

La función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra para el fortalecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios

Autor: Dimar Emilio Acosta Galván<sup>1</sup>, \*

Coautor: Lenis Santafé Rojas \*

\*Universidad Autónoma de Bucaramanga

### Resumen

En este artículo se describe un estudio de investigación cualitativa con metodología investigación-acción, acerca de La función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra para el fortalecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios. El desarrollo de la propuesta se hizo en tres proyectos pedagógicos de aula: acercamiento al concepto de función, la función cuadrática y la ecuación cuadrática. Estos fueron planteados, en primer lugar con situaciones de variación y en segundo lugar desde diferentes registros de representación de la función como el simbólico algebraico, el cartesiano y el registro tabular y la traducción entre estos. El análisis de la información se realizó a través de diferentes fuentes de recolección de la información como el diario pedagógico, fotografías, la observación directa, videos, pre-test y pos-test. En conclusión se obtuvo que los niveles de razonamiento de Van Hiele y el software Geogebra fueron apropiados para mejorar los aprendizajes de los estudiantes en el estudio de la función cuadrática, porque permitió desde situaciones específicas generar habilidades como análisis de gráficos, evaluación de expresiones algebraicas y dominio de un sistema de representación a otro todo dentro de un ambiente dinámico e interactivo.

**Palabras clave:** función cuadrática, niveles de Van Hiele, proceso de aprendizaje, Geogebra, pensamiento variacional.

### Abstract

This paper describes a qualitative research study with research-action methodology, about the quadratic function in the framework of the Van Hiele model using Geogebra software to strengthen the learning process of the ninth grade students of the Instituto Técnico Municipal los Patios. The development of the proposal was done in three pedagogical projects of classroom: approach to the concept of function, the quadratic function and the quadratic equation. These were first raised with situations of variation and secondly from different records representing the function as the algebraic symbolic, the Cartesian and the tabular register and the translation between them. The analysis of the information was made through different sources of

information collection such as the pedagogical journal, photographs, direct observation, videos, pre-test and post-test. In conclusion it was obtained that the levels of Van Hiele reasoning and the software Geogebra were appropriate to improve the learning of the students in the study of the quadratic function, because it allowed specific situations to generate skills such as analysis of graphics, evaluation of algebraic expressions and mastery of one system of representation to another all within a dynamic and interactive environment.

**Key words:** quadratic function, Van Hiele levels, learning process, Geogebra, variational thinking.

## **Introducción**

El presente artículo de investigación presenta una propuesta innovadora centrándose en el estudio del objeto de conocimiento la función: la función cuadrática, fundamentado en el Modelo Van Hiele utilizando el software Geogebra como estrategia didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje del pensamiento numérico variacional, en estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria. Los sujetos participantes tuvieron la oportunidad de experimentar y colocar en práctica, elementos que los llevaron a hacia la comprensión coherente de los conceptos matemáticos estudiados, modificándoles la acción de orientar la clase con el tablero y marcador a otra forma de representación de los objetos, como lo fue el uso de los medios tecnológicos, dando la oportunidad a que los jóvenes construyeran su propio conocimiento y que realizaran actividades diferentes a las acostumbradas.

El artículo describe el problema desde los resultados de las pruebas PISA donde los estudiantes evaluados de Colombia no mostraron buenos resultados en Matemáticas financiera, ubicándose en el último lugar de los países evaluados con 379 puntos; en ese mismo sentido Aristizabal, Esteban & Ximénez, (2014) muestran en su (Ver Anexo 1) en detalle de los resultados PISA entre los años 2006 y 2012, detallando que la mayoría de los estudiantes de Colombia evaluados han estado por debajo de la media establecida por la OCDE que para el 2012 era de 494 (p. 916). Igualmente desde los estudios de la UNESCO (2016) con sus estudios Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), donde se evalúan matemáticas, lectura, escritura y ciencias en niños de 3ro y 6to, los estudiantes de Colombia que presentaron la prueba en el área de Matemáticas muestran en la mayoría de dominios y procesos resultados por debajo de la media regional (p. 18-25). En ese mismo sentido las pruebas nacionales, el ICFES (2016) publica los resultados de las pruebas SABER de matemáticas de 3°, 5° y 9° donde se pueden ver las diferencias entre la educación pública y privada con diferencias significativas: las privadas obtienen buenos porcentajes en nivel avanzado mientras que en las entidades oficiales bajos porcentajes en ese mismo nivel y se puede observar altos porcentajes en el nivel mínimo. De la misma manera a nivel institucional se vio la oportunidad de fortalecer el pensamiento numérico variacional donde se refleja desempeños por debajo de la media nacional, datos tomados de las pruebas Saber de los últimos dos años.

Se tomó como fundamento teórico para este proyecto de investigación El Modelo de Van Hiele, debido a que El MEN en los Lineamientos Curriculares de matemáticas menciona lo menciona como un método para la construcción del pensamiento geométrico, en el mismo

sentido Fouz & De Donosti (2005) explica que el modelo de Van Hiele no es un Modelo reciente pero con la interpretación de los niveles a la didáctica actual, no ha perdido ninguna vigencia y sus ideas principales. En ese sentido Gutiérrez (1998) menciona el Modelo de Van Hiele como tema de actualidad que, “además de describir el progreso de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes, aporta pautas para la organización del currículum de matemáticas, en particular de geometría, de los diferentes niveles educativos” (p. 4). De esta manera fue acertado fundamentar las bases de este proyecto en el modelo de razonamiento de Van Hiele con el planteamiento de situaciones que llevaron a los participantes a los niveles de reconocimiento y análisis principalmente. Igualmente Archer (2010), menciona sobre el modelo que además de ofrecer una forma interesante para identificar las características del razonamiento de un individuo o de un grupo, permite evaluar la calidad de razonamiento, así “se puede utilizar en cualquier “conducta reflexiva” para evaluar los niveles de razonamiento o para facilitar el aprendizaje o para facilitar la enseñanza de las matemáticas” (p. 144), igualmente se puede ver su aplicación en los estudios de Moreno, C. & Willy, J. (2011), Cabello (2013), Maldonado, L. (2013), Gualdrón, É. (2014), Rios, J. & Oyola, A. (2016), Rodríguez, E. (2016) como evidencia de estudios recientes.

Sobre el software GeoGebra hay muchas investigaciones que dan cuenta sobre el gran recurso que es para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, autores como Ruiz, Ávila & Villa (2013) afirman que “GeoGebra puede asumirse como una herramienta didáctica, puesto que es un elemento físico o simbólico que, dentro del aula, provee de ciertas ventajas al maestro y al estudiante como una forma de representación, visualización de ciertos conceptos o procedimientos” (p. 3) en ese mismo sentido observando la puesta en práctica del software García (2011) describe “lo apropiado que es el software donde expresa lo efectivo que es para mejorar las actitudes hacia las matemáticas debido al gusto y confianza que ellos depositaron en su uso para contenidos geométricos” (p. 524), de igual manera Poza (2013) describe que los Sistemas dinámicos son “un apoyo en el aula como lo es cualquier otra herramienta cognitiva [...] pero siempre como una pieza más del engranaje, nunca la solución en los mismos (p. 33).

Sobre el uso de los recursos tecnológicos como herramienta para desarrollar procesos de aprendizaje en ambientes especiales, el MEN (1998) en su documento lineamiento curriculares para matemáticas, sobre la incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de Colombia cuyo propósito se resume con el aprovechamiento de las herramientas tecnológicas y uso de software como herramienta de mediación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde:

Constituyen herramientas de apoyo muy potentes para el estudio de funciones por la rapidez de respuesta a los cambios que se introduzcan en las variables y por la información pertinente que pueda elaborarse con base en dichas respuestas y en los aspectos conceptuales relacionados con la situación de cambio que se esté modelando. Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar. El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra. Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar (p. 17-18)

De lo anterior nacen varias inquietudes ¿Qué estrategias de aprendizaje se deben implementar en los educandos para mejorar los resultados de las pruebas internas y externas de la institución? ¿Qué recursos didácticos mediados por TIC serían apropiados para el aprendizaje?, ¿qué estrategias pedagógicas pueden implementar para el aprendizaje de la función cuadrática? ¿Qué teorías de aprendizaje son apropiadas para el aprendizaje de las matemáticas? ¿El modelo de Van Hiele es pertinente para ser aplicado y mejorar el proceso de aprendizaje en las niñas, niños y juventud del INSTEC? ¿Cuál modelo para el aprendizaje de las matemáticas sería conveniente colocar a prueba en la institución? En este sentido, emergió la pregunta de investigación:

¿Cómo fortalecer el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando el software GeoGebra en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios?

## Objetivos

**Objetivo general.** Analizar el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele empleando el software GeoGebra en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios.

**Objetivos específicos.** Caracterizar los pre-saberes y saberes que tienen los estudiantes de noveno grado acerca del conocimiento de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele.

- Diseñar estrategias pedagógicas en el marco del modelo de Van Hiele, utilizando como recurso didáctico el software “Geogebra”.
- Implementar las estrategias pedagógicas diseñadas para el aprendizaje de la función cuadrática.
- Evaluar la efectividad de las estrategias implementadas en el marco del modelo de Van Hiele, utilizando como recurso didáctico el software GeoGebra con estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios.

## Marco Teórico

### Proceso de Aprendizaje

**El aprendizaje como proceso de desarrollo cognitivo.** No hay un concepto precisado sobre el aprendizaje humano, Autores como Shuell citado por Shunck (2012) coinciden con Ardila (1979), en que el aprendizaje es un cambio relativamente permanente del comportamiento que ocurre como resultado de la práctica, y menciona también los tres aspectos que debe tener la definición: el aprendizaje implica cambio, relativamente permanente y resulta de la práctica (p. 18). EL aprendizaje cognitivo conduce a un cambio en el significado de la experiencia: la verdadera educación cambia el significado de la experiencia humana (Novak & Gowin, 1984; Alcaraz (2002). Alcaraz expresa que aprender es tomar algo del exterior e incorporarlo ciegamente a otros saberes anteriormente acumulados por el mismo proceso (p. 195), igualmente (Pinel, 2001) afirma que el aprendizaje consiste en la inducción de cambios

neuronales relacionados con la conducta como consecuencia de la experiencia. La memoria mantiene el aprendizaje y la expresión del cambio conductual (p. 479).

El aprendizaje incluye cambios o transformaciones en la persona, ya sea en sus estructuras mentales, en su comportamiento, sentimientos, en el significado de la experiencia. En los marcos de las definiciones anteriores, el aprendizaje se da a través de la experiencia, y es sobre estos aspectos que se concentrará este trabajo de investigación.

**El aprendizaje en el constructivismo.** El constructivismo es un enfoque educativo que supone un esfuerzo por integrar diversas teorías psicológicas del aprendizaje y la epistemología de la construcción de conocimientos (Pozo, 1989; Carretero, 1994). En la teoría del constructivismo se destaca el papel de los conceptos, las relaciones entre ellos; el papel que juegan los conocimientos previos y el lenguaje para dar forma, codificar, y adquirir nuevos significados (Novak, 1987).

La teoría del constructivismo se apoya en modelos de desarrollo, que resaltan la dimensión activa y dinámica del que aprende en el proceso de enseñanza y aprendizaje, partiendo del hecho que es necesario aprender conceptos pero también es fundamental aprender procedimientos y desarrollar actitudes. En el estudio de Novak (1987) se sintetizan las diversas perspectivas teóricas de la corriente constructivista, y de la teoría de Ausubel sobre aprendizaje, y se establece que la construcción de nuevos conocimientos es la principal forma de aprender significativamente, porque, realmente, lo que se busca y se consigue es crear nuevos significados.

**Aprendizaje significativo.** Se ha tomado como referencia teórica el aprendizaje significativo, que se considera una importante teoría psicológica y educativa en el aula desarrollada por Ausubel y sus colaboradores que profundiza en el significado y sentido del aprendizaje (Ausubel, Novak & Hanesian, 1983). Se constituye como una teoría psicológica porque se centra en los procesos propios del sujeto cuando aprende, haciendo énfasis en todo lo que sucede en el aula cuando los estudiantes aprenden; en la naturaleza de ese aprendizaje; en las condiciones que se requieren para que éste se produzca; en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación (Ausubel, 1976). Ausubel (1973, 1976, 2002) le dio un marco teórico que pretendió dar cuenta de los mecanismos por los que se lleva a cabo la adquisición y la retención de los grandes cuerpos de significado que se manejan en la escuela. Esta teoría expone que un aprendizaje es significativo cuando “puede relacionarse de modo no arbitrario y sustancial, con lo que el alumno ya sabe”. Esto significa que, un aprendizaje es significativo cuando se puede incorporar a las estructuras de conocimiento anterior o previo que ya posee el estudiante.

**El proceso de aprendizaje de los estudiantes.** Este trabajo se centró en el aprendizaje de las matemáticas como área disciplinar, específicamente en el pensamiento variacional; con el fin de realizar el análisis de este proceso en los estudiantes del Instituto Técnico Municipal los Patios, se plantearon inicialmente un conjunto de categorías de análisis, que desde el marco de las actitudes, comportamientos, competencias básicas y conocimientos previos consideramos pertinentes como indicadores de desempeño en el aprendizaje de la función cuadrática y que se detallan a continuación:

**Actitudes para el aprendizaje de las matemáticas.** La actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas es la base que mueve toda conducta, y permite provocar cambios tanto a nivel escolar y en otros ámbitos; es el elemento primordial para aumentar el desempeño en el aula. Según Tapia (1991) Hace parte de la motivación, que es un factor relevante que conlleva el éxito en cualquier área. Este autor afirma que: “querer aprender y saber son las condiciones personales básicas que permiten la adquisición de nuevos conocimientos y la aplicación de lo aprendido de forma efectiva cuando se necesita”. Para (Nieves 1993; Meza, 2012), “las actitudes hacia la matemática influyen, en el tiempo y el esfuerzo dedicados a trabajar cuestiones relativas a esa asignatura y esto, a su vez repercute en el rendimiento, la nota obtenida y una actitud positiva facilita el aprendizaje mientras que una actitud negativa lo dificulta” (p. 20) Otros autores como (Del Puerto & Minnaard, 2003; García, 2011), afirman que las actitudes hacia las matemáticas influyen en el aprendizaje matemático y consideran que los alumnos con actitudes positivas obtienen generalmente logros matemáticos superiores a los que alcanzan los alumnos con actitudes negativas; del mismo modo, un alumno con facilidad para esta disciplina disfrutará más que aquel que tiene problemas en su estudio (p. 67).

Con referencia a lo anterior, para que un estudiante obtenga un aprendizaje debe existir por parte de él buena disposición e interés, el rol del docente en cuanto a la motivación antes, durante y después del aprendizaje y la estimulación de las acciones logradas por el estudiante marcaran un ambiente positivo hacia nuevos aprendizajes.

**Modelo de Van Hiele.** El modelo de Van Hiele está formado por dos grandes aspectos, Pastor (1993) describe la primera como descriptivo, ya que se identifica una secuencia de tipos de razonamiento, llamados “niveles de razonamiento” (p. 4) en esta parte el estudiante va progresando y mostrando la capacidad de razonamiento matemático desde que inicia su aprendizaje hasta alcanzar el máximo nivel de aprendizaje; el segundo aspecto del modelo da a los profesores las directrices de cómo deben guiar a los estudiantes para que puedan lograr llegar al nivel superior de razonamiento, Gutiérrez & Jaime (1998) lo denominan aspecto prescriptivo o “fase instructiva”, estas pautas se conocen con el nombre de “fases de razonamiento”.

El Modelo de Van Hiele hace énfasis a la existencia de diferentes formas de razonamiento en matemáticas, así que los docentes deben tener en cuenta la capacidad de razonamiento de sus estudiantes al decidir el rigor de sus clases (Salvador, 1994, p. 14).

Una manera de ayudar al estudiante a que perfeccione sus niveles de razonamiento acerca de un objeto matemático de estudio, es darle la posibilidad a que lo manipule desde varias perspectivas (con situaciones de la vida cotidiana que sean de su interés, con software que simule situaciones relacionadas, que le dé la posibilidad de construir y manipular las diferentes características del objeto de estudio) para que al final que el sujeto termine por hablar en el lenguaje que se requiere.

**Niveles de razonamientos.** Los niveles de razonamiento de Van Hiele son cinco, algunos investigadores hablan de cuatro niveles pero mencionan los niveles del cero al cuarto nivel. Se describirá el Modelo con los niveles de la misma forma que lo hacen algunos investigadores como Pastor (1993), Gutiérrez & Jaime (1998), Fouz & De Donosti (2005), Archer (2010), Vargas & Araya (2013), Hernández, Wilches & Robles (2015), Aravena, Gutiérrez & Jaime (2016).

**Tabla 1. Características de los Niveles desde las perspectivas de los estudiantes**

NIVELES	CARACTERÍSTICAS DESDE LAS PERSPECTIVAS DEL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES
<b>Nivel I</b> <b>Visualización o Reconocimiento</b>	1) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes. 2) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno (parece una rueda, es como una ventana, etc) No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto. 3) No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos motivo de trabajo
<b>Nivel II</b> <b>Análisis</b>	1) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto desde la observación como de la experimentación. 2) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades pero no de relacionar unas propiedades con otras o unas figuras con otras. Como muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades no pueden elaborar definiciones. 3) Experimentando con figuras u objetos pueden establecer nuevas propiedades 4) Sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.
<b>Nivel III</b> <b>Ordenación o Clasificación</b>	Antes de señalar las características del nivel conviene señalar que, en el anterior nivel, los estudiantes empiezan a generalizar, con lo que inician el razonamiento matemático, señalando qué figuras cumplen una determinada propiedad matemática pero siempre considerará las propiedades como independientes no estableciendo, por tanto, relaciones entre propiedades equivalentes. Alcanzar este nivel significa que... 1) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones, su papel dentro de la Geometría y los requisitos que siempre requieren. 2) Realizan clasificaciones lógicas de manera formal ya que el nivel de su razonamiento matemático ya está iniciado. Esto significa que reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. 3) Siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que su nivel de razonamiento lógico son capaces de seguir pasos individuales de un razonamiento pero no de asimilarlo en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la Geometría.
<b>Nivel IV</b> <b>Deducción Formal</b>	1) En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. 2) Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. 3) Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas forma de demostraciones para obtener un mismo resultado. Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto nivel de razonamiento lógico, se tiene una visión globalizadora de las Matemáticas.
<b>Nivel V</b> <b>Rigor</b>	1) Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías. 2) Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático.

Fuente: Fouz, F. & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. ¿Cambiarán las computadoras la forma de enseñar geometría? Sigma Revista de Matemáticas, 1(245), 92-102.

**Fases de aprendizaje.** Las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele serán tomadas de las descritas por autores cómo Fouz & De Donosti (2005) y Rodríguez (2016).

**Tabla 2. Fases de enseñanza del modelo de Van Hiele**

---

**Fase 1a: PREGUNTAS – INFORMACIÓN**

Se trata de determinar, o acercarse lo más posible, a la situación real de los alumnos/as. Se cumpliría la famosa afirmación de Ausubel: “Si tuviera que reducir toda la Psicología Educativa a un solo principio diría lo siguiente: el factor más importante que el influye en el aprendizaje es lo que el alumno/a sabe. Averigüese esto y enséñese en consecuencia” (Ausubel, 1978). Está fase es oral y mediante las preguntas adecuadas se trata de determinar el punto de partida de los alumnos/as y el camino a seguir de las actividades siguientes.

Se puede realizar mediante un test o preguntas individualizadas utilizando actividades del nivel de partida. Cabe señalar que muchas veces el nivel no lo marca tanto la pregunta como la respuesta, es decir, diseñamos una pregunta pensando en un nivel concreto y, la respuesta recibida, nos puede señalar un nivel distinto del pensado inicialmente.

---

**Fase 2a: ORIENTACIÓN DIRIGIDA**

Aquí es donde la importancia de la capacidad didáctica del profesor/a más se va a necesitar. De su experiencia señalan que el rendimiento de los alumnos/as (resultados óptimos frente a tiempo empleado) no es bueno si no existen una serie de actividades concretas, bien secuenciadas, para que los alumnos/as descubran, comprendan, asimilen, apliquen, etc las ideas, conceptos, propiedades, relaciones, etc que serán motivo de su aprendizaje en ese nivel.

---

**Fase 3a: EXPLICACIÓN (EXPLICITACIÓN)**

Es una fase de interacción (intercambio de ideas y experiencias) entre alumnos/ as y en la que el papel del profesor/a se reduce en cuanto a contenidos nuevos y, sin embargo, su actuación va dirigida a corregir el lenguaje de los alumnos/as conforme a lo requerido en ese nivel. La interacción entre alumnos/as es importante ya que les obliga o ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás.

---

**Fase 4a: ORIENTACIÓN LIBRE**

Aparecen actividades más complejas fundamentalmente referidas a aplicar lo anteriormente adquirido, tanto respecto a contenidos como al lenguaje necesario. Estas actividades deberán ser lo suficientemente abiertas, lo ideal son problemas abiertos, para que puedan ser abordables de diferentes maneras o puedan ser de varias respuestas válidas conforme a la interpretación del enunciado. Esta idea les obliga a una mayor necesidad de justificar sus respuestas utilizando un razonamiento y lenguaje cada vez más potente.

---

**Fase 5a: INTEGRACIÓN.** La primera idea importante es que, en esta fase, no se trabajan contenidos nuevos sino que sólo se sintetizan los ya trabajados. Se trata de crear una red interna de conocimientos aprendidos o mejorados que sustituya a la que ya poseía. Como idea final podemos señalar como en esta estructura de actividades se pueden integrar perfectamente actividades de recuperación para los alumnos/as que presenten algún retraso en la adquisición de los conocimientos geométricos y, por otra parte, rehaciendo adecuadamente los grupos profundizar algo más con aquellos alumnos/as de mejor rendimiento Aunque no se ha explicitado las actividades de evaluación, también se integrarían fácilmente en esta estructura de actividades.

---

**El modelo de Van Hiele y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.** Resulta oportuno describir que el uso del Modelo de razonamiento de Van Hiele fue pensado para encaminar al estudiante hacia la comprensión de un objeto matemático, así lo expresa (Pastor, 1993; Van Hiele, 1986) donde da un ejemplo en el campo de la aritmética, cuando describe:

La diferencia entre los objetos del segundo y el tercer niveles se pueden observar también por diferentes formas de escritura. El segundo nivel, los cálculos se basan en relaciones entre números concretos:  $4 \cdot 3 = 12$ ,  $6 + 8 = 14$ . En el tercer nivel de pensamiento, se basan en generalización de resultados:  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$  (p. 5).

De la misma manera lo expresa Gutiérrez & Jaime (1998), Archer (2010), Bedoya (2014) en sus investigaciones textos dejan entrever que no solamente el modelo de razonamiento matemático es exclusivo para el estudio de los conceptos de la Geometría, así lo expresa también Llorens Fuster, J. L., & Prat Villar, M. (2015) describen el modelo de una forma donde lo hacen en general para las matemáticas, describiéndolo de la siguiente manera:

Existen distintos niveles de razonamiento de los estudiantes, referidos a las Matemáticas. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante sólo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento. Por tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que ese progreso se haga de un modo rápido y eficaz (p. 16).

De esta manera el proyecto La función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra para el fortalecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios queda fundamentado en un modelo de razonamiento matemático con base constructivista de la misma forma que es el modelo pedagógico de la institución. Después de lo anterior expuesto, realizar la interpretación del modelo de Van Hiele en un objeto matemático como la función, que no corresponde directamente a la geometría, es un referente para posteriores investigaciones.

**Pensamiento variacional y sistemas algebraicos.** El MEN en su documento los lineamientos curriculares de Matemáticas (LC) menciona al pensamiento variacional y sistemas algebraicos como uno de los 5 ejes de conocimientos básicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como uno de los logros para alcanzar en la educación básica.

El documento del MEN (1998) describe algunos núcleos conceptuales en los que está involucrada la variación cómo:

1. Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
2. la función como dependencia y modelos de función;
3. las magnitudes;
4. el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
5. modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado (p.50).

La calculadora gráfica se constituye en una herramienta didáctica necesaria para lograr este propósito. El uso o software de uso libre como Cabri Géomètre, CaRMetal, GeoGebra, Graph, o el uso de la calculadora de Microsoft o la calculadora científica son herramientas importantes para el estudio de funciones.

**La función.** Unos de los conceptos más importantes de las matemáticas es el concepto de función. La idea de función nace con las primeras observaciones de relaciones entre dos variables cuando civilizaciones como los babilonios y los egipcios realizaron las tablas de los cuadrados y cubos de los números naturales. En el Siglo XVII el matemático René Descartes mostró en sus trabajos de Geometría los conceptos de variable y función cuando realizó la clasificación de curvas algebraicas según sus grados (Sánchez, 2015, p. 70).

Jaimes (2012) cita a Stewart, 2008; Purcell, 2007; Hoffman, 2001 y Leithold, 1998 para referirse a las definiciones que se encuentran en diversos textos universitarios, sobre ellos describe:

Una función  $f$  es una regla que asigna a cada elemento  $x$  de un conjunto  $D$  exactamente un elemento, llamado  $f(x)$ , de un conjunto  $E$  (Stewart, 2008). Una función  $f$  es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto  $x$  en un conjunto –denominado dominio– un solo valor  $f(x)$  de un segundo conjunto (Purcell, 2007). Una función es una regla que asigna a cada objeto de un conjunto  $A$ , exactamente un objeto en un conjunto  $B$ . El conjunto  $A$  se denomina dominio de la función y el conjunto de objetos asignados en  $B$  se denomina Rango (Hoffman, 2001). Intuitivamente consideramos que una cantidad  $y$  es una función de otra cantidad  $x$  si existe una regla por medio de la cual se asigne un único valor  $a$  y para cada valor correspondiente de  $x$  (Leithold, 1988).

De esta manera se tienen diferentes definiciones de función incluyendo algunos que aparecen en textos para la educación de la básica de las matemáticas en estudiantes de secundaria y media de Colombia.

En el proceso de intervención en el aula se utilizarán tipos de representaciones como tabla de valores, diagrama sagital, diagrama cartesiano, fórmula o expresión algebraica.

**Revisión histórica de la función cuadrática.** Mesa & Villa (2009 citado en Vivas, (2010)) describen un rastreo histórico a través de fuentes primarias y secundarias. Estos autores sostienen que las nociones asociadas a lo "cuadrático" atravesaron por lo menos cuatro momentos: las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones. Vivas (2010)

El concepto de ecuación es uno de los más importantes del análisis matemático actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas. En Babilonia las "nociones cuadráticas" se encontraron asociadas a situaciones en donde el concepto de cuadrado tenía una concepción aritmética con ciertos niveles básicos de generalización.

**Sistemas de representación de la función cuadrática.** Gómez & Carulla (1999) y Vivas (2010) describen cinco sistemas de representación relevantes para la descripción de la función cuadrática: Verbal, Simbólico, Gráfico, Geométrico y numérico. Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables. Según Vivas (2010) hace una descripción de los 5 sistemas de representación de la función cuadrática.

**Las Tic en la educación.** Las tecnologías de la información y las comunicaciones revolucionaron la enseñanza aprendizaje, El MEN (2013) en su documento *competencias TIC para el desarrollo profesional docente* explica las políticas de innovación de Colombia y da la respuesta a la presunta ¿cuál es el papel de las TIC en la innovación educativa? Y expresa:

La innovación involucra la generación de ideas que pueden ocasionar mejoras en los procesos educativos pero que no necesariamente está vinculada con algún tipo de tecnología. Entonces, ¿por qué formar para la innovación educativa con el uso de TIC? Por un lado, la reciente digitalización del mundo, producto del desarrollo y popularización del

computador y el Internet, ha cambiado el modelo de distribución de la información y ha dado lugar a la Sociedad del Conocimiento donde las ideas y sus aplicaciones cobran cada vez más valor y las interconexiones entre lugares, personas, economías y disciplinas se hacen cada vez más evidentes. Este mundo globalizado demanda nuevos saberes (p. 18).

Ante la aceleración de las tecnologías de la información y las comunicaciones ha hecho que los gobiernos generen políticