2 a 6 tienen una constante, estuvo en nivelación, porque se mantuvo constante en 5 meses, se mantuvo constante en varios meses, la empresa 2 tuvo mayor estabilidad que las otras.

Participantes	Respuestas
E20	Porque fue la de más producción que las otras
E14, E16, E17	La empresa 2 porque de 2 a 6 ha tenido mayor estabilidad que las otras empresas, la empresa 2 tuvo 4 meses de estabilidad.
E1, E2, E13,	La empresa 3 porque no disminuyó tanto, porque casi no tuvo crecimiento

Al enfrentarse a la comparación de gráficas los participantes describieron comportamientos observables, pero algunos no lo hicieron tan detallados como E18:

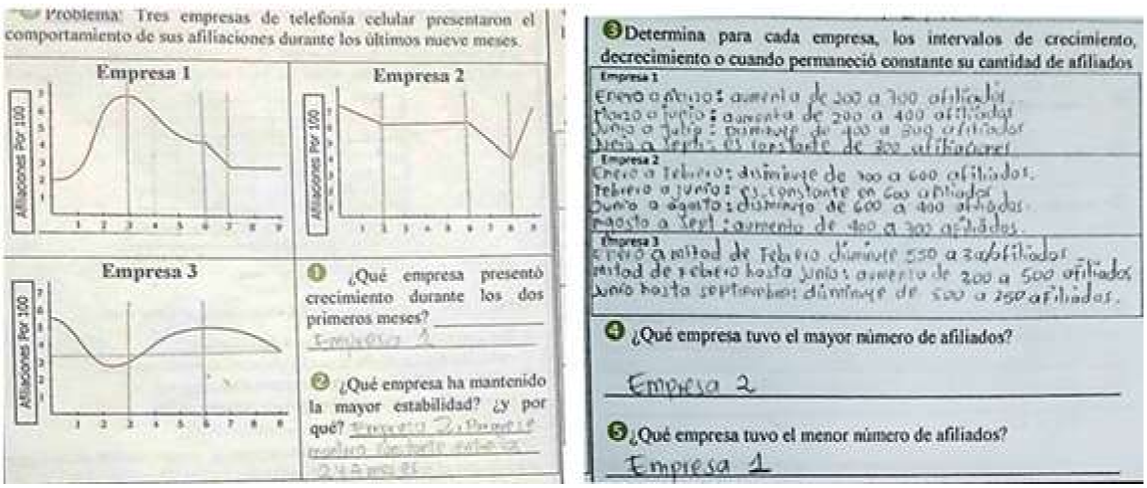


Figura 49. Respuestas por E18, sesión 3 – actividad 2

Sobre la actividad con GeoGebra se planteó como primera tarea, introducir las expresiones en la caja de entrada, $y = 3^{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$, $y = \frac{2x}{x^2-9}$, $y = 2x^2 + 2$, tarea sencilla para los participantes. Como se muestra en la imagen de E1:

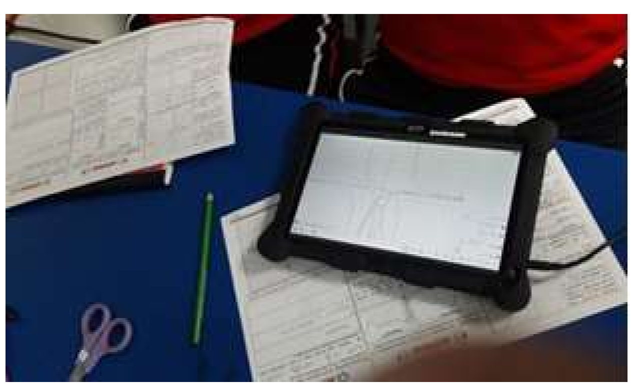


Figura 50. Área de trabajo de E1 en la tarea 1, sesión 3 - actividad 3

Sobre la tarea 2 dedicaron tiempo a estudiar acerca del crecimiento, decrecimiento de las funciones, pero algunos participantes no asumieron que en el área de trabajo sólo se veía una parte de la gráfica.

Sobre la tarea 3 los estudiantes escriben algunos puntos en su guía de trabajo y construyen sus gráficas, algunos estudiantes cómo E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E13, E14, E16, E17, E19, E120, E21, E22, E23, E24, E26, E32, E33 muestran el desarrollo de estas.

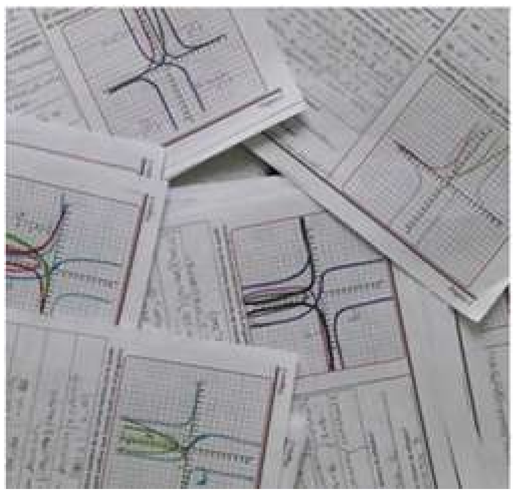


Figura 51. Graficas de la tarea 3 de E33, E24, E23, E17 y E6, sesión 3 – actividad 3

A manera de resumen se puede decir que el diseño de la sesión final del proyecto I provocó interés en los estudiantes hacia la realización de la misma y se refleja motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje del objeto de estudio del primer proyecto que es la función y sus elementos. [D.3.3][D.3.4]

Se pudo engranar el Modelo de Van Hiele con GeoGebra y sus correspondientes niveles de razonamiento sobre todo situaciones de nivel 1 y 2 de razonamiento. Los participantes estuvieron animados, trabajando en grupo e individualmente discutiendo acerca de las situaciones planteadas.

Se tomó el tiempo para realizar los respectivos refuerzos para que los estudiantes que no demostraron estar el nivel exigido de la pregunta, compararan las respuestas que se esperaban. La disposición de los estudiantes a estudiar un objeto matemático es vital de lo contrario no se va a producir el acto de aprendizaje.

3.6.2.4 Análisis proyecto de aula 2: la función cuadrática. Proyecto de Aula 2 - Sesión 1: reconocimiento de la función cuadrática. Existen situaciones de la vida cotidiana que se pueden modelar a través de la función cuadrática, Mesa & Villa, 2008, p. 6), menciona cuatro momentos que reflexionan el concepto de función cuadrática, las ecuaciones, las cónicas, la cinemática, las funciones. Para la intervención en el aula se recomienda aplicar la cinemática y las funciones por sus fuentes de reflexión desde la modelación de situaciones de variación, que es lo que se propone en la sesión I del proyecto la función cuadrática [C.3].

El inicio del proyecto II Tipos de funciones: la función cuadrática, se abordó con situaciones de variación, la primera desde el movimiento parabólico, con una situación de observación y la segunda con otro esquema desde una expresión algebraica, tratando el registro desde la evaluación, representación tabular, hasta la representación en el plano cartesiano [C.4] y la tercera desde el software GeoGebra cómo una forma de manipular la función cuadrática sin realizar una definición de entrada.

A continuación se describirán las conclusiones de las reflexiones de la sesión 1. La Actividad 1 está constituida por 6 tareas. Las tareas 1, 2, 3 y 4 se les han dado una clasificación de Nivel 2 en los N.R.V.H. porque el participante debe observar y describir una situación de variación que tiene que ver con el objeto de estudio, debe hacer sus descripciones acerca de lo que observa en la situación planeada. Para la tarea 1 se muestran la trayectoria de dos pelotas que forman una parábola, y luego aparecen unas afirmaciones para que el participante haga su análisis. Los siguientes estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E7, E8, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E34 respondieron bien esta pregunta.

En esta pregunta se puede ver la capacidad que tienen la mayoría de los estudiantes para interpretar esquemas que representan el movimiento de un cuerpo donde hay una situación de variación [D.1.5] entre la altura y el tiempo transcurrido.

El participante E34 muestra cómo responde las tareas 4 tareas.

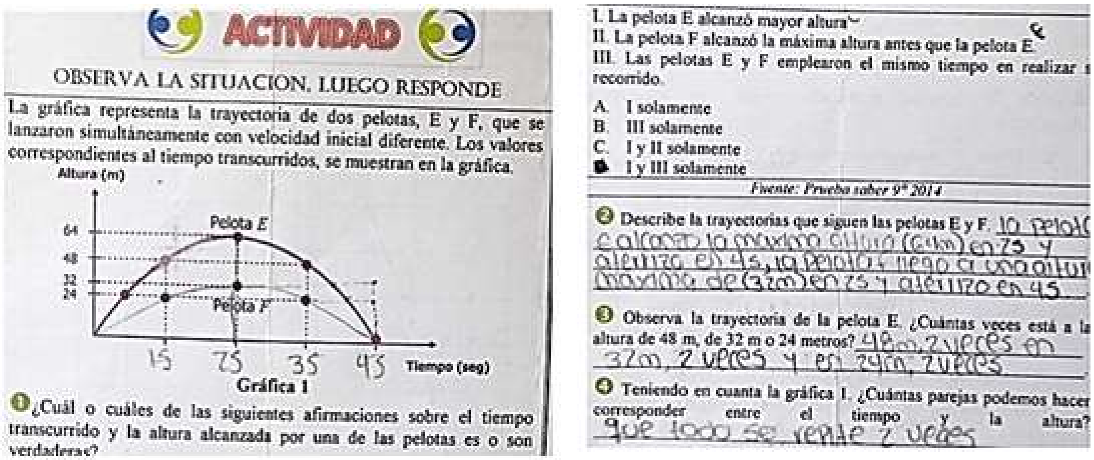


Figura 52. Respuestas del participante E34. P2-sesión 1 – actividad 1

Sobre la tarea 2 cuando se les pide describir las trayectorias a los participantes, ellos describen:

Tabla 27. Respuestas de los participantes a la tarea 2 – proyecto II –S1- A1

Estudiantes	Respuestas
E1, E2, E25, E26	Parten del mismo punto, E tiene más altura que F, tienen el mismo tiempo
E5, E7, E8	Van en ascenso hasta una altura de 64 y 32 metros y va descendiendo hasta llegar al suelo,
E9, E10	Trayectoria en forma de arco
E11, E12	Las trayectorias son diferentes, y el tiempo es igual
E13, E14	Que la pelota E alcanza a tener más altura que la pelota F, pero tienen el mismo tiempo
E15	Tienen la misma trayectoria….
E16, E17, E18	Ambas usan el mismo tiempo, E se eleva más
E3, E19, E20	La pelota E paso por 48 hasta alcanzar una altura de 64 m, volver en 48 y terminar…
E23, E24	La pelota E en el segundo 2 alcanza una altura 64 m, La pelota F en el segundo 3 alcanza una altura de 32 m.
E26, E29, E30	Las pelotas E y F parten del mismo sitio y terminan en el mismo sitio pero E consigue mayor altura que F.
E27, E28, E33	En el segundo 2 las pelotas E y F alcanzan la máxima altura… a los 4 segundos terminan la trayectoria.
E34	La pelota E alcanzó su máxima altura (64 m) en 2 s, y aterriza en 4 s, la pelota F llegó a una altura máxima de 32 m en 2 s y aterrizó en 4 s.

La mayoría de los estudiantes describen situaciones pero les hacen falta argumentos para explicar lo que pasa en la situación. Sin embargo una situación como esta se puede utilizar en puesta en común ante todo el grupo, las respuestas de todos pueden ayudar a construir todo lo que sucede en el movimiento.

También la mayoría interpreta que la pelota E está dos veces a la altura de 48 m, 32 m 0 24. Sobre la tarea 3, así lo describieron E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E11, E13, E14, E17, E18, E28, E31, E32, E33, E34.

Al abordar a los participantes desde la situación que se muestra en el plano relacionando el tiempo con la altura de las pelotas, se les pregunta: Teniendo en cuanta la gráfica 1. ¿Cuántas parejas podemos hacer corresponder entre el tiempo y la altura? E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E12, E13, E14, E15, E16, E19, E23, E24 responden que infinitas parejas.

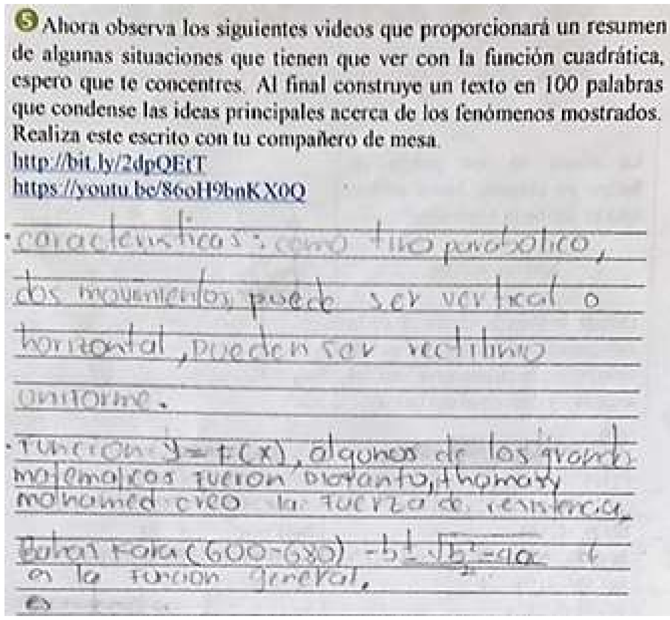
Las representaciones cartesianas [C.4.3] se convierten en estrategias para mostrar la trayectoria de movimiento de un cuerpo y como en este caso, en una situación de variación entre el tiempo y la altura [D.1.1]. Se está incorporando al pensamiento del joven, la trayectoria del movimiento parabólico de los cuerpos, con curvas, mostrando que hay una altura máxima, acercándolos al vértice, una concavidad, la existencia de infinitas parejas que se pueden hacer corresponder entre el (tiempo, altura), la simetría cuando se menciona que una pelota puede estar a la misma altura en dos momentos diferentes de tiempo, como el caso de (1 segundo, 48 m), (3 segundo, 48m), y conceptos ya trabajados como por ejemplo si la situación es funcional, dominio, rango, intervalo de crecimiento, decrecimiento, los aspectos de dependencia e independencia entre variables, todos estos elementos se pueden trabajar desde el esquema inicial. [C.3.1]

Con el uso de los recursos web [D.2.4] se facilitaron video, que se convierten en una forma de mostrar información ordenada. A los estudiantes les gusta porque es una forma diferente de recibir información, una fuente de información que permite concentrar a los jóvenes, ayudan a reforzar conocimientos previos [A.3] o nociones de conceptos que se van abordar.

Cuando se les dijo a los jóvenes que escribieran sobre lo visto en el video, además de que escribieron compartieron, con sus compañeros lo que les había llamado la atención.

Tabla 28. Escritos del video de la historia de la función cuadrática

E1, E2, E28, E29, E30	Escriben que el tiro parabólico se descompone en vertical y horizontal, y que las una de las dos forman el tiro parabólico
E3, E4, E29	Describen la fórmula de Baskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y la fórmula general de la función cuadrática: $f(x)$: $ax^2 + bx + c$
E5, E19, E20, E32	Mencionan que toda función cuadrática se puede expresar en tablas, gráficas…. Habla sobre la existencia de la variable independiente y dependiente $(x, f(x))$
E6	Toda función cuadrática se parte de una parábola… la función cuadrática se conoce desde varias civilizaciones como la romana, la Egipcia y la griega….
E7, E13	El origen de las primeras expresiones algebraicas se creen que se dio en las primeras civilizaciones…. Una trayectoria de una pelota en movimiento….
E8, E25	Habla de la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
E9	Describen que la función es una regla entre dos elementos, magnitudes variables…
E10, E24, E26	Menciona a Baskara como autor de la fórmula general
E11, E12	La parábola es una representación de una ecuación de segundo grado, menciona a Baskara cómo el autor de la fórmula general…
E14	Los videos tratan de la funciones cuadráticas, las parábolas, y de cómo se encuentran en la vida cotidiana. Hablan de que en las antiguas civilizaciones ya se estudiaba la función cuadrática la vida cotidiana, Describe la fórmula de Baskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y la fórmula general de la función cuadrática: $f(x)$: $ax^2 + bx + c$
E15	Sobre la función cuadrática que es la regla de correspondencia entre 2 conjuntos….
E16	La función cuadrática es de grado 2
E17	Habla del movimiento horizontal es rectilíneo uniforme, el tiro parabólico se eleva, alcanza su mayor altura y desciende, menciona también que y=f(x) y que la función cuadrática se puede representar en el plano…
E18	En una función de grado 2, el 2 es el mayor exponente de la variable…
E21, E22	Se cree que la función cuadrática fue creada por los egipcios, romanos o babilónicos… una parábola es una curva.
E23	Habla de trayectorias…que al bajar un objeto consigue su mayor velocidad…
E27	Algunas cosas de la vida real se pueden representar por la función cuadrática
E28, E31	Menciona a Diofanto, Mohamed Bahaskara como los matemáticos de la historia que trabajaron la función cuadrática
E33	Solo menciona el ejemplo del balón
E34	En un lanzamiento de balón existe una expresión algebraica asociada



Ahora observa los siguientes videos que proporcionará un resumen de algunas situaciones que tienen que ver con la función cuadrática, espero que te concentres. Al final construye un texto en 100 palabras que condense las ideas principales acerca de los fenómenos mostrados. Realiza este escrito con tu compañero de mesa.
http://bit.ly/2dpQEtT
https://youtu.be/86oH9bnKX0Q

·caracteristicas: como tiro parabolico, dos movimientos puede ser vertical o horizontal, pueden ser rectilineo uniforme.
·funcion y = f(x), algunos de los grandes matematicos fueron Diofanto, thomas y mohamed creo la fuerza de resistencia, Bahar Kara (600-680) $-b \pm \sqrt{b^2-4ac}$ en la funcion general,

Figura 53. Apuntes de E29 sobre los videos - PII-sesión 1 – actividad 1

Con esos videos se despierta la conciencia del estudio de la función cuadrática y lo importante que es para la ciencia.

La base de la actividad 2, es una situación de variación que se inicia con una expresión algebraica $h(t) = -t^2 + 8t$ que representa la altura de una pelota cuando se lanza hacia arriba a través de un tiempo determinado [D.1.5]. Los participantes resolvieron 5 retos o tareas que los condujeron a la comprensión de los elementos de la función cuadrática, cómo vértice, puntos de corte, concavidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento [C.3.1], y tradujeron el registro de representación de registro simbólico a registros de representación cartesiano, tabular, a través de la evaluación de la expresión inicial [C.5.2].

Al partir de un registro simbólico algebraico [C.4.2] donde se explica que trata de la trayectoria seguida por una pelota, hace pensar al estudiante la idea de una parábola. La primera tarea que se asigna a los participantes es evaluar la expresión dada para valores enteros y decimales. Aunque se observaron complicaciones cuando estaban evaluando, se reforzó con otras expresiones, y luego continuaron en la tarea. Sobre esta tarea se observó que E2, E3, E5, E7, E8, E11, E14, E16, E20, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32 evalúan [D.1.4] todos los valores asignados, luego completaron la tabla con los valores evaluados [C.4.4].

Sobre la gráfica E1, E3, E4, E5, E11, E12, E14, E16, E17, E19, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E29, E30, E33, E34, realizan muy bien la representación gráfica, muy similar a la construida por E16.

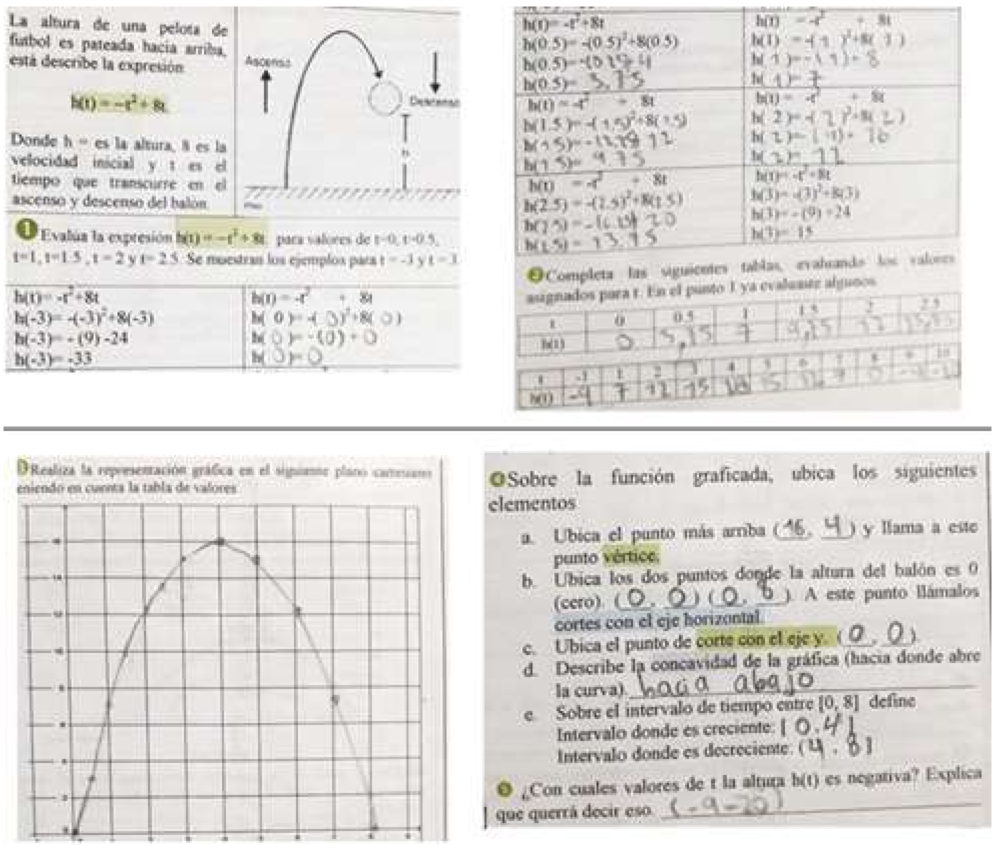


Figura 54. Respuestas de E16 - PII-sesión 1 – actividad 2

Las diferentes representaciones que se trabajan en esta sesión corresponden a fórmulas (funciones en este caso), las gráficas de tipo cartesiano y las representaciones tabulares. El MEN (1998) en los lineamientos curriculares los menciona: “entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, […] las fórmulas y las expresiones analíticas” [C.4]. (p. 50)

La actividad No. 3 usando GeoGebra [C.5.4] permite al participante interactuar con el programa, tratando el registro simbólico algebraico [C.5.3] y visualizando la gráfica cartesiana. Se esta manera el programa brinda la opción de explorar desde $y = x^2$, usando la herramienta arrastre desde la gráfica, y generar varios ejemplos. Los participantes usaron $f(x) =$

x^2 y $g(x) = -x^2$ y al usar arrastre, la parte algebraica cambia a la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Se recomienda usar la forma $y = x^2$, porque permite interactuar con las diferentes formas de representación algebraico.

Sobre las tareas asignadas los participantes crearon ejemplos de funciones generados por ellos mismos usando la herramienta arrastre, y también se les propuso un ejercicio particular para que ubicaran en la guía algunos elementos cómo los valores (a, b, c) el vértice, cortes con el $eje\ X$, corte con el $eje\ Y$, dominio, Rango, concavidad, intervalo de crecimiento, decrecimiento y el eje de simetría, de unas forma guiada para que vayan adaptándose a las siguientes tareas [C.3.1].

En las tareas de usar la herramienta arrastre con concavidad hacia arriba y hacia abajo, tenemos que: E1, E2, E3, E4, E5, E8, E9, E10, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E34 Escribe sus 4 ejemplos diferentes y lo hace dela forma: $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

Las respuestas de E16 aparecen en la siguiente figura donde se evidencia que las tareas con el software generan situaciones de aprendizaje para comprender el objeto de aprendizaje:

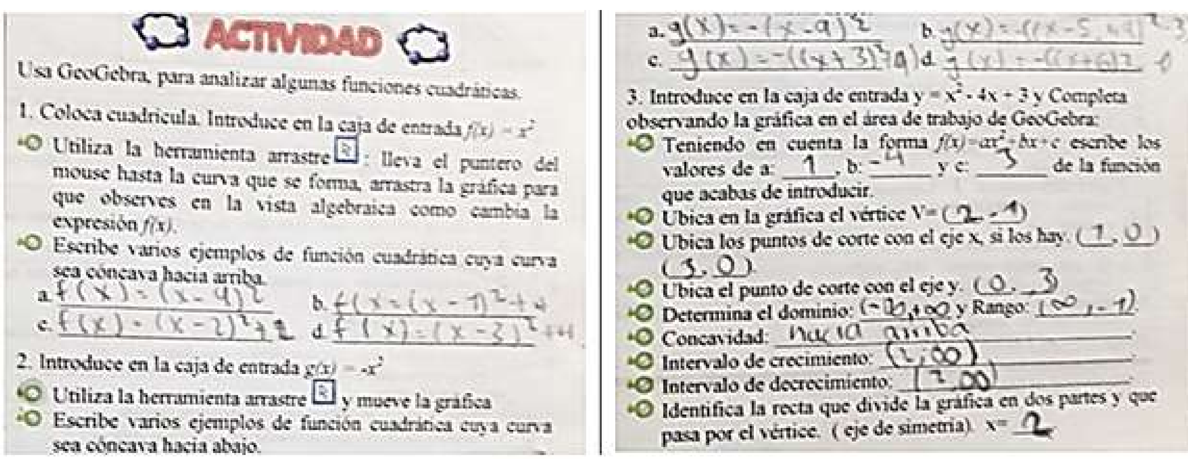


Figura 55. Respuestas de E16 de la actividad con GeoGebra PII-sesión 1 – actividad 3

A manera de conclusión con la sesión I del proyecto II, cuyo objetivo era acercar a los participantes al concepto de función cuadrática, se cumplió, y la experiencia vivida por el estudiante y para el docente fue totalmente nueva, se puso en contexto dos situaciones de la función cuadrática desde una situación de variación, cambiando el contexto de inicio, y se reflejó un gran trabajo por parte de los estudiantes participantes.

Proyecto de Aula 2 - Sesión 2: tipos de gráficas de la función cuadrática. Para esta sesión, la intervención [M] del docente marca un camino importante para que el estudiante alcance el nivel exigido, el análisis del objeto de estudio la función cuadrática (sus elementos y características) [C.3], el estudiante se demora en procesar información nueva y dar sentido a las estrategias a seguir, debe alcanzar la habilidad de analizar en representaciones gráficas cartesianas o desde situaciones de representaciones algebraicas para estar en el Nivel 2 de los N.R.V.H.

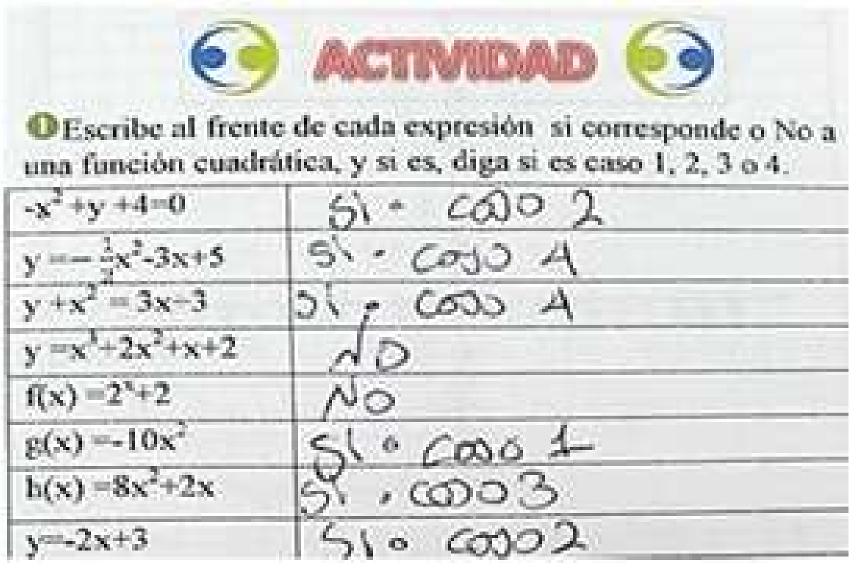
El docente utilizó diferentes estrategias para ubicar al estudiante en el nivel de razonamiento exigido. La mediación del docente fue decisiva para que el estudiante entendiera las situaciones de razonamiento planteadas. En ese sentido Díaz & Hernández (2002) describen que "el estudiante solo no construye su conocimiento, sino que lo hace gracias a la mediación con los otros, y en el ambiente del aula se encuentran el docente y sus compañeros" (p. 3).

Sobre el estudio de los elementos de la función cuadrática en los datos recolectados antes del refuerzo, se puede ver que desde el registro de representación algebraica, los participantes no dudan en determinar el Dominio, y lo expresan cómo $x \in R$ y otros escriben $(-\infty, \infty)$. Sobre la concavidad la mayoría tiene claridad y se refleja en sus respuestas. Lo mismo en la determinación de los valores $a, b, y\, c$ que son elementos necesarios para determinar otros elementos cómo el eje de simetría, el vértice y el rango. Sobre estos últimos los participantes dudaron, o no asimilaron el proceso hecho por el docente, se hizo evidente la intervención el docente para reforzar la situación planteada.

Se sugiere realizar un mapa conceptual para que los estudiantes vean los caminos que deben seguir. La forma cómo se les presentó la información no fue suficiente. El docente debe mostrar varios ejemplos para que vean como sucede el proceso para determinar los elementos de la función en las familias de la función.

Se establecieron dos tareas para que el estudiante abordara los elementos de la función cuadrática [3.1] desde los tipos de funciones cuadráticas, estableciendo los cuatro casos $y = ax^2, y = ax^2 + bx, y = ax^2 + c\ y\ \ y = ax^2 + bx + c$. [C.3.3]. En la tarea se dan 8 expresiones para que el participante las ubique en cada caso.

Se pudo observar que hay participantes que no respondieron bien en todos los ítems, pero en los casos de $y = mx + b$ lo confundieron con el caso 1, y el caso $f(x) = ax^2 + bx$, no asimilaron, mostrando por parte de los estudiantes mayor confusión. Los estudiantes mostraron dificultad para determinar a qué caso pertenece una función cuadrática, para los casos donde $f(x)$ no aparece despejada. Se hizo refuerzo para todos los casos. En la siguiente figura se relaciona las respuestas del participante E5:



ACTIVIDAD

1 Escribe al frente de cada expresión si corresponde o No a una función cuadrática, y si es, diga si es caso 1, 2, 3 o 4.

$-x^2+y+4=0$	si · caso 2
$y=-\frac{1}{2}x^2-3x+5$	si · caso 4
$y+x^2=3x-3$	si · caso 4
$y=x^3+2x^2+x+2$	NO
$f(x)=2^x+2$	NO
$g(x)=-10x^2$	si · caso 1
$h(x)=8x^2+2x$	si · caso 3
$y=-2x+3$	si · caso 2

Figura 56. Respuestas dadas por E5, PII-sesión 2 – actividad 1

En la segunda tarea tiene que ver con la organización de los elementos de la función cuadrática, desde los valores de a, b, c, el vértice, el tipo de abertura, eje de simetría, dominio y rango. El participante debe identificar los diferentes elementos y características de la función cuadrática [3.1] [D.1.2]. Algunos estudiantes reflejan el compromiso que tienen con sus aprendizajes cómo E21 y E6.

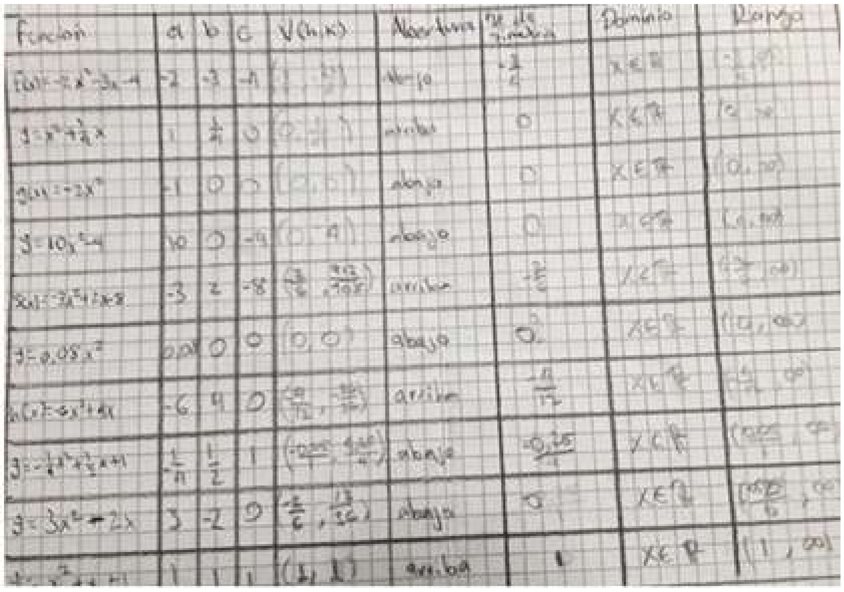


Figura 57. Respuestas de E21, PII-sesión 2 – actividad 1

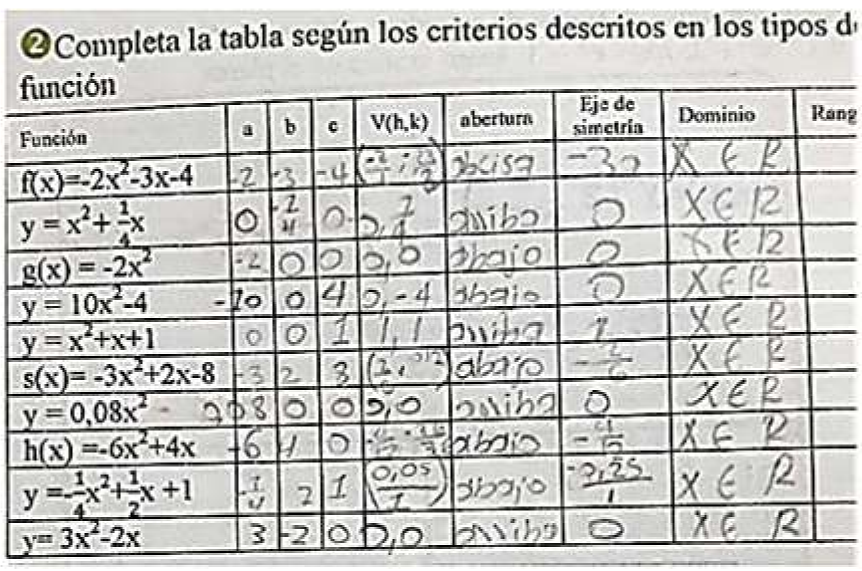


Figura 58. Respuestas de E6, PII - Sesión 2 – actividad 1

Al hacer un análisis de los datos podemos relacionar algunas respuestas de los estudiantes que tienen que ver con los elementos de la función cuadrática, como vértice, concavidad, eje de simetría, de la misma manera que lo subcategorizan en Gómez & Carulla (1999), donde incluye categorías de sistema de representación gráfica describiendo a concavidad, eje de simetría, vértice, máximos y mínimos, crecimiento entre otros.

La actividad No. 2 tiene que ver con el uso de GeoGebra [C.5.4] donde el estudiante debe interactuar con el software y realizar las tareas asignadas. Las tareas asignadas están enmarcadas en los niveles de razonamiento de Van Hiele, que para este caso se han considerado de nivel 2 por el análisis que se debe realizar en las preguntas, y el uso del lenguaje apropiado sobre los elementos que componen el objeto de estudio.

Se propuso a los participantes tres tareas, con el fin de que construyeran proposiciones veraces acerca de sus observaciones. La primera tarea que se les propuso fue la introducción de las expresiones $f(x)=2x^2$; $g(x)= -2x^2$; $h(x)=\frac{1}{3}x^2$; $i(x)=-\frac{1}{3}x^2$ en el mismo plano quedando con la siguiente vista en el área de trabajo:

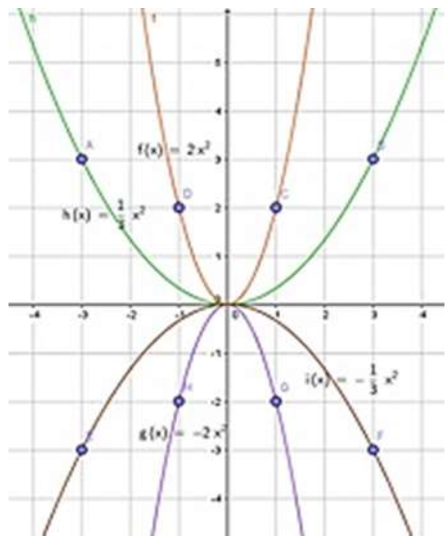


Figura 59. Funciones en el plano usando el software GeoGebra, PII-sesión 2 – actividad 2

Esta representación realizada con GeoGebra [C.5.4] no se puede realizar rápidamente con marcador y tablero, las bondades que proporciona el software son importantes para mostrar rápidamente muchas situaciones. Cuando se les exigió que representaran en la guía las gráficas se pudo observar que E5, E15, E16, E17, E21, E26 realizaron muy bien esta la actividad.

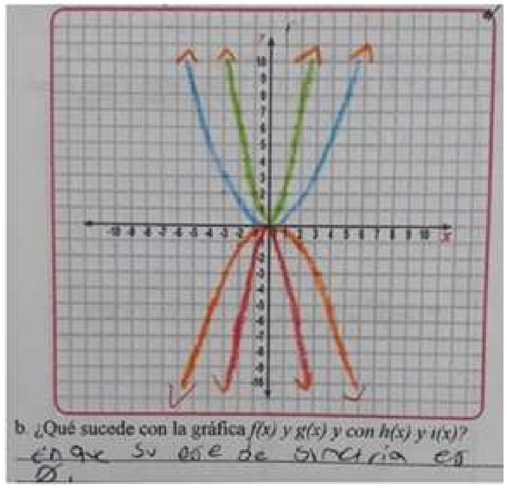


Figura 60. Esquema realizado por el participante E5, P2-sesión 2 – actividad 2

Sobre la segunda tarea que se les asigna a los estudiantes tiene que ver con las preguntas ¿Qué sucede con la gráfica $f(x)\ y\ g(x)$? ¿Qué sucede con la gráfica $h(x)\ e\ i(x)$? se rescatan las siguientes afirmaciones:

Tabla 29. Respuestas a la tarea2 PII - sesión 2 – actividad 2

Participante	Respuestas
E1, E9	Se cruzan en (0,0)
E2, E9, E11	Tienen en común el mismo vértice
E4	Las dos tienen la misma simetría
E5, E6	Tienen el mismo eje de simetría
E7	Las dos están cóncavas hacia arriba, Las dos cóncavas hacia abajo
E8, E10	Tienen diferente signo, por el cual cae en diferente parte, No van en la misma dirección
E12	Que las dos que suben son iguales a las de abajo
E13	f(x) y g(x) tienen la misma medida, pero una es negativa y la otra positiva; h(x) y i(x) tienen la misma medida, pero una es negativa y la otra positiva
E14	Hay una reflexión y también simetrías
E15, E16	Abre hacia arriba y hacia abajo, Empieza con coordenada de (0,0)
E17	Similitud, rotada verticalmente
E18	f(x) y h(x): cóncava hacia arriba; i(x) y g(x) cóncava hacia abajo
E19	Son iguales pero por el signo hace que quede cara arriba y la otra cara abajo
E21	Son cóncavas hacia arriba y hacia abajo, son el reflejo de la otra, tienen en común un punto
E22	Son cóncavas hacia arriba y hacia abajo
E23	Que tienen el mismo vértice, pero una gráfica es positiva y la otra negativa.
E24	Que tienen el mismo vértice

Participante	Respuestas
E25	f(x) y g(x) son similares y están por lados opuestos
E26	Puntos de corte en (0,0)
E27	Que ambas tienen el vértice (0,0)
E28	Son similares en todo
E29, E30	f(x) y g(x) son similares y están al revés, y i(x) y g(x) son similares si no que están al revés, tienen el mismo punto de partida (por referirse al vértice)
E31, E3	Todas tienen raíces de (0.0)
E33, E34	Que f(x) parte de 0 hasta infinito y g(x) parte de o hasta menos infinito; Que h(x) parte de 0 hasta infinito y i(x) parte de o hasta menos infinito

Se evidencia la producción de ideas a partir de la gráfica aunque algunos estudiantes emiten afirmaciones incompletas. La importancia de hacer una pausa y discutir lo que cada uno afirma se convierte en una retroalimentación de la situación, lo que es observable para uno no necesariamente puede ser para otro participante.

La tarea siguiente consistía en que introdujeran en la caja de entrada: $f(x) = x^2$; $g(x) = x^{\,2} + 1$; $h(x) = x^2 + 2$; $i(x) = x^2 - 1$, luego grafica en el plano y hacer que escribieran afirmaciones sobre la pregunta ¿Qué sucede con *f(x), g(x)? y* ¿Qué sucede con *h(x) e i(x)?*

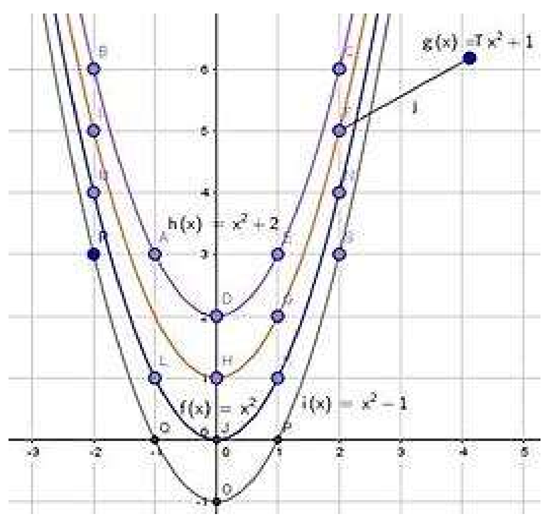


Figura 61. Vista en GeoGebra de las funciones f$(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 1$**; h**$(x) = x^2 + 2$**; i(x)=**$x^2 - 1$**, PII-sesión 2 – actividad 2**

Tabla 30. Respuestas a la tarea 3 – P II, sesión 2 – actividad 3

Estudiante	Respuestas
E1	Que todas no tienen en común el vértice, y que van hacia el más infinito
E2	Que no parten del mismo vértice y también que todos van hacia arriba.
E5, E16	Son cóncava hacia arriba
E9	Están separadas
E12	Todas van hacia arriba
E15, E17, E18	i(x) parte de (0,-1) f(x) desde (0,0) ….
E21	i(x) alcanza a cortar el eje x
E22, E31, E32, E33	i(x) alcanza a cortar el eje x, y son cóncavas hacia arriba
E23	Tienen vértices diferentes
E24	Tienen puntos de partida diferentes pero la misma trayectoria
E25, E26, E27	Todas abren hacia arriba

Cabe agregar que los participantes lucieron concentrados durante esta tarea, usando su Tablet, interactuando con el software y al mismo tiempo tomando nota en su guía orientadora de lo que percibía, y reflejándose en los rostros de la mayoría Sonrisas, compartiendo con el compañero el avance y realizando comparaciones pertinentes a la tareas asignadas. Ahí aparecen las cualidades que se publican en www.geogebra.org donde afirman que a los estudiantes les gusta usar el software GeoGebra porque: es dinámica, más allá del tablero y marcador. Es donde GeoGebra [D.2.1] se vuelve un agente motivador al aprendizaje de las matemáticas.

Para el mejor aprovechamiento del software se sugiere que el estudiante realice procesos de deformaciones como las contempla Gutiérrez & Prieto (2015) donde muestra en su trabajo el uso de deslizadores para apreciar como al cambia el valor de **a** en $f(x) = ax^2$, logrará introducir al aprendiz lo que sucede cuando cambia **a** cuando cambia entre (0, 1) o entre (0,-1) y también cuando a toma valores mayores que 1 o menores que -1.

Gutiérrez & Prieto (2015) estudió las transformaciones de funciones y las clasifica entre transformaciones rígidas y no rígidas, y para mejorar este taller sería conveniente el estudio de las transformaciones rígidas como las traslaciones y las reflexiones que fueron detectadas por muy pocos estudiantes.

Figura 62. Imagen de estudiantes trabajando en la guía, PII-sesión 2 – actividad 2

La actividad de GeoGebra sirvió para que los estudiantes recordaran algunos elementos de la función cuadráticas mostradas en el área de trabajo del software, considero que el trabajo reflejado no fue Abundante en conclusiones por parte de los estudiantes, se debio direccionarlos para que sacaran más deducciones. En cuanto la actitud observable fue totalmente positiva [D.3.1], los estudiantes con su tableta trabajando de forma independiente dejó ver que el uso de la tableta dotata por el MEN con el uso del software GeoGebra, que se convierten en artefactos mediadores para el aprendizaje [D.2]. Los estudiantes lucieron siempre ocupados, concentrados y realizando sólo la actividad planeada. De esta manera se pone de manifiesto las competencias tecnológicas que se resume en el uso de herramientas para el desarrollo de la tarea de un área, en este caso matemáticas.

La actividad No. 3 tiene que ver con el cambio de registro de representación de una expresión algebraica a registro tabular y de plano cartesiano. Se coloca de manifiesto el nivel 2 de razonamiento de van Hiele donde los estudiantes deben observar, comparar, evaluar, deducir e identificar la función cuadrática correspondiente. Esta actividad contiene dos tareas, En la primera evaluar una expresión algebraica que corresponde a una función cuadrática para luego tabular y seguidamente graficar, y en la segunda los participantes deben hacer comparaciones entre un grupo de gráficas y sus correspondientes registro gráfico cartesiano [C.4]. Los participantes E5, E6, E7, E8, E13, E14, E16, E17, E18, E19, E23, E24, E26, E27, E34 t terminan el proceso de evaluar [D.1.4], tabular y llevar al plano cartesiano.

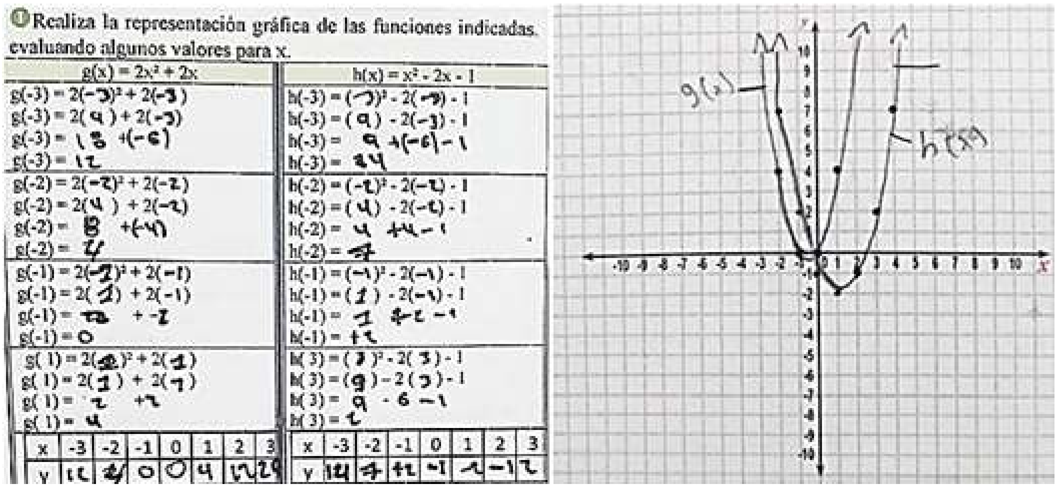


Figura 63. Trabajo realizado por E27 sobre la tarea1 , PII-sesión 2 – actividad 3

En la tarea 2 la mayoría de los participantes logran relacionar las gráficas con su respectiva función cuadrática. E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E11, E12, E13, E14, E17, E18, E19, E21, E22, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E34.

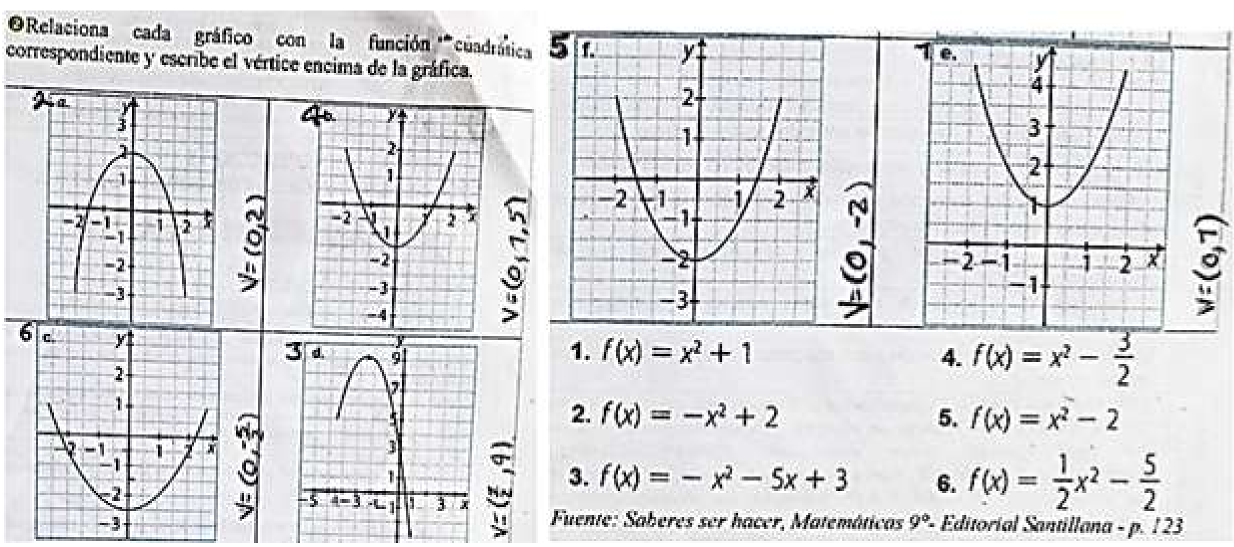


Figura 64. Trabajo realizado por E27 sobre la tarea 2, PII-sesión 2 actividad 1

Se pudo aprovechar esta actividad para que los estudiantes realizaran las siguientes tareas:

- Realizar una tabla de valores para cada gráfica de esta manera se tendrían valores para verificar la expresión algebraica.

- La ubicación del vértice de cada una de las funciones

- Cortes con el *eje y* y con el *eje x*
- Eje de simetría
- Dominio y rango
- Concavidad, máximos y mínimos
- Intervalo de crecimiento y decrecimiento
- Aclarar cuantos registros de representación están trabajando [C.3.1]

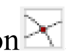
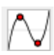
Sobre las competencias [D] que debían desarrollar los estudiantes se puso de manifiesto la forma de expresar funciones entre diferentes registros de representación, entre lenguajes verbal, gráfico y tabular. La interacción del docente [M] y entre estudiantes es lo que logra fortalecer el proceso de aprendizaje. Los estudiantes solos no van a comprender profundamente los conceptos que se requieren estudiar.

"La mediación del docente ayuda a los jóvenes a pasar de un nivel de razonamiento n a un nivel de razonamiento n+1 como se expresa en las características de los niveles de Van Hiele", donde el mismo Van Hiele (1986, citado por Jaimes, 1998) donde se afirma que el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el nivel básico (p. 14).

Proyecto de Aula 2 - Sesión 3: ceros o raíces de la función cuadrática. La sesión 3 del proyecto II se divide en 3 actividades la primera tiene que ver con unas representaciones cartesianas [C.4.3] que invitan a pensar sobre tareas específicas que se plantean. Bajo este contexto los participantes deben hacer deducciones observables. En las 6 primeras tareas de esta actividad se proponen situaciones de nivel 1 en los N.R.V.H. los razonamientos que se proponen implican reconocimiento o visualización. La tarea No. 7 va un poco más lejos, proponiendo expandir un registro de representación de la forma algebraica $y=a(x-h)^2 + k$ a otra forma algebraica $y=ax^2+bx+c$ [C.4], en este caso el estudiante debe expandir la expresión que se encuentra en el plano y de verificar los intercepto con los ejes [C.3.1.7].

Luego de socializar los casos de las soluciones de una función cuadrática [C.3], se propone la actividad 2 que implica evaluar, tabular, graficar, y ubicar los puntos de corte con los ejes

[C.3.1]. A este tipo de operaciones se les ha considerado operaciones de nivel 2 en los niveles de razonamiento de Van Hiele.

La actividad número 3 corresponde a una secuenciación usando GeoGebra [C.5.4] haciendo la entrada de datos al software de la forma $4p\ (y\text{-}k) = (x\text{-}h)^2$. La intención es mostrar al estudiante las otras formas de registro simbólico algebraico que se consideran al estudiar la parábola desde su forma funcional. GeoGebra permite esa conversión donde cuatro formas de expresión simbólica. El estudiante usará el programa para hallar los puntos de corte con la ayuda del software y la herramienta intersección , el vértice y las raíces con la herramienta extremos , y la herramienta .

Revisando las tareas de la actividad No. 1, en el análisis de las respuestas de las tareas 1 y 2 la mayoría describen situaciones que se observan, pero no son muy específicos. Pueden hacer más detalles. Los estudiantes cuando hacen la puesta en común al finalizar las actividades, comparten otras características y se verifica la veracidad de sus afirmaciones, en este caso los estudiantes se convierten en mediadores de sus aprendizajes. Igualmente el docente es clave importante del proceso, pues avala los comentarios y hace los aportes pertinentes. La siguiente figura pertenece a las gráficas dadas a los estudiantes para 7 tareas:

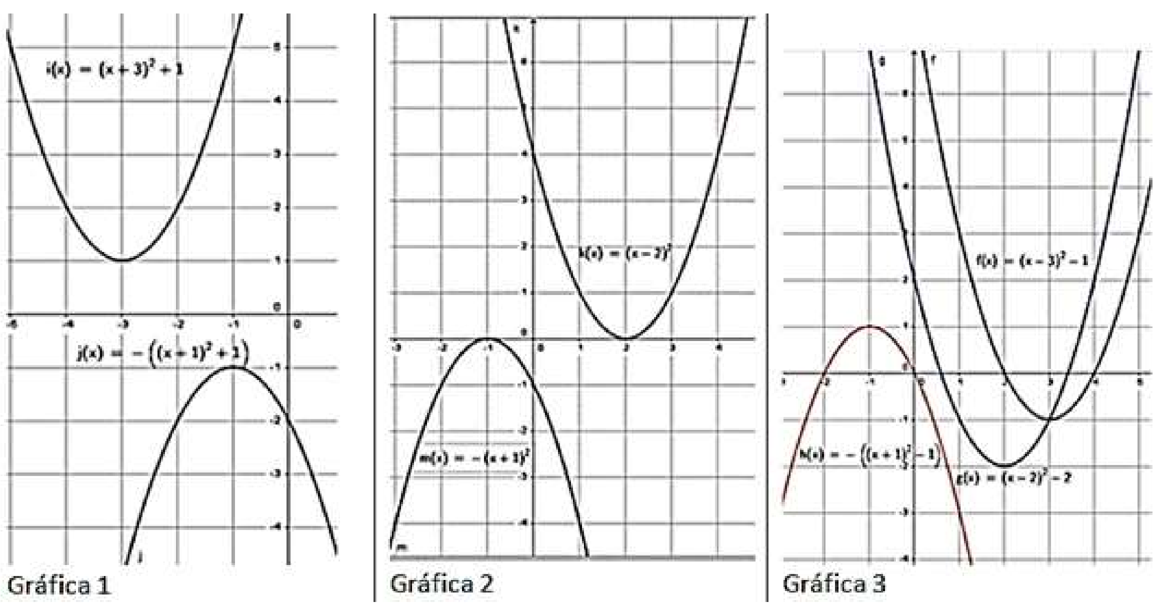


Figura 65. Gráficas i(x), j(x), k(x), m(x), f(x), h(x) y g(x), PII -sesión 3 – actividad 1

Las respuestas de la tarea 1 ¿Qué tienen de común la función i(x) y j(x)? algunos estudiantes participantes respondieron de la siguiente manera:

Tabla 31. Respuestas a la tarea 1 – PII – Sesión 3 – actividad 1

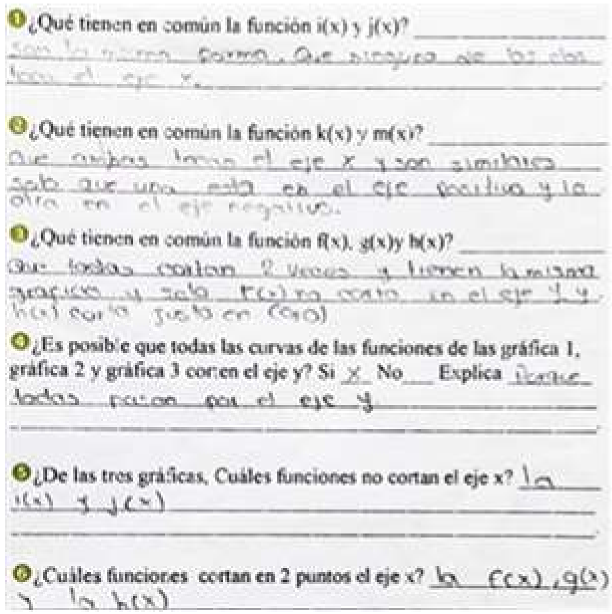
Estudiantes	Respuestas
E1, E2, E3, E4, E10, E13	Que ninguna de las dos toca el eje x, y las dos son funciones y van al infinito
E5, E6	Expresa que una tiene como vértice (-1,-1) y ninguna toca el eje x
E7, E17,E18, E22, E31, E32	Que ninguna toca el eje x
E11	Las dos son funciones, ninguna cruza el eje x, tienen la misma curva si no que en dirección contraria.
E13, E14, E23, E24, E26	Que las dos son funciones, que ninguna de las dos toca el eje x
E15, E16, E29	Las dos son función, ninguna de las dos toca el eje x, las dos son parábolas
E19, E20, E33	Tienen la misma forma y no tocan el eje x
E26	Ninguna toca el eje x, de i(x) el vértice es (-3, 1) y de j(x) el vértice es (-1, -1)
E27	En que ambas son igual de estrechas … y ninguna toca el eje x

A la tarea 4 se le asignó la siguiente pregunta ¿Es posible que todas las curvas de las funciones de las gráfica 1, gráfica 2 y gráfica 3 corten el eje y? Si ___ No___ Explica.

Tabla 32. Respuestas a la tarea 4, PII – Sesión 3 – actividad 1

Estudiantes	Respuestas
E1, E2, E4, E9,E12, E14, E18, E22, E33	Si porque todas tocan el eje y, sí porque todas tienen un punto de corte en el eje y.
E5, E6, E8	Si porque al pasarlas a la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ todas las funciones tienen puntos de cruce o de corte
E7, E10, E13, E23, E24, E25, E26, E28	Si, sin razones o razones equivocadas.
E11	Sí, porque todos sus puntos de corte son verdaderos, se pueden probar por medio del corte con el eje y (0,c)
E19, E20	Si porque depende de la fórmula $f(x)=ax^2+bx+c$ todas tienen un punto de corte.
E27, E31, E32	Sí, porque la función va infinitamente y llega en un momento que corta al eje y

Los estudiantes generalmente responden de una forma sencilla, por eso en la elaboración de las preguntas se debe ser específico de tal manera que se pueda llevar al estudiante a razonar en lo que se requiere.



1 ¿Qué tienen en común la función i(x) y j(x)? Son la misma forma. Que ninguna de las dos toca el eje x.

2 ¿Qué tienen en común la función k(x) y m(x)? Que ambas tocan el eje x y son simétricas solo que una está en el eje positivo y la otra en el eje negativo.

3 ¿Qué tienen en común la función f(x), g(x) y h(x)? Que todas cortan 2 veces y tienen la misma gráfica y solo f(x) no corta en el eje y, h(x) corta justo en (0,0)

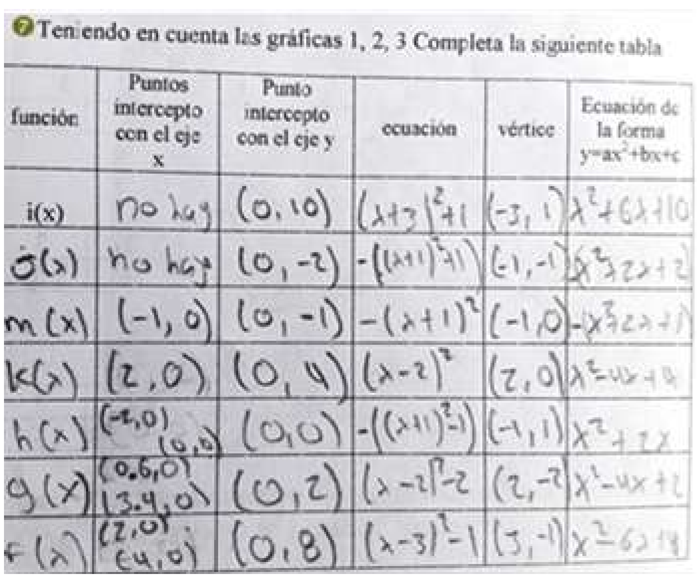
4 ¿Es posible que todas las curvas de las funciones de las gráfica 1, gráfica 2 y gráfica 3 corten el eje y? Si X No__ Explica porque todas pasan por el eje y

5 ¿De las tres gráficas, Cuáles funciones no cortan el eje x? la i(x) y j(x)

6 ¿Cuáles funciones cortan en 2 puntos el eje x? la f(x), g(x) y la h(x)

Figura 66. Respuestas de E33, P2-Sesión 3 – actividad 1

La tarea 7 es un poco más compleja y muchos estudiantes tuvieron dificultad para expandir la expresión dada, estudiantes cómo E16, E17, E25, E26, E27, E32 completaron toda la tabla.



7 Teniendo en cuenta las gráficas 1, 2, 3 Completa la siguiente tabla

función	Puntos intercepto con el eje x	Punto intercepto con el eje y	ecuación	vértice	Ecuación de la forma $y=ax^2+bx+c$
i(x)	no hay	(0, 10)	$(x+3)^2+1$	(-3, 1)	$x^2+6x+10$
j(x)	no hay	(0, -2)	$-((x+1)^2+1)$	(-1, -1)	$-x^2-2x-2$
m(x)	(-1, 0)	(0, -1)	$-(x+1)^2$	(-1, 0)	$-x^2-2x-1$
k(x)	(2, 0)	(0, 4)	$(x-2)^2$	(2, 0)	x^2-4x+4
h(x)	(-2, 0) (0, 0)	(0, 0)	$-((x+1)^2-1)$	(-1, 1)	x^2+2x
g(x)	(0.6, 0) (3.4, 0)	(0, 2)	$(x-2)^2-2$	(2, -2)	x^2-4x+2
f(x)	(2, 0) (4, 0)	(0, 8)	$(x-3)^2-1$	(3, -1)	x^2-6x+8

Figura 67. Respuesta de E27-tarea 7, P2-Sesión 3 – actividad 1

Se puede deducir que mediante un registro gráfico cartesiano [C.4.3] donde se visualizan varias funciones cuadráticas [C.3] se pueden estudiar las características observables de las funciones con algunos de sus elementos cómo cortes con el eje x (si los hay) y cortes con el eje y [C.3.1.7, C.3.1.8] que a través de preguntas bien concebidas se puede generar en los estudiantes razonamiento y observación [A2], haciendo que los participantes produzcan ideas [A1]. Se puede evidenciar en las respuestas dadas por E27 y E23.

En la actividad No. 2 Se propuso 3 funciones cuadráticas en registro simbólico algebraico de la forma $y=ax^2+bx+c$ para que tradujeran a registros diferentes de representación [C.4], haciendo que los participantes construyeran las tablas de valores establecidas [C.4.4, D.1.4], y luego realizaran las correspondientes representaciones gráficas cartesianas [C.4.3], seguidamente determinar sus raíces y de esta manera describir el tipo de caso que representa cada función cuadrática dada.

Sobre la tarea de evaluar y completar el registro tabular de cada función cuadrática dada los participantes E1, E2, E5, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E22, E26, E27, E28, E31, E32, E33 completaron bien las tablas, y E1, E2, E14, E15, E16, E17, E18, E22, E26, E27 completan bien todas las gráficas en el tiempo asignado. Los demás deben entregar en su cuaderno de apuntes en la próxima clase.

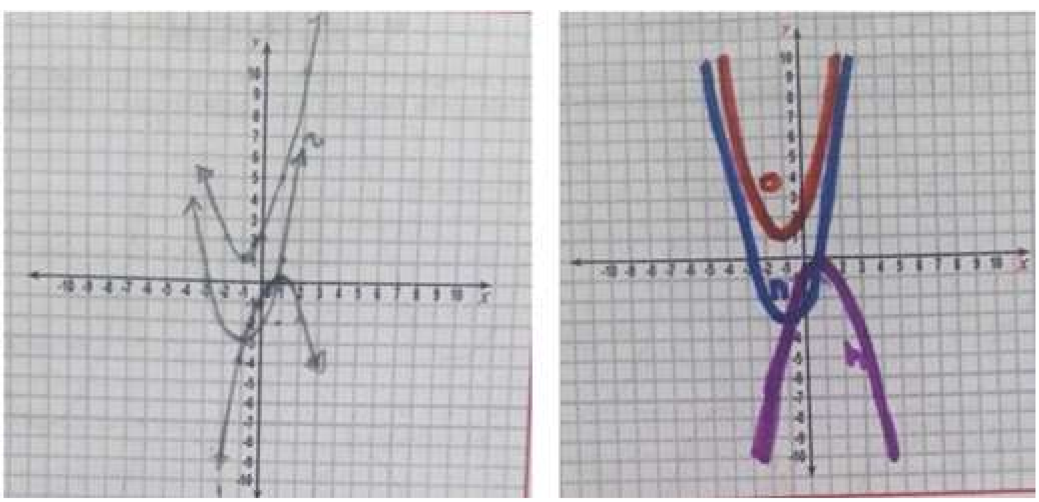


Figura 68. Registro gráfico cartesiano de los participantes E14 y E17, P2-Sesión 3 – actividad 2

Se pudo apreciar que hay estudiantes que no tienen compromiso de sus aprendizajes, se acostumbran que haya que darles todo para que construyan su conocimiento. La corrección de las tareas asignadas a los estudiantes se convierte en una estrategia para reforzar lo que construyeron individualmente o en grupo, fortalece el pensamiento del joven, repasa, y se tiene seguridad que la información nueva corresponde a lo esperado. Esto implica más uso de tiempo de lo planificado.

La dirección por parte del profesor no significa que éste le indique al estudiante cómo resolver el ejercicio, sino que debe planificar las situaciones que propone a sus alumnos para que ellos puedan establecer las características importantes, básicas del nivel (Gutiérrez & Jaime, 1998, p. 34) pero se presentarán ocasiones donde el estudiante por sí solo no va poder desarrollar y es en ese momento donde la intervención del docente [M] va aparecer. El estudiante debe recibir la ayuda necesaria para que pueda avanzar de un nivel de razonamiento al siguiente nivel.

A veces no es sencillo hacer que el estudiante construya su conocimiento, pero la motivación [D.3.4] por parte del docente debe hacerse evidente, o el cambio de estrategia de enseñanza.

La actividad No. 3 tenía como propósito entrar al estudiante en otro entorno para que explorara el objeto de estudio, el estudiante tendrá un recurso adicional para identificar las raíces, el corte con el eje y, y el vértice. Esta actividad contiene 8 tareas.

Es poco común proponer situaciones de las formas $4p\ (y\text{-}k) = (x\text{-}h)^2$ o $y=a(x\text{-}h)^2 + k$ Gómez & Carulla (1999, p. 15) las contempla en los estudios por docentes participantes en el distrito capital para la función cuadrática, esta se puede trabajar con GeoGebra [C.5.4] a manera de introducción para que los estudiantes interpreten las diferentes formas de representación algebraica [C.4.2].

La actividad con GeoGebra [C.5.4] sirve de complemento para determinar desde el uso de un software y un recurso como la Tablet, la descripción de las diferentes características de las funciones cuadráticas [D.1.1, C.3], cómo a partir de la herramienta arrastre se pueden recrear un sin número de ejemplos que abre la mente del participante a las posibilidades infinitas de la creación de funciones cuadráticas en una porción del plano que se observa en el área de trabajo de GeoGebra, situación que en el tablero no resulta tan fácil de explicar. Las posibilidades de la visualización algebraica mientras se arrastra la gráfica cartesiana da tiempo para decidir dónde colocar la gráfica. Sobre los resultados de la actividad con GeoGebra se pueden ver avances en las 4 tareas iniciales, donde relacionaron a la expresión $(y-1)=(x-1)^2$ con una parábola, cuando se visualizaron en el área de trabajo de GeoGebra la representación gráfica. E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E29, E31, E32, E33 escriben el corte con el eje y es (0,2) y mencionan que no hay cortes con el eje x. Los participantes E4, E11, E12, E13, E14, E16, E17, E18, E19, E26, E31, E32 realizaron bien sus gráficas y la tabla correspondiente a vértice, cortes con el eje x y cortes con el eje y, de la misma forma que E26.

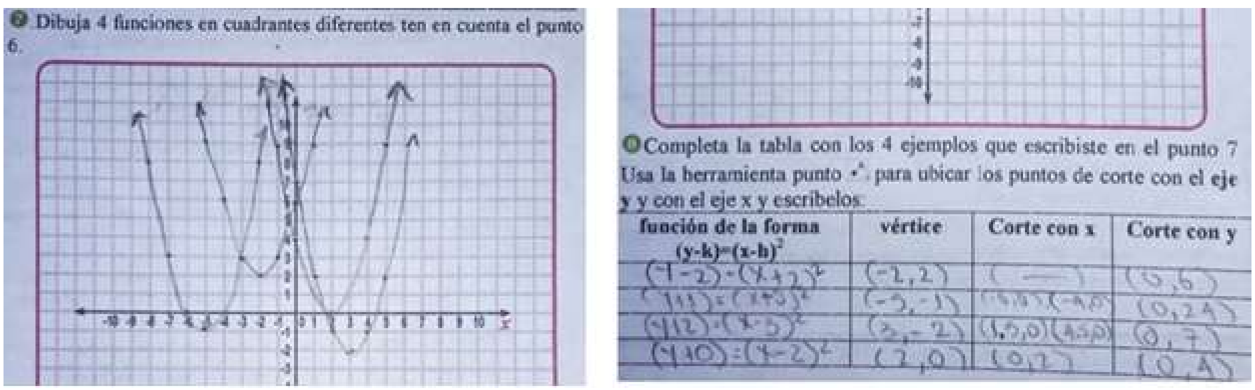


Figura 69. Respuestas de E26 sobre las tareas 7 y 8, , P2-Sesión 3 – actividad 3

El proyecto II se constituye en una propuesta para el estudio de la función cuadrática [C.3] a partir de representaciones cartesianas, o expresiones simbólicas algebraicas [C.4], con una cantidad de tareas que les permiten a los participantes apropiarse del estudio de las características y elementos [C.3.1] necesarios para entender situaciones de variación de fenómenos de la ciencias naturales como la dinámica, situaciones de áreas, movimiento horizontal, entre otros.

3.6.2.5 Análisis de la evaluación del proyecto de aula I y II. Durante la evaluación muchos estudiantes se acercaron a preguntar, pues había situaciones que no recordaban. Se les dio instrucciones pero sin que se les diera la respuesta. Durante la evaluación se iba revisando estudiante por estudiante para verificar que tanto estaban siendo tan acertados.

En la evaluación se presentan 5 situaciones de variación [D.1.5], donde 3 de ellas muestran el tiempo como la variable independiente [C.1.2], y las otras dos están relacionadas con el costo de un artículo o del volumen de un líquido. Dirigir preguntas en estos contextos ayuda a los aprendices a encontrar sentido al estudio de funciones. Castiblanco et. al. (2004), comenta la importancia del uso de situaciones de variación en tareas asignada a los estudiantes y describe "las gráficas y tablas son necesarias para modelar situaciones de cambio y la importancia de ejercitar las traducciones de una a otra de las distintas representaciones de una función" (p. 12). Si relacionamos esas tablas y gráficos con situaciones de la vida cotidiana se convierten en ambientes para propiciar en los estudiantes el desarrollo de competencias. Las situaciones de variabilidad que se plantean a los estudiantes deben relacionarse con actividades de la vida cotidiana para que sea considerado interesante su estudio, El MEN (1998) en sus lineamientos curriculares expresa el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.

Las preguntas 1, 9 y 10 se relacionan con la identificación de la variable dependiente e independiente [C.1.2-C.1.3] en situaciones de variación, que para la pregunta 1 es la caída libre de un cuerpo, y para la 9 y 10 es la trayectoria de un globo [D.1.5]. Aunque en la mayoría de las situaciones de variación tienen que ver con la dependencia del tiempo algunos participantes no han asimilado esa característica de las relaciones funcionales. Andonegui (2008) expresa que el tiempo sirve de referencia para registrar la variación de la variable dependiente, presente en los problemas descritos. A la pregunta 1 los participantes han descrito que el tiempo es la variable independiente.

Tabla 33. Respuestas a las preguntas 1 y 9 – pos-test

De la pregunta 1	
Estudiantes	Respuestas
E1, E3, E5, E11, E15, E16, E17, E18, E19, E22, E25, E26, E29, E33, E35	Tiempo
De la pregunta 9	
Estudiantes	Respuestas
E1, E2, E3, E5,E6, E15, E17, E18, E19, E20, E22, E25, E26, E28, E29, E30, E36	Tiempo

Sobre las preguntas 2, 8, 11, 16, 20 están relacionadas con traducir [D.1.6] registros de representación [C.4]. Sobre los resultados de la pregunta 2, en la traducción de la representación tabular al plano cartesiano, fueron más efectivos que en las otras traducciones, 20 estudiantes realizaron la representación gráfica [C.5.2] [C.4.4 – C.4.3]. Sobre la pregunta 8, 17 participantes identifican la tabla que pertenece a una situación de variación representada en forma algebraica [C.4.2 – C.4.4]. Las preguntas 11 y 16 tienen que ver con la traducción del registro gráfico cartesiano al registro tabular y en sólo 12 estudiantes realizan la traducción en la pregunta 11 y 7 en pregunta 16. La mayoría de los estudiantes no alcanzaron abordar todas las preguntas por el tiempo asignado para responder. La pregunta 20 sólo 3 estudiantes la realizaron. Una muestra del dominio de un objeto matemático como el de la función es la traducción entre varios sistemas de representación (Andonegui, 2008, p. 16).

Sobre la pregunta 2, la mayoría construye en un plano cartesiano en forma detallada una gráfica a partir de una tabla de valores, tal como se muestra en los participantes: E2, E5, E6, E7, E8, E9, E11, E12, E14, E16, E17, E19, E22, E24, E25, E26, E27, E31, E34, E35; el la siguiente figura se observa el trabajo de E27:

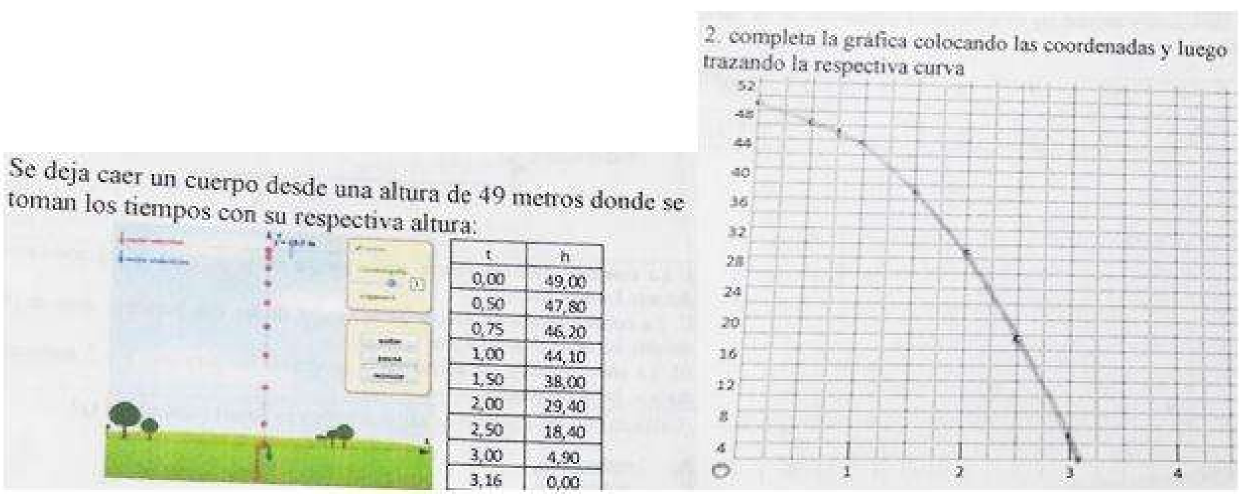


Figura 70. Respuesta de E27 a la pregunta 2 –pos-test

Sobre las preguntas 3 y 12 se relacionan con identificar el tipo de gráfica representa una función. A la pregunta 3 los estudiantes responden E2, E3, E5, E7, E8, E11, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E22, E23, E26, E27, E30, E32, E33, E34 responde que la gráfica pertenece a una semiparábola, sin haberles explicado anteriormente

En la pregunta 12 la mayoría describe que la gráfica mostrada corresponde a una parábola cóncava hacia abajo [C.3.2].

En la pregunta 4 se cuestiona si la situación que se plantea de caída libre es una relación funcional. La mayoría identifica que la gráfica representada representa una función [C.1] y algunos participantes describen argumentos del porque es función, la mayoría se apoya en la gráfica construida en el punto 2:

Tabla 34. Respuestas a la pregunta 4 – evaluación pos-test

Estudiantes	Respuestas
E2	Escribe que si es función porque se trazó una línea al medio, solo rompe una vez entonces es función.
E5	Si es función porque al trazar una línea vertical no corta en dos la semiparábola
E6, E9, E10, E12, E16, E23, E24, E25, E29, E30,E34	Si es función sin argumentos sólidos
E8	Si, corresponde a una función ya que al trazar cualquier línea sólo toca una sola vez
E11	Es función por supuesto porque podemos trazar líneas que queramos… que solo se encontraran una sola vez
E14	Sí, es función porque corta en máximo un solo punto.
E15, E17, E18	Sí, porque a cada elemento de T, se le asigna un elemento de H.
E19	Sí, porque a cada punto le corresponde a otro.
E26	Sí, ya que al conjunto A le pertenece uno y solo un elemento de B
E27	Si corresponde, porque al hacer una línea recta por la gráfica solo corta una vez
E32	Sí, porque si corresponde a una función porque existe una relación con tiempo y altura.

Sobre la pregunta 5 los participantes asociaron el precio del galón de gasolina con 5438. Las respuestas dada por 22 de los 35 estudiantes corresponde a lo esperado, sin embargo 13 estudiantes hacen otros tipos de interpretaciones y marcan otras opciones. En esta pregunta los estudiantes se acercaron a preguntar sobre cuál de los precios correspondía a la gasolina y cuál al del a.c.p.m. porque el letrero no estaba muy claro, y se decidió que el precio más bajo se asumía cómo el de gasolina.

En la pregunta 6 que tiene el texto: un usuario que le dice al auxiliar del dispensador que le sirva $20.000 pesos de gasolina, ¿cuántos galones debe asignarle? A esta pregunta la mayoría de los participantes no asumieron el proceso, no porque no tengan capacidad para realizar el tipo de operaciones, si no que se acostumbran a tener las posibilidades de siempre. En las preguntas abiertas el participante se demora más en procesar la información, la decisión de la primera acción es lenta y gastan mucho tiempo haciendo ese tipo de análisis. La mayoría de los que respondieron con un poco de coherencia lo realizaron con aproximaciones:

Tabla 35. Respuestas de algunos participantes a la pregunta 6 de la evaluación final

Estudiantes	Respuestas
E1	Le debe asignar 3 galones de gasolina
E2	3 galones y le faltarían $1.600 para completar los 4 galones
E6, E9, E16, E29, E32, E33	4 galones, aproximadamente 4 galones
E7, E5,	3 galones y sobraría al usuario -3,3 galones
E11	Escribe 3,67 galones
E12, E28	3 galones
E17, E31	3 galones y le sobran 3686 pesos – 3 galones y le darían vueltos.
E24	El auxiliar le debe asignar 3 galones y medio
E26	Realiza la división y escribe 3,6 galones
E27	Realiza una tabla desde o hasta 5 galones, y escribe aproximadamente 4 galones

Las respuestas de E26 y E27 muestran procedimientos diferentes para dar una respuesta aproximada:

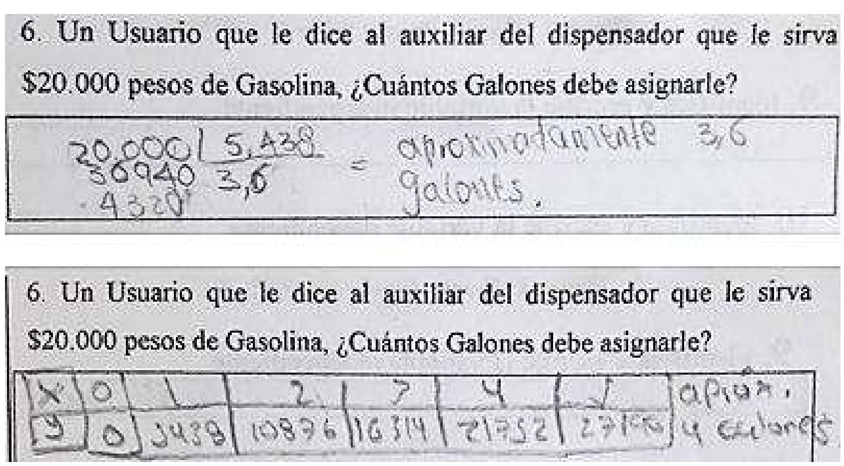


Figura 71. Respuestas de E26 y E27 a la pregunta 6, pos-test

Se observan dos procedimientos diferentes para dar respuesta a la pregunta. En la corrección de la evaluación se aclararon todos los puntos donde se evidencia refuerzo como el caso de la pregunta 6.

En cuanto a la pregunta 7 se pone de manifiesto el concepto de función cuando se realiza la pregunta 7. Teniendo en cuenta el problema de la estación de servicio, ¿En un día es posible que los usuarios paguen costos diferentes por la misma cantidad de combustible? Algunas respuestas se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 36. Respuestas a la pregunta 7 de la evaluación final

E4	No porque si amanece así, el precio no va a cambiar
E5, E19, E27	No es posible
E7, E18, E23, E35	No responde
E8	No… va a ser el mismo combustible, no va a variar.
E10	No, porque es por la cantidad que se paguen, los clientes tienen gasolina que es costo de
E11	No, ya que en la lectura anterior nos dice que los precios que se asignan en un día permanecen constantes, pero en días diferente pueden variar.
E13	Los precios que se asignan en un día permanecen constantes de 6268 al día
E14	No, porque los precios cambian en días no en horas
E15, E16, E17	No, porque los precios de un día se mantienen constantes
E20	No, porque los precios se mantienen en un día constante, no varía, entonces los usuarios pagan la misma cantidad.
E22, E33	No, porque cada galón tiene su precio
E25	No, porque ponen el precio de la gasolina el día.

Los demás participantes se salen del contexto de las preguntas.

Sobre la pregunta 8 se les presenta a los estudiantes una situación de variación para la identificación de la tabla correspondiente dado el registro de representación algebraico y una serie de condiciones, el cual se ha podido verificar que 17 participantes responden bien la situación.

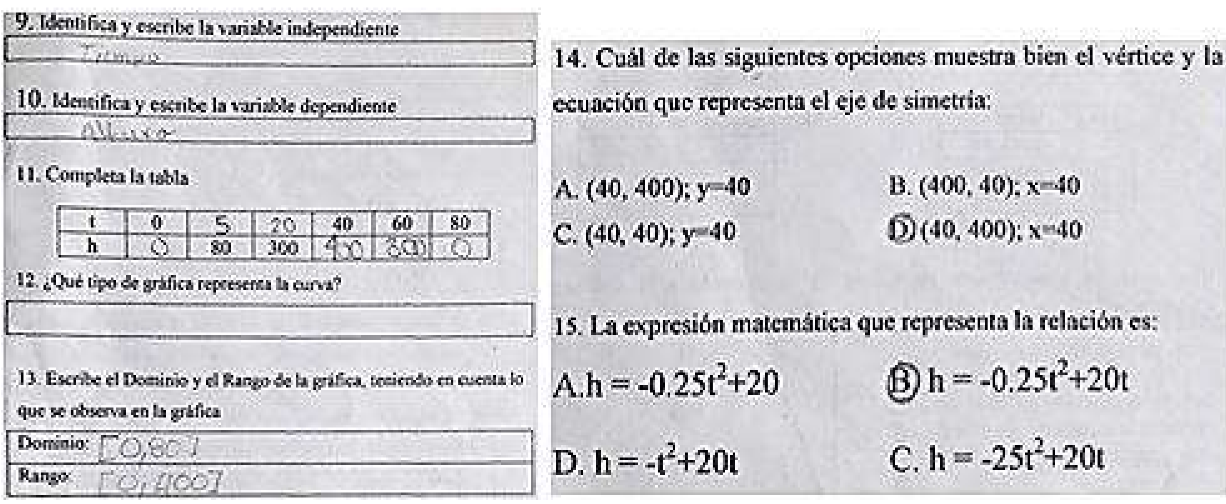
La pregunta 11 se consiste en completar una tabla acerca de una situación de variación en la que los participantes deben extraer datos del plano cartesiano y llevarlos a una tabla de valores con datos ya predeterminados. Sobre esta traducción de registro 12 estudiantes completan bien la tabla y 13 lo hacen parcialmente.

Tabla 37. Respuestas de la pregunta 11 – evaluación pos-test

Estudiantes	Respuestas
E5, E11, E12, E13, E15, E16, E17, E18, E26, E27, E33, E36	Todas las parejas bien relacionadas
E1, E2, E3, E7, E8, E9, E10, E22, E23, E30, E31, E32, E34,	Parejas parcialmente relacionadas
E4, E6, E14, E19, E20, E24, E25, E28, E29, E35,	Demasiados errores o no responde

La corrección de las actividades y evaluaciones se convierten en refuerzos a las situaciones que algunos participantes no logran entender. Animar [M.5] a los aprendices a tener conciencia de sus aprendizajes es una tarea que no es sencilla. Llevar a clase situaciones que le interesen al estudiante, que lo motiven a realizar razonamiento sobre su contexto.

En la pregunta 13 los estudiantes debían escribir el dominio y rango de la gráfica mostrada. E3, E4, E7, E8, E10, E11, E14, E20, E22, E23, E25, E32, E33, E34, E35, E36 escriben que Dom:[0 , 80] Ran: [0, 400].



9. Identifica y escribe la variable independiente

Tiempo

10. Identifica y escribe la variable dependiente

Altura

11. Completa la tabla

t	0	5	20	40	60	80
h	0	80	300	400	300	0

12. ¿Qué tipo de gráfica representa la curva?

13. Escribe el Dominio y el Rango de la gráfica, teniendo en cuenta lo que se observa en la gráfica

Dominio: [0,80]

Rango: [0,400]

14. Cuál de las siguientes opciones muestra bien el vértice y la ecuación que representa el eje de simetría:

A. (40, 400); y=40 B. (400, 40); x=40

C. (40, 40); y=40 D. (40, 400); x=40

15. La expresión matemática que representa la relación es:

A. $h = -0.25t^2+20$ B. $h = -0.25t^2+20t$

D. $h = -t^2+20t$ C. $h = -25t^2+20t$

Figura 72. Respuestas de E36, evaluación pos-test

Sobre la pregunta 14 los participantes E2, E4, E5, E7, E9, E10, E12, E13, E15, E16, E17, E18, E22, E23, E26, E27, E33, E34, E35, E36 seleccionan bien sus respuestas, ubicando la respuesta que contiene el vértice [C.3.1.1] y el eje de simetría [C.3.1.6] de la situación de variación en estudio. A la pregunta 15 que corresponde al registro de representación simbólico que representa la figura trazada en el plano cartesiano, los estudiantes que seleccionan bien la respuesta corresponden a: E5, E7, E9, E10, E14, E15, E17, E18, E20, E23, E28, E30, E32, E36.

La evaluación se construye para verificar los aprendizajes que han adquirido los estudiantes. En ese sentido esta debe estructurarse de tal manera que provoque analizar y responderla; cuando se establecen las preguntas abiertas se puede identificar los procesos mentales que el aprendiz realiza al responder una pregunta, en cambio cuando se trata de una pregunta de selección múltiple, algunos estudiantes seleccionan porque consideran la respuesta, sin realizar proceso. Al indagar sobre el motivo de la selección de la posible respuesta a la pregunta, algunos participantes se atreven a decir que les parece que esa es la respuesta, pero no se evidencia que el estudiante realice un proceso para la elección de la respuesta, de ahí la importancia en realizar evaluaciones con preguntas abiertas.

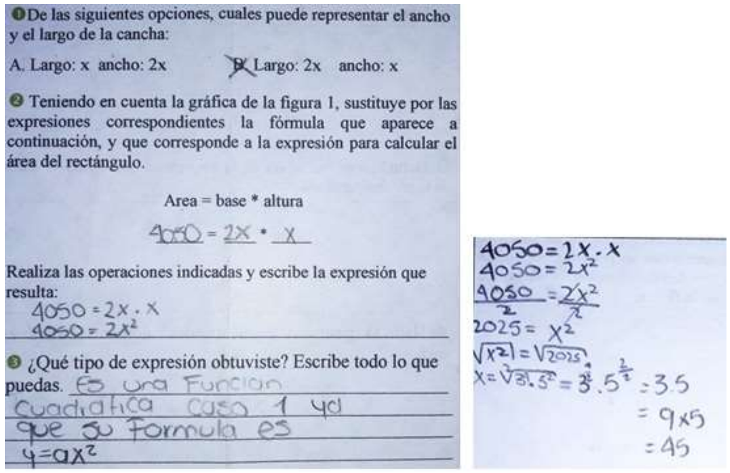
El refuerzo de esta actividad fue importante para socializar los aprendizajes que se espera todos los participantes adquieran. Las evidencias de aprendizajes corresponden al pensamiento numérico-variacional y a la competencia comunicación, en la siguiente tabla se reflejan en muchas situaciones de la evaluación:

Tabla 38. Aprendizajes y evidencias relacionados con la evaluación pos-test

Aprendizaje	Evidencia	Preguntas
Identificar características de grá-ficas cartesianas en relación con la situación que representan.	Observar y describir la variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables [D.1.5] -	1-15
	Identificar el sentido de la unidad de medida en una representación gráfica (p.e. las unidades en los ejes de coordenadas).	2 – 15-16
	Expresar y traducir entre lenguajes verbal, gráfico y simbólico [D.1.6]	2-5-8-15-16-20
	Reconocer rango y dominio de una función en un contexto determinado.[C.2-C.3][C313-C312][C.2.1-C.2.2][D.1.2]	13-17-20
	Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones lineales, afines y cuadráticas. [D.1.1] [D.1.2]	2-8-15
Identificar expresiones numéricas y	Identificar equivalencia entre expresiones algebraicas y expresiones numéricas	5
	Evaluar expresiones algebraicas	6-8-15-16-20

Aprendizaje	Evidencia	Preguntas
algebraicas equivalentes	[D.1.4] [C.5.2]	
Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas	Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa. [C.1-C.2][C.3][D.1.1]	3-4-20
	Identificar puntos de intersección entre diferentes gráficas [C.3.1.7-C.3.1.8]	18
	Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas [D.1.1]	19
	Identificar y relacionar los elementos de la ecuación asociada a funciones lineales, cuadráticas u otras [C.3]	9-10-12-14
Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación	Usar expresiones algebraicas como forma de representar cambios numéricos	5-8-15-20
	Construir tablas a partir de expresiones algebraicas [D.1.4][C.4]	8-11-20
	Construir gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados verbales [D.1.5][D.1.6][C.4]	2 – 8-20

3.6.2.6 Análisis y discusión del proyecto de aula III: La ecuación cuadrática. *Proyecto III – sesión 1*. En esta sesión se presenta una actividad inicial relacionada con una cancha de fútbol, que presenta la relación: largo de la cancha de futbol es dos veces su ancho. Su área equivale $4050\, m^2$. Los participantes reconocen el contexto de la situación que representa una situación de la vida cotidiana [A.4] Los participantes logran extraer el ancho y el largo de la cancha a través de la observación, y el respectivo análisis de la figura rectangular que esta representa, poniéndose de manifiesto el nivel 1 de Van Hiele [A.2]. Con la ayuda del mediador reforzando [M.4] los estudiantes fueron construyendo las tareas 2 y 3. En esta última los estudiantes no notan la ausencia de y, tratan de comparar la expresión obtenida con las familias de la función cuadrática. Sin embargo difieren entre si es el caso 1 ó 3. Se hizo necesario aclararles que si la expresión fuese $A = 2x^2$, se tendría la variable independiente y dependiente, pero al final se convirtió en una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + c = 0$. Las siguiente imagen corresponde a las respuestas del grupo 4 sobre las preguntas 1, 2 y 3.



❶De las siguientes opciones, cuales puede representar el ancho y el largo de la cancha:

A. Largo: x ancho: 2x   ~~B.~~ Largo: 2x ancho: x

❷ Teniendo en cuenta la gráfica de la figura 1, sustituye por las expresiones correspondientes la fórmula que aparece a continuación, y que corresponde a la expresión para calcular el área del rectángulo.

Area = base * altura

4050 = 2X • X

Realiza las operaciones indicadas y escribe la expresión que resulta:

4050 = 2x . x

4050 = 2x²

❸ ¿Qué tipo de expresión obtuviste? Escribe todo lo que puedas. Es una Funcion Cuadratica caso 1 ya que su formula es y=ax²

4050 = 2x . x

4050 = 2x²

4050/2 = 2x²/2

2025 = x²

√x² = √2025

x = √3⁴.5² = 3² . 5 = 3.5

= 9x5

= 45

Figura 73. Respuestas del grupo 4 a las preguntas 1, 2, y 3. Pos-test

En esta actividad los la mayoría de los participantes mostraron dificultades para resolver ecuaciones de este tipo, oportunidad para recordar esos procesos.

En la actividad No. 2 se presenta una situación de variación del movimiento de un balón de basquetbol que presenta 7 tareas.

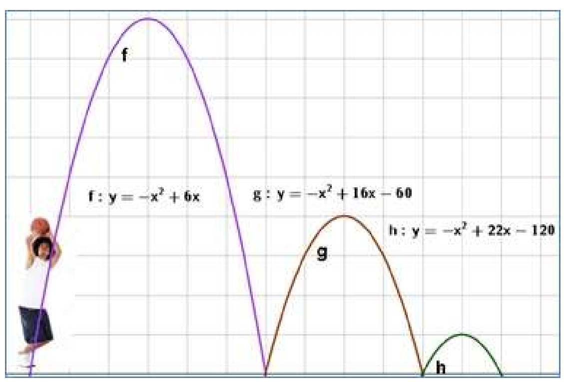


Figura 74. Trayectorias del triple rebote de un balón - PIII

A la tarea 1: Si el punto donde se encuentra el jugador es el punto inicial de referencia, o el origen del movimiento, ¿qué nombre podemos dar al punto más alto de cada parábola? Los estudiantes respondieron que corresponde al vértice [C.3.1.1] [C.3.2] los participantes hacen reconocimiento del contexto [A.4].

La tarea 3 corresponde a: Si donde se encuentra el joven está al mismo nivel que donde repica el balón, cuál debería ser el valor de $(\boldsymbol{y})$ en cada una de las parábolas? Solo 4 grupos describieron la coordenada (0,0) ó cero. A esta situación se relacionaba con los valores de x cuando $y = 0$ que corresponden a los cortes con el $eje\ X.$ [C.3.1.7] [D.1.1]. Las preguntas 4, 5 y 6 tienen que ver con la determinación del vértice de cada parábola [C.3.1] donde un poco más de la mitad de los grupos lo hacen con gran acierto encontrando estas características de las gráficas presentadas [D.1.2] Resolviendo esta actividad algunos participantes hallaron por simple observación los vértices al tener el primero, verificando luego con las fórmulas.

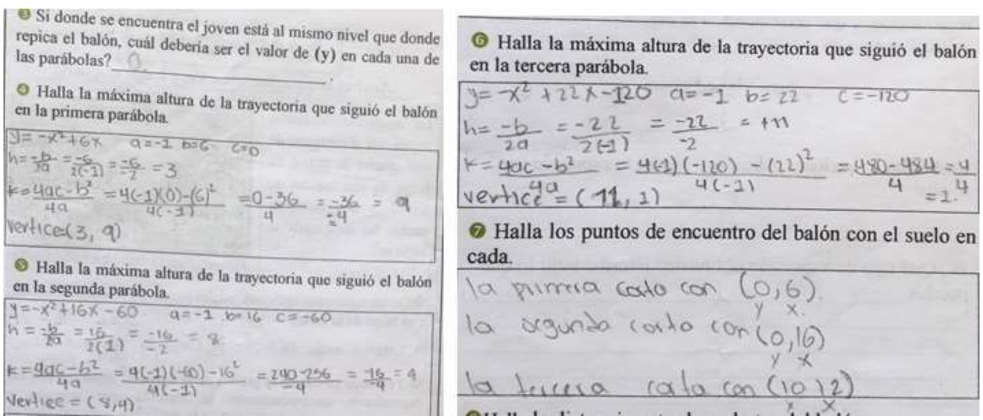


Figura 75. Respuestas del grupo G15 – PIII de la actividad 2

La actividad 3 corresponde a la secuenciación usando GeoGebra [C.5.4] donde se traslada el problema anterior al ambiente interactivo, donde los estudiantes deben resolver 6 tareas, los participantes utilizan las tabletas [D.2.2] para el uso del software, para luego responder en la guía de trabajo las tareas asignadas, tareas que se asignan como razonamientos de nivel 1 según los niveles de razonamiento de Van Hiele.

El Grupo G6 conformado por E33 y E34 respondes las tareas como aparecen en la siguiente imagen donde se muestran respuestas muy similares a la mayoría de los grupos.

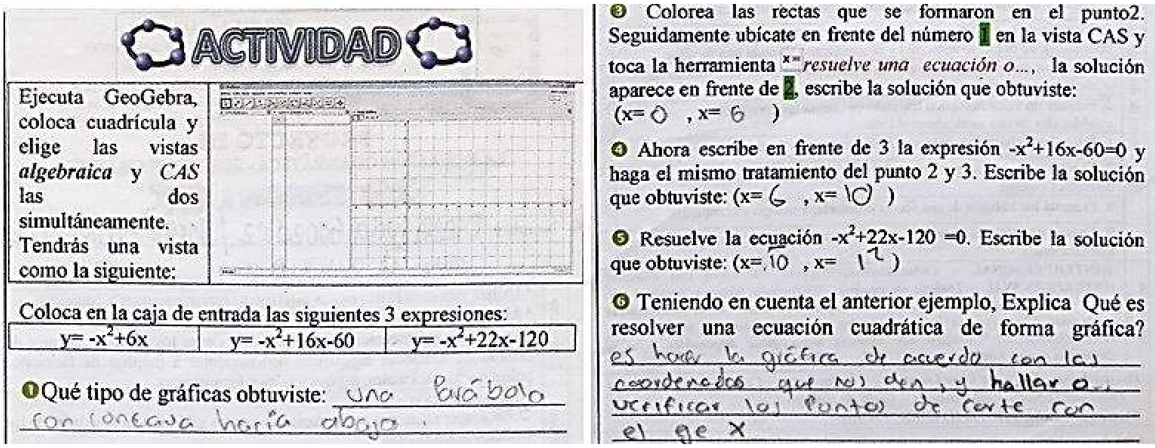


Figura 76. Respuestas de G6 – PIII – actividad con GeoGebra

En esta actividad los participantes responden rápidamente las preguntas debido a que han trabajado diversas secuencias. Todos los grupos llegaron los diversos pasos para tener en pantalla el siguiente ambiente de trabajo, mostrado en la siguiente imagen:

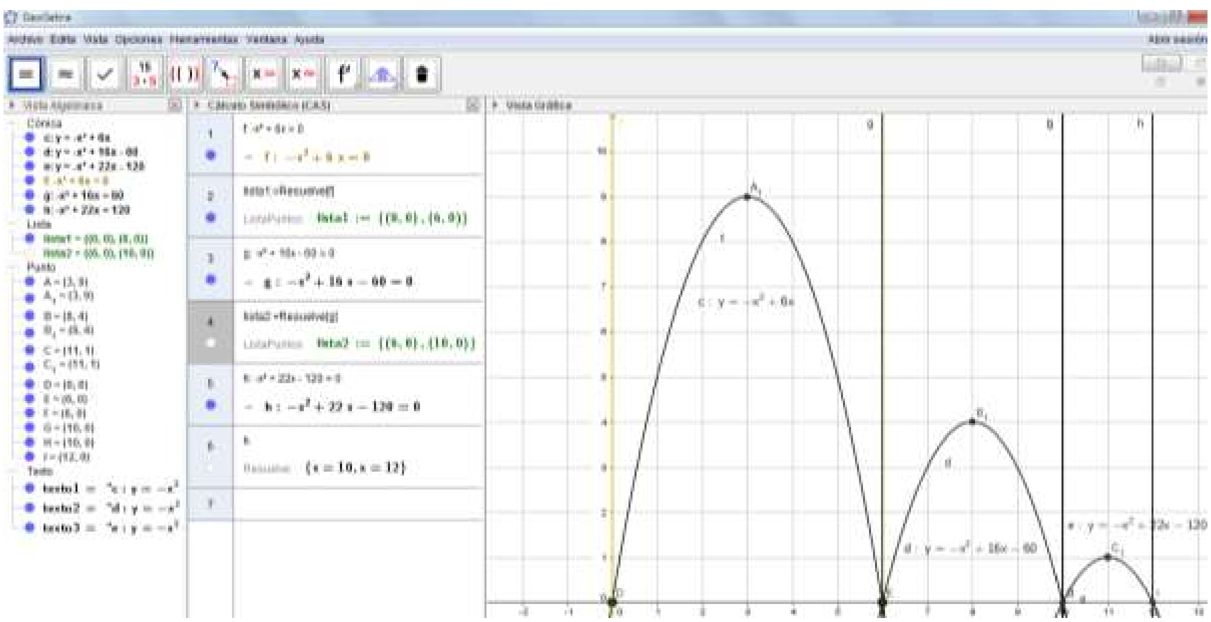


Figura 77. Vista del área algebraica y CAS de GeoGebra.

El tiempo para la construcción fue rápido muy divertido mostrándose un ambiente agradable [D.3.4] a la hora de tener en pantalla la situación que antes se había dado desde una figura solo con el registro de representación gráfico y simbólico algebraico.[C.4.2-C.4.3]

La siguiente imagen corresponde a uno de los grupos mostrando avance con el uso de GeoGebra:

Figura 78. Grupo trabajando la sesión con GeoGebra

3.6.2.7 Mapa de relaciones y red de relaciones entre categorías. Las siguientes figuras corresponden al mapa de relaciones resultantes del análisis de los proyectos.

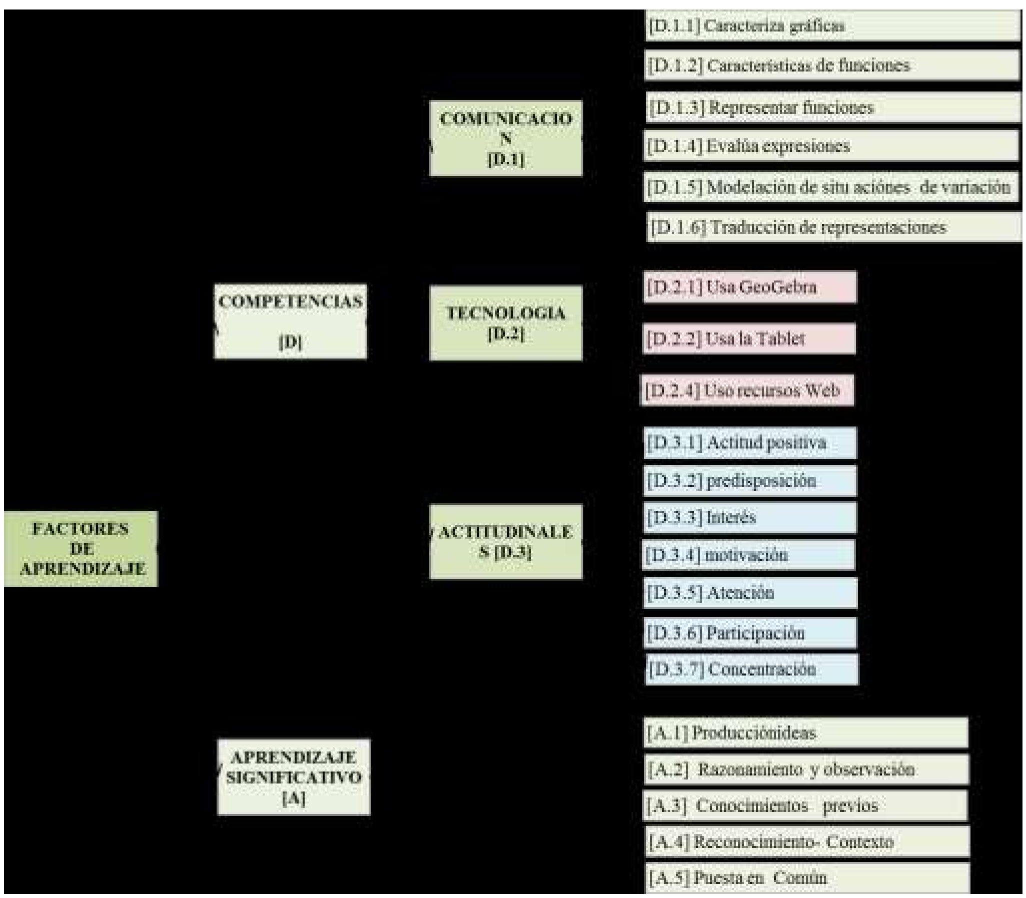


Figura 79. Mapa Relaciones entre factores de aprendizaje

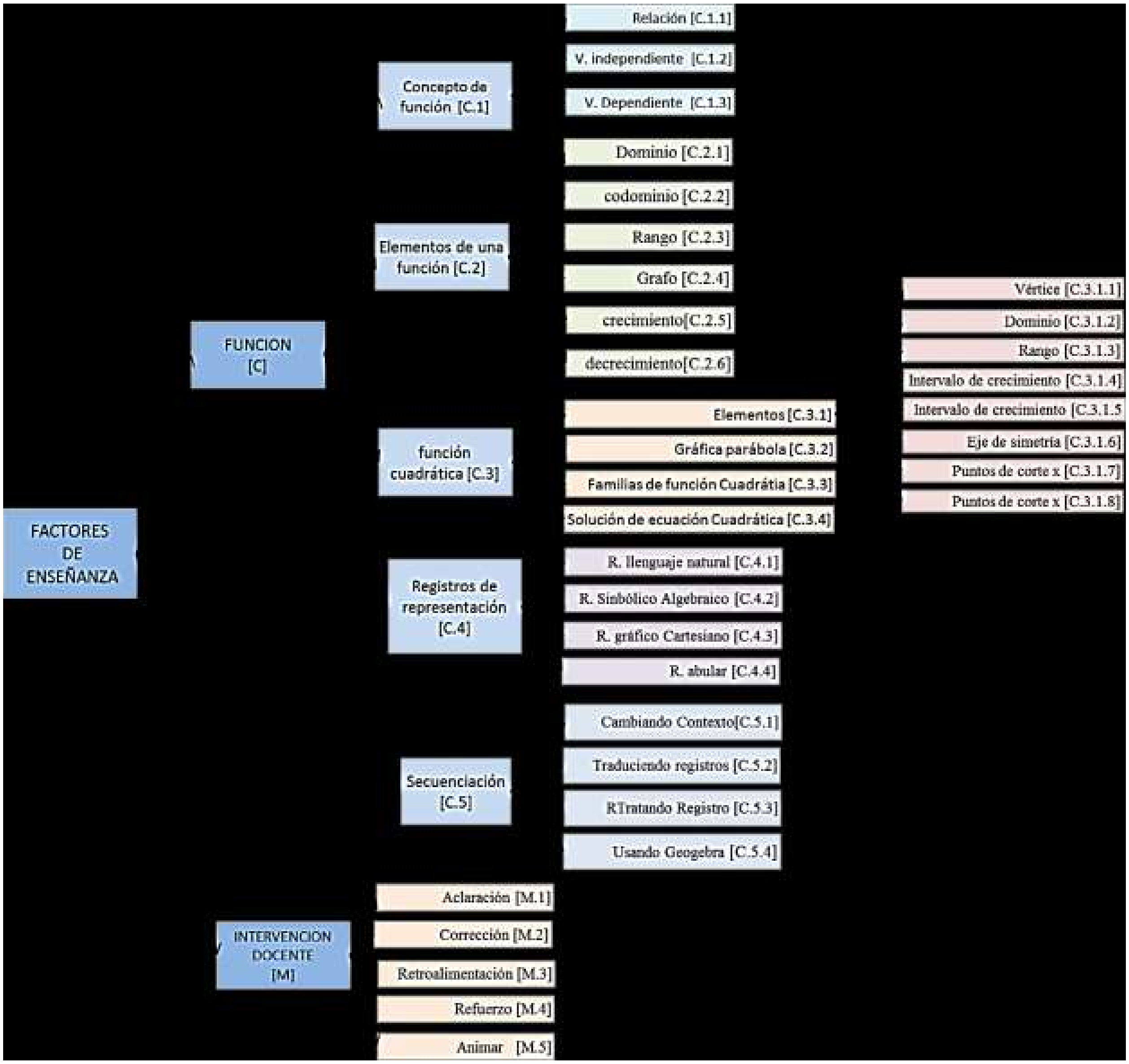


Figura 80. Mapa de relaciones entre de factores de enseñanza

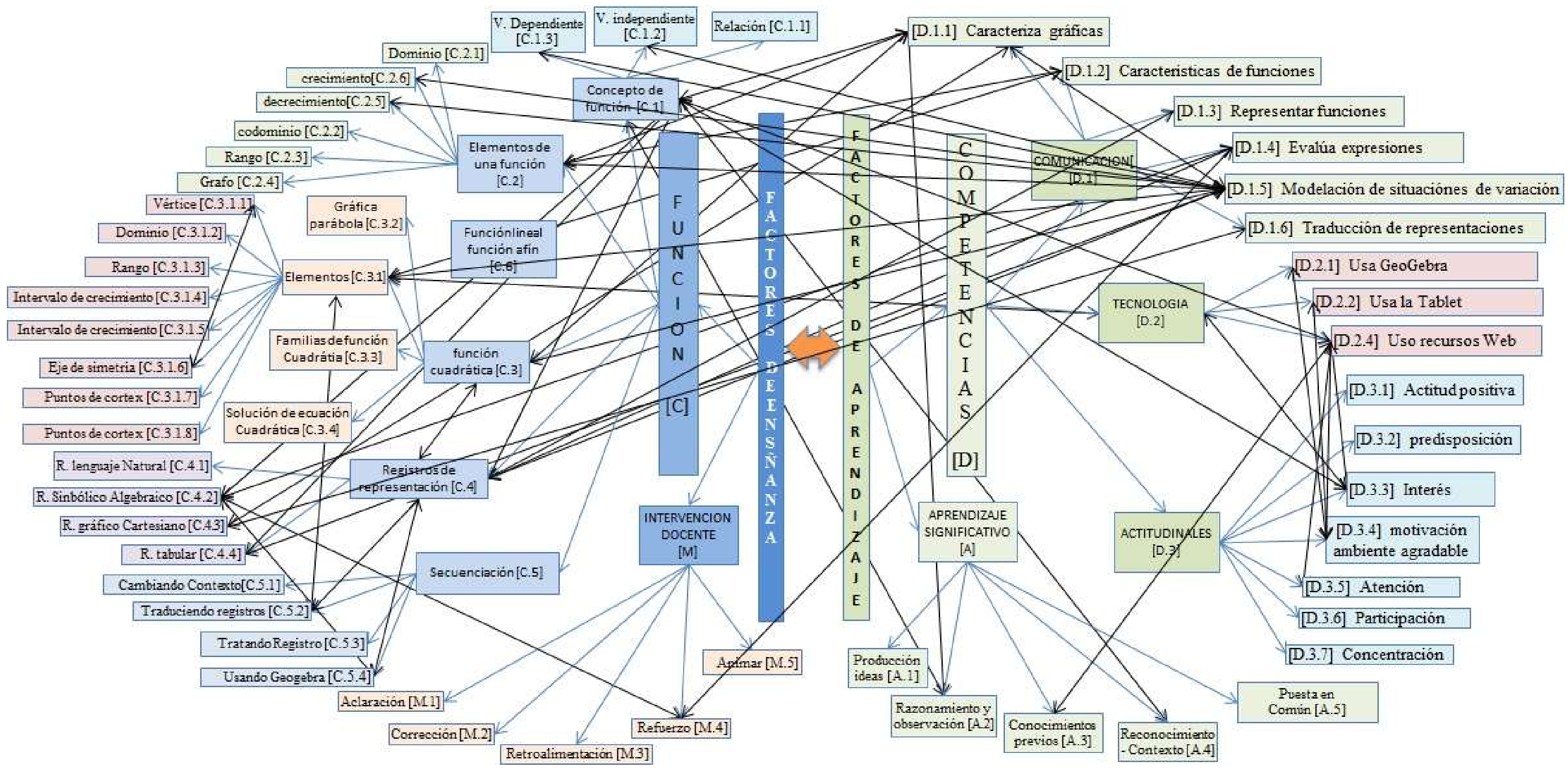


Figura 81. Red de relaciones entre factores de enseñanza y factores de aprendizaje

3.7 Principios Éticos

Sobre los principios éticos se mencionan dos documentos uno llamado consentimiento informado para los estudiantes, y otro consentimiento informado del rector de la institución donde se llevará a cabo la investigación.

Cómo es una investigación donde los participantes son jóvenes estudiantes que oscilan entre 13 y 15 años, se solicitó a sus padres o representados, la autorización correspondiente, se hizo a través de una carta dirigida que será firmada por los acudientes, padres y por los mismos participantes. A este documento se le ha llamó Consentimiento Informado (Ver Anexo 1).

Igualmente se ha solicitado por escrito al representante legal de la institución, el Rector del Instituto Técnico Municipal Los Patios, un consentimiento especial para el uso de documentos de la institución, como el PEI, el ISC, resultados de las pruebas saber, el uso de recursos existentes en la institución entre otros (Ver Anexo 2).

4. Propuesta Pedagógica

4.1 Presentación de la Propuesta

El siguiente diseño se constituye como una propuesta constructivista, por los diferentes elementos que la componen, aquí se interrelacionan el modelo teórico de Van hiele, que se constituye como el constructo que fundamenta este trabajo, desde la mirada de sus tres niveles iniciales; La función cuadrática como objeto de estudio y GeoGebra cómo un recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas de una forma dinámica:

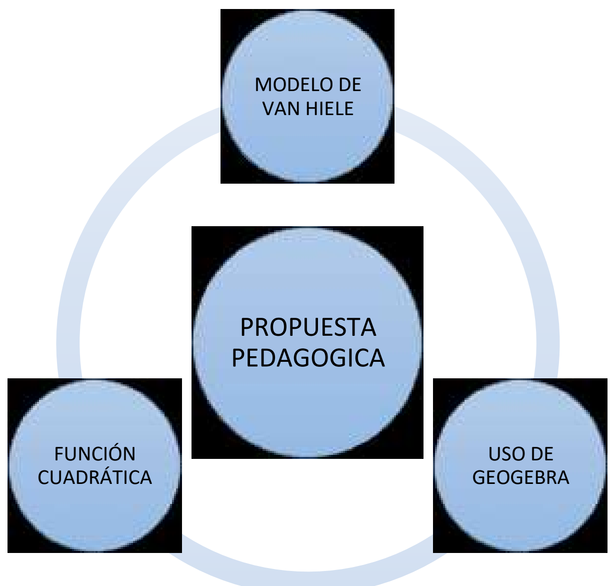


Figura 82. Componentes de la propuesta pedagógica

Esta idea se considera innovadora por varias razones: la primera tiene que ver con lo expresado por los estudiantes, cómo experiencia nueva en el aprendizaje de las matemáticas. La segunda lo observado por el docente experimentador, cuando verificó lo productivo, novedoso, motivacional que fue la experiencia, y tercero como lo expresado por algunos investigadores como Nicholls (1983, citado en Marcelo, 2013, p. 14) donde manifiesta que la innovación es una idea o práctica percibida como nueva por los participantes en la misma.

La propuesta tiene como fin fortalecer el aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal de los Patios, está constituido por 3 proyectos pedagógicos de aula. Según Carrillo (2001) “un proyecto Pedagógico de Aula es un instrumento de la enseñanza con enfoque global, que toma en cuenta los componentes del currículum, sustentándose en las necesidades de los educandos e intereses de la escuela […]" (p. 336).

Un proyecto pedagógico de aula según Carrillo, T tiene las siguientes características: debe ser innovador, pedagógico, colectivo, factible, pertinente.

El proyecto FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS es innovador porque contiene elementos nuevos como el Modelo de Van Hiele y el uso del software GeoGebra. Pedagógico porque se trabajas con jóvenes respondiendo a problemas de aprendizaje del aula, diseñando estrategias para el mejoramiento de los mismos. Colectivo porque deben asumir un compromiso de trabajo colaborativo, y en algunas ocasiones con responsabilidades compartidas. Pertinente, porque se tienen los elementos de software, hardware, diseño de guías orientadoras, acceso recursos de la web, permitiendo desarrollar aprendizajes importantes a los participantes y haciendo que estos fortalezcan sus aprendizajes a partir situaciones de la vida cotidiana.

- Proyecto I: acercamiento al concepto de función.
- Proyecto II: la función cuadrática.
- Proyecto III: la ecuación cuadrática.

Cada uno de estos proyectos constituidos por sesiones, las sesiones por actividades y las actividades por tareas.

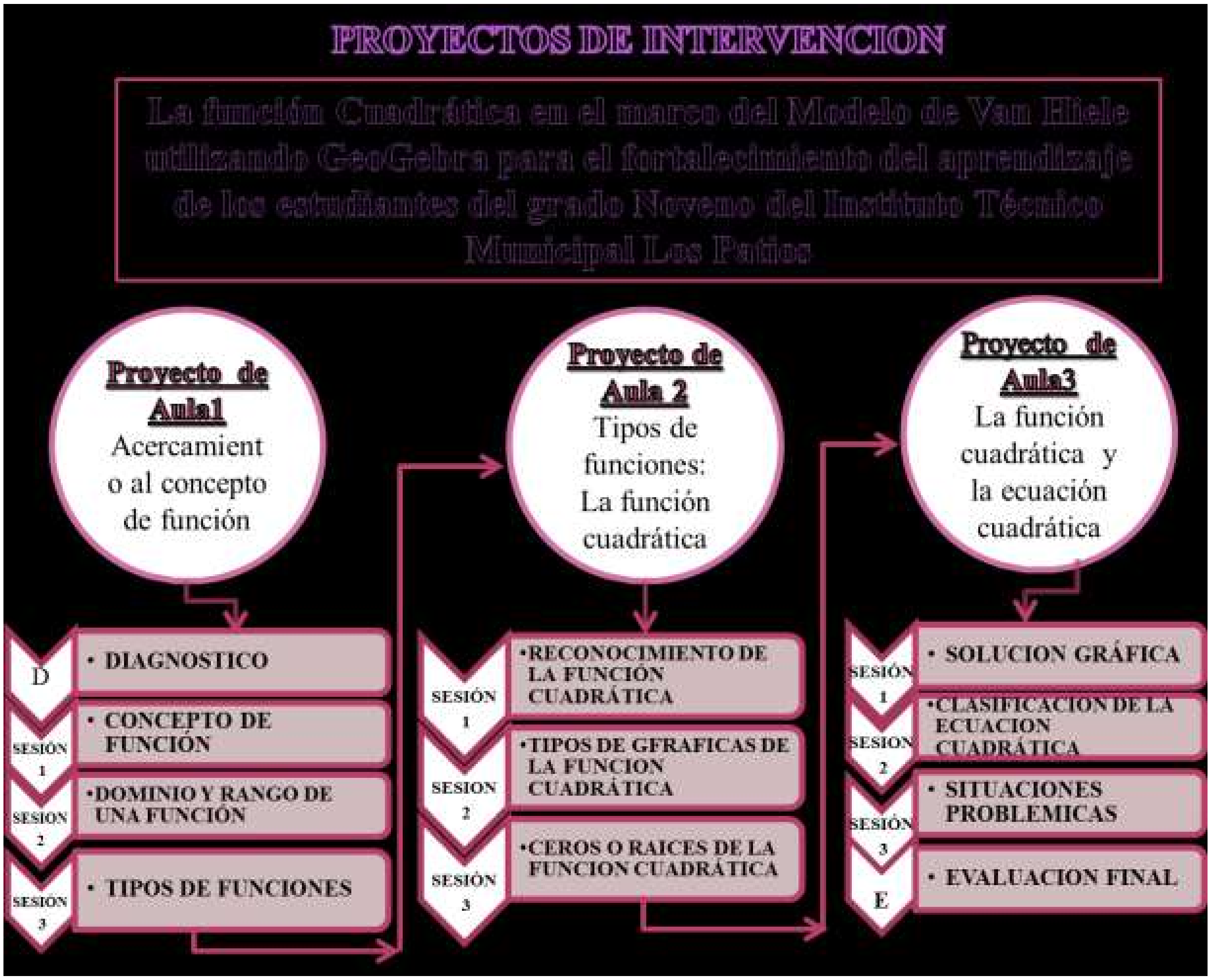


Figura 83. Esquema general de los proyectos pedagógicos de aula

La mayoría de las sesiones contienen entre 3 o 2 actividades que representa entre 3 a 2 horas de trabajo y que corresponden a estrategias para el fortalecimiento del pensamiento numérico-variacional y la competencia de comunicación que es la de más bajo rendimiento.

4.2 Justificación

Según el ICFES, los resultados de las pruebas saber de 2016 para el INSTEC, reflejan que se deben implementar estrategias pedagógicas para mejorar en la competencia comunicación, en el componente numérico-variacional. En el reporte para la institución se evidencian los aprendizajes evaluados: el 61% los estudiantes que presentaron la prueba no contestó correctamente las preguntas correspondientes a la competencia comunicación. De la misma manera podemos describir que el 81% de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como la forma de representar procesos inductivos, el 73% de los estudiantes no establecen relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas, el 70% de los estudiantes no identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan, el 71% de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.

Con la propuesta FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS se diseñaron y aplicaron una serie de actividades que mejorarán los aprendizajes con bajo rendimiento, centrándose en situaciones del pensamiento variacional y en la competencia comunicación. Todas las actividades se diseñaron en el marco del modelo de Van Hiele, que permiten a los estudiantes avanzar en los niveles de razonamiento en el estudio de Un objeto de aprendizaje, de lo menos sencillo a lo más complejo.

A demás el MEN ha venido realizando acciones para que la educación en primaria, secundaria y la media estén a la altura de la formación del siglo XXI, realizando diversos programas como contenidos para aprender, supérate con el saber 2.0, Siempre día e, entre otros. También desde el portal Colombia aprende se ha suministrado diversos documentos cómo Las mallas de competencias y aprendizajes, Los derechos básicos de Aprendizaje DBA v.2, Los estándares de competencias básicas, Los lineamientos curriculares, las competencias laborales y las competencia ciudadanas, referentes que fueron tenidos en cuenta en el diseño de propuesta.

Con todo lo anterior, la propuesta Fortalecimiento del proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios tiene todos los elementos de una propuesta innovadora apoyada en las Tic y en un modelo de razonamiento matemático.

4.3 Objetivos

Los objetivos de la propuesta están encaminados al mejoramiento de los aprendizajes del pensamiento numérico y variacional en la competencia comunicación, al mejoramiento de ambientes de aprendizaje, a la utilización de herramientas existentes en la institución entre otros, se han establecido los siguientes:

4.3.1 Objetivo general. Fortalecer el aprendizaje de los estudiantes de Noveno grado del Instituto Técnico Municipal los Patios en el componente comunicación y el pensamiento numérico variacional.

4.3.2 Objetivos específicos. Disponer de un material basado en el modelo de Van Hiele que corresponde a un enfoque constructivista, en las clases de noveno grado, similar al modelo pedagógico de la institución.

Fortalecer el aprendizaje de los estudiantes en el objeto matemático la función, desde la base del Modelo de Van Hiele con herramientas como el software GeoGebra, la guía didáctica, a través de proyectos pedagógicos.

Diagnosticar pre saberes y saberes acerca de la función para identificar las fortalezas y debilidades.

Implementar los proyectos de aula para fortalecer el pensamiento numérico-variacional en los estudiantes del grado noveno A del instituto Técnico Municipal Los Patios.

Evaluar la aplicación de los proyectos pedagógicos de aula mediante un post-test para verificar la efectividad de los mismos.

4.4 Competencias y Aprendizajes a Desarrollar

El MEN en su portal Colombia aprende, muestra las competencias y aprendizajes a desarrollar en los grados 3°, 5°, 7° y 9°. Estas son las competencias que evalúa las pruebas saber para esos grados. Se detallan las competencias relacionadas con el objeto de estudio y con el diseño de la propuesta haciendo más énfasis en las de comunicación, y teniendo en cuenta algunas de razonamiento y resolución de problemas, todas ellas del componente numérico variacional.

La siguiente tabla muestra los aprendizajes y evidencias que se tuvieron en cuenta para la elaboración de las guías de los proyectos.

Tabla 39. Competencias del componente numérico variacional

Comunicación	
Aprendizajes	**Evidencias**
Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan	Observar y describir la variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables
	Identificar el sentido de la unidad de medida en una representación gráfica (p.e. las unidades en los ejes de coordenadas).
	Expresar y traducir entre lenguajes verbal, gráfico y simbólico
	Reconocen mediante gráficas, situaciones continuas y no continuas en diversos contextos
	Reconocer rango y dominio de una función en un contexto determinado.
Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes	Identificar equivalencia entre expresiones algebraicas y expresiones numéricas
	Evaluar expresiones algebraicas
Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas	Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa.
	Identificar puntos de intersección entre diferentes gráficas
	Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas
	Identificar y relacionar los elementos de la ecuación asociada a funciones cuadráticas
Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación	Usar expresiones algebraicas como forma de representar cambios numéricos
	Construir tablas a partir de expresiones algebraicas
	Construir gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados verbales
Razonamiento	
Interpretar y usar expresiones algebraicas equivalentes	Interpretar una ecuación teniendo en cuenta la situación que se está representando
	Reconocer procesos necesarios en la solución de ecuaciones
	Determinar condiciones para que las expresiones algebraicas sean equivalentes
Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación	Analizar situaciones de variación representadas de manera algebraica y tabular, restringidas a funciones lineales, afines y cuadráticas, mediante el uso de propiedades como crecimiento, decrecimiento, valores mínimos y máximos.
	Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones lineales, afines y cuadráticas
Utilizar propiedades y relaciones de los	Utilizar propiedades para determinar si un problema, que se representa a través de una ecuación tiene o no solución

Comunicación	
Aprendizajes	**Evidencias**
números reales para resolver problemas	Estimar un valor numérico teniendo en cuenta las condiciones establecidas en una situación problema
Resolución de Problemas	
Resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas en contextos aritméticos y geométricos	plantear y resolver problemas en otras áreas, relativos a situaciones de variación con funciones polinómicas de grado mayor que 1
	Dar significado en un contexto, a la solución de ecuación o un sistema de ecuaciones

Otros aprendizajes tenidos en cuenta para la elaboración de las guías de los proyectos son las tecnológicas y algunas competencias laborales, se relacionan en la siguiente tabla:

Tabla 40. Competencias Tecnológicas y laborales

TECNOLÓGICAS	Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.
	Usa herramientas al alcance como tabletas y computadores en el área de matemáticas
	Utiliza GeoGebra para realizar las actividades planteadas
COMPETENCIAS LABORALES	[(INTERPERSONAL – Comunicación):*Expreso mis ideas con claridad. (INTERPERSONAL – Trabajo en equipo): *Desarrollo tareas y acciones con otros (pares, conocidos). (ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso.

4.5 Metodología

Las bases de la propuesta están concebidas con enfoque constructivista, contiene 3 proyectos pedagógicos de aula, que se dividen en actividades y las actividades en tareas. El enfoque constructivista se pone de manifiesto en el Modelo de Van Hiele, donde se encamina al estudiante con tareas desde lo simple a lo complejo, de lo particular a lo general, haciendo que se realicen situaciones que lo conduzcan a razonamientos para la comprensión del objeto de estudio.

Cada actividad cuanta con una guía de trabajo donde los estudiantes desarrollan sus tareas y se evidencia el avance y la forma de responder de estos. Las actividades serán dirigidas por el docente que hará seguimiento desde el tablero con una proyección de la misma guía. Los estudiantes tienen la posibilidad del trabajo en equipo, para discutir las respuestas de las tareas. Se da la posibilidad de que en algunas actividades se realicen por los estudiantes en el tablero. La intervención del docente se hará evidente para aclarar dificultades. Al final de cada actividad se hará una retroalimentación con el fin de repasar o que los estudiantes corrijan sus respuestas.

Cada actividad se divide en tres momentos: El *inicio* corresponde a la presentación de la actividad, con una situación que puede ser un video o una actividad de aprendizaje. Seguidamente viene el *desarrollo* que contiene herramientas o conceptos, de apoyo, para la siguiente actividad con grado mayor de complejidad, que la establecida en la etapa inicial. El último momento la *culminación*, la etapa de retroalimentación entre todos los estudiantes, y donde el docente tiene la oportunidad de reforzar y corregir. La guía del estudiante es recolectada para verificar el trabajo de la clase.

4.6 Fundamentos Pedagógicos

El enfoque constructivista de la propuesta corresponde a la de la institución, cuyo eje principal es aprender haciendo. El docente facilitador favorece el desarrollo de los aprendizajes de sus estudiantes. La mediación entre compañeros y profesor se hará evidente durante las actividades.

Las actividades están diseñadas en el marco del modelo de razonamiento de Van Hiele, Modelo que da soporte didáctico a la propuesta, centrándose en los niveles de razonamiento que corresponde al aspecto descriptivo, como lo expresa Pastor & Rodríguez (1990) que describe que es la parte donde “estudiante va progresando y mostrando la capacidad de razonamiento matemático desde que inicia su aprendizaje hasta alcanzar el máximo nivel de aprendizaje” (p. 306). Cómo ya se detalló en el marco Teórico los niveles son 5 (reconocimiento, análisis, clasificación, deducción formal y rigor). Las actividades están diseñadas para acercar a los estudiantes al nivel 3, según el Modelo de Van Hiele. El uso de recursos disponibles en la Web y el recurso didáctico nutren de manera significativa las actividades de la propuesta FORTALECIMIENTO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO

GEOGEBRA EN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS.

4.7 Diseño de Actividades

PROPUESTA DE INTERVENCION INDIVIDUAL

DATOS GENERALES	
PROGRAMA	**MAESTRIA EN EDUCACION**
PERÍODO ACADÉMICO	**SEGUNDO DE 2016**
COHORTE	**III**
GRUPO DE LA MAESTRIA	**CAMARA DE COMERCIO DE CUCUTA**
FECHA ENTREGA	
INSTITUCION EDUCATIVA	**INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS**
DIRECTOR DEL PROYECTO	**LENIS SANTA FÉ**
TITULO DEL PROYECTO	**LAFUNCION CUADRÁTICA EN EL MARCO DEL MODELO DE VAN HIELE UTILIZANDO GEOGEBRA PARA EL FORTALECIMIENTO DEL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO DEL INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS**
AUTOR	**DIMAR EMILIO ACOSTA GALVÁN**

DESCRIPCION DEL PROYECTO I – SESION 1

Nombre de la Institución	INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS		
Área	Matemáticas	**Grado:**	**Noveno**
Nombre del proyecto de aula: Proyecto I	Acercamiento al concepto de función		
Sesión	**1**	**Título de la Sesión**	Concepto de función
Tiempo	2 HRS	ACTIVIDADES	2
ESTANDARES Y COMPETENCIAS			
Estándares	(8° y 9°) (P.V.) Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.		
Competencias del Área	Comunicación ➲ Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan. ➲ Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. ➲ Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes Razonamiento ➲ Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación.		

Indicadores de desempeño	1. Reconocer rango y dominio de una función en un contexto determinado
	2. observar y describir la variación de las gráficas cartesianas que representan relación entre dos variables
	3. expresar y traducir entre lenguaje verbal, gráfico y simbólico
	4. Evaluar expresiones algebraicas
	5. Construir tablas a partir de expresiones algebraicas
	6. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.
	7. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.
Competencias laborales	[**(INTERPERSONAL – Comunicación):***Expreso mis ideas con claridad. (**INTERPERSONAL – Trabajo en equipo**): *Desarrollo tareas y acciones con otros (padres, pares, conocidos). (**ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental**):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso.*
Recursos	*Videobeam – Computador – Internet – Tablero – marcadores – Guía de trabajo*
Producción	*Completar Guía de trabajo*

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO I - SESION1-ACTIVIDAD 1: Acercamiento al concepto de función

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación. 2. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 3. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los	Introducción: el docente entrega la guía de trabajo y establece las reglas durante la actividad, los estudiantes trabajaran en grupos de dos, y cada uno de ellos deben tener su guía de trabajo donde completaran las diferentes tareas de cada actividad. Se les explica a los estudiantes la importancia que tienen el tema: la función, cómo uno de los más importantes de las matemáticas. Se les hace comentarios acerca de algunas situaciones **Inicio:** Se presenta a los estudiantes una figura en la cual deben observar y describir varias relaciones que se presentan http://bit.ly/2e7VZWZ Luego deben realizar dos tareas que completaran en la guía de trabajo. Ver Anexo de la propuesta.	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto I sesión 1*	5 min.

valores institucionales.	Los estudiantes trabajaran en grupos de 2 pero tendrán una guía individual que deben anexar la bitácora de trabajos. En esta actividad inicial será de 8 minutos Se dará un espacio de puesta en común, para verificar lo que describieron algunos estudiantes **Desarrollo:** Se les presenta a los estudiantes una figura que representa una situación de la vida cotidiana (venta en una plaza de mercado), luego deberán completar tres tareas, entre ellas llenar una tabla que representa la variación entre dos magnitudes Estas tareas son preguntas abiertas enmarcadas en el modelo De Van Hiele, que para este caso serán de Nivel I y II. Seguidamente se les mostrará a los jóvenes dos videos acerca de la historia de funciones: **https://www.youtube.com/watch?v=umTzq8okLyQ** **https://www.youtube.com/watch?v=E_iUvWft1FA** Se les advierte a los estudiantes sobre la importancia de atender los videos, porque luego deben elaboras un resumen acerca del proceso histórico de las funciones. ***Culminación:*** *1. Se les pide a los jóvenes que hagan una síntesis de los dos videos y se les da tiempo para que terminen de completar su guía de trabajo* *2. Se recolecta el producido de la actividad para determinar dificultades y aprendizajes de los estudiantes.* *Ver Anexo: Proyecto I – sesión 1*		10 min. 25 min 15 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO I
ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

SESION 1

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/_________

ACTIVIDAD	01	*Acercamiento al concepto de función*

Observa la siguiente figura y luego responde las preguntas

Figura 1. Fuente: http://bit.ly/2e7VZWZ

➊ Con tu compañero de mesa realiza listas de objetos o personas que observen en la figura 1 y dale una clasificación según alguna característica en común.

Lista 1	Lista 2	Lista 3	Lista4	Lista 5	Lista 6
característica	característica	característica	característica	característica	característica

❷Con tus palabras define que es una relación.

____
____

❸Juancho decide ir al supermercado a comprar guineos. Antes de comprar, hace sus cuentas mentalmente y compara ***el precio de*** la cantidad de kilogramos de guineo:	 Figura 2. Fuente: adaptado de http://bit.ly/2jtE8Ms

3.1 Teniendo en cuenta la figura 2, completa la tabla, relacionando la cantidad de guineo con las cuentas bien hechas por Juancho

Cantidad kg.	1	1,6		3,2		4	4,1	5	10
Precio pesos			6.000		7.000				

3.2 Explica la relación que se describe en la tabla anterior

____
____
____

3.3 Teniendo en cuenta la figura 2: ¿1 kilo de guineo puede tener dos precios diferentes? Sí ___ No___ ¿Por qué?____
____
____.

❹Ahora observa dos videos que proporcionará un resumen acerca de relaciones y funciones a través de la historia, espero que te concentres. Al final construye un texto en 100 palabras que condense las ideas principales de los videos. Realiza este escrito con tu compañero de mesa.

https://www.youtube.com/watch?v=umTzq8okLyQ
https://www.youtube.com/watch?v=E_iUvWft1FA

____
____
____
____
____
____.

PROYECTO I - SESION 1 - ACTIVIDAD 2: El concepto de función

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Reconocer rango y dominio de una función en un contexto determinado. 2. observar y describir la variación de las gráficas cartesianas que representan relación entre dos variables 3. expresar y traducir entre lenguaje verbal, gráfico y simbólico 4. Evaluar expresiones algebraicas 5. Construir tablas a partir de expresiones algebraicas 6. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 7. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	**Introducción** el docente entrega la guía de la actividad y recuerda las reglas durante la actividad, los estudiantes trabajaran en grupos de dos, y cada uno de ellos deben tener su guía de trabajo donde completaran las diferentes tareas de cada actividad. **Inicio:** Inicialmente se mostrará un video acerca del concepto y ejemplos de función que se encuentra en la URL: **https://www.youtube.com/watch?v=2fcVf2BGFX0** Se le preguntará a los jóvenes sobre lo más importante que muestra el video teniendo en cuenta el "concepto de función y ejemplos" **Desarrollo:** Se hace una lectura en voz alta acerca del concepto de función, los elementos de la función y un resumen de las diferentes representaciones de funciones. Los estudiantes contaran con ese resumen que les servirá de herramientas a la hora de justificar algunas preguntas. Pág. 1 de la actividad 2. Ver Anexo Proyecto I, Sesión I, actividad 2. Seguidamente se presentan 2 situaciones, cada una con 5 tareas que están enmarcadas en el modelo de Van Hiele, que consisten en preguntas abiertas y que los estudiantes deben completar. Sobre la situación No. 1 tiene que ver con una representación gráfica de un movimiento un objeto en el plano. El estudiante debe identificar los elementos de la situación planteada, según las preguntas que estén en las tareas. También se da la posibilidad al estudiante que traduzca de un sistema de representación a otro. La situación No. 2 es una representación sagital de dos conjuntos, donde el estudiante debe realizar traducción de sistemas de representación, determinar si la situación representa o no una función.	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto I sesión 1*	15 min. 10 min 20 min

	Al final se hace una plenaria sobre lo que los estudiantes realizaron para determinar dificultades. **Culminación:** Se aclara algunas dificultades encontradas en las tareas de las situaciones planteadas, sobre cómo debían responder. Se plantea una situación para que los estudiantes desarrollen en casa. *Ver Anexo: Proyecto I – sesión 1*		10 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO I
ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

SESION 1

Nombre: ____ Grado: 9°:___ Fecha____/____/_________

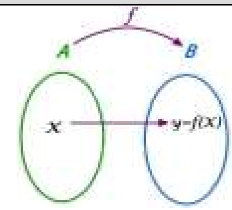
Concepto de Función

LECTURA INICIAL

*Una **función** Es una regla o correspondencia entre dos conjuntos A y B, que asigna a cada elemento de A uno y sólo un elemento de B.*

Generalmente, para nombrar una función se usan letras minúsculas como f, g, h, entre otras. A demás se escribe f: A→B para indicar que la función se ha definido del conjunto de partida A, en el conjunto de llegada B.

*Luego si **x** ∈ A, y **y** ∈ a B, la expresión $y = f(x)$, entonces se dice que **x** está relacionado con **y** mediante la función f y se lee "**y** es igual a f de **x**"*



*A **y** se le denomina "La imagen de **x**" mediante **f**. La figura muestra la representación de una función **f** mediante un diagrama sagital. A **x** se le denomina **variable independiente** y a **y** se le denomina **variable dependiente** ya que el valor que toma depende del valor de **x***

ELEMENTOS DE UNA FUNCION

***Dominio:** conjunto de partida (Dom f)*
***Codominio:** conjunto de llegada. (conjunto B) (Cod f)*
***Rango:** Conjunto formado del codominio, que son la imagen de los elementos del dominio (Ran f).*
***Grafo:** conjunto formado por todas las parejas ordenadas de la forma (**x**, **y**) tales que **x** ∈ Dom f y **y** al Ran f*

REPRESENTACIONES DE FUNCIONES

Para representar una función se puede utilizar la forma verbal, la fórmula, la tabla de valores y la gráfica.

Forma verbal: relación entre las variables que se realiza por medio de un enunciado, es decir, una descripción con palabras.

Fórmula: expresión algebraica de la función. Esta expresión se simboliza y= f(x) donde x es la variable independiente (V.I.) y representa los elementos de Dom f, y y es la variable dependiente (V.D.) que representa los elementos de Ran f.

***Tabla de valores*:** arreglo con dos filas, o dos columnas en la fila superior o primera columna se ubican los valores que toma la V.I. y en la fila inferior o segunda columna se ubican los valores de la V.D.

Gráfica: diagrama sagital o diagrama cartesiano, en el cual se ubican los elementos del dominio en el eje horizontal y los elementos del codominio en el eje vertical. Una función se puede representar con cualquiera de estas 4 formas, aunque en ocasiones se describe mejor de una forma que de otra.

Fuente: Sanchez et a. Saberes, Ser, Hacer – Matemáticas 9 – Editorial Santillana- p. 71

ACTIVIDAD 02

Actividad Inicial: Observa y escuchas el video, luego comenta con tus compañeros en plenaria, guiada por tu profesor: **https://www.youtube.com/watch?v=2fcVf2BGFX0**

Escribe algo que te llamó la atención del video y luego lo compartes con tus compañeros: ______
____
____

Observa la siguiente situación planteada y luego responde las preguntas:

EL VUELO DE UN GLOBO

En la siguiente gráfica se muestra la altura de un globo con respecto al tiempo de elevación

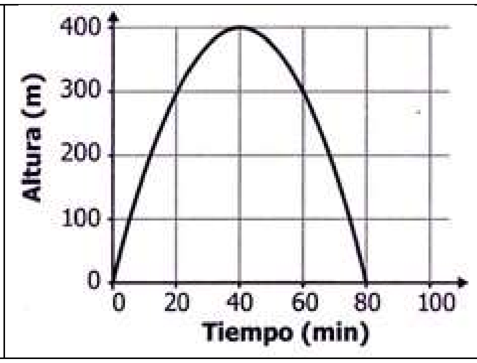


Figura 3. Fuente: Prueba Saber 9° -2015

➊ Identifica y escribe cual es la variable independiente: ________________________________.

➋. Identifica y escribe cual es la variable dependiente: ________________________________.

➌. Relaciona el tiempo con la altura y completa la siguiente tabla

t	0			40	60	80
f(t)		80	300			

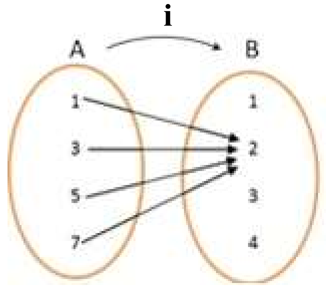
➍. En relación con el globo, es correcto afirmar que:

A. Alcanza la altura máxima en 400 min.
B. El tiempo que el globo dura volando es 40 min.
C. La altura máxima que alcanza es 40 m.
D. Gasta 80 min. En hacer todo su recorrido

➎. La expresión matemática que representa la relación es:

A. $f(t) = -0.25t^2 + 20$
B. $f(t) = -25t^2 + 20t$
C. $f(t) = -0.25t^2 + 20t$
D. $f(t) = -t^2 + 20t$

❻La siguiente gráfica representa una relación entre los conjuntos A y B. Halla su dominio, codominio y rango



Dom f = { }

Cod f = { }

Ran f = { }

Figura 4.

❼Representa mediante una tabla de valores la situación del punto 6.

x				
i(x)				

❽ Representa mediante un grafo las parejas que se forman en la relación AxB del punto 6.

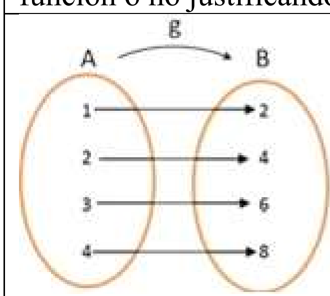
AxB = { }

❾ Expresa mediante una fórmula la función representada en el punto 6.

❿ Escribe si el diagrama de la figura 4 representa una función, una la relación o las dos?
Justifica: ____

____

Encuentra: dominio, rango, codominio, realiza la tabla correspondiente, el grafo, identifica la relación existente y finalmente concluye si cada relación es función o no justificando la respuesta.



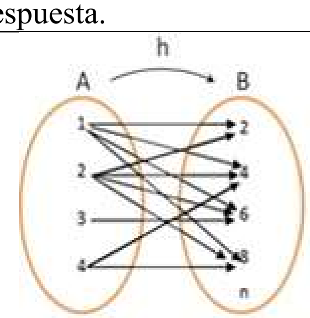


Figura 5. Evaluación actividad 2

DESCRIPCION DEL PROYECTO I – SESION 2

Nombre de la Institución	INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS			
Área	Matemáticas	**Grado:**	**Noveno**	
Nombre del proyecto de aula: Proyecto I	Acercamiento al concepto de función			
Sesión	**II**	**Título de la Sesión**	Dominio y Rango de una función	
Tiempo	3 HRS	ACTIVIDADES	3	
ESTANDARES Y COMPETENCIAS				
Estándares	8° y 9°) (P.V.) Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.			
Competencias del Área	Comunicación ➲ Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan. ➲ Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.			
Indicadores de desempeño	1. determina cuando un grafo, un diagrama sagital o curva representada en el plano cartesiano representa una función.			
	2. reconoce rango y dominio de una función en un contexto determinado.			
	3. identificar puntos de intersección entre diferentes gráficas			
	5. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.			
	6. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.			
Competencias laborales	[**(INTERPERSONAL – Comunicación):***Expreso mis ideas con claridad. (**INTERPERSONAL – Trabajo en equipo**): *Desarrollo tareas y acciones con otros pares. (**ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental**):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso. (**TECNOLOGICO**):*Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.*			
Recursos	*Software libre Geogebra – Videobeam – Computador – Internet – Tabletas-Tablero – marcadores – Guía de trabajo*			
Producción	*Guía de trabajo*			

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO I - SESION 2 - ACTIVIDAD 1: Método gráfico para identificar funciones en un plano cartesiano

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. determina cuando un grafo, un diagrama sagital o curva representada en el plano cartesiano representa una función. 2. identificar puntos de intersección entre diferentes gráficas 3. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 4. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales. 5. Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea. 6.Usa herramientas al alcance como	Introducción: el docente entrega la guía de trabajo y establece las reglas durante la actividad, los estudiantes trabajaran en grupos de dos, y cada uno de ellos deben tener su guía de trabajo donde completaran las diferentes tareas de cada actividad. Se les recuerda a los estudiantes la importancia de la responsabilidad en sus aprendizajes y la lectura de las habilidades que deben adquirir. Todas las actividades están descritas en la guía de trabajo. Las actividades propuestas están enmarcadas en el Modelo de Van Hiele, procurando que el estudiante asimile situaciones de razonamiento de Nivel 1 de reconocimiento, y de Nivel 2 de análisis. **Inicio:** Se presenta a los estudiantes una situación de la vida cotidiana que tiene que ver con un equipo de futbol y la asignación de la talla de calzado. Luego deben resolver la tarea propuesta. Se dará un espacio de puesta en común, para verificar lo que describieron algunos estudiantes **Desarrollo:** El docente reproduce un video ubicado en la URL **https://youtu.be/Xcv1eUdpob4 ,** acerca de funciones, se les pide a los estudiantes que deben estar muy atentos para que escribas algunas expresiones matemáticas que aparecen en el video y que pertenecen a funciones. Seguidamente se les mostrará la forma cómo los estudiantes deben identificar las funciones en el plano. Dando varios ejemplos para que entiendan asimilen la	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto I sesión 2*	5 min. 5 min.

tabletas y computadores en el área de matemáticas 7. Utiliza GeoGebra para realizar las actividades planteadas	explicación. Luego se plantea una situación con tareas que contienen preguntas abiertas enmarcadas en el modelo De Van Hiele, que para este caso serán de Nivel I o II. Los estudiantes deben escribir en su guía de trabajo los avances y el estudio de las situaciones que se asignan El docente atenderá a los estudiantes ante cualquier pregunta, y la misión será guiarlos para que construyan las tareas, poniéndose en manifiesto su razonamiento matemático. ***Culminación:*** *1. Se hará una puesta en común, haciendo que algunos los estudiantes participen dando sus respuestas, y haciendo que los demás estudiantes aprueben o no sus respuestas, el docente al final dará la aprobación de lo que se debía escribir.* *La puesta en común es para descartar respuestas dadas por los estudiantes, determinar dificultades y luego realizar el refuerzo respectivo.* *2. Se recolecta el producido de la actividad para verificar el trabajo de los estudiantes.* *Ver Anexo: Proyecto I – sesión 2*		30 min 15 min

INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS	REPUBLICA DE COLOMBIA DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER SECRETARIA DE EDUCACION INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002 Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO I
ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

SESION 2

Nombre: ____ Grado: 9°:___ Fecha____/____/____________

ACTIVIDAD	01	*Método gráfico para identificar funciones en un plano cartesiano.*

Analiza la siguiente situación de aprendizaje

En el equipo de futbol sala masculino del grado Noveno B del INSTEC, se ha realizado un listado en el que se describe la talla de calzado de cada jugador

Jugadores	Talla calzado
Martín, Julian, Sebastian, Cristian,	39
Cristian S., Eduard, Kevin, Brayan	40
Cristian P., Cristian C., Harrison	41

❶ Según la situación ¿Es posible que un jugador tenga dos tipos de tallas de calzado?
Si ___ No ___. Explica ____
____
____.

Si se observa el listado nos damos cuenta que todos los jugadores tienen una talla de calzado asociada, no hay jugador que tenga dos tallas. O sea que todos los jugadores tienen _______ y solo_____ talla de calzado asociada.

❷ Ahora verás un video acerca de funciones, debes estar muy atento para que escribas algunas expresiones matemáticas que aparecen en el video y que pertenecen a funciones.
https://youtu.be/Xcv1eUdpob4

a.____________________ b. __________________

c. ____________________ d. __________________

e.____________________ f. __________________

Método grafico para identificar funciones en un plano cartesiano.

Para comprobar que una gráfica describe una función, se trazan líneas rectas verticales y se verifica que cualquier recta vertical corte la gráfica en máximo un solo punto.

En el caso de que una recta corte a la gráfica en más de un punto, se afirma que la gráfica no corresponde a una función.

Fuente: Proyecto saberes ser, hacer –9° - Editorial Santillana p-75

A continuación tenemos una curva especial representada en el plano de color negro, corresponde a r = 2-3cosθ

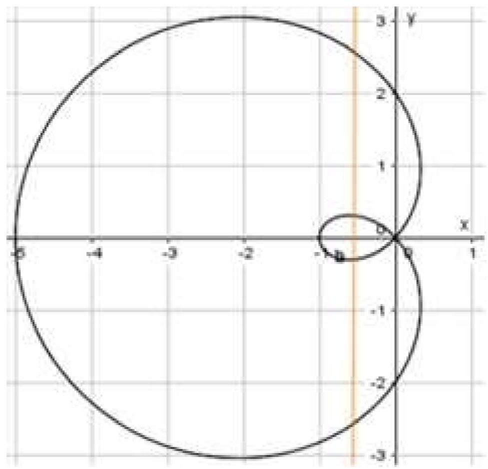


Figura 6. Gráfica de r = 2-3cosθ en GeoGebra

❸ ¿Cuántas veces corta la recta naranja a la curva que se encuentra en el plano la figura 6?

A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

❹Marca con lápiz los puntos de cruce de la curva con la recta naranja y trata de escribir sus coordenadas de una forma aproximada.

P_1 (____, ____) P_2 (____, ____) P_3 (____, ____) P_4 (____, ____)	¿Qué dificultad encontraste?

❺ Completa el texto con las palabras: ELEMENTOS - CODOMINIO – NO – SI – VARIOS – RANGO - DOMINIO

La gráfica representada en la figura 1 ____ representa una función porque existen varios ___________ del eje x (del dominio) que se le asignan _________ elementos del __________ (en el eje y)

❻ ¿Cuántas rectas paralelas al eje y pueden cortar la curva representada en la gráfica de la figura 1?

A. 1 B. Infinitas C. varias D. 2

PROYECTO I - SESION 2 - ACTIVIDAD 2: Dominio y rango a partir de un gráfico cartesiano

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. determina cuando un grafo, un diagrama sagital o curva representada en el plano cartesiano representa una función.	**Introducción:** el docente entrega la guía de trabajo correspondiente a la actividad, los estudiantes trabajaran en grupos de dos, y cada uno de ellos deben tener su guía de trabajo donde completaran las diferentes tareas de cada actividad. Se pregunta si existen dudas con respecto a la guía anterior. Si las hay se le da la importancia y se abordan.	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto I sesión 2*	5 min
2. reconoce rango y dominio de una función en un contexto determinado.	**Inicio:** El docente inicia la lectura que se encuentra en la guía, acerca del dominio y rango de una gráfica en el plano cartesiano, en la medida se va abordando los diferentes tipos de intervalos y de esta manera los estudiantes aclararan esta nueva forma de representar subconjuntos de los números reales. Seguidamente el docente reproduce un video de URL: **https://youtu.be/4HyLpT9TNBM** cómo complemento del tema iniciado.		15 min.
3. identificar puntos de intersección entre diferentes gráficas 5. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.	**Desarrollo:** El docente presenta otros ejemplos adicionales, haciendo uso de GeoGebra, y otros gráficos para que asimilen que no siempre el dominio o el rango va ser un intervalo. Las preguntas planteadas en cada uno de las 4 tareas están para completar.		20 min
6. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Culminación:*** *1. Se hará una puesta en común, haciendo que algunos los estudiantes participen dando sus respuestas, participando en el tablero.* *2. Se recolecta el producido de la actividad para verificar el trabajo de los estudiantes.* *Ver Anexo: Proyecto I – sesión 2*		10 min

	REPUBLICA DE COLOMBIA DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER SECRETARIA DE EDUCACION INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002 Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO I
ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

SESION 2

Nombre: ____ Grado: 9°:___ Fecha____/____/____________

ACTIVIDAD	**02**	*Dominio y rango a partir de un gráfico cartesiano.*

Dominio y Rango a partir de un gráfico cartesiano

Para determinar el Dominio y Rango de una curva o segmento en un plano cartesiano se debe tener en cuenta algunos criterios que se describirán a continuación:

⇨Los elementos del dominio y el rango suelen ser subconjuntos de los números Reales.

⇨Estos subconjuntos se expresan a través de intervalos, que representan una cantidad infinita de números.

⇨La notación de intervalos más usual es la expresión como una pareja ***(a, b)*** o ***[a, b]***, donde ***a*** es el real ubicado a la izquierda del otro (si es en el eje x). El Corchete incluye el número de la pareja del intervalo, el paréntesis no.

⇨Para determinar el intervalo que representa el Dominio se analiza desde y hasta donde se extiende la curva a lo ancho del eje x. Puede ser la unión de varios intervalos.

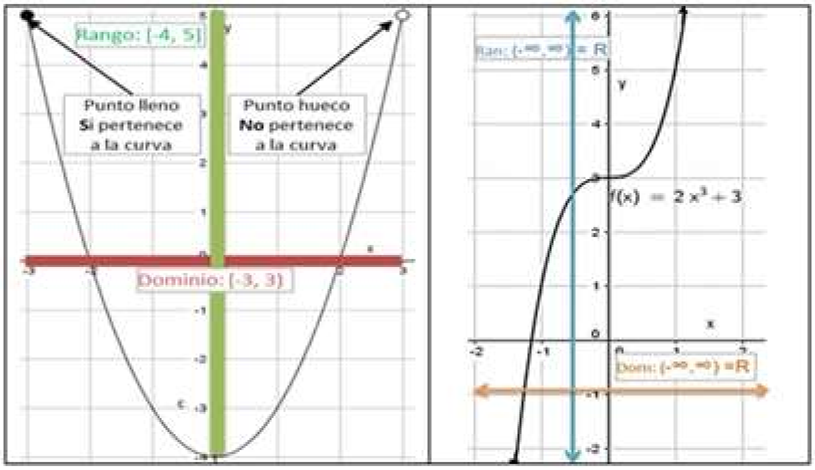
⇨Pueden ser elementos y se expresan entre llaves. { }

⇨Para determinar el intervalo que representa el Rango se analiza desde y hasta donde se extiende la curva a lo largo del eje y.

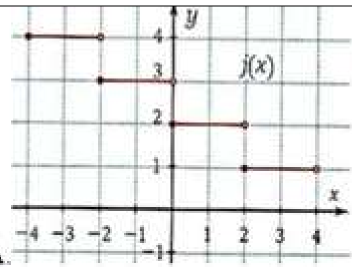
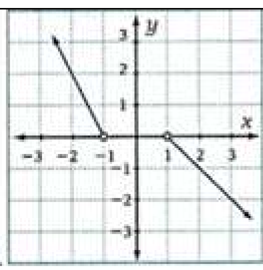
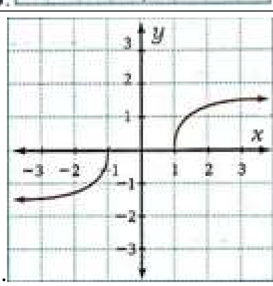
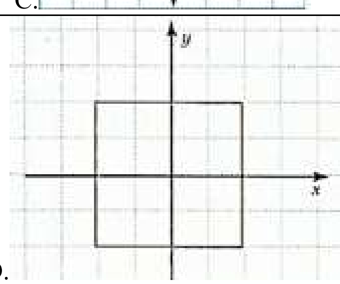
⇨ Si la curva muestra flechas en sus extremos mostrando que no termina, entonces en los extremos del intervalo se usa el símbolo $-\infty$ o $-\infty$ abriendo o cerrando con paréntesis.

Observa el siguiente video para que profundices en el estudio iniciado **https://youtu.be/4HyLpT9TNBM**

Observa estos ejemplos:



Ahora tendrás una serie de gráficas para que determines el Dominio, Rango y si cada una representa una función.

 A.	Es función: Si____ No___ Porque:________________________________ ________________________________ ________________________________ Dominio: Rango:
 B.	Es función: Si____ No___ Porque:________________________________ ________________________________ ________________________________ Dominio: Rango:
 C.	Es función: Si____ No___ Porque:________________________________ ________________________________ ________________________________ Dominio: Rango:
 D.	Es función: Si____ No___ Porque:________________________________ ________________________________ ________________________________ Dominio: Rango:
Fuente: Nuevas matemáticas,10° - Editorial Santillana p-19	

PROYECTO I - SESION 2 - ACTIVIDAD 3: Usando GeoGebra

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan. Determina cuando un grafo, un diagrama sagital o curva representada en el plano cartesiano representa una función. Determina el dominio y rango de una función observando la curva en un plano cartesiano. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	**Introducción:** El docente asigna a cada estudiante una Tablet con la aplicación de GeoGebra. Se les expresa a los jóvenes que deben realizar las instrucciones que se muestran y se estará monitoreando permanentemente. **Inicio:** El docente indica que pueden iniciar la actividad que se encuentra en la guía orientadora. **Desarrollo:** El docente está presto a cualquier inquietud que los estudiantes tengan. Recomendar a los estudiantes en las tareas donde los tengan que mostrar gráficas en papel, que utilicen coordenadas, que las ubiquen bien y que la representación de las curvas debe ser excelente. ***Culminación:*** *1. Se hará una puesta en común, haciendo que algunos los estudiantes participen desde el computador del docente y el videobeam, para que estos verifiquen sus respuestas.* *2. Se recolecta el producido de la actividad para verificar el trabajo de los estudiantes.* *Ver Anexo: Proyecto I – sesión 2*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* *Tablet* **Guía Proyecto I sesión 2*	5 min 30 min. 20 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO I
ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

SESION 2

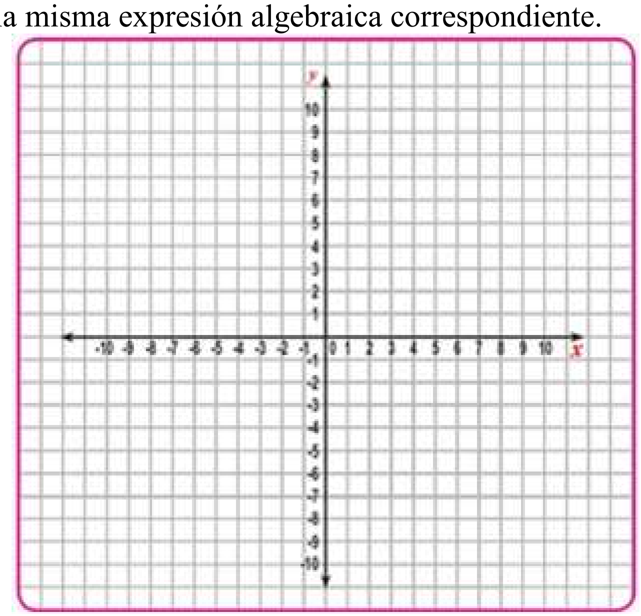
Nombre: ____ Grado: 9°:___ Fecha____/____/____________

ACTIVIDAD	No. 3	*Usando GeoGebra.*

❶ Ejecuta GeoGebra, coloca cuadrícula y escribe en la caja de entrada las siguientes expresiones: $y=x^2-8x+16$, $x^2+y^2=4$, $-4y^2+x-8y=6$ y $(x+4)^2/9+(y-3)^2/4=1$ Coloca diferente color a cada curva.

❷Realiza las siguientes instrucciones:
*Traza una línea vertical (paralela al eje y) sobre cada curva donde veas que se pueden cruzar más de una vez, (usa la herramienta Paralela .) ¿Cuántas líneas verticales se pueden dibujar encima de cada curva obtenida?___________________________________.
* Usa la herramienta Intersección para encontrar puntos de corte de la recta vertical con cada curva. Si hay más de uno encontrarás algo en común. ¿Qué será: (abscisa u ordenada) = (x o y)?________________.
*Escribe los cortes en la tabla del punto 4. La vista algebraica de GeoGebra los muestra.

❸Traza las gráficas que obtuvistes en el programa en este plano junto con las rectas. Coloca nombre a la curva con la misma expresión algebraica correspondiente.



❹ Completa la tabla

Función	Función **Si o No**	Dominio	Rango	Puntos de corte que justifica que la curva no es función
a : $(x+4)^2/9+(y-3)^2/4=1$				(__, __) ,(__,__)
b : $-4y^2+x-8y=6$				(__, __) ,(__,__)
c : $x^2+y^2=4$				(__, __) ,(__,__)
d : $y=x^2-8x$				(__, __) ,(__,__)

❺ Plenaria (Puesta en común) Estudiantes seleccionados al azar harán la actividad que seguirá en el proyector o Videobeam.

DESCRIPCION DEL PROYECTO I – SESION 3

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre de la Institución</td><td colspan="4">INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área</td><td>Matemáticas</td><td colspan="2">Grado:</td><td>Noveno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre del proyecto de aula:
Proyecto I</td><td colspan="4">Acercamiento al concepto de función</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>3</td><td colspan="2">Título de la Sesión</td><td colspan="2">Dominio y Rango de una función</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td><td>3 HRS</td><td colspan="3">ACTIVIDADES</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">ESTANDARES Y COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estándares</td><td colspan="4">(8° y 9°) (P.V.) Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competencias del Área</td><td colspan="4">Comunicación
➲ Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.
➲ Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.
➲ Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de la las ecuaciones algebraicas
Razonamiento
➲ Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="8">Indicadores de desempeño</td><td colspan="4">1. Observar y describir la variación de las gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Establece relaciones de comparación entre diferentes gráficas</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Construye gráficas a partir de expresiones algebraicas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. Usa herramientas al alcance como tabletas y computadores en el área de matemáticas</td></tr>
<tr><td colspan="4">8. Utiliza GeoGebra para realizar las actividades planteadas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competencias laborales</td><td colspan="4">[(INTERPERSONAL – Comunicación):*Expreso mis ideas con claridad. (INTERPERSONAL – Trabajo en equipo): *Desarrollo tareas y acciones con otros (padres, pares, conocidos). (ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso. (TECNOLOGICO):*Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos</td><td colspan="4">Software libre Geogebra – Videobeam – Computador – Internet – Tabletas- Tablero – marcadores – Guía de trabajo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Producción</td><td colspan="4">Completar Guía de trabajo</td></tr>
</table>

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO I - SESION 3 - ACTIVIDAD 1: Clasificación de funciones

<table>
<tr><th>Indicadores</th><th>Proceso</th><th>Recursos</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td>1. Observar y describir la variación de las gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables

2. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa

3. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.

4. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.</td><td>Introducción: el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de trabajo de dos estudiantes. Se socializa los indicadores de desempeño que los estudiantes deben alcanzar.

Inicio:

El docente presenta una animación con URL: http://bit.ly/2qOH6RD de Colombia aprende cómo inicio de la actividad. Luego se hacen unas preguntas que nacen de la situación planteada.

Desarrollo:

Se presenta a los estudiantes una situación de la vida cotidiana que tienen que ver con el comportamiento de del precio de las acciones de una compañía durante 10 horas.

Las tareas están descritas en la guía de trabajo. En esta actividad tiene 7 tareas propuestas y están enmarcadas en el Modelo de Van Hiele, procurando que el estudiante observe y construya y saque sus conclusiones.

El docente presenta una explicación de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, constante, creciente, decreciente y periódica y muestra ejemplos con el software Geogebra.

Culminación:

1. Se hará una puesta en común, haciendo que algunos los estudiantes participen dando sus respuestas, y haciendo que los demás estudiantes aprueben o no sus respuestas, el docente al final dará la aprobación de lo que se debía escribir.

2. Se recolecta el producido de la actividad para verificar el trabajo de los estudiantes.

Ver Anexo: Proyecto I – sesión 3</td><td>* Video Beam

* Tablero

*marcadores

*conectividad a internet

*Guía Proyecto I sesión 3</td><td>5 min.

20 min

10 min

15 min</td></tr>
</table>

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO I
ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

SESION 3

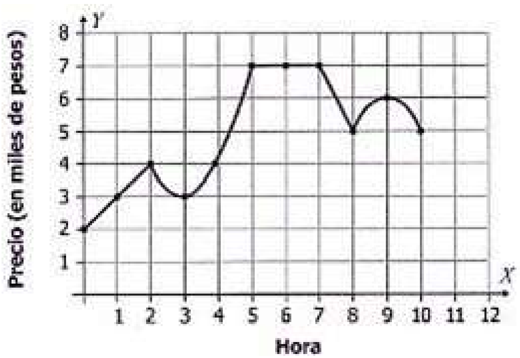
Nombre: ______________________________________ Grado: 9°:___ Fecha____/____/____________

ACTIVIDAD	No. 1	*Clasificación de funciones.*

*Observa la siguiente animación y discute con tus compañeros y el profesor a cerca de la situación: URL **http://bit.ly/2qOH6RD**

**SITUACIÓN DE APRENDIZAJE*

Lee el enunciado sobre la gráfica 1, luego responde las preguntas. La gráfica muestra la aproximación al comportamiento del precio de la acción de una compañía desde las doce del día hasta las 10 de la noche



Gráfica 1

❶Del precio de la acción ese día, es correcto afirmar que

A. fue constante entre las 2 y las 4 de la tarde
B. entre las 8 y las 10 de la noche alcanzó su valor máximo
C. entre las 2 y las 3 el precio siempre disminuyó
D. entre las 4 y 6 de la tarde el precio siempre subió

Fuente: prueba saber 2015

❷ Según la gráfica 1, ¿qué sucede con el precio de las acciones a medida que el tiempo transcurre entre las 1 y las 2?
____
____

❸ ¿Qué sucede con el precio de las acciones entre las 2 y las?___________________________________
____.

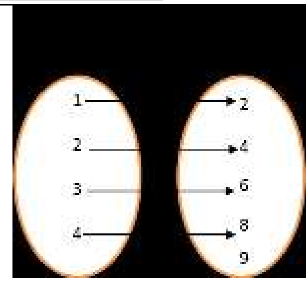
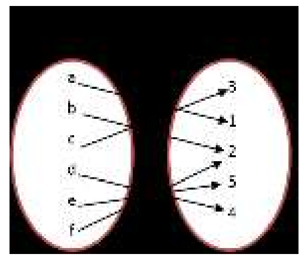
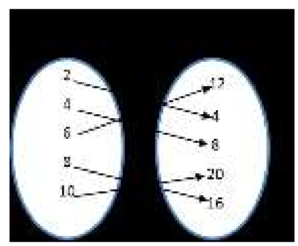
❹ ¿Cómo estuvo el comportamiento de las acciones entre las 3 y las 5? ___________________________
____.

❺ ¿Qué indica la gráfica entre las 5 y las 7?
____
____

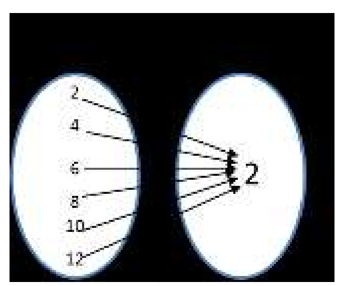
❻Describe el comportamiento entre las 8 y las 10 de la noche.
____
____
____
____
____
____
______________________.

❼ ¿Cuál fue el incremento de las acciones entre el momento que se abrió y se cerró la venta de las acciones?
____
____
____
____.

funciones: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Función inyectiva ó uno a uno: **si a cualquier par de elementos distintos del dominio les corresponden imágenes distintas del conjunto de llegada* **Si x_1 y x_2 ∈ al dominio de $f(x)$ y $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$* **Prueba de la línea horizontal: un gráfico corresponde a una función uno a uno si al trazar líneas horizontales estas cortan la gráfica en un solo punto.*	 *Ejemplo del función uno a uno* *Dom:{1, 2, 3, 4)* *Cod: {2, 4, 6, 8, 9}* *Ran: {2, 4, 6, 8}*
Función sobreyectiva: **si el rango de la función coincide con el codominio. Es decir, todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio.* *Ran f(x)= Cod f(x)* *Dom:* *Cod:* *Ran:*	 *Ejemplo del función sobre*
Función biyectiva: *si es inyectiva y sobreyectiva.* *Dom:* *Cod:* *Ran:*	 *Ejemplo del función biyectivas*

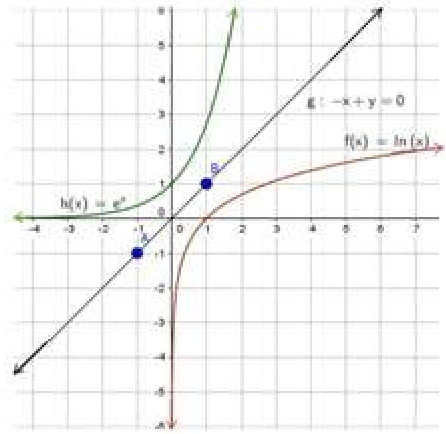
funciones: constantes, crecientes, decrecientes y periódicas

Función constante: *Una función $f(x)$ es constante en un intervalo I si para todo x_1, x_2 ∈ al intervalo I, se cumple que si: $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$.*	 *Ejemplo del función constante*

Función creciente: *Una función $f(x)$ es creciente en un intervalo I, si para todo x_1, $x_2 \in$ al intervalo I, se cumple que: si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.*

A medida que crecen los valores del dominio, los valores del rango también crecen.

En las gráficas se muestran 3 ejemplos de funciones crecientes:

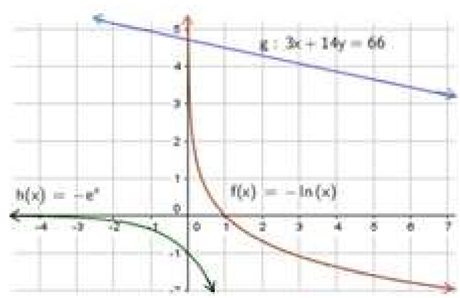


Ejemplo de funciones creciente

1. **h(x)= e^x**	Dom: $(-\infty,\infty)$	Ran: $(0, \infty)$
2. –x+y=0	Dom: $(-\infty,\infty)$	Ran: $(-\infty, \infty)$
3. **f(x) = ln x**	Dom: $(0,\infty)$	Ran: $(-\infty, \infty)$

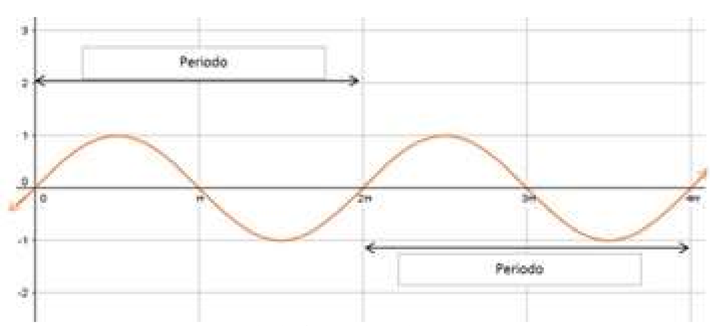
Función decreciente: *Una función $f(x)$ es decreciente en un intervalo I, si para todo x_1, $x_2 \in$ al intervalo I, se cumple que si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.*

A medida que crecen los valores del dominio, los valores del rango disminuyen.



Ejemplo de funciones decrecientes

Función periódica: *Una función $f(x)$ es periódica si existe un número real T, llamado periodo, tal que para todo $x \in$ Dom f se cumple $f(x)=f(x+T)$. Gráficamente se puede determinar cuándo se observa que la gráfica muestra comportamientos iguales en intervalos del dominio diferentes.*



Ejemplo de función periódicas y=sen(x)

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO I - SESION 3 - ACTIVIDAD 2: Comparación entre gráficas

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Observar y describir la variación de las gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables 2. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa 3. Establece relaciones de comparación entre diferentes gráficas 4. Construye gráficas a partir de expresiones algebraicas. 5. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 6. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales. 7. Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación. 8. Usa herramientas tecnológicas para representar analizar y representar funciones.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de dos estudiantes. Se socializa los indicadores de desempeño que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente presenta un video con URL: **https://youtu.be/rKjPXCGgyOQ?t=656** Luego se hacen unas preguntas que nacen de la situación planteada. **Desarrollo:** El docente guía a sus estudiantes para que resuelvan las dos situaciones, la primera un problema con 5 tareas, preguntas abiertas que el estudiante debe resolver, enmarcadas en el Modelo de Van Hiele, haciendo que este compare, reflexione y comunique lo que se muestra en las gráficas. La siguiente situación tiene que ver con el uso del software GeoGebra, instrucciones descritas en la guía de trabajo. Proyecto I – Sesión 3. ***Culminación:*** 1. Se hará una puesta en común, haciendo que algunos los estudiantes participen dando sus respuestas, y haciendo que los demás estudiantes aprueben o no sus respuestas, el docente al final dará la aprobación de lo que se debía escribir. 2. Se recolecta el producido de la actividad para verificar el trabajo de los estudiantes. *Ver Anexo: Proyecto I – sesión 3*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Tablet* **Guía Proyecto I sesión 3*	15 min. 30 min. 10 mi

	REPUBLICA DE COLOMBIA DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER SECRETARIA DE EDUCACION INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002 Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO I
ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN

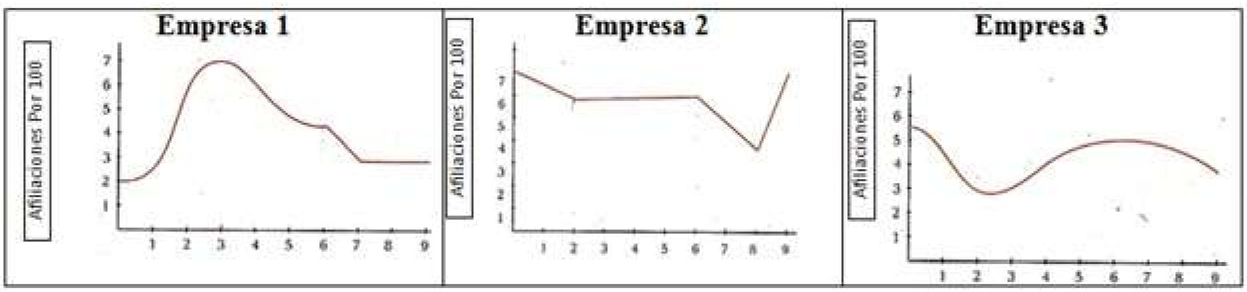
SESION 3

Nombre: ____ Grado: 9°:___ Fecha____/____/____________

ACTIVIDAD	No. 2	*Comparación entre gráficas.*

Actividad Inicial: Observa el siguiente video que te servirá para comprender algunos problemas y tareas **https://youtu.be/rKjPXCGgyOQ?t=656**.

Problema: Tres empresas de telefonía celular presentaron el comportamiento de sus afiliaciones durante los últimos nueve meses.



❶ ¿Qué empresa presentó crecimiento durante los dos primeros meses? ________________________________
____.

❷ ¿Qué empresa ha mantenido la mayor estabilidad? ¿y por qué? ____________________________________
____.

❸ Determina para cada empresa, los intervalos de crecimiento, decrecimiento o cuando permaneció constante su cantidad de afiliaciones

Empresa 1
Empresa 2
Empresa 3

❹ ¿Qué empresa tuvo el mayor número de afiliaciones?¿Cuántos por mes?______________________________
____.

❺ ¿Qué empresa tuvo el menor número de afiliaciones? ?¿Cuántos por es?_______________________________
____.

ACTIVIDAD

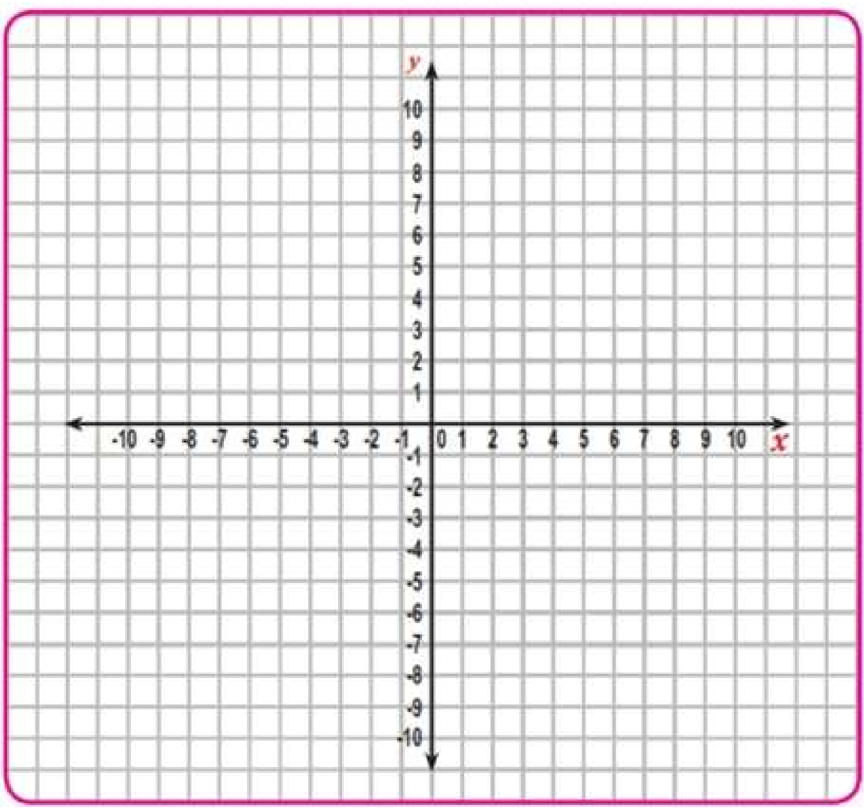
❶ Ejecuta GeoGebra, coloca cuadrícula y Escribe las expresiones en la caja de entrada, coloca color diferente a cada una.

a. $y=3^x$ *b.* $y=\frac{1}{x^2}$ *c.* $y=\frac{2x}{x^2-9}$ *d.* $y=2x^2+2$

❷. Clasifica cada función según el texto socializado sobre clasificación de funciones vistas en esta guía:

a.
b.
c.
d.

❸ Dibuja y coloca nombre de las curvas hechas con la ayuda de GeoGebra para verificar que tuviste éxito con el programa.



DESCRIPCION DEL PROYECTO II – SESION 1

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre de la Institución</td><td colspan="3">INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área</td><td>Matemáticas</td><td>Grado:</td><td>Noveno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre del proyecto de aula:
Proyecto II</td><td colspan="3">La función cuadrática</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>1</td><td>Título de la Sesión</td><td colspan="2">Definición de la función cuadrática</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td><td>3 HRS</td><td colspan="2">ACTIVIDADES</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="5">ESTANDARES Y COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td>Estándares</td><td colspan="4">(8° y 9°) (P.V.) *Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
*Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diferentes contextos.</td></tr>
<tr><td>Competencias del Área</td><td colspan="4">Comunicación
➲ Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
➲Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes
➲Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación
Razonamiento
➲ Utilizar propiedades y relaciones de los números reales para resolver problemas
Resolución de problemas
➲Resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Indicadores de desempeño</td><td colspan="4">1. Observar y describir la variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Evaluar expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Construir tablas a partir de expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. Construir gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados verbales</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. Presentar los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">8. Trabajar de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.</td></tr>
<tr><td>Competencias laborales</td><td colspan="4">[(INTERPERSONAL – Comunicación):*Expreso mis ideas con claridad. (INTERPERSONAL – Trabajo en equipo): *Desarrollo tareas y acciones con otros (padres, pares, conocidos). (ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso. (TECNOLOGICO):*Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="4">Videobeam – Computador – Internet – Tablero – marcadores – Guía de trabajo-Tablet-GeoGebra</td></tr>
<tr><td>Producción</td><td colspan="4">Completar Guía de trabajo</td></tr>
</table>

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO II - SESIÓN 1 - ACTIVIDAD 1: Reconocimiento de función cuadrática

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Observar y describir la variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables 2. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa. 3. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas 4. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 5. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de trabajo de dos estudiantes. Se socializa los indicadores de desempeño que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente presenta un recurso interactivo ubicado en la URL: **http://www.educaplus.org/game/tiro-parabolico** los estudiantes participarán modificando los datos y ver el comportamiento del movimiento de un tiro parabólico. **Desarrollo:** El docente presenta una gráfica que muestra la trayectoria de dos pelotas, luego el estudiante deberá resolver tareas descritas en la guía de trabajo. Para esta actividad se proponen 4 tareas y están enmarcadas en el Modelo de Van Hiele, procurando que el estudiante observe, estime y reflexiones acerca de la situación planteada. Seguidamente el docente presenta a los estudiantes 2 videos) Uno del portal Colombia aprende y otro de Youtube) acerca de la historia de la función cuadrática y teniendo en cuenta la información los estudiantes deben resolver 2 tareas acerca de los videos. **http://bit.ly/2dpQEtT** **https://youtu.be/86oH9bnKX0Q** **Culminación:** 1. El docente organiza a los estudiantes para que hagan exposición ante el grupo sobre lo que consignaron en sus guías de trabajo, los compañeros tendrán la posibilidad de participar o mejorar lo que los estudiantes afirmaron. El docente dará aprobación de las respuestas de sus tareas. 2. El docente Se recolecta lo construido por los estudiantes para verificar el trabajo de los estudiantes. *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 1*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto II sesión 1*	10 min. 10 min 20 min 10 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION I

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/________

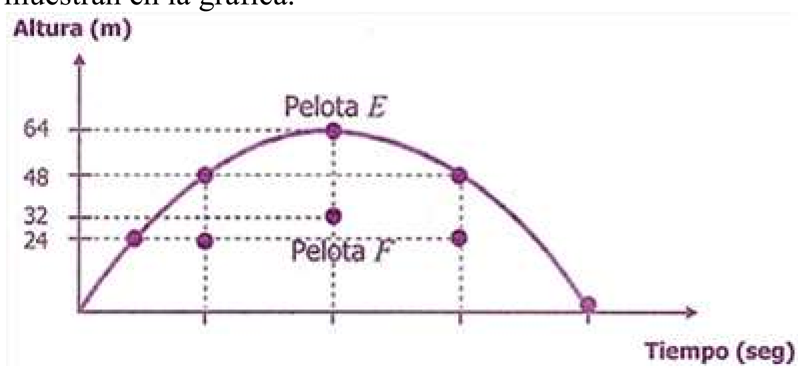
ACTIVIDAD	No. 1	*Reconocimiento de la función cuadrática.*

ACTINIDAD INICIAL: Ver la animación de tiro parabólico y modificar los datos cómo velocidad y ángulo:

http://www.educaplus.org/game/tiro-parabolico

Observa LA SITUACION, LUEGO RESPONDE

La gráfica representa la trayectoria de dos pelotas, E y F, que se lanzaron simultáneamente con velocidad inicial diferente. Los valores correspondientes al tiempo transcurridos, se muestran en la gráfica.



Gráfica 1

Fuente: Prueba saber 9° 2014

❶¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones sobre el tiempo transcurrido y la altura alcanzada por una de las pelotas es o son verdaderas?

I. La pelota E alcanzó mayor altura
II. La pelota F alcanzó la máxima altura antes que la pelota E.
III. Las pelotas E y F emplearon el mismo tiempo en realizar su recorrido.

A. I solamente B. III solamente
C. I y II solamente D. I y III solamente

❷ Describe la trayectorias que siguen las pelotas E y F. ___________________________________
____
____.

❸ Observa la trayectoria de la pelota E. ¿Cuántas veces está a la altura de 48 m, de 32 m o 24 metros?____
____

❹ Teniendo en cuanta la gráfica 1. ¿Cuántas parejas podemos hacer corresponder entre el tiempo y la altura? ____
____.

RECONOCIMIENTO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

❺Ahora observa los siguientes videos que proporcionará un resumen de algunas situaciones que tienen que ver con la función cuadrática, espero que te concentres. Al final construye un texto en 100 palabras que condense las ideas principales acerca de los fenómenos mostrados. Realiza este escrito con tu compañero de mesa.
http://bit.ly/2dpQEtT
https://youtu.be/86oH9bnKX0Q
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

❻Describe situaciones de la vida cotidiana donde se hace presente la función cuadrática, busca en la Web o en la biblioteca.

1. ____
2. ____
3. ____
4. ____
5. ____
6. ____
7. ____
8. ____
9. ____
10. ____

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO II – SESIÓN 1 -ACTIVIDAD 2: evaluando una función cuadrática

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Evaluar expresiones algebraicas *2. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa.* *3. Construir tablas a partir de expresiones algebraicas* *4. Construir gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados verbales* *5. Presentar los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.* *6. Trabajar de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.*	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de dos estudiantes. Se socializa los indicadores de desempeño que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente recuerda sobre lo que es evaluar y graficar una función. Lo hace a través de varias situaciones. **Desarrollo:** El docente presenta la actividad inicial a sus estudiantes desde el tablero, socializando el problema y lo que deben realizar en las 5 tareas. La primera tarea tiene que ver con el cálculo del valor numérico dado uno valores del eje x. La segunda tarea completar la tabla. La tercera tarea realizar la representación gráfica de la tabla. La cuarta tarea tiene que ver con la identificación de los elementos de una parábola cóncava hacia abajo. La última tarea es una pregunta donde los estudiantes razonarán acerca de algunos resultados de la tabla. ***Culminación:*** *1. El docente selecciona uno de los grupos para que hagan su exposición ante el grupo sobre lo que consignaron en sus guías de trabajo, los demás estudiantes estarán atentos a participar, los estudiantes expositores contarán con una imagen de la guía en el tablero (vía videobeam), el docente guía dará aprobación de las respuestas de sus tareas.* *2. Se recolecta el producido de la actividad para verificar el trabajo de los estudiantes.* *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 1*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Tablet* **Guía Proyecto II sesión 1*	15 min. 30 min. 10 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION I

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/________

ACTIVIDAD	No. 2	*Evaluando una función cuadrática.*

Definición formal de función cuadrática

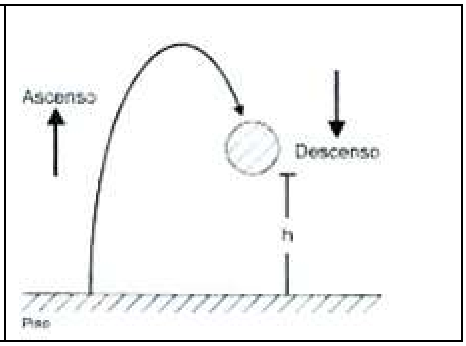
Una función cuadrática es una función de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, donde a, b y c ∈ ℝ y a ≠ 0, c es el término independiente.

ANALIZA LA SITUACION, LUEGO RESPONDE

La altura de una pelota de futbol es pateada hacia arriba, está describe la expresión:

$$h(t) = -t^2 + 8t.$$

Donde h = es la altura, 8 es la velocidad inicial y t es el tiempo que transcurre en el ascenso y descenso del balón.



❶ Evalúa la expresión $h(t) = -t^2 + 8t.$ para valores de t=0, t=0.5, t=1, t=1.5 , t = 2 y t= 2.5. Se muestran los ejemplos para t = -3 y t = 3.

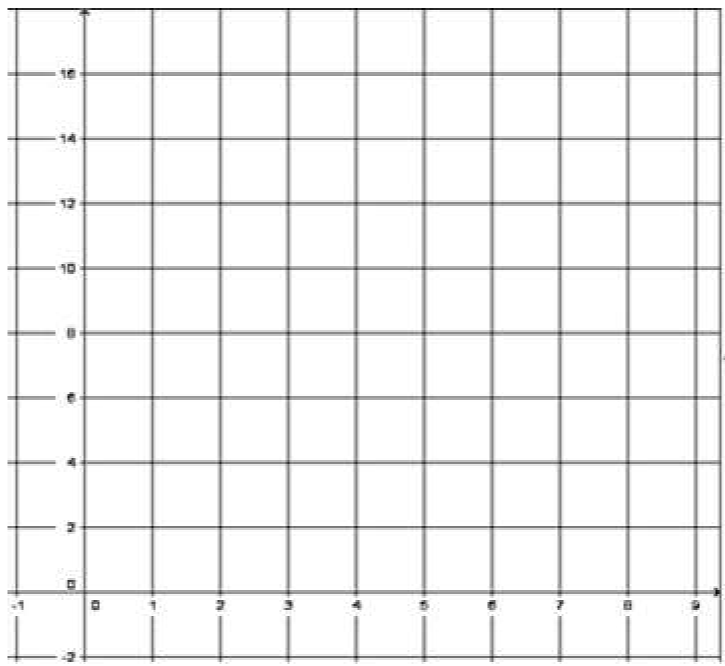
$h(t) = -t^2 + 8t$ $h(-3) = -(-3)^2 + 8(-3)$ h(-3)= - (9) -24 h(-3)= -33	$h(t) = -t^2 + 8t$ h(0)= -($)^2$+8( ) h( )= + h( )=
$h(t) = -t^2 + 8t$ h(0.5)= -$(0.5)^2$+8(0.5) h(0.5)= + h(0.5)=	$h(t) = -t^2 + 8t$ h(1) = -($)^2$+8( ) h( )= + h( )=
$h(t) = -t^2 + 8t$ h(1.5)= -($)^2$+8( ) h( )= + h( )=	$h(t) = -t^2 + 8t$ h(2)= -($)^2$+8( ) h( )= + h( )=
$h(t) = -t^2 + 8t$ h(2.5) = -($)^2$+8( ) h( ) = + h( ) =	$h(t) = -t^2 + 8t$ h(3)= -$(3)^2$+8(3) h(3)= - (9) +24 h(3)= 15

❷Completa las siguientes tablas, evaluando los valores asignados para t. En el punto 1 ya evaluaste algunos.

T	0	0.5	1	1.5	2	2.5
h(t)						

t	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h(t)											

❸Realiza la representación gráfica en el siguiente plano cartesiano teniendo en cuenta la tabla de valores



❹Sobre la función graficada, ubica los siguientes elementos

a. Ubica el punto más arriba (___, ___) y llama a este punto vértice.

b. Ubica los dos puntos donde la altura del balón es 0 (cero). (___, ___) (___, ___). A este punto llámalos cortes con el eje horizontal.

c. Ubica el punto de corte con el eje y. (___, ___).

d. Describe la concavidad de la gráfica (hacia donde abre la curva).____

e. Sobre el intervalo de tiempo entre [0, 8] define

Intervalo donde es creciente: [,]

Intervalo donde es decreciente: (,]

❺ Teniendo en cuenta el problema inicial ¿Con cuales valores de t la altura h(t) es negativa? Explica que querrá decir eso. ____
____
____.

PLANEACION DE ACTIVIDADES
PROYECTO II - SESIÓN 1 - ACTIVIDAD 3: Trabajando con GeoGebra

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa. 2. Usa herramientas al alcance como tabletas y computadores en el área de matemáticas Utiliza 3. Presentar los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 4. Trabajar de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente da la orden a los utileros que hagan la entrega de las Tablet, y los estabilizadores, establece grupos de trabajo de dos estudiantes. Se socializa los indicadores de desempeño que los estudiantes deben alcanzar. **Inicio:** El docente socializa la definición formal de la función cuadrática, de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ $con\ a, b, c\ que \in R, con\ a\ \neq\ 0$. Esto con el fin que los estudiantes reconozcan la forma y puedan introducirla en la caja de entrada del programa. Igualmente se les hace una demostración con la proyección del videobeam. **Desarrollo:** El docente presenta la actividad inicial a sus estudiantes desde el tablero, socializando las instrucciones que deben realizar en las 3 tareas. La primera tarea tiene que ver con la introducción en la caja de entrada de la expresión $y = x^2$. Luego debe utilizar la herramienta arrastre para que lleve esa forma por los 4 cuadrantes. El estudiante debe completar la pregunta que aparece en la guía de trabajo. La segunda tarea es que escriban en la caja de entrada $y = -x^2$ y que utilicen la herramienta arrastre y muevan la gráfica, luego deben responder la pregunta de la tarea. La tarea No. 3 tiene que ver con incluir la una expresión de la forma $y = ax^2 + bx + c$ para que los estudiantes escribas las características pedidas de la gráfica obtenida. **Culminación:** *1. El docente verifica que los estudiantes realicen la actividad, es importante hacerles entender a los estudiantes que solo deben limitarse a las tareas asignadas.* *2. Se recolecta el producido de la actividad para verificar el trabajo de los estudiantes.* *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 1*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Tablet* **Guía Proyecto II sesión 1*	10 min. 10 min. 20 min 10 min

	REPUBLICA DE COLOMBIA DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER SECRETARIA DE EDUCACION INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002 Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION I

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/________

ACTIVIDAD	**No. 3**	*Trabajando con GeoGebra.*

Usa GeoGebra, para analizar algunas funciones cuadráticas.

1. Coloca cuadrícula. Introduce en la caja de entrada $y = x^2$
   - Utiliza la herramienta arrastre: lleva el puntero del mouse hasta la curva que se forma, arrastra la gráfica para que observes en la vista algebraica como cambia la expresión $y = x^2$
   - Escribe varios ejemplos de función cuadrática cuya curva sea cóncava hacia arriba.

   a. ______________________ b. ______________________

   c. ______________________ d. ______________________

2. Introduce en la caja de entrada $y = -x^2$
   - Utiliza la herramienta arrastre y mueve la gráfica
   - Escribe varios ejemplos de función cuadrática cuya curva sea cóncava hacia abajo.

   a. ______________________ b. ______________________

   c. ______________________ d. ______________________

3. Introduce en la caja de entrada $y = x^2 - 4x + 3$ y Completa observando la gráfica en el área de trabajo de GeoGebra:
   - Teniendo en cuenta la forma $y=ax^2+bx+c$ escribe los valores de a: _____, b: ______ y c: _______ de la función que acabas de introducir.
   - Ubica en la gráfica el vértice V= (___, ___)
   - Ubica los puntos de corte con el eje x, si los hay. (___, ___) (___, ___).
   - Ubica el punto de corte con el eje y. (___, ___)
   - Determina el dominio: _________ y Rango: __________.
   - Concavidad: ____________________________________.
   - Intervalo de crecimiento: _________________________.
   - Intervalo de decrecimiento: _______________________.
   - Traza una recta paralela al eje y que pase por el vértice, esta recta divide la gráfica en dos partes (eje de simetría). x= ____.

DESCRIPCION DEL PROYECTO II – SESION 2

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre de la Institución</td><td colspan="3">INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área</td><td>Matemáticas</td><td>Grado:</td><td>Noveno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre del proyecto de aula: Proyecto II</td><td colspan="3">La función cuadrática</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>2</td><td>Título de la Sesión</td><td colspan="2">Tipos de gráficas de la función cuadrática</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td><td>5 HRS</td><td>ACTIVIDADES</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="5">ESTANDARES Y COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td>Estándares</td><td colspan="4">* Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diferentes contextos.
* Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
*Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.</td></tr>
<tr><td>Competencias del Área</td><td colspan="4">Comunicación
➲ Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
➲ Identificar características de gráficas cartesianas en relación co la situación que representan
➲Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes
➲Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Indicadores de desempeño</td><td colspan="4">1. Describe propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Reconoce dominio y rango de una función en un contexto determinado</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Evalúa expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. construir tablas a partir a partir de expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. construye gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. Observa y describe la variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables</td></tr>
<tr><td colspan="4">8. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">9. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.</td></tr>
<tr><td>Competencias laborales</td><td colspan="4">[(INTERPERSONAL – Comunicación):*Expreso mis ideas con claridad. (INTERPERSONAL – Trabajo en equipo): *Desarrollo tareas y acciones con otros (padres, pares, conocidos). (ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso. (TECNOLOGICO):*Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="4">Videobeam – Computador – Internet – Tablero – marcadores – Guía de trabajo-Tablet-GeoGebra</td></tr>
<tr><td>Producción</td><td colspan="4">Completar Guía de trabajo</td></tr>
</table>

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO II - SESIÓN 2 - ACTIVIDAD 1: tipos de gráficas de la función cuadrática

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Describe propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa 2. Reconoce dominio y rango de una función en un contexto determinado 3. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas. 4. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 5. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de trabajo. Se socializa los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente presenta un breve resumen de los casos de tipos de gráficas de la función cuadráticas, da ejemplos de cada uno de los casos. También debe explicar que para determinar el caso al cual pertenece la función se deben expresar en cualquiera de las formas reconocidas por los casos caso 1: $y = ax^2$, caso 2: $y = ax^2 + c$, *caos 3:* $y = ax^2+bx$, *o caso 4:* $y = ax^2+bx + c$. **Desarrollo:** El docente pide a sus estudiantes que realicen una tabla para que deduzcan cómo se debe determinar los elementos para cada caso: como el vértice, concavidad, eje de simetría, punto de corte con el eje y, dominio y rango. Seguidamente el docente presenta a los estudiantes dos tareas, la primera trata de un listado de funciones para que determinen si la función es cuadrática y si lo es se identifique el caso, y la segunda tarea para que se determine los diferentes elementos como el vértice, concavidad, eje de simetría, punto de corte con el eje y, dominio y rango. El estudiante debe mostrar el proceso seguido para determinar el vértice. La guía suministra la información detallada. **Culminación:** 1. El docente organiza a los estudiantes para que participen en la corrección de las tareas. Por grupos van mostrando en el tablero la información de las tareas. 2. El docente recolecta lo construido por los estudiantes para verificar avances. *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 2*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto II sesión 2*	10 min. 10 min 60 min 20 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION II

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/________

Tipos de gráficas de las funciones cuadráticas: $f(x) = ax^2+bx+c$

Caso 1. *$f(x)=ax^2$, b=0 y c=0* ** Tienen como vértice (0,0)* *V=(h, k)=(0,0)* ** Eje de simetría es el eje y* *x=0* ** si a >0 abre hacia arriba* ** si a< 0 abre hacia abajo* ** si |a|>1 es más estrecha* ** Si 0<|a|<1, la parábola es más ancha*	***Caso 2.*** *$f(x)=ax^2 + c$, b=0* ** Tienen como vértice (0,c) V=(h, k)=(0,c)* ** Eje de simetría es el eje y* *x=0* ** si c >0 traslación hacia arriba* ** si c< 0 traslación hacia abajo*
Caso 3. *$f(x)=ax^2 + bx$, c=0* ** Tienen como vértice (h, k) V=(h, k)* $h = \frac{-b}{2a}$ $k = f(h) = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ ** Eje de simetría es el eje y* $x = \frac{-b}{2a} = h$	***Caso 4.*** *$f(x)=ax^2 + bx+ c$* *La gráfica se obtiene trasladando c unidades la gráfica $f(x)=ax^2 + bx$. Cuando c>0, la traslación es hacia arriba y cuando c<0 la traslación es hacia abajo.*

El Dominio de una función cuadrática siempre es el conjunto de los números Reales: ℝ =(-∞, ∞). **El rango** se decide luego de obtener el vértice. V=(h, k). Si a>0 entonces la parábola tiene punto mínimo y el rango es [k, ∞). Si a<0 entonces la parábola tiene punto máximo y el rango es (-∞, k].

ACTIVIDAD No. 1

❶Escribe al frente de cada expresión si corresponde o No a una función cuadrática, y si es, diga si es caso 1, 2, 3 o 4.

$-x^2 +y +4=0$	
$y =-\frac{1}{2}x^2-3x+5$	
$y +x^2 = 3x+3$	
$y =x^3+2x^2+x+2$	
$f(x) =2^x+2$	
$g(x) =-10x^2$	
$h(x) =8x^2+2x$	
$y=-2x+3$	

❷Completa la tabla según los criterios descritos en los tipos de función

Item	Función	a	b	c	V(h,k)	abertura	Eje de simetría	Dominio	Rango
A	$f(x)=-2x^2-3x-4$								
B	$y = x^2+\frac{1}{4}x$								
C	$g(x) = -2x^2$								
D	$y = 10x^2-4$								
E	$y = x^2+x+1$								
F	$s(x)= -3x^2+2x-8$								
G	$y = 0{,}08x^2$								
H	$h(x) =-6x^2+4x$								
I	$y =-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x +1$								
J	$y= 3x^2-2x$								

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO II - SESIÓN 2 - ACTIVIDAD 2: Trabajando con GeoGebra

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Describe propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa 2. Reconoce dominio y rango de una función en un contexto determinado 3. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas. 4. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 5. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales. 6. Usa herramientas al alcance como tabletas y computadores en el área de matemáticas 7. utilizar GeoGebra para realizar las actividades planteadas	***Introducción:*** el docente da funciones a los utileros para que hagan la entrega de las Tablet, y los estabilizadores, establece grupos de trabajo. Se socializa los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente presenta la actividad a desarrollar, mostrando un ejemplo de lo que deben realizar los estudiantes. **Desarrollo:** El docente presenta las tres tareas a realizar, en la primera tarea el estudiante debe ingresar 4 funciones de la forma $y=ax^2$, las que se muestran en la guía, y responder las preguntas que aparecen en la tarea. A cada gráfica el estudiante debe encontrar los siguientes elementos: vértice, concavidad, eje de simetría, punto de corte con el eje y, dominio y rango. Las tareas dos y tres presentan una situación similar con unas preguntas adicionales para cada tarea. Los estudiantes deben construir una tabla en una hoja adicional donde describieron los elementos de la función. *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 2* ***Culminación:*** *1. El docente verifica que los estudiantes realizaron las actividades asignadas. Se hace retroalimentación final para aclarar algunas situaciones.* *2. Se recolecta el producido de la actividad para verificar el trabajo de los estudiantes.* *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 2*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Tablet* **Guía Proyecto II sesión 2*	10 min. 30 min 10 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION II

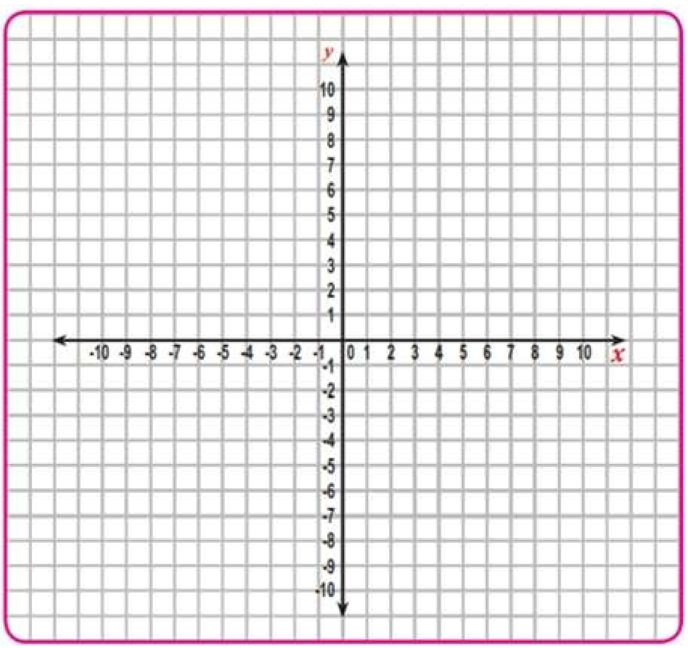
Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/________

ACTIVIDAD	No. 2	*Trabajando con GeoGebra.*

Utiliza GeoGebra para graficar las siguientes funciones cuadráticas en el mismo plano. A cada una de las gráficas de las tareas 1, 2 y 3 ubique los siguientes elementos: vértice, concavidad, eje de simetría, punto de corte con el eje y, dominio y rango.

❶ Introduce en la caja de entrada: $f(x)=2x^2$; $g(x)= -2x^2$; $h(x)=\frac{1}{3}x^2$; $i(x)=-\frac{1}{3}x^2$, luego llévalo al plano con el nombre de la expresión.

a. Construye las gráficas observando los puntos observas en el área de trabajo de GeoGebra.

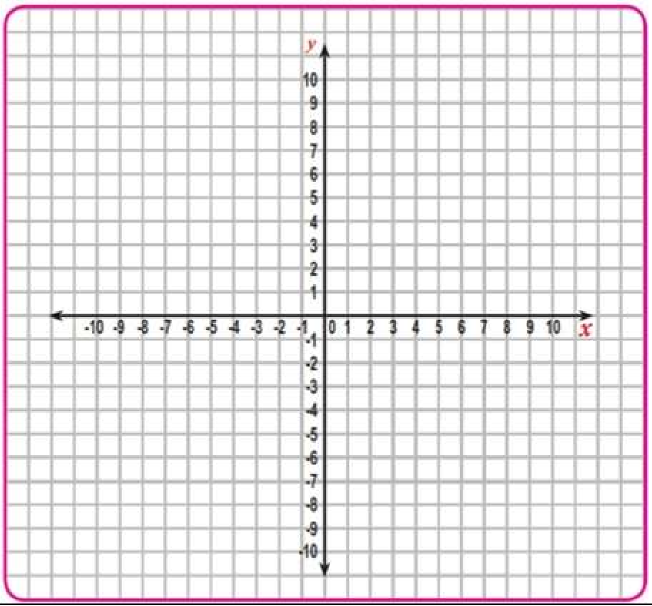


b. ¿Qué semejanzas y diferencias tienen *f(x)* y *g(x)*?________________________________
____
____
____
____
____
____
______

c. ¿Qué semejanzas y diferencias tienen *h(x)* y *i(x)*?
____
____
____
____
____
____
____
____
____

❷ Introduce en la caja de entrada: $f(x)=x^2$; $g(x)= x^2+1$; $h(x)=x^2+2$; $i(x)=x^2-1$, luego grafica en el plano.

a. Construye las gráficas observando los puntos observas en el área de trabajo de GeoGebra.

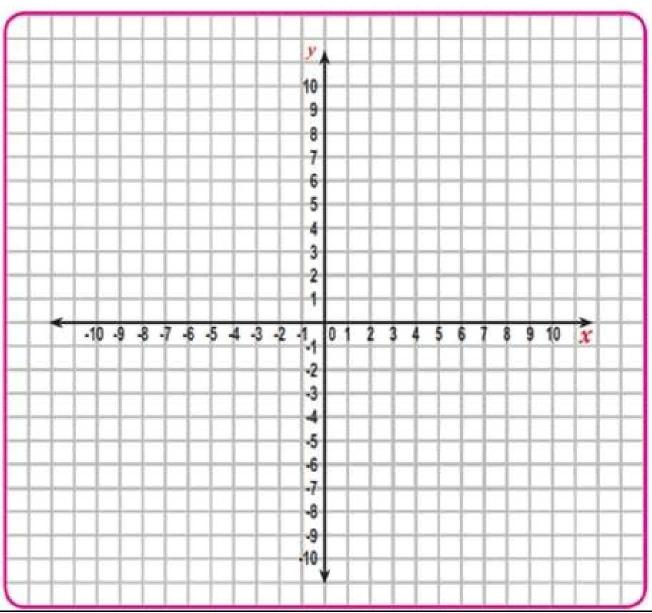


b. ¿Qué semejanzas y diferencias tienen *f(x) y g(x)?*______________________________

c. ¿Qué semejanzas y diferencias tienen *h(x) y i(x)?*

❸ a. Introduce en la caja de entrada: $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + x$; $h(x) = x^2 + x + 1$; $i(x) = x^2 + x - 1$, luego grafica en el plano.

a. Construye las gráficas observando los puntos observas en el área de trabajo de GeoGebra.



a. Observa las gráficas. ¿Qué sucede con *f(x), g(x), h(x) y i(x)* ______________________

c. ¿Qué semejanzas y diferencias tienen *h(x) y i(x)?*

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO II – SESIÓN 2 -ACTIVIDAD 3: traducción registros de representación

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Reconoce dominio y rango de una función en un contexto determinado 2. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas. 3. Evalúa expresiones algebraicas 4. construir tablas a partir a partir de expresiones algebraicas 5. construye gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados 6. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 7. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de dos estudiantes. Se socializa los indicadores de desempeño que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente recuerda sobre lo que es evaluar y graficar una función. **Desarrollo:** El docente presenta dos tareas que aparecen en la guía, La primera tarea trata de evaluar dos funciones para luego graficar en el mismo plano, se presentan los pasos guiados para que los estudiantes inicien la evaluación; el docente propicia el ambiente para que los estudiantes participen en forma voluntaria completando la información que también aparece en el tablero. La segunda tarea se presenta con seis gráficas y seis funciones, el estudiante debe hacer correspondes cada una de las gráficas con la función correspondiente. Además se le pide a los estudiantes los siguientes elementos para cada gráfica: vértice, concavidad, eje de simetría, punto de corte con el eje y, puntos de corte con el eje x, dominio y rango, tabla de valores, intervalo de crecimiento, intervalo de decrecimiento. El docente siempre expone la guía para que los estudiantes hagan sus preguntas durante el desarrollo del trabajo. ***Culminación:*** *1. El docente presenta la guía en el tablero (vía videobeam), y hará un recorrido para verificar dificultades encontradas.* *2. Se recolecta la producción de los estudiantes verificar el trabajo de los mismos.* *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 2*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto II sesión 2*	10 min. 40 min. 40 min 20 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION II

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/________

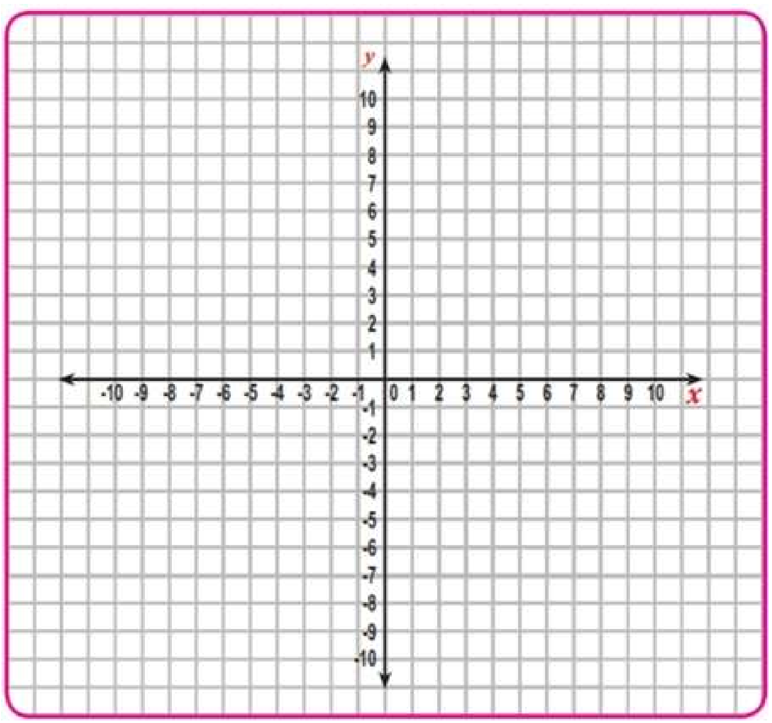
ACTIVIDAD	No. 3	*Traduciendo registros de representación.*

➊Realiza la representación gráfica de las funciones indicadas, evaluando algunos valores para x.

$g(x) = 2x^2 + 2x$		$h(x) = x^2 - 2x - 1$	
g(-3) = 2( )² + 2( ) g(-3) = 2( ) + 2( ) g(-3) = + g(-3) =	g(-1) = 2( )² + 2( ) g(-1) = 2( ) + 2( ) g(-1) = + g(-1) =		
g(-2) = 2( )² + 2( ) g(-2) = 2( ) + 2( ) g(-2) = + g(-2) =	g(1) = 2( )² + 2( ) g(1) = 2( ) + 2( ) g(1) = + g(1) =		

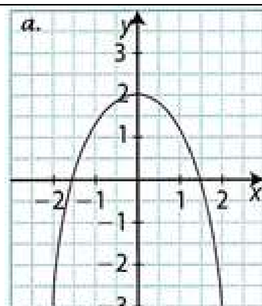
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

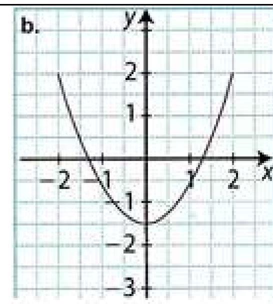
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

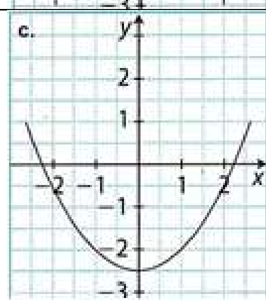


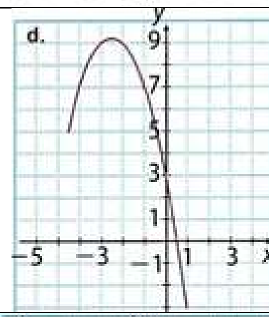
❷Relaciona cada gráfico con la función cuadrática correspondiente además determina:

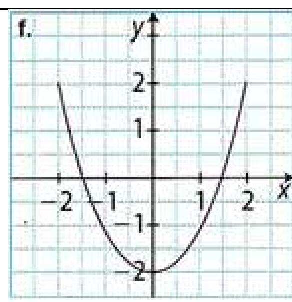
* Realizar una tabla de valores para cada gráfica *Ubicar el vértice de cada una de las funciones *Cortes con el *eje y* y con el *eje x*	* Eje de simetría * Dominio y rango * Concavidad * intervalo de crecimiento y decrecimiento *Aclarar cuantos registros de representación están trabajando

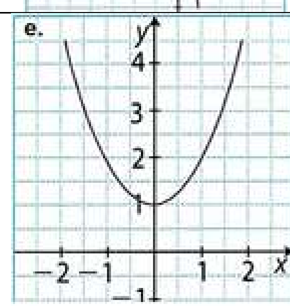












1. $f(x) = x^2 + 1$

2. $f(x) = -x^2 + 2$

3. $f(x) = -x^2 - 5x + 3$

4. $f(x) = x^2 - \frac{3}{2}$

5. $f(x) = x^2 - 2$

6. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$

Fuente: Saberes ser hacer, Matemáticas 9°- Editorial Santillana - p. 123

DESCRIPCION DEL PROYECTO II – SESION 3

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre de la Institución</td><td colspan="4">INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área</td><td>Matemáticas</td><td colspan="2">Grado:</td><td>Noveno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre del proyecto de aula: Proyecto II</td><td colspan="4">La función cuadrática</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>3</td><td>Título de la Sesión</td><td colspan="3">Ceros, raíces o soluciones de una función cuadrática</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td><td>3 HRS</td><td colspan="2">ACTIVIDADES</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="6">ESTANDARES Y COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td>Estándares</td><td colspan="5">* Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
*Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
*Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diferentes contextos.</td></tr>
<tr><td>Competencias del Área</td><td colspan="5">Comunicación
➲ Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
➲ Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan
➲Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes
➲Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Indicadores de desempeño</td><td colspan="5">1. Describe propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa</td></tr>
<tr><td colspan="5">2. Evalúa expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td colspan="5">3. Expresar y traducir entre lenguajes verbal, gráfico y simbólico</td></tr>
<tr><td colspan="5">4. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas.</td></tr>
<tr><td colspan="5">5. construir tablas a partir a partir de expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td colspan="5">6.construye gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados</td></tr>
<tr><td colspan="5">7. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.</td></tr>
<tr><td colspan="5">8. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.</td></tr>
<tr><td>Competencias laborales</td><td colspan="5">[(INTERPERSONAL – Comunicación):*Expreso mis ideas con claridad. (INTERPERSONAL – Trabajo en equipo): *Desarrollo tareas y acciones con otros (padres, pares, conocidos). (ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso. (TECNOLOGICO):*Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="5">Videobeam – Computador – Internet – Tablero – marcadores – Guía de trabajo-Tablet-GeoGebra</td></tr>
<tr><td>Producción</td><td colspan="5">Completar Guía de trabajo</td></tr>
</table>

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO II - SESIÓN 3 - ACTIVIDAD 1: Ceros y casos en la función cuadrática

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa 2. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas. 3. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 4. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de la sesión 3. Establece grupos de trabajo. Se socializa los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente inicia haciendo las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿es posible que una función no corte el eje x? ¿Es posible que una función cuadrática corte en un solo punto el eje x? ¿Una gráfica de la función cuadrática toca siempre el eje x? **Desarrollo:** El docente presenta la actividad en el tablero, 7 gráficas acompañadas de sus expresiones de la forma $y = a(x-h)+k$. Seguidamente el docente presenta a los estudiantes 7 tareas. Las primeras seis tareas tienen que ver con preguntas abiertas sobre características de las gráficas. Estas preguntas son sencillas y están enmarcadas en el marco del modelo de Van Hiele. La tarea 7 corresponde al llenado de una tabla donde se debe escribir características precisas de las gráficas o funciones. **Culminación:** 1. El docente expone el taller y va preguntando a los estudiantes sobre sus respuestas en cada tarea. 2. El docente recolecta lo construido por los estudiantes para verificar avances. *Ver Anexo: Proyecto II – sesión*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto II sesión 3*	5 min. 30 min 15 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

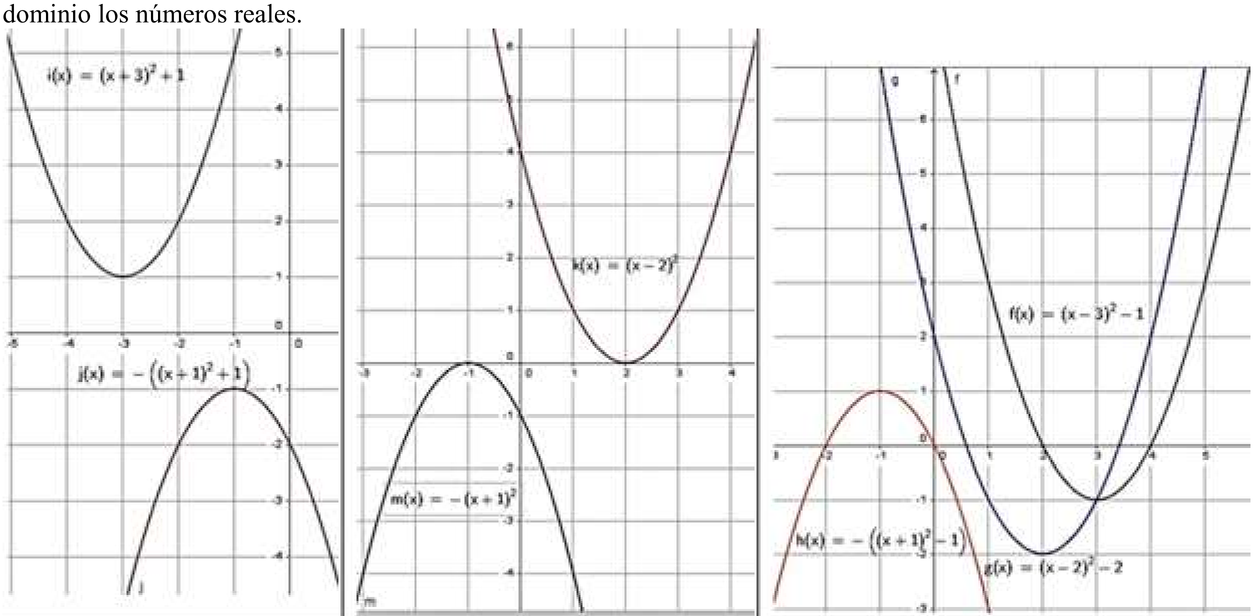
PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION III

Nombre: ____Código: ____ Grado: 9°:___ Fecha____/____/_____

ACTIVIDAD	No. 1	*Ceros y casos en la función cuadrática.*

Observa las siguientes gráficas, luego responde las preguntas teniendo en cuenta que las funciones tienen como dominio los números reales.



Gráfica 1 Gráfica 2 Gráfica 3

❶¿Qué tienen en común la función i(x) y j(x)?____

____

❷¿Qué tienen en común la función k(x) y m(x)? ____

____

❸¿Qué tienen en común la función f(x), g(x)y h(x)? ____

____

❹¿Es posible que todas las curvas de las funciones de las gráfica 1, gráfica 2 y gráfica 3 corten el eje y? Si ___ No___ Explica ____

____.

❺¿De las tres gráficas, Cuáles funciones no cortan el eje x? ____

____.

❻¿Cuáles funciones cortan en 2 puntos el eje x? ____

❼Teniendo en cuenta las gráficas 1, 2, 3 Completa la siguiente tabla

función	Puntos intercepto con el eje x	Punto intercepto con el eje y	función	vértice	función de la forma $y=ax^2+bx+c$
i(x)					
j(x)					
k(x)					
m(x)					
f(x)					
g(x)					
h(x)					

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO II – SESIÓN 3 -ACTIVIDAD 2: Construye la gráfica y halla las raíces

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas. 2. Evalúa expresiones algebraicas 3. construir tablas a partir a partir de expresiones algebraicas 4. construye gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados 5. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 6. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de dos estudiantes. Se socializa los indicadores de desempeño que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente expone los casos de los ceros, raíces de una función cuadrática, caso1: la parábola corta el eje x en un solo punto, caso 2: la parábola corta el eje x en dos puntos y caso 3: la función no corta el eje x. **Desarrollo:** El docente presenta tres tareas que aparecen en la guía, La primera tarea trata de evaluar tres funciones. La segunda tarea corresponde a las gráficas de las funciones en el mismo plano y la tercera tarea corresponde al llenado de una tabla que resume las raíces relacionando el tipo de caso. Se les indica a los estudiantes la importancia de colocar bien los puntos para que la construcción de la gráfica sea bien definida. El docente siempre expone la guía para que los estudiantes hagan sus preguntas durante el desarrollo del trabajo. ***Culminación:*** *1. En caso de no terminar en la hora, los estudiantes deben terminar en casa.* *2. En la siguiente clase se revisa la actividad y se hará un recorrido para verificar dificultades encontradas.* *3. Se recolecta la producción de los estudiantes verificar el trabajo de los mismos.* *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 3*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto II sesión 3*	5 min. 35 min. 20 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION 2

Nombre: ______________________________________Código: ____ Grado: 9°:___ Fecha____/____/_____

ACTIVIDAD	No. 2	*Ceros evaluando y graficando.*

Ceros, raíces o soluciones de una función cuadrática

⇨Los ceros, raíces o soluciones de una función cuadrática son los puntos de corte de la parábola con el eje x. *Dependiendo de que los puntos de corte existan o no existan, se presentan tres casos:*	***Caso 1.*** *La parábola corta el eje x en un solo punto.* *En este caso, se dice que la función tiene una sola raíz real y está ubicada en el vértice*
Caso 2. *La parábola corta el eje x en dos puntos* *En este caso, se dice que la función tiene dos raíces reales y está ubicada en el vértice*	***Caso 3. La parábola no corta el eje x*** *La función no tiene solución en los números reales. Sus raíces y ceros son números complejos*

Evalúa, Grafica las siguientes funciones, determina las raíces y escribe a que caso pertenecen.

❶Evalúa

m: $y = -x^2 + 2x - 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

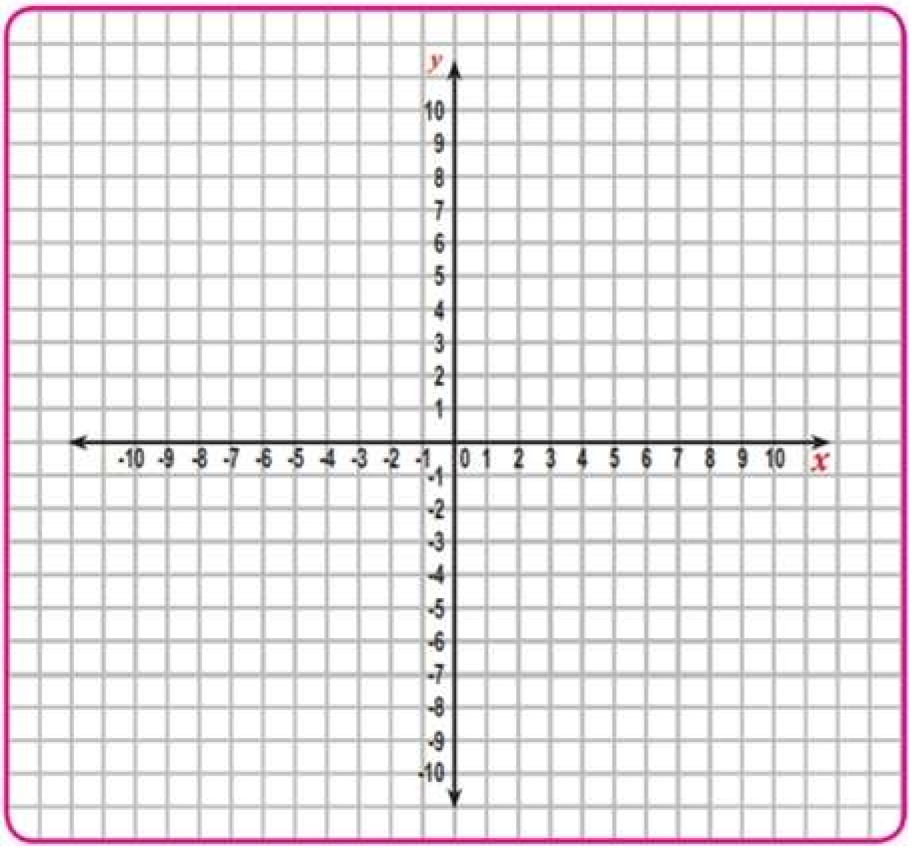
n: $y=x^2+2x-2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

o: $y=x^2+2x+2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

❷ Grafica las funciones m, n y o en un mismo plano para que determines las raíces de cada una de ellas.



❸Ubica los puntos de corte con el eje x que observas en la gráfica, determina las raíces y escribe a que caso pertenece

Función	**m:** $y = -x^2 + 2x - 1$	**n:** $y=x^2+2x-2$	**o:** $y=x^2+2x+2$
Raíces			
Tipo de caso			

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO II - SESIÓN 3 - ACTIVIDAD 3: Trabajando con GeoGebra

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Expresar y traducir entre lenguajes verbal, gráfico y simbólico 2. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales. 3. Usa herramientas al alcance como tabletas y computadores en el área de matemáticas 4. utilizar GeoGebra para realizar las actividades planteadas	***Introducción:*** el docente da funciones a los utileros para que hagan la entrega de las Tablet, y los estabilizadores, establece grupos de trabajo. Se socializa los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente presenta la actividad a desarrollar, mostrando un ejemplo de lo que deben realizar los estudiantes. El docente muestra la forma 4p(y-k) = $(x-h)^2$ cómo una forma de representar la función y muestra varios ejemplos. **Desarrollo:** El docente presenta las ocho tareas a realizar por los estudiantes. Luego de que los estudiantes ejecuten GeoGebra, se les pide que realicen la tarea 1, que corresponde al ingreso a la caja de entrada la siguiente expresión: (y-1) = $(x-1)^2$, de esta expresión se desencadenan las demás tareas. *Ver Anexo: Proyecto II – sesión 3.* Para que esta actividad tenga éxito, conviene mostrar un ejemplo diferente, para que los estudiantes asimilen el detalle de las tareas. **Culminación:** 1. El docente verifica que los estudiantes realizaron las actividades asignadas. Se hace retroalimentación final para aclarar algunas situaciones. 2. Se recolecta las guías de trabajo para el análisis de lo respondido por los estudiantes. Ver Anexo: Proyecto II – sesión 3	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Tablet* **Guía Proyecto II sesión 2*	10 min. 30 min 10 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO II
TIPOS DE FUNCIONES: LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SESION 2

Nombre: ______________________________________Código: ____ Grado: 9°:___ Fecha____/____/_____

ACTIVIDAD	No. 3

Ejecuta GeoGebra, coloca cuadrícula y responde las preguntas indicadas

❶ Introduce en la caja de entrada: $(y-1) = (x-1)^2$

❷¿Qué tipo de gráfica obtuviste?____________________

❸Analiza la expresión algebraica y compárala con el vértice, - ¿Qué relación encuentras?:_________________

____

❹Usa la herramienta punto para ubicar los puntos de corte con el **eje y** y con el eje x, escríbelos:

Corte con el eje y	Corte con el eje x

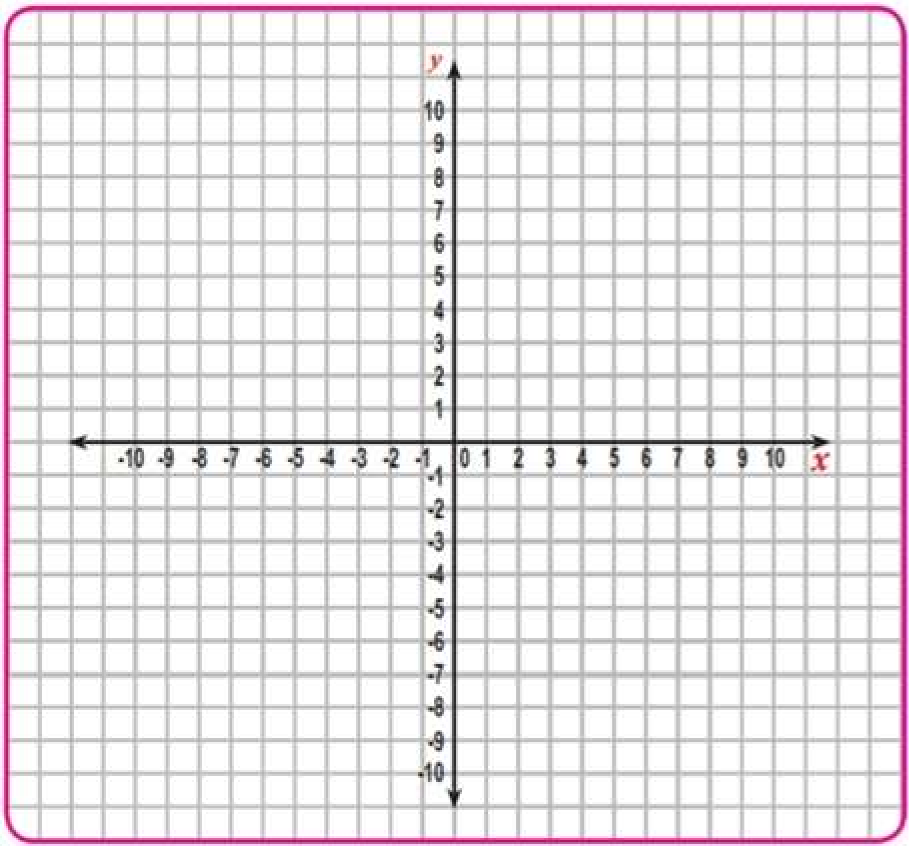
❺Lleva el puntero hasta la expresión que se muestra en la vista algebraica y cámbiala a modo 4	1. Ecuación $a x^2 + b xy + c y^2 + d x + e y = f$ 2. Ecuación $y^2 = o x^2 =$ 3. Ecuación $y=a(x - h)^2 + k$ 4. Ecuación $4p(y - k) = (x - h)^2$

Escribe las expresiones que se muestra: ______________________, ___________________, _____________________________,

❻ Busca la curva $(y-1) = (x-1)^2$ y utiliza la herramienta arrastre: lleva el puntero del mouse hasta la curva que se forma, arrastra la gráfica para que observes en la vista algebraica como cambia la función. Lleva el vértice al primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante. ¿Qué relación existe entre la expresión de la vista algebraica y el vértice? Explica: ____

____

➐.Dibuja 4 funciones en cuadrantes diferentes ten en cuenta el punto 6.



➑Completa la tabla con los 4 ejemplos que escribiste en el punto 7 Usa la herramienta punto  para ubicar los puntos de corte con el **eje y** y con el eje x y escríbelos:

función de la forma $(y\text{-}k)=(x\text{-}h)^2$	**vértice**	**Corte con x**	**Corte con y**

DESCRIPCION DEL PROYECTO III – SESION 1

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre de la Institución</td><td colspan="3">INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área</td><td>Matemáticas</td><td>Grado:</td><td>Noveno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre del proyecto de aula: Proyecto III</td><td colspan="3">La ecuación cuadrática</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>1</td><td>Título de la Sesión</td><td colspan="2">Problemas de función cuadrática</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td><td>3 HRS</td><td colspan="2">ACTIVIDADES</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="5">ESTANDARES Y COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td>Estándares</td><td colspan="4">* Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
*Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
*Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diferentes contextos.</td></tr>
<tr><td>Competencias del Área</td><td colspan="4">Comunicación
➲ Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
➲ Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan
➲Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Indicadores de desempeño</td><td colspan="4">1. Describe propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. utilizar propiedades de la potenciación y radicación para solucionar un problema</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. observar y describir variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables.</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Identifica el sentido de la unidad de medida en una representación gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.</td></tr>
<tr><td>Competencias laborales</td><td colspan="4">[(INTERPERSONAL – Comunicación):*Expreso mis ideas con claridad. (INTERPERSONAL – Trabajo en equipo): *Desarrollo tareas y acciones con otros (padres, pares, conocidos). (ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso. (TECNOLOGICO):*Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="4">Videobeam – Computador – Internet – Tablero – marcadores – Guía de trabajo-Tablet-GeoGebra</td></tr>
<tr><td>Producción</td><td colspan="4">Completar Guía de trabajo</td></tr>
</table>

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO III - SESIÓN 1 - ACTIVIDAD 1: La relación de la función cuadrática con el área del rectángulo

<table>
<tr><th>Indicadores</th><th>Proceso</th><th>Recursos</th><th>Tiempo</th></tr>
<tr>
<td>1. utilizar propiedades de la potenciación y radicación para solucionar un problema

2. Identifica el sentido de la unidad de medida en una representación gráfica

3. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.

4. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.</td>
<td>Introducción: el docente hace entrega de la guía de la sesión 1 del proyecto III. Establece grupos de trabajo. Se socializa los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar.

Inicio:

El docente muestra la situación inicial, una situación que corresponde al esquema de una cancha de futbol. Se hacen preguntas sobre la expresión que representa el perímetro de un rectángulo.

Desarrollo:

El docente presenta la actividad en el tablero, esta actividad contiene 5 tareas, y serán guiadas para que los estudiantes al final deduzcan el valor del ancho y el largo de la cancha y se determine e perímetro.

Culminación:

1. El docente recuerda la importancia de la función cuadrática, y que muchas situaciones de la vida cotidiana están muy relacionadas con este tipo de funciones.

2. El docente recolecta lo construido por los estudiantes para verificar avances.

Ver Anexo: Proyecto III – sesión 1</td>
<td>* Video Beam

* Tablero

*marcadores

*conectividad a internet

*Guía Proyecto III sesión 1</td>
<td>5 min.

30 min

15 min</td>
</tr>
</table>

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

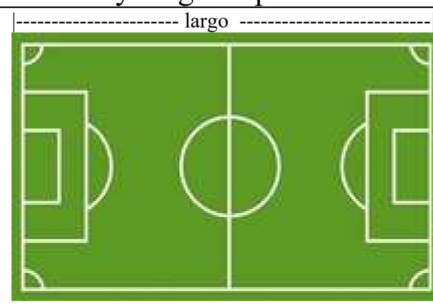
PROYECTO III
LA ECUACIÓN CUADRÁTICA - SOLUCIÓN GRÁFICA

SESION I

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/2017

ACTIVIDAD	No. 1

Analiza la siguiente situación y luego responde

La siguiente situación represente al esquema de una cancha de futbol. El largo de una cancha de futbol es dos veces su ancho. Su área equivale 4050 m^2.	 Figura1. Fuente: http://bit.ly/2jzABPD

❶De las siguientes opciones, cuales puede representar el ancho y el largo de la cancha:

A. Largo: x ancho: 2x B. Largo: 2x ancho: x

❷ Teniendo en cuenta la gráfica de la figura 1, sustituye por las expresiones correspondientes la fórmula que aparece a continuación, y que corresponde a la expresión para calcular el área del rectángulo.

Area = base * altura

______ = ____ * _____

Realiza las operaciones indicadas y escribe la expresión que resulta:

____

❸ ¿Qué tipo de expresión obtuviste? Escribe todo lo que puedas.

____
____
____
____
____.

❹ Teniendo en cuenta lo estudiado, describe una forma para calcular el valor de la longitud del largo y ancho de la cancha.

❺Mediante una expresión escribe el perímetro que representa la cancha:

____.

❻ Describe un procedimiento para hallar el perímetro de la cancha esquematizada en la figura 1

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO III – SESIÓN 1 -ACTIVIDAD 2: Los rebotes de un balón y la función cuadrática

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa 2. Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas. 3. observar y describir variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables. 4. Identifica el sentido de la unidad de medida en una representación gráfica 5. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 6. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de dos estudiantes. Se socializa los aprendizajes que se hacen evidentes en la situación problema. ***Inicio:*** El docente socializa la situación planteada sobre un balón y sus rebotes. Se les pregunta a los estudiantes sobre los diferentes elementos que aparecen en la situación y se escriben en el tablero. **Desarrollo:** El docente presenta las ocho tareas que aparecen en la guía. Las tres tareas iniciales son de simple observación. Para las tareas de la 4 a la 6 se recomienda preguntar a los estudiantes ¿qué se debe hacer para hallar la máxima altura? Se debe concluir que hallando el vértice. En las tareas 7 y 8 el docente propone encontrar los puntos de corte cuando y = 0, ayudaran a resolver las preguntas. El docente hace entrega de la Tablet a cada estudiante. Luego se presenta la actividad mostrando las 6 tareas. Es importante verificar que el estudiante siga las instrucciones. Los estudiantes tendrán la posibilidad de comparar con los resultados en la parte inicial de la guía. ***Culminación:*** *1. Se propone a algunos de los estudiantes que respondan las preguntas en el tablero, con la proyección desde el video beam.* *2. Se recolecta la producción de los estudiantes verificar el trabajo de los mismos.* *Ver Anexo: Proyecto III – sesión 1*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto III sesión 1*	5 min. 40 min. 30 min 20 min

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

PROYECTO III
LA ECUACIÓN CUADRÁTICA - SOLUCIÓN GRÁFICA

SESION I

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/2017

ACTIVIDAD No. 2

Analiza la siguiente situación

Un joven desea mirar las trayectorias que sigue un balón de básquetbol al lanzarlo hacia arriba con un pequeño ángulo. En uno de sus lanzamientos en tres de sus rebotes se construyeron parábolas como se muestran en la figura:

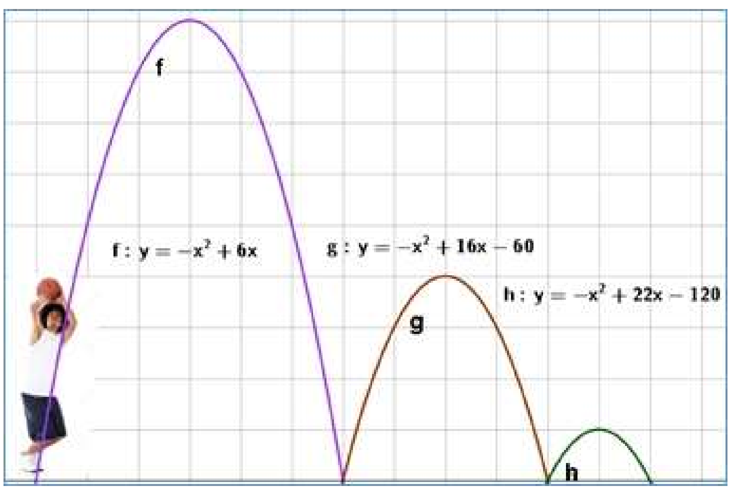


Figura 2. Rebotes en un mismo plano
Fuente: Acosta, D. (2017) figura construida con GeoGebra

❶ Si el punto donde se encuentra el jugador es el punto inicial de referencia, o el origen del movimiento, qué nombre podemos dar al punto más alto de cada parábola: _________________________________
____
____.

❷ Describe las características del movimiento que realiza el balón, lo que sucede desde el punto de vista del fenómeno físico, matemático y de otras ciencias. ______________________________
____
____
____

____
____.

❸ Si donde se encuentra el joven está al mismo nivel que donde repica el balón, cuál debería ser el valor de **(y)** en cada una de las parábolas?__________________________ .

❹ Halla la máxima altura de la trayectoria que siguió el balón en la primera parábola.

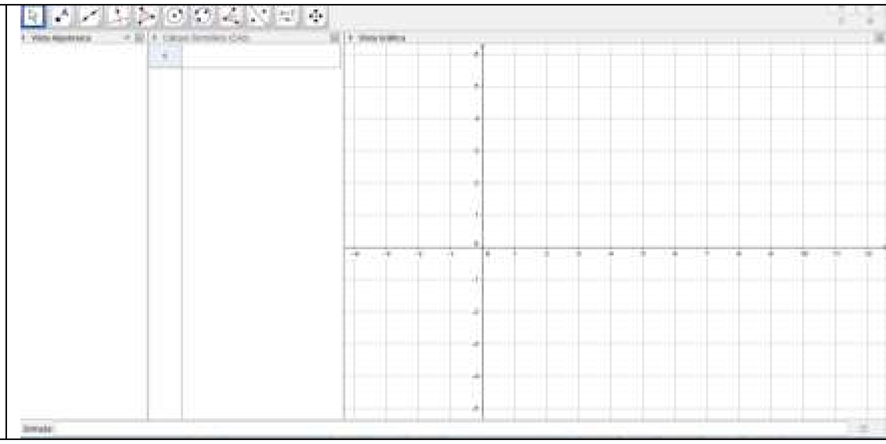
❺ Halla la máxima altura de la trayectoria que siguió el balón en la segunda parábola.

❻ Halla la máxima altura de la trayectoria que siguió el balón en la tercera parábola.

❼ Halla los puntos de encuentro del balón con el suelo en cada rebote.

❽Halla la distancia entre los rebotes del balón

ACTIVIDAD

Ejecuta GeoGebra, coloca cuadrícula y elige las vistas ***algebraica*** y *CAS* las dos simultáneamente. Tendrás una vista como la siguiente:	

Coloca en la caja de entrada las siguientes 3 expresiones:

$y= -x^2+6x$	$y= -x^2+16x-60$	$y= -x^2+22x-120$

❶Qué tipo de gráficas obtuviste: ____

❷ Ahora coloca debajo de cálculo simbólico CAS, en frente del número **1** la siguiente expresión: $-x^2+6x=0$ y haga <intro>. Seguidamente haga clic en el óvalo delante de 1 para llenarlo. Qué sucedió? ____

❸ Colorea las rectas que se formaron en el punto2. Seguidamente ubícate en frente del número 1 en la vista CAS y toca la herramienta *resuelve una ecuación o…,* la solución aparece en frente de 2, escribe la solución que obtuviste: (x= , x=)

❹ Ahora escribe en frente de 3 la expresión $-x^2+16x-60=0$ y haga el mismo tratamiento del punto 2 y 3. Escribe la solución que obtuviste: (x= , x=)

❺ Resuelve la ecuación $-x^2+22x-120 =0$. Escribe la solución que obtuviste: (x= , x=)

❻ Teniendo en cuenta el anterior ejemplo, Explica Qué es resolver una ecuación cuadrática de forma gráfica?

____

____

____

DESCRIPCION DEL PROYECTO III – SESION 2

<table>
<tr><td colspan="2">Nombre de la Institución</td><td colspan="4">INSTITUTO TÉCNICO MUNICIPAL LOS PATIOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área</td><td>Matemáticas</td><td colspan="2">Grado:</td><td>Noveno</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre del proyecto de aula:
Proyecto III</td><td colspan="4">La ecuación cuadrática</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>2</td><td>Título de la Sesión</td><td colspan="3">La ecuación cuadráticas</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td><td>3 HRS</td><td colspan="3">ACTIVIDADES</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">ESTANDARES Y COMPETENCIAS</td></tr>
<tr><td>Estándares</td><td colspan="5">* Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
*Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
*Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diferentes contextos.</td></tr>
<tr><td>Competencias del Área</td><td colspan="5">۞ Comunicación
➲ Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
۞ Razonamiento
➲ Utilizar propiedades y relaciones de los números reales para resolver problemas
۞ Resolución de problemas
➲Resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Indicadores de desempeño</td><td colspan="5">1.Identificar y relacionar los elementos de la ecuación asociada a funciones (lineales, cuadráticas)</td></tr>
<tr><td colspan="5">2. Utilizar las propiedades de las operaciones para simplificar cálculos</td></tr>
<tr><td colspan="5">3. Interpretar una ecuación teniendo en cuenta la situación que se está representando</td></tr>
<tr><td colspan="5">4. reconocer procesos necesarios en la solución de ecuaciones</td></tr>
<tr><td colspan="5">5. determinar condiciones para que dos expresiones sean equivalentes</td></tr>
<tr><td colspan="5">6. Estimar un valor numérico teniendo en cuenta las condiciones establecidas en una situación problema.</td></tr>
<tr><td colspan="5">7. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos.</td></tr>
<tr><td colspan="5">8. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.</td></tr>
<tr><td>Competencias laborales</td><td colspan="5">[(INTERPERSONAL – Comunicación):*Expreso mis ideas con claridad. (INTERPERSONAL – Trabajo en equipo): *Desarrollo tareas y acciones con otros (padres, pares, conocidos). (ORGANIZACIONAL - Responsabilidad Ambiental):*Conservo en buen estado los recursos a los que tengo acceso. (TECNOLOGICO):*Identifico los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de una tarea.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="5">Videobeam – Computador – Internet – Tablero – marcadores – Guía de trabajo-Tablet-GeoGebra</td></tr>
<tr><td>Producción</td><td colspan="5">Completar Guía de trabajo</td></tr>
</table>

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO III - SESIÓN 2 - ACTIVIDAD 1: definición de la ecuación cuadrática

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1.Identificar y relacionar los elementos de la ecuación asociada a funciones (lineales, cuadráticas) 2. Utilizar las propiedades de las operaciones para simplificar cálculos 3. Interpretar una ecuación teniendo en cuenta la situación que se está representando 4. reconocer procesos necesarios en la solución de ecuaciones 5. determinar condiciones para que dos expresiones sean equivalentes 6. Estimar un valor numérico teniendo en cuenta las condiciones establecidas en una situación problema. 7. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 8. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de la sesión 2 del proyecto III. Establece grupos de trabajo. Se socializa los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar. ***Inicio:*** El docente presenta la situación inicial que corresponde a un plano de un parque cuadrado y dentro de él un círculo, las esquinas representan la zona verde. Se pone en discusión las expresiones que sirven para calcular el área y el perímetro de las dos figuras que hacen parte del problema **Desarrollo:** Los estudiantes desarrollan cuatro tareas que se encuentran en la actividad. La primera relacionada con el área del cuadrado de la figura y la segunda con la zona verde del problema. Las tareas 3 y 4 corresponden a preguntas relacionadas con la variación entre el lado y las áreas. El docente socializa la definición de ecuación cuadrática y su clasificación entre completas e incompletas. Se propone un ejemplo de cada clasificación. **Culminación:** 1. El docente propone a sus estudiantes 2 ejercicios de cada clasificación. Los estudiantes deben resolver los ejercicios en casa. 2. El docente recolecta lo construido por los estudiantes para verificar el trabajo de los estudiantes. *Ver Anexo: Proyecto III – sesión 1*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto III sesión 2*	5 min. 15 min 25 min 10 min

PROYECTO III
LA ECUACIÓN CUADRÁTICA - CLASIFICACION

SESION II

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/________

ACTIVIDAD	No. 1

Analiza la siguiente situación

La siguiente situación representa el esquema de un parque cuadrado cuya área corresponde a 6400 m^2, y presenta un círculo inscrito para juegos y una zona verde.

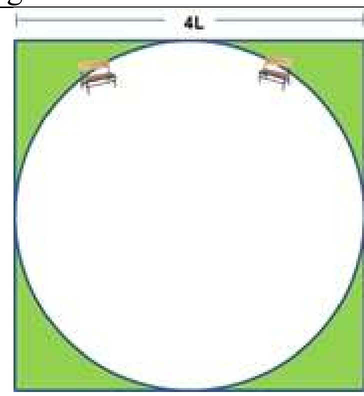


Figura 1. Círculo inscrito en un cuadrado

Discute con tu compañero de mesa sobre la situación planteada y responde las siguientes preguntas

❶ Cuál de las siguientes Expresiones representa el área del cuadrado

A. $A = 4L^2$ B. $A = 8L$

C. $A = 16L$ D. $A = 16\,L^2$.

Explica: ____.

❷ De las siguientes expresiones cual representa el área de la zona verde del parque:

A. $A = 4(L^2-\pi)$ B. $A = 8(L^2-\pi)$

C. $A = 4L^2(4-\pi)$ D. $A = 4\,(\pi - 4\,L^2)$.

Explica: ____

❸ Que sucede con el lado del cuadrado cuando el área aumenta: ___________________________

❹ Que sucede con el lado del cuadrado cuando el área es igual a cero: ____

La ecuación cuadrática

*Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.*

Se clasifican en **incompletas** y **completas** dependiendo de los valores de b y c.

Resolver una ecuación cuadrática significa encontrar el valor o los valores de las incógnitas que hacen verdadera la igualdad

Gráficamente, la solución de una ecuación cuadrática corresponde a los puntos de corte si los hay, de la parábola con el eje x.

Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

Toda ecuación cuadrática puede tener dos raíces reales diferentes, dos raíces complejas diferentes o una sola real

Ecuaciones de la forma $ax^2=0$

Este tipo de ecuaciones se resuelven así:

- ***$ax^2=0$** Ecuación dada*
- ***$x^2=0$** se divide entre a*
- ***$x=0$***

todas las ecuaciones de este tipo tiene como solución única $x=0$

Ecuaciones de la forma $ax^2+bx=0$

siga los siguientes pasos:

- ***$ax^2+bx=0$***
- ***$x(ax+b)=0$** se factoriza*
- ***$x=0$ ó $ax+b=0$** se iguala a cero cada factor*
- ***$x_1=0$ ó $x_2=\frac{-b}{a}$** se resuelve la ecuación*

este tipo de ecuaciones tienen dos soluciones diferentes

$x_1=0$ ó $x_2=\frac{-b}{a}$ se resuelve la ecuación.

Ecuaciones de la forma $ax^2+c=0$

pasos a seguir:

- $ax^2+c=0$ ecuación dada
- $ax^2=-c$ se resta c a ambos lados de la igualdad
- $x^2=-\frac{c}{a}$ se divide entre a ambos lados de la igualdad
- $x=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ se extrae raíz cuadrada

Por tanto, estas ecuaciones tienen dos soluciones

$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ y $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Solución de ecuaciones cuadráticas completas

*Una ecuación cuadrática completa, es decir de la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a\neq0$, se puede resolver utilizando algunos **métodos de factorización**, **completando cuadrados** o por la **fórmula general**.*

Solución por factorización:

Pasos:

- *se organiza la ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$*
- *se factoriza si es posible el trinomio $ax^2+bx+c=0$y se iguala a cero cada factor*
- *Se resuelve cada ecuación lineal para hallar las soluciones*

Solución completando cuadrados:

Pasos:

- se organiza la ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$
- se resta c en ambos lados de la igualdad $ax^2+bx+c=0$, con la cual se obtiene la expresión $ax^2+bx = -c$
- se divide por a en ambos miembros de la igualdad
- $x^2+\frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$
- Se suma a ambos lados de la ecuación el término $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, luego se factoriza el trinomio cuyo término es x^2, se resuelve la potencia y se suman las fracciones.
- Se extrae la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación y se despeja x.

Solución por fórmula general:

Completando cuadrados se puede deducir una fórmula general para hallar las raíces de la forma $ax^2+bx+c=0$

Se deduce la expresión $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Donde obtenemos dos soluciones :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Puedes mirar la demostración en la siguiente URL **https://youtu.be/2dZM7BAs6FE?t=99**

Por este método resolver una ecuación cuadrática se reduce a aplicar la fórmula general, y podemos obtener una solución real o dos soluciones reales o dos soluciones complejas

Fuente: Sanchez, C et, Saberes Ser, hacer, Ed. Santillana 2015 p.126

❶ Escribe y resuelve 2 ejemplos de cada clasificación de ecuaciones y presentarlas en una hoja adicional.

PROYECTO III
LA ECUACIÓN CUADRÁTICA - CLASIFICACION

SESION II

Nombre: ______________________________________Grado: 9°:___ Fecha____/____/________

ACTIVIDAD	No. 2

Analiza la siguiente situación

Una piscina rectangular tiene un perímetro de 60 m y un área de 200 m^2

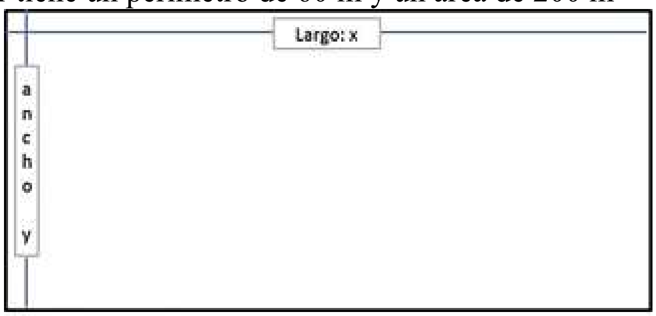


Figura 1

❶Cuantas piscinas con un perímetro de 60 m se podrían construir? Discute con tu compañero y explica las conclusiones.____
____
____.

❷Escribe la expresión que representa el perímetro de la piscina teniendo en cuenta la figura 1, luego despeja y:

Perímetro = la sumas de los lados

❸Si se desea que el área de la base de la piscina sea de 200 m^2, escribe la expresión que representa el área de la piscina. Luego despeja y.

Área = base x altura

❹Iguala las ecuaciones de los puntos 2 y 3, y = y. lleva la igualación a la forma $ax^2+bx+c=0$, y describa si es una ecuación completa o incompleta. Explica.

❺Identifica los valores a, b, c de la ecuación y resuelva por la fórmula general

❻ Con tu compañero de grupo presenta un modelo de piscina diferente al planteado. Condiciones:

a. El perímetro del modelo debe ser 60 m
b. Elije el área que desees para la piscina
c. Realiza los procedimientos del 1 al 5.
d. Resuelve tu ecuación

Preguntas:

1. ¿Qué inconvenientes encontraste a la hora de representar tu modelo?

2. ¿Puedes utilizar cualquier cantidad de área para que el modelo sea real? Explica.

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO III – SESIÓN 2 -ACTIVIDAD 2: situación problema de ecuación cuadrática

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
1. Interpretar una ecuación teniendo en cuenta la situación que se está representando 2. reconocer procesos necesarios en la solución de ecuaciones 3. Estimar un valor numérico teniendo en cuenta las condiciones establecidas en una situación problema. 4. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 5. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de dos estudiantes. Se socializa los aprendizajes que se hacen evidentes en la situación problema. ***Inicio:*** El docente propone un problema de una piscina rectangular con un área determinada. Se discuta sobre sobre las expresiones que hacen parte del problema. **Desarrollo:** El docente presenta las seis tareas que aparecen en la guía. Se les llevará de forma guiada hasta la tarea cinco. La tarea seis es construir un modelo de piscina con el mismo perímetro de 60 m y área diferente. ***Culminación:*** *1. Los estudiantes deben hacer una presentación de su modelo, explicar si es real el modelo o si encontraron dificultades al tratar de graficarlo.* *2. Se recolecta la producción de los estudiantes verificar el trabajo de los mismos.* *Ver Anexo: Proyecto III – sesión 2*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto III sesión 2*	5 min. 30 min 15 min

PLANEACION DE ACTIVIDADES

PROYECTO III – SESIÓN 3 - ACTIVIDAD 1: Situaciones problemas

Indicadores	Proceso	Recursos	Tiempo
Interpretar una ecuación teniendo en cuenta la situación que se está representando 2. reconocer procesos necesarios en la solución de ecuaciones 3. Estimar un valor numérico teniendo en cuenta las condiciones establecidas en una situación problema. 4. Presenta los trabajos de una forma ordenada, a tiempo y completos. 5. Trabaja de forma colaborativa con sus pares, resaltando los valores institucionales.	***Introducción:*** el docente hace entrega de la guía de trabajo y establece grupos de cuatro estudiantes. Se socializa los aprendizajes que se hacen evidentes en la situación problema. **Inicio:** El docente asigna los problemas por grupos. Siendo el problema 1 para un grupo, el problema 2 para otro grupo, el problema 3 y 4 para otro grupo y el problema 5 para otro grupo. Habrá varios grupos con el mismo problema. **Desarrollo:** El docente indica a los grupos de trabajo que deben armar estrategias de solución al problema. Se les indica que pueden realizar la presentación en carteleras, en diapositivas y que deben seguir una serie de pasos que se recomiendan: Paso1: comprender el problema (¿cuál es la pregunta del problema?, ¿cuáles son los datos del problema?¿Qué situaciones geométricas se relacionan con el problema?) Paso 2: Elabora un plan y llévalo a cabo (Establecer las diferentes relaciones entre los datos, ordenarlos, realizar las operaciones del caso y hallar la solución) Paso 3: Verifica y redacta la respuesta (comprueba la respuesta) Los estudiantes contarán con el docente para la elaboración del plan para resolver la situación asignada. El docente hará seguimiento de avance en cada grupo para identificar dificultades y fortalezas. **Culminación:** *1. Los estudiantes disponen 5 minutos por grupo para que realicen la exposición. Todos los estudiantes deben participar.* *2. Se recolecta la producción de los estudiantes verificar el trabajo de los mismos, todos deben tomar apuntes para completar su guía de trabajo.* *Ver Anexo: Proyecto III – sesión 3*	** Video Beam* ** Tablero* **marcadores* **conectividad a internet* **Guía Proyecto III sesión 3*	15 min. 70 min. 55 min

PROYECTO III

LA ECUACIÓN CUADRÁTICA: SITUACIONES APLICACION

SESION III

Nombre: ____Grado: 9°:___ Fecha____/____/______

ACTIVIDAD

RESUELVES CON TU COMPAÑERO LAS SIGUIENTES SITUACIONES

❶ La velocidad es el cambio de posición en un tiempo determinado. La aceleración es el cambio de velocidad en un tiempo determinado.

a: aceleración

v_o: *velocidad inicial*

t: tiempo

d: distancia

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_o t$$

La velocidad de los animales depende, principalmente, del medio en que se mueven. La siguiente tabla muestra la aceleración del movimiento de algunos animales:

Animal	Aceleración (m/s^2)
Antílope americano	2,69
Caballo	1,92
Cebra	1,80
Ciervo	2,17
Ciervo	2,17
Jirafa	1,61
Elefante	1,44
Galgo	1,86
Gorila	1,33
Guepardo	3,19
León	2,22

A. Ordena la tabla de mayor a menor aceleración ____
____
____
____.

Analiza el problema y responde las preguntas

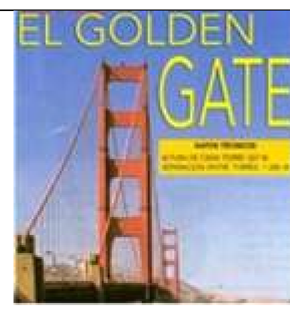
Un guepardo comienza a perseguir a un antílope que está a 80 m, en ese mismo instante el antílope emprende huida. Supóngase que V_0 es cero, y el movimiento es en línea recta.

B. ¿A qué distancia se encuentran los dos animales a los 5 segundos? Ten en cuenta que el antílope lleva 80 m adelante.

C. ¿En qué momento los dos animales están a 10 m?

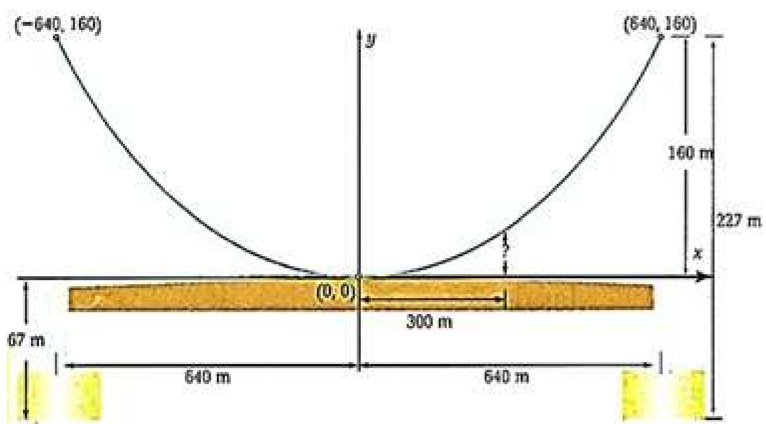
D. ¿En qué instante el Guepardo da alcance al antílope?

❷ El Golden Gate (Puerta dorada), es un puente de California a la entrada de la bahía de San Francisco. Une a San Francisco con Marín Country



El puente Golden Gate está suspendido de dos cables; además, el ancho de la calzada es de 27 m y esta se encuentra, aproximadamente, a 67 m del nivel del agua.

Los cables forman una parábola y tocan la calzada exactamente en el centro del puente.



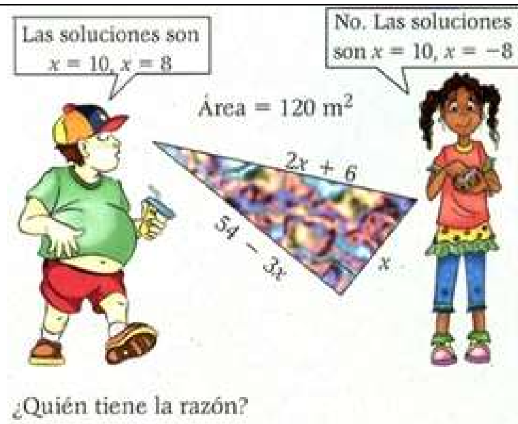
A. Estimar a qué altura están los cables cuando la distancia es de 300 m del centro del puente.

B. Hallar la ecuación de la parábola que forman los cables del puente Golden Gate.
Sugerencia: usar las ecuación $y=ax^2$ y reemplazar uno de los puntos que están señalados en la parte superior de las torres para hallar el valor de **a.**

C. Usar la ecuación obtenida en el punto anterior para calcular la altura de los cables cuando la distancia es 300 m y comparar el resultado con el punto número 1.

❸ La suma de un número y su cuadrado es 42 ¿Qué número cumple esta condición?

❹ Julian y María tienen una discusión sobre la figura, que corresponde a un triángulo rectángulo.

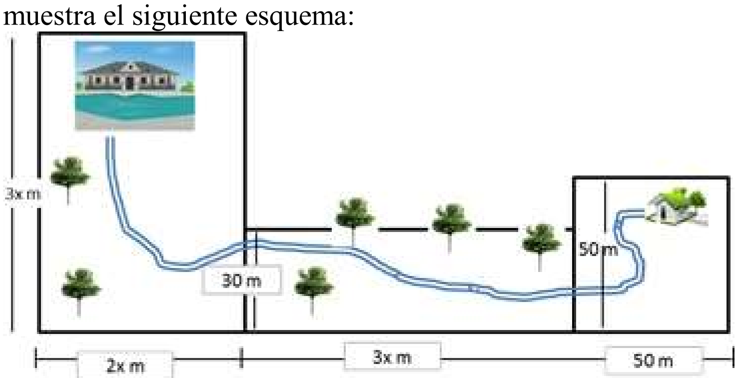


Busca la solución de dos maneras:

A. Usando las respuestas y sustituyendo sobre los lados y usando el teorema de Pitágoras puedes probar

B. Utilizando la fórmula del área del triángulo $A=\frac{b.h}{2}$, la altura es x y la base es 54-3x

❺Una finca de 6700 m^2 está repartida en tres partes como lo muestra el siguiente esquema:



A. Utiliza la gráfica para construir una ecuación cuadrática y exprésala de forma $ax^2+bx+c=0$

B. Resuelve la ecuación cuadrática, para calcular el valor de x, luego halla el área de cada sección de la finca

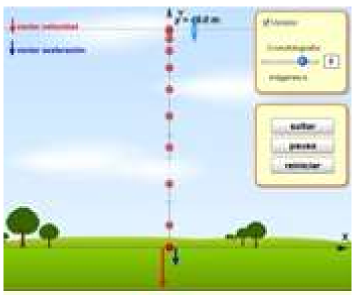
REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

Nombre: ___________________________________

Grado: 9°:___ Fecha: ___/____/________

Responde las preguntas 1 a la 4 con respecto a la siguiente información

Se deja caer un cuerpo desde una altura de 49 metros donde se toman los tiempos con su respectiva altura:



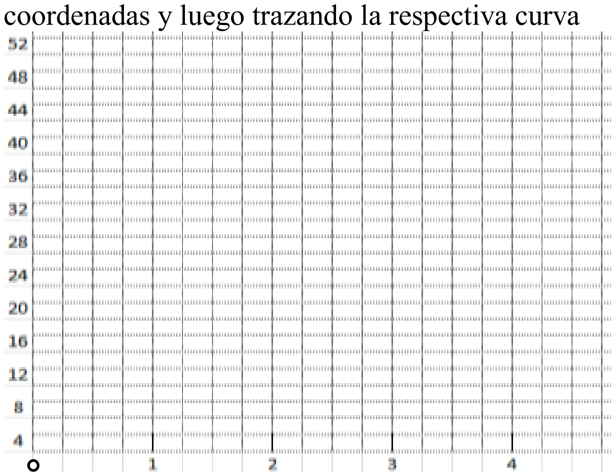
t	h
0,00	49,00
0,50	47,80
0,75	46,20
1,00	44,10
1,50	38,00
2,00	29,40
2,50	18,40
3,00	4,90
3,16	0,00

Gráfica 1.

1. La variable independiente corresponde a:

A. la altura B. el tiempo
C. la velocidad D. La aceleración

2. completa la siguiente gráfica colocando las coordenadas y luego trazando la respectiva curva



3. El tipo de gráfica que representa la función corresponde a:

A. Una parábola B. Una semiparábola
C. una línea recta D. Una elipse

4. Escribe dentro del cuadro si la gráfica corresponde a una función o no y porque.

Responde las preguntas 5-7 de acuerdo a la siguiente información

Los precios de los combustibles de gasolina y ACPM varían dependiendo del precio de barril de petróleo.

En un día en la ciudad de Cúcuta en una gasolinera los precios estuvieron como en lo muestra la imagen, donde se muestra que el ACPM es más costoso por galón. Los precios que se asignan en un día permanecen constantes, pero en días diferentes pueden variar.

5. La expresión que sirve para calcular el costo de la cantidad de Gasolina que un carro puede tomar del dispensador corresponde a:

A. c(g) = 6268 B. c(g) = 6268g
C. c(g) = 5438 D. c(g) = 5438g

6. Un Usuario que le dice al auxiliar del dispensador que le sirva $20.000 pesos de Gasolina, ¿Cuántos Galones debe asignarle?

7. ¿En un día es posible que los usuarios paguen costos diferentes por la misma cantidad de combustible?

8. En un concesionario de autos se utiliza la expresión algebraica V=P-1.400.000x para determinar, con base en el valor inicial P de un carro, su valor después de x años en el mercado ¿Cuál de las siguientes tablas muestra el valor de un carro con valor inicial P=20.300.000 durante los primeros 3 años en el mercado?

A.

Año	Valor (V)
1	18.900.000
2	18.500.000
3	18.100.000

B.

Año	Valor (V)
1	19.300.000
2	18.300.000
3	17.300.000

C.

Año	Valor (V)
1	20.160.000
2	20.020.000
3	19.880.000

D.

Año	Valor (V)
1	18.900.000
2	17.500.000
3	16.100.000

Responde las preguntas de la 9 a la 15 de acuerdo a la siguiente información

EL VUELO DE UN GLOBO

En la siguiente gráfica se muestra la altura de un globo con respecto al tiempo de elevación

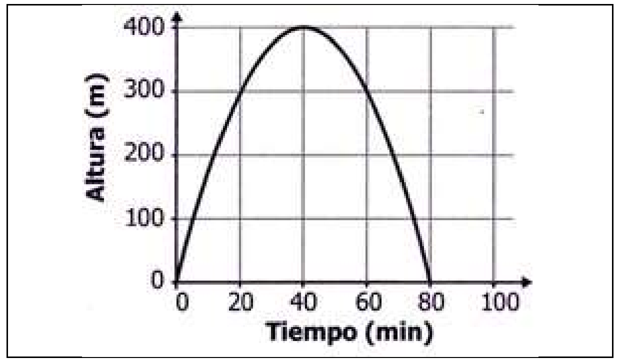


Figura 3. Fuente: Prueba Saber 9° -2015

9. Identifica y escribe la variable independiente

10. Identifica y escribe la variable dependiente

11. Completa la tabla

t	0			40	60	80
h		80	300			

12. ¿Qué tipo de gráfica representa la curva?

13. Escribe el Dominio y el Rango de la gráfica, teniendo en cuenta lo que se observa en la gráfica

Dominio:
Rango:

14. Cuál de las siguientes opciones muestra bien el vértice y la ecuación que representa el eje de simetría:

A. (40, 400); y=40 B. (400, 40); x=40

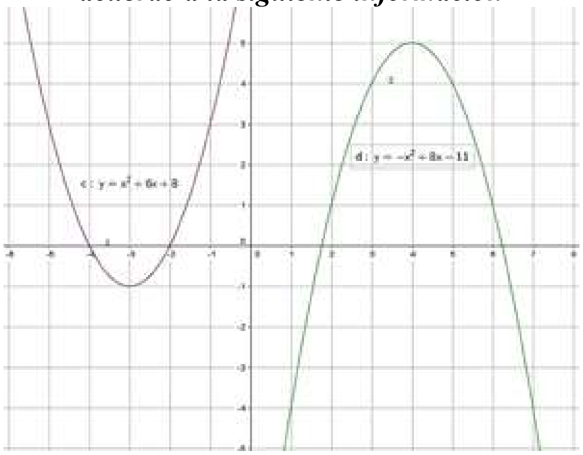
C. (40, 40); y=40 D. (40, 400); x=40

15. La expresión matemática que representa la relación es:

A. $h = -0.25t^2+20$ B. $h = -0.25t^2+20t$

D. $h = -t^2+20t$ C. $h = -25t^2+20t$

Responde las preguntas de la 16 a la 18 de acuerdo a la siguiente información



16. Elabora una tabla de valores para cada gráfica

Función c

X	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
Y							

Función d

X	0	1	2	3	4	5	6
Y							

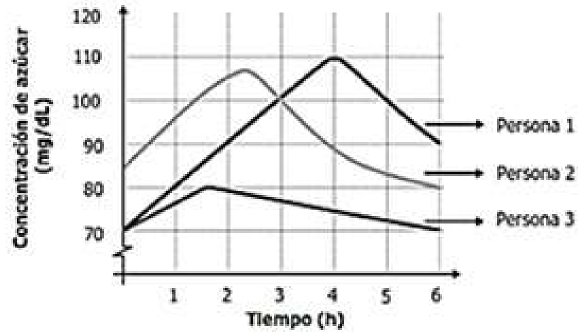
17. Completa la información solicitada de las funciones descritas

	dominio	Rango	Vértice	Concavidad	Eje de simetría
Función c					
Función d					

18. Indica los cortes con el eje x y el eje y

	Cortes con el eje x	Cortes con el eje y
Función c	(,); (,)	(,)
Función d	(,); (,)	(,)

19. La gráfica representa el nivel de concentración de azúcar en la sangre, medida en miligramos por litro (ml/dl), de tres personas, durante 6 horas



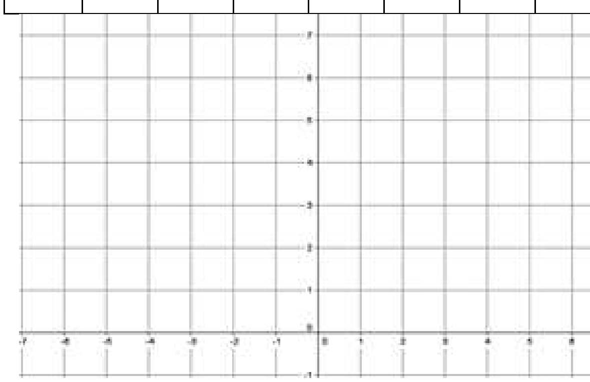
I. La concentración de azúcar en la sangre de la persona 3 fue constante durante las seis horas.
II. La concentración de azúcar en la sangre de las tres personas disminuyó durante las dos últimas horas
III. La concentración de azúcar en la sangre de las personas 1 y 2 aumentó durante las dos primeras horas

¿Cuál(es) de las anteriores afirmaciones es (son) verdadera(s)?

A. I solamente.
B. II solamente.
C. I y III solamente.
D. II y III solamente.

20. Evalúa la función cuadrática y= - $0{,}5x^2+6$ luego represéntala en el plano cartesiano y escribe las características pertinentes de la curva obtenida

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y							



4.8 Cierre de la Propuesta Pedagógica

La elección del modelo de Van Hiele se mostró pertinente para la elaboración de las diferentes actividades de cada proyecto, con la selección adecuada de las situaciones de análisis y las tareas asignadas se pudieron describir el progreso de razonamiento de los participantes. Las situaciones de visualización o reconocimiento que se presentaron en las guías de trabajo fueron acercando al estudiante al objeto de estudio, en están se pudo observar por ejemplo cómo describieron algunos estudiantes la característica donde una función era creciente, decreciente o constante.

GeoGebra aparece cómo un recurso importante a la hora de abordar las características de las relaciones funcionales y no funcionales en el plano cartesiano. Se presenta como un mediador para el aprendizaje de las matemáticas, porque despierta interés en el uso de la misma y que con buenas instrucciones genera en el estudiante procesos mentales que le ayudaran a comprender el objeto de estudio.

Las situaciones de variación de la cotidianidad planteadas en la propuesta despertaron interés en los estudiantes, tanto para analizarlas como para abordar preguntas sobre las mismas. Plantearlas al inicio de las clases con preguntas de reconocimiento, ubican al estudiante en características del objeto de estudia.

Las actividades generalmente se presentan para desarrollar en clase, con la presencia del docente, pero no se quiere decir que el estudiantes no la pueda desarrollar cómo tarea en casa.

La propuesta está dirigida a estudiantes del grado noveno de educación básica secundaria, con actividades de alto contenido gráfico y visual, donde se tiene la oportunidad de hacer avanzar al estudiante en el acercamiento al concepto de función y la función cuadrática.

5. Conclusiones

Evocando el problema de investigación Cómo fortalecer el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando el software GeoGebra, en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios se pudo constatar las siguientes conclusiones:

Con el diagnóstico se caracterizaron los pre-saberes y saberes acerca del conocimiento de la función y la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele el cual se pudo constatar que la mayoría de los participantes realizaron razonamientos de nivel 1 y que muy pocos lo hacían en el nivel 2. Tomando como base estos resultados se inició el diseño para generar en los estudiantes razonamientos matemáticos de nivel 2 y 3.

Se diseñaron estrategias pedagógicas encaminadas a estudiar el proceso de aprendizaje de la función cuadrática enmarcada en el Modelo de Van Hiele dando la oportunidad a que los participantes estudiaran el objeto de estudio de una forma deductiva, mostrándoles tareas sencillas de observación o reconocimiento a tareas de análisis y clasificación. Sobre el diseño se tuvo en cuenta los cambios de representación de registro, realizando secuenciaciones cómo el cambio de contexto, traducción de registros de representación, tratando el registro y utilizando el software de uso libre GeoGebra. Se diseñaron 3 proyectos pedagógicos de aula, acercamiento al concepto de función, la función cuadrática y la ecuación cuadrática, mostrando en cada uno de ellos diversas actividades encaminadas a que el participantes fortaleciera los aprendizajes de la competencia comunicación y el pensamiento numérico variacional.

En la implementación de las estrategias diseñadas se pudo observar que el Modelo de razonamiento de Van Hiele es apropiado para fortalecer los aprendizajes de los estudiantes en el objeto de estudio, la función cuadrática, porque se pudo organizar las actividades y tareas para abarcar aspectos cómo el concepto de función, los elementos de la función, la función cuadrática elementos y características, su clasificación, partiendo de situaciones gráficas y llevando al participante a generar habilidades como: al análisis de gráficos, modelar situaciones de variación, evaluar una expresión algebraica, traducir representaciones entre otras. En cuanto al uso de GeoGebra se mostró como en una herramienta adicional al proceso de enseñanza aprendizaje, como una alternativa para que el estudiante ejercitara mu mente desde un ambiente diferente.

Evocando el problema de investigación Cómo fortalecer el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando el software GeoGebra, en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios se pudo constatar las siguientes conclusiones:

Con el diagnóstico se caracterizaron los pre-saberes y saberes acerca del conocimiento de la función y la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele el cual se pudo constatar que la mayoría de los participantes realizaron razonamientos de nivel 1 y que muy pocos lo hacían en el nivel 2. Tomando como base estos resultados se inició el diseño para generar en los estudiantes razonamientos matemáticos de nivel 2 y 3.

Se diseñaron estrategias pedagógicas encaminadas a estudiar el proceso de aprendizaje de la función cuadrática enmarcada en el Modelo de Van Hiele dando la oportunidad a que los participantes estudiaran el objeto de estudio de una forma deductiva, mostrándoles tareas sencillas de observación o reconocimiento a tareas de análisis y clasificación. Sobre el diseño se tuvo en cuenta los cambios de representación de registro, realizando secuenciaciones cómo el cambio de contexto, traducción de registros de representación, tratando el registro y utilizando el software de uso libre GeoGebra. Se diseñaron 3 proyectos pedagógicos de aula, acercamiento al concepto de función, la función cuadrática y la ecuación cuadrática, mostrando en cada uno de ellos diversas actividades encaminadas a que el participantes fortaleciera los aprendizajes de la competencia comunicación y el pensamiento numérico variacional.

En la implementación de las estrategias diseñadas se pudo observar que el Modelo de razonamiento de Van Hiele es apropiado para fortalecer los aprendizajes de los estudiantes en el objeto de estudio, la función cuadrática, porque se pudo organizar las actividades y tareas para abarcar aspectos cómo el concepto de función, los elementos de la función, la función cuadrática elementos y características, su clasificación, partiendo de situaciones gráficas y llevando al participante a generar habilidades como: al análisis de gráficos, modelar situaciones de variación, evaluar una expresión algebraica, traducir representaciones entre otras. En cuanto al uso de GeoGebra se mostró como en una herramienta adicional al proceso de enseñanza aprendizaje, como una alternativa para que el estudiante ejercitara su mente desde un ambiente diferente.

Para evaluar la efectividad de las estrategias implementadas en el marco del modelo de Van Hiele, utilizando como recurso didáctico el software GeoGebra con estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios se pudo abordar desde tres puntos de vista. El primero tiene que ver con que los proyectos pedagógicos de aula diseñados fueron pertinentes y coherentes con el objeto de estudio porque permitió direccionar los contenidos con los aprendizajes y evidencias que recomienda el MEN. El segundo punto tiene que ver con el uso de las TIC, donde se puso de manifiesto las competencias tecnológicas a través del uso de recursos como las tabletas dotadas por Computadores para Educar y el uso de una aplicación como GeoGebra que representa una calculadora gráfica potente para el aprendizaje de las matemáticas. El tercer punto tiene que ver con la parte actitudinal del estudiante donde se reflejaron características importantes como interés, atención, actitud positiva, concentración, tanto en la solución de la guía de trabajo cómo en el uso de los diferentes recursos.

Con estas aseveraciones se establece que el proyecto función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando GeoGebra para el fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes del Instituto técnico Municipal Los Patios constituye una propuesta innovadora.

6. Recomendaciones

Para la implementación de esta propuesta se recomienda que el estudiante disponga de su material de trabajo o guía, para que pueda consignar las diferentes tareas propuestas.

Los tiempos deben ser bien distribuidos para el desarrollo de las tareas. Se debe dar un tiempo preciso para la solución de estas y conviene socializar cada pregunta, entre los mismos estudiantes para que el docente visualice el nivel de aprendizaje de estos y se verifique si se tiene que profundizar en la tarea.

Las actividades con GeoGebra son muy prácticas, no necesariamente se pueden realizar con tabletas o computadores, se puede proyectar y realizar los talleres con los estudiantes desde la proyección, pero el hecho de que cada estudiante o grupo tenga su Tablet o computador permite que cada estudiante manipule el objeto de estudio de una forma independiente, hace generar confianza en cuanto al uso de nuevas tecnologías.

Se recomienda el acompañamiento constante del docente guía, para que los estudiantes tengan éxito en la elaboración de sus tareas, no hay que darles todo, hay que mostrarles el camino que los conduzca a razonar sobre las situaciones que nos rodean.

Referencias Bibliográficas

Alcaraz, F. (2002). Didáctica y currículo: un enfoque constructivista. Castilla – La Mancha: Universidad de Castilla - La Mancha.

Andonegui Zabala, M. (2008). La función matemática. Caracas: UNESCO.

Aravena, M., Gutiérrez, Á. & Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. Enseñanza de las Ciencias, 34(1), 107-128.

Archer, M. (2010). Estudio de casos sobre el razonamiento matemático de alumnos con éxito académico en la ESO. Tesis de grado, Barcelona, Universitat de Barcelona.

Ardila, R. (1979). Psicología del aprendizaje. Bogotá: Siglo XXI Editores S.A.

Aristizabal, G., Esteban, G. & Ximénez, D. (2014). El desempeño educativo escolar en Colombia: factores que determinan la diferencia en rendimiento académico entre las escuelas públicas y privadas. Investigaciones de Economía de la Educación, 9(9), 895-921.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (Vol. 2). México: Trillas.

Baptista, P., Fernández, C. & Hernández, R. (2010). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill.

Becerra, J. (2004). Matemáticas V… el placer de dominarlas sin complicaciones. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Bedoya, D. (2014). La comprensión de las estructuras de tipo aditivo, enmarcada en las fases del modelo de Van Hiele. Tesis de grado, Medellín, Universidad de Antioquia.

Bello, J. (2013). Mediación del software Geogebra en el aprendizaje de programación lineal en alumnos del quinto grado de educación secundaria. Tesis de grado, Lima, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Bernal, C. (2010). Metodología de la investigación. Bogotá: Editorial Pearson.

Cabello, A. (2013). La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri. Tesis doctoral, Salamanca, Universidad de Salamanca.

Cacheiro, M. (2010). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje. Revista de Medios y Educación, 1(39), 69-81.

Calderón, G., Buitrago, B., Acevedo, M. & Tobón, M. (2013). Competencias TIC para el desarrollo profesional docente. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Carrillo, T. (2001). El proyecto pedagógico de aula. Educere, 5(15), 335-344.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. & Moreno, L. (2004). Tecnología informática: innovación en el currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. Theoria, 14(1), 61-71.

Díaz, F. & Hernández, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: Mc Graw Hill.

Dorado, I. & Díaz, J. (2014). La matemática como herramienta de modelización para dar respuesta a situaciones problema. Sonora: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Elliott, J. (1990). La investigación-acción en educación. Madrid: Ediciones Morata.

Fernández, A. & Roldán, E. (2012). El diario pedagógico como herramienta para la investigación. Itinerario Educativo, 26(60), 117-128

Fouz, F. & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. ¿Cambiarán las computadoras la forma de enseñar geometría? Sigma Revista de Matemáticas, 1(245), 92-102.

Fracica, G. (1988). Modelo de simulación en muestreo. Bogotá: Universidad de la Sabana.

García, M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. Tesis doctoral, Almería, Universidad de Almería

Gómez, P. & Carulla, C. (1999). La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del Distrito Capital. Bogotá: Universidad de los Andes.

Gualdrón, É. (2014). Descriptores específicos de los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos. *Revista Científica*, *3*(20), 26-36.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20(3), 27-46.

Gutiérrez, Á. & Jaime, A. (1998). Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes.

Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. Práctica en Educación Matemática: Capítulo 60. Sevilla: Ediciones Alfar.

Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. Texto de la ponencia invitada en el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona: Documento Manuscrito.

Gutiérrez, R. & Prieto, J. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión g (x)= ax2. Números, 1(88), 115-126.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. & Baptista Lucio, P. (2010). Metodología de la investigación. México: Editorial Mc Graw Hill.

Hernández, N., Wilches, J. & Robles, J. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. Panorama, 9(16), 44-54.

Hohenwarter, M. & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. Recuperado de: ombination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference

Instituto Técnico Municipal Los Patios. (2013). Proyecto Educativo Institucional - PEI. Los Patios: Instituto Técnico Municipal Los Patios.

Jaimes, N. (2012). La noción de función, un acercamiento a su comprensión. Tesis doctoral, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.

Llantén, J. & Bermúdez, M. (2014). Una aproximación al aprendizaje de la semejanza de triángulos en geogebra. Tesis doctoral, Cali, Universidad del Valle.

Llorens Fuster, J. L., & Prat Villar, M. (2015). Extensión del Modelo de Van Hiele al concepto de área. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 2(45), 113-128.

López, N., & Cerezo, S. (2013). Influencia del nivel de competencia digital en la adquisición de competencias geométricas en un entorno GeoGebra. Sistemas e Tecnologías de Información, 1(1), 1009-1013.

Maldonado, L. (2013). Enseñanza de las simetrías con uso de geogebra según el modelo de Van Hiele. Tesis de grado, Santiago, Universidad de Chile.

Marcelo, C. (2013). Las tecnologías para la innovación y la práctica docente. Revista Brasileira de Educação, 18(52), 25-47.

Mesa, Y. & Villa, J. (2008). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C.

Meza, J. (2012). Actitudes hacia la matemática y rendimiento en el área, en sexto grado de primaria-Red Educativa No. 1 Ventanilla. Tesis de maestría, Lima, Universidad San Ignacio de Loyola.

Ministerio de Educación Nacional. (1994). Ley 115. Por la cual se expide la ley general de educación. Bogotá: El Ministerio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas (LC). Bogotá: El Ministerio.

Ministerio de Educación Nacional. (2013). Competencias TIC para el desarrollo profesional docente. Bogotá: El Ministerio.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Bogotá: El Ministerio.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Bogotá: El Ministerio.

Montero, L. & Gewerc, A. (2011). De la innovación deseada a la innovación posible. Escuelas alteradas por las TIC. Revista de Curriculum y Formacion del Profesorado, 14(1), 303-318.

Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo, 19(44), 1-16.

Moreno, C. & Willy, J. La circunferencia. Una propuesta didáctica usando modelo de van hiele y geometría dinámica. Tesis doctoral, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.

Moreno, L. & Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. Proyecto incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Novak, J. & Gowin, D. (1984). Learning how to learn. Cambridge: Cambridge University Press.

Papalia, D., Olds, S., Feldman, R. & Salinas, M. (2005). Desarrollo humano. México: Mc Graw Hill.

Parra, R. (2015). Prácticas pedagógicas para el desarrollo del componente geométrico y espacial a través del uso del software GeoGebra en estudiantes de séptimo grado. Tesis de grado, San José de Cúcuta, Universidad Francisco de Paula Santander.

Pastor, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano: la evaluación del nivel de razonamiento. Tesis de grado, Valencia, Universitat de València.

Pastor, A., & Rodríguez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. Madrid: Ediciones Alfar.

Pimienta, J. & Prieto, J. (2007). Metodología constructivista guía para la planeación docente. México: Pearson Educación.

Pinel, J. (2005). Biopsicologia. México: Editorial Rustica.

PISA. (2012). Resultados de PISA 2012 en Foco Lo que los alumnos saben a los 15 años de edad y lo que pueden hacer con lo que saben. Ginebra: PISA.

Porlan, R. & Matín, J. (1998). El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula. Sevilla: Diada Editorial.

Poza, G. (2013). Sistemas de geometría dinámica como herramientas para el aprendizaje significativo. Tesis de grado, Cantabria, Universidad de Cantabria.

Pozo, J. (1989). Teorías cognitivas del aprendizaje. Madrid: Ediciones Morata.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66.

Rico, S. & Leal, J. (2013). Reflexiones en una comunidad de práctica de profesores de matemáticas sobre el uso de las tecnologías digitales. Actas del VII CIBEM. ISSN, 2301(0797), 7098.

Rios, J. & Oyola, A. (2016). Comprensión de las razones trigonométricas mediante el software Geogebra en el contexto del modelo de Van Hiele. Tesis de grado, Medellín, Universidad de Antioquia.

Rodríguez, E. (2016). El concepto de derivada y el modelo de Van Hiele en estudiantes de licenciatura en matemáticas e informática de la Universidad. Ecomatemático, 6(1), 43-49.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. Revista Iberoamericana de Educación, 1(33), 135-168.

Ruiz, M., Ávila, P. & Villa, J. (2013). Uso de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. Medellín: Universidad de Antioquia.

Salvador, R. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Madrid: Ministerio de Educación.

Samper, D. (2006). Tratado de pedagogía conceptual 4. Los modelos pedagógicos. Bogotá: Fundación Alberto Merani.

Sánchez, J. (2015). Proyectos saberes matemáticas 9. Bogotá: Editorial Santillana.

Santa Ramírez, Z. (2011). La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele. Armenia: Gaia.

Shunck, D. H. (2012). Teorías del aprendizaje. *Una perspectiva educativa. 6ª ed. México, DF: Pearson*.

Shuell, T. J. (1988). The role of the student in learning from instruction. Contemporary Educational Psychology, 13, 276-295.

Sarduy, A. (2008). Bases conceptuales de la mediación y su importancia actual en la práctica pedagógica. Summa Psicológica UST, 5(2), 87-96.

Stake, R. (1999). Investigación con estudio de caso. Madrid: Morata.

Tapia, J. (1991). Motivación y aprendizaje en el aula: cómo enseñar a pensar. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Travers, R. (1982). Essentials off learning: the new cognitive learning for students of education. Londres: MacMillan Publishing Company.

UNESCO. (2005). Hacia las sociedades del conocimiento. Paris: Publicaciones UNESCO.

UNESCO. (2016). Tercer estudio regional y comparativo y explicativo. Ginebra: UNESCO.

Valencia, M. (2000). La triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. Investigación y Educación en Enfermería, 18(1), 13-22.

Van Hiele, P. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). Ámsterdam: Universidad de Utrecht.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. Tesis doctoral, Ámsterdam, Universidad de Utrecht.

Vargas, G. & Araya, (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 27(1), 74-94.

Vargas, M. (). El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno. Tesis doctoral, Medellín, Universidad Nacional de Colombia.

Villar, M. (2016). Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área. Tesis doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia.

Vivas, D. (2010). La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina. Tiempo de Gestión, 6(10), 163-180.

Wittrock, M. (1992). Generative learning processes of the brain. Educational Psychologist, 27(4), 531-541.

Anexos

Anexo 1. Consentimiento informado institución educativa

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

unab
Universidad Autónoma de Bucaramanga

Municipio de los Patios, 22 de Septiembre de 2016

Señor
MARIO PEZZOTI LEMUS
Rector Instituto Técnico Municipal Los Patios

Asunto: Solicitud de Consentimiento para desarrollar proyecto **APLICACIÓN DEL MODELO VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA USANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA.**

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Cordial saludo

El propósito del presente documento es brindar información acerca del proyecto de investigación: APLICACIÓN DEL MODELO VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA USANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA con estudiantes de grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios; y a su vez solicitar aprobación para la ejecución del mismo.

Los participantes del proyecto corresponden al grado *Noveno A*, de la sede: *Principal - Jornada de la tarde*. El estudio estará bajo la orientación de la docente ***Dimar Emilio Acosta Galván***, estudiante de Maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga convenio con el MEN becas para la excelencia docente.

Durante el presente año se implementarán proyectos pedagógicos de aula, espacios destinados a:

- Caracterizar los pre-saberes y saberes acerca del conocimiento de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele.
- Diseñar estrategias pedagógicas en el marco del modelo de Van Hiele, utilizando como recurso didáctico el software "Geogebra"
- Implementar las estrategias pedagógicas diseñadas para el aprendizaje de la función cuadrática.
- Evaluar la efectividad de las estrategias implementadas

Consentimiento informado – Editado por Lic. Dimar Emilio Acosta Galván Página 1

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No.03812 del 1 de noviembre 2013

unab
Universidad Autónoma de Bucaramanga

Con la firma de este consentimiento se autoriza los procedimientos citados a continuación:

1. La toma de fotografías y/o filmaciones de algunas clases, con los participantes de la investigación durante la realización de actividades escolares grupales o individuales y la publicación de estas en informes o presentaciones del proyecto.

2. Aplicación de pruebas diagnósticas para establecer el nivel en el que se encuentran los jóvenes donde se observaran algunos pre-saberes propios de la edad de los jóvenes del grado noveno.

3. Aplicación de cuestionario de actitudes hacia las matemáticas

4. Aplicación cuestionario sociodemográfico para caracterizar el núcleo familiar para determinar algunas características generales de la población estudiantil y de sus padres.

5. Completar talleres, evaluaciones o encuestas para realizar algunas indagaciones y que el producto de estos documentos sean incluidos como anexo de evidencias de la ejecución del proyecto: *APLICACIÓN DEL MODELO VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA USANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA con estudiantes de grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios.*

6. El uso de espacios para el aprendizaje durante la ejecución del proyecto.

7. El uso de recursos como Video beam, Conectividad a internet, tabletas, computador del docente, Sala de proyecciones como elementos tecnológicos necesarios para la ejecución del proyecto y el buen uso de los mismos.

8. El uso de documentos perteneciente a la Institución Instituto Técnico Municipal Los Patios como: El PEI, informes del ISC, Resultados de las pruebas saber Once y noveno.

9. Publicación en alguna página Web información resultante de la investigación y/o información relacionada con la institución contenida en el PEI.

Si está de acuerdo con lo informado, por favor firmar y aportar los datos solicitados.

Firma del Rector Mario Pezzoti Lemus
Email: ie.municipaldelospatios@gmail.com
No. De celular: ______________________

Anexo 2. Consentimiento Informado padre de familia y estudiante

REPUBLICA DE COLOMBIA
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER
SECRETARIA DE EDUCACION
INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS
Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002
Resolución de certificación de estudios No 05812 del 1 de noviembre 2013

unab
Universidad Autónoma de Bucaramanga

Municipio de los Patios, 31 de mayo de 2016

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Cordial saludo,

El propósito del presente documento es brindar información acerca del proyecto: APLICACIÓN DEL MODELO VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA USANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA con estudiantes de grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios; y a su vez solicitar aprobación para que su hijo/a o acudido ________________________________ del grado *Noveno* ____, de la sede: *Principal - Jornada de la tarde*, participe en la implementación del mismo. El estudio estará bajo la orientación de la docente ***Dimar Emilio Acosta Galván***, estudiante de Maestría en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga.

Durante el presente año se implementarán proyectos pedagógicos de aula, espacios destinados a:

- Caracterizar los pre-saberes y saberes acerca del conocimiento de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele.
- Diseñar estrategias pedagógicas en el marco del modelo de Van Hiele, utilizando como recurso didáctico el software "Geogebra"
- Implementar las estrategias pedagógicas diseñadas para el aprendizaje de la función cuadrática.
- Evaluar la efectividad de las estrategias implementadas

Con la firma de este consentimiento Usted autoriza los procedimientos citados a continuación:

1. Aplicación de pruebas diagnósticas para establecer el nivel en el que se encuentran los jóvenes donde se observaran algunos pre-saberes propios de la edad de los jóvenes del grado noveno.
2. Aplicación cuestionario de actitudes hacia las matemáticas
3. Aplicación cuestionario sociodemográfico para caracterizar el núcleo familiar, y determinar personas que acompañan al estudiante en el proceso de aprendizaje.

Consentimiento informado - Editado por Lic. Dimar Emilio Acosta Galván   Página 1

	REPUBLICA DE COLOMBIA DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER SECRETARIA DE EDUCACION INSTITUTO TECNICO MUNICIPAL LOS PATIOS Decreto de creación no. 000842 del 30 de septiembre del 2002 Resolución de certificación de estudios No.09812 del 1 de noviembre 2013	unab Universidad Autónoma de Bucaramanga

4. La toma de fotografías a su hijo(a) durante la realización de actividades escolares grupales o individuales

5. Como padre o madre y/o acudiente da aprobación de que su hijo o hija o representado participe en: filmaciones de algunas clases, toma de fotografías para la evidencia del proyecto, publicación de estas en informes o presentaciones del proyecto.

6. Completar talleres, evaluaciones o encuestas para realizar algunas indagaciones y que el producto de estos documentos sean incluidos como anexo de evidencias de la ejecución del proyecto: ***APLICACIÓN DEL MODELO VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA USANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA*** *con estudiantes de grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios*

La aplicación de los cuestionarios contarán con total confidencialidad, solo serán de conocimiento y manejo de la persona responsable del proyecto y utilizados como insumo para contribuir a un mejor desarrollo emocional, social y cognitivo de su hijo(a) o representado.

El acudiente se compromete a acompañar a su hijo(a) o acudido en el proceso, apoyándolo en los compromisos escolares que adquiera para el mejoramiento del pensamiento matemático.

Se deja claro que participar en el proyecto no genera riesgos, costos, ni efectos indeseados para usted ni para los jóvenes participantes, al contrario obtendrá como beneficio acompañamiento para el mejoramiento personal del estudiante y mostrarle estrategias de aprendizaje que le ayudaran a comprender mejor el mundo que le rodea.

Si está de acuerdo con lo informado, por favor firmar y aportar los datos solicitados.

Estudiante	***Padre o madre de familia y/o acudiente***
Nombre completo	Nombre completo
Teléfono de contacto o wassap	Teléfono de contacto o wassap
Correo electrónico	Correo electrónico
Grado: Noveno ___ Sede: __________ Jornada: __________	
________________ Firma del estudiante Documento No. ________ de_______	________________ Firma acudiente Documento No. ________ de_______

D. viHaov

Anexo 3. Esquema del diario pedagógico

Tabla 41. Resumen del diario pedagógico

DIARIO PEDAGÓGICO			
Actividad No.:		Fecha:	
Tipo de Actividad:			
Objetivo:			
Listado de los participantes en el trabajo de investigación:			
Contexto:			
Recursos:			
Tiempo estimado:		Tiempo adicional:	
No. de estudiantes presentes:		No. de estudiantes ausentes:	
Intervenciones			
Intervención No.:	Fecha:	Hora:	Tiempo:

DESCRIPCIONES	REFLEXION (ANALISIS)	MEMOS
Narración de las diferentes actividades en orden de tiempos. Se describen las tareas, además de la información que se recoge de las tareas, lo que se observa en los estudiantes, las actitudes y aptitudes, las dificultades y la forma como se resuelven.	Espacio para dar relevancia a los aprendizajes significativos o poco significativos, o sobre las competencias, actitudes, emociones observables en los estudiantes. Es en este espacio donde se hace reflexión sobre su quehacer pedagógico y los resultados de la aplicación de las estrategias implementadas en los participantes.	Datos relevantes, cómo códigos de análisis según las categorías y sub-categorías

Anexo 4. Evaluación diagnóstica

Evaluación para identificar pre saberes del concepto de función y la función cuadrática

Nombre: ________________________________ Grado: Noveno ____ Fecha: ____ /____/2017

Responde las preguntas con el fin de verificar tus conocimientos previos acerca del concepto de función y la función cuadrática.

Observa la figura. Luego responde la pregunta.

Figura 1. Fuente: http://bit.ly/2bNDWUf

1. Escribe por lo menos 3 relaciones que hagan parte de la figura 1.

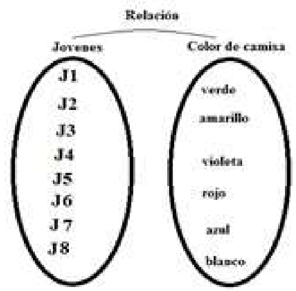
____
____
____
____
____
____

Analiza esta definición de función, luego responde las preguntas

Definición	*Elementos*
*Una **función** Es una regla o correspondencia entre dos conjuntos A y B, que asigna a cada elemento de A uno y sólo un elemento de B.*	***Dominio:*** *conjunto de partida (Dom f)* ***Codominio:*** *conjunto de llegada. (conjunto B) (Cod f)* ***Rango:*** *Conjunto formado del codominio, que son la imagen de los elementos del dominio (Ran f).* ***Grafo:*** *conjunto formado por todas las parejas ordenadas de la forma (x, y) tales que x E Dom f y y al Ran f*

Fuente: Proyecto saberes ser, hacer –9° - Editorial Santillana

2. Teniendo en cuenta la figura 1. Completa el diagrama relacionando cada joven con el color de la camiseta (utiliza una flecha para cada relación):



3. Observa el diagrama de Ven que completaste. Describe si esta relación <u>es función</u> o <u>no es función</u>, justifica tu respuesta.

____
____
____

4. Escribe los elementos del Dominio___________________________________

5. Escribe los elementos del Rango ___________________________________

Lee atentamente el texto, te servirá para avanzar con éxito en la guía de trabajo.

6. El siguiente texto explica un método gráfico para identificar funciones:

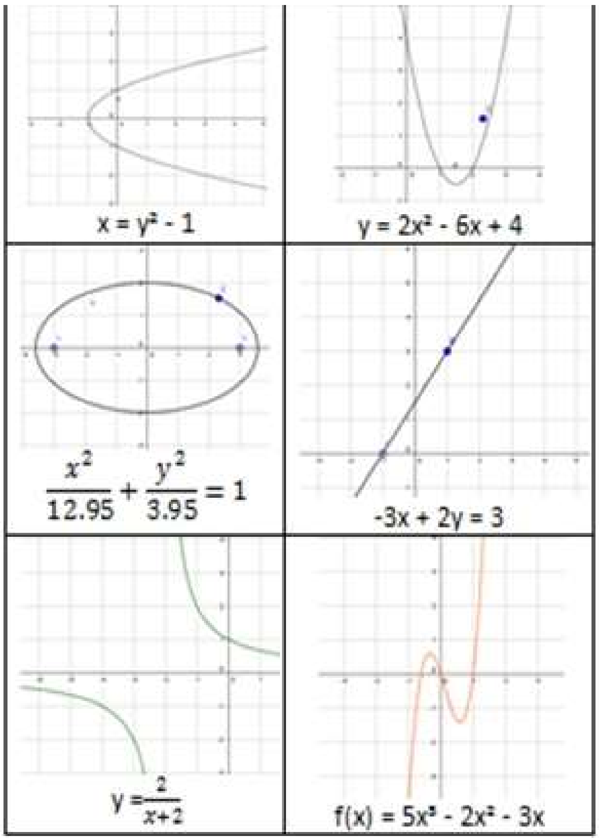
Para comprobar que una gráfica describe una función, se trazan líneas rectas verticales y se verifica que cualquier recta vertical corte la gráfica en máximo un solo punto.

En el caso de que una recta corte a la gráfica en más de un punto, se afirma que la gráfica no corresponde a una función.

Fuente: Proyecto saberes ser, hacer –9° - Editorial Santillana p-75

Ahora encontrarás unos gráficos que pueden representar <u>funciones</u> o <u>no funciones</u>. Teniendo en cuenta el método explicado en el texto anterior, marca con x las que representen funciones:

Marca con X las gráficas que consideres que son funciones



Observa la figura 2. Luego responde las preguntas

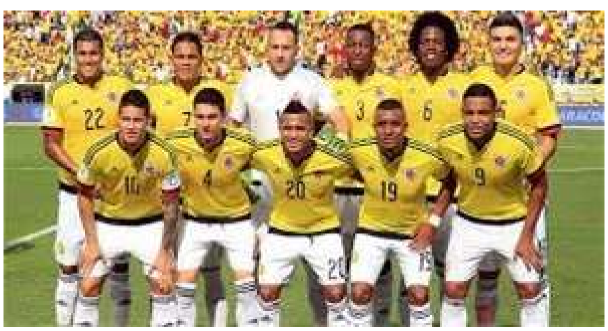
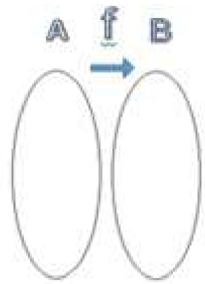


Figura 2. Selección Colombia - Fuente: http://bit.ly/2cZF63s

7. Escribe una relación o las relaciones que hagan parte de la figura 2.

8. Completa el diagrama sagital, teniendo en cuenta que el primer conjunto representa el número del jugador y el segundo conjunto corresponde al color de su camiseta. Escríbelos.

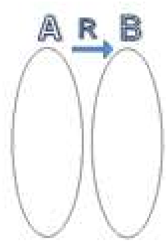
9. Observa la figura que completaste en el punto anterior. Describe si la relación que se formó <u>es función</u> o <u>no es función.</u> Explica.



10. Escribe los elementos del Dominio del diagrama que completaste en el punto 8.

11. Escribe los elementos del Rango del diagrama que completaste en el punto 8.

12. Teniendo en cuenta la **figura 2,** relaciona el país a los que pertenece los jugadores y el número que tienen en su camiseta. Completa el diagrama.



13. ¿Qué observas en esta relación?

¿Esta gráfica representa una función?
Sí ___ No___ ¿Por qué?

____
____
____
____

14. Describe algunos casos donde el término parábola o cuadrática se mencionan:

____
____
____
____

Lee el siguiente enunciado y responde las preguntas.

Hay situaciones de la vida cotidiana que podemos llevar a esquemas, y que podemos representar también en forma de expresiones algebraicas. A continuación tenemos un esquema de una trayectoria seguida por un balón cuando un futbolista la patea. Observa y responde algunas preguntas de la situación de la figura 3.

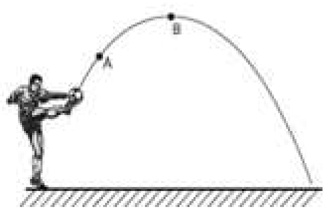


Figura 3
http://bit.ly/2bi8lO0

15. ¿Qué trayectoria observas o reconoces en el movimiento que seguirá el balón, desde el punta pie hasta el suelo?

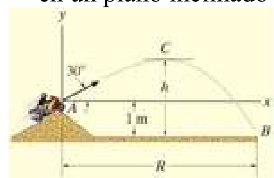
____
____
____

16. describe al menos tres características de la trayectoria que sigue el balón:

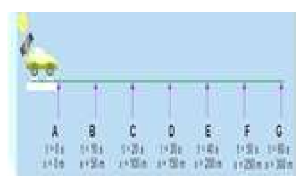
____
____

____

17. señala con X las imágenes que describen movimientos parabólicos o semiparabólicos:

A. _____	B. _____
Salto de una motocicleta en un plano inclinado  Fuente: http://bit.ly/2b1uIV4	Clavadista en un trampolín  Fuente: http://bit.ly/2bxyw3b

C. _____	D. _____
Saque de un arquero de un equipo de futbol  Fuente: http://bit.ly/2aTmAsw	Beisbolista bateando una pelota  Fuente: http://bit.ly/2bpOwRh

E. _____	F. _____
Auto con velocidad constante moviéndose en línea recta  Fuente: http://bit.ly/2bfvpM7	Tiro con arco  Fuente: http://bit.ly/2bF6fbU

Anexo 5. Competencias que evalúan las pruebas Saber para el grado noveno

La prueba de **matemáticas** evalúa las competencias de **9o. grado** en...

icfes saber 3°, 5° y 9°

1 Comunicación, representación y modelación

Componente
Numérico-variacional — El estudiante...

- Identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan.
- Identifica expresiones numéricas y algebraicas equivalentes.
- Establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos.
- Describe y representa situaciones de variación relacionando diferentes representaciones.

Componente
Geométrico-métrico — El estudiante...

- Representa y reconoce objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
- Usa sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras.
- Reconoce y aplica transformaciones de figuras planas.
- Identifica relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
- Diferencia magnitudes de un objeto y relaciona las dimensiones de éste con la determinación de las magnitudes.

Componente
Aleatorio — El estudiante...

- Interpreta y utiliza conceptos de media, mediana y moda y explicita sus diferencias en distribuciones diferentes.
- Compara, usa e interpreta datos que provienen de situaciones reales y traduce entre diferentes representaciones de un conjunto de datos.
- Reconoce la posibilidad o la imposibilidad de ocurrencia de un evento a partir de una información dada o de un fenómeno.
- Reconoce relaciones entre un conjunto de datos y sus representaciones.

2 Razonamiento y argumentación

Componente
Numérico-variacional — El estudiante...

- Reconoce patrones en secuencias numéricas.
- Interpreta y usa expresiones algebraicas equivalentes.
- Interpreta tendencias que se presentan en un conjunto de variables relacionadas.
- Usa representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- Reconoce el uso de las propiedades y las relaciones de los números reales.
- Desarrolla procesos inductivos y deductivos con el lenguaje algebraico para verificar conjeturas acerca de los números reales.

Componente
Geométrico-métrico — El estudiante...

- Argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
- Hace conjeturas y verifica propiedades de congruencias y semejanza entre figuras bidimensionales.
- Generaliza procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.
- Analiza la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
- Predice y compara los resultados de aplicar transformaciones rígidas (rotación, traslación y reflexión) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y artísticas.

Componente
Aleatorio — El estudiante...

- Hace conjeturas acerca de los resultados de un experimento aleatorio usando proporcionalidad.
- Predice y justifica razonamientos y conclusiones usando información estadística.
- Calcula la probabilidad de eventos simples usando métodos diversos.
- Usa modelos para discutir la posibilidad de ocurrencia de un evento.
- Fundamenta conclusiones utilizando conceptos de medidas de tendencia central.

3 Planteamiento y resolución de problemas

Componente
Numérico-variacional — El estudiante...

- Resuelve problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.
- Resuelve problemas que involucran potenciación, radicación y logaritmación.
- Resuelve problemas en situaciones de variación y modela situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

Componente
Geométrico-métrico — El estudiante...

- Resuelve problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida.
- Resuelve y formula problemas usando modelos geométricos.
- Establece y utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes.
- Resuelve y formula problemas que requieran técnicas de estimación.

Componente
Aleatorio — El estudiante...

- Usa e interpreta medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.
- Resuelve y formula problemas a partir de un conjunto de datos presentado en tablas, diagramas de barras y diagrama circular.
- Hace inferencias a partir de un conjunto de datos.
- Plantea y resuelve situaciones relativas a otras ciencias utilizando conceptos de probabilidad.

Anexo 6. Estándares Básicos de Competencias (EBC) para los grados octavo y noveno

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

86

Octavo a noveno

Al terminar noveno grado...

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS
• Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. • Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes. • Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.	• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). • Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. • Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Matemáticas

8^0 - 9^0

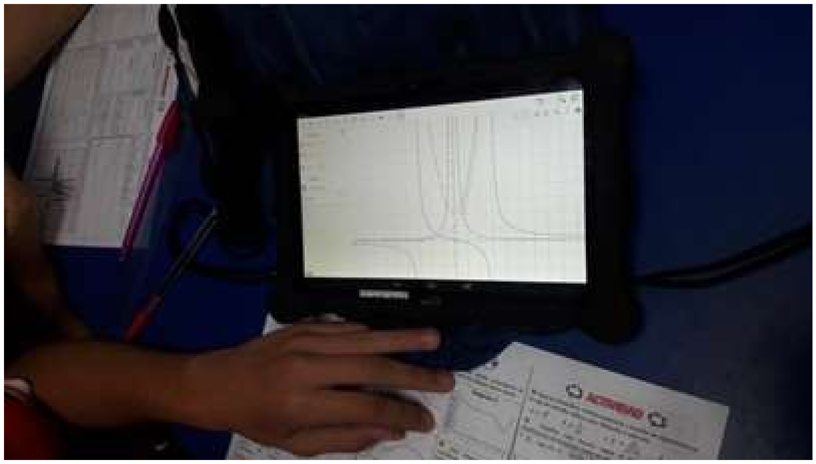
PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. • Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. • Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.	• Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. • Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas. • Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. • Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). • Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. • Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).	• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. • Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. • Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. • Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales. • Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. • Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Anexo 7. Participantes en el proyecto: grado noveno A del INSTEC. Fuente: Dimar Acosta (2017) registro fotográfico de la aplicación del proyecto

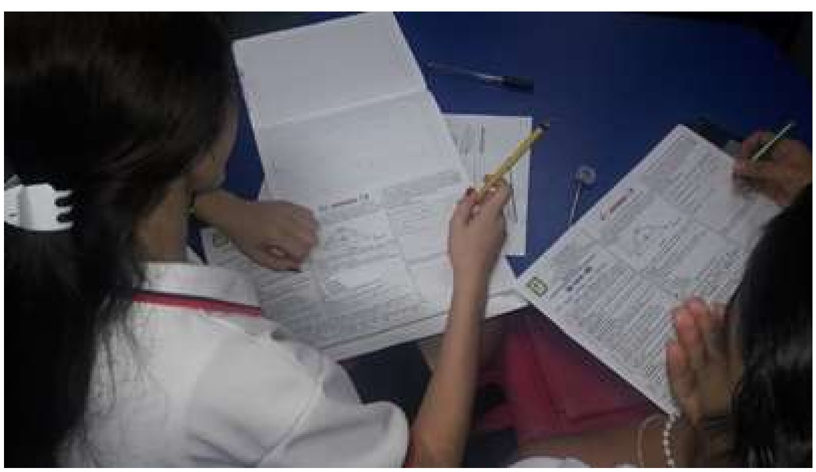
Anexo 8. Registro fotográfico del diagnóstico 2017

Registro fotográfico de1 proyecto I

Registro fotográfico de1 proyecto I – 2

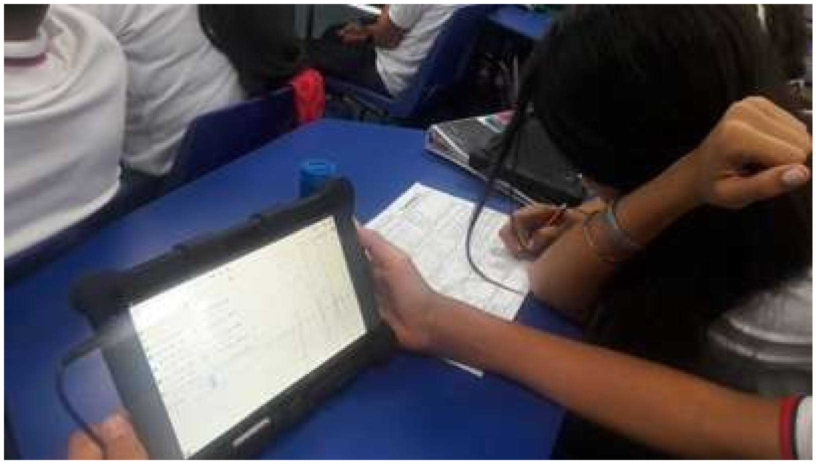


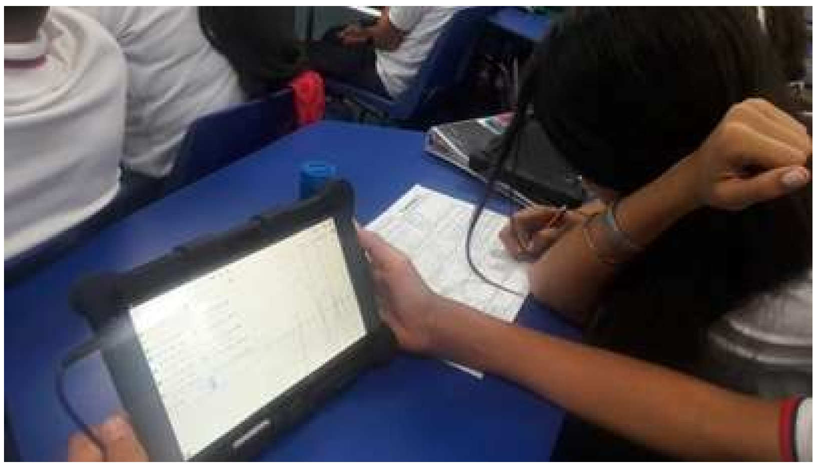
Registro fotográfico de1 proyecto II -1



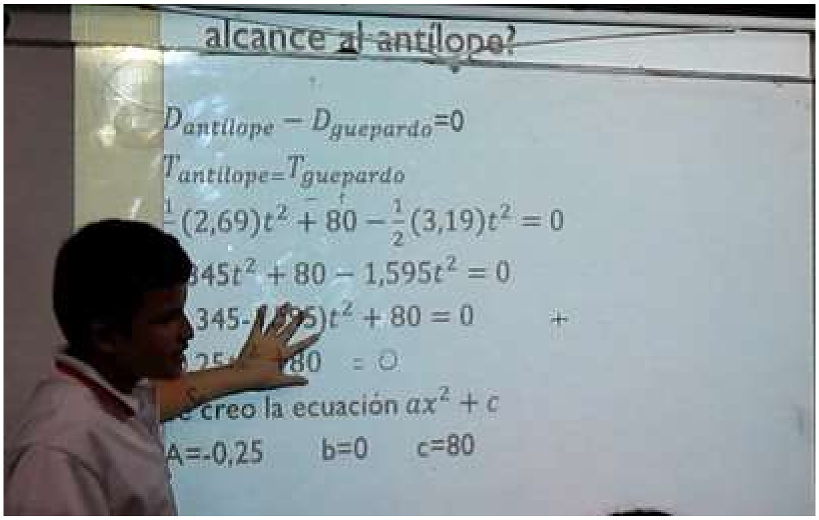
Registro fotográfico de1 proyecto II -2

Registro fotográfico de1 proyecto III -1





Registro fotográfico de1 proyecto III -2


alcance al antílope?
$D_{antilope} - D_{guepardo}$=0
$T_{antilope=}T_{guepardo}$
$(2,69)t^2 + 80 - \frac{1}{2}(3,19)t^2 = 0$
$345t^2 + 80 - 1,595t^2 = 0$
$t^2 + 80 = 0$
creo la ecuación $ax^2 + c$
A=-0,25 b=0 c=80


Fundación Telefónica
Telefónica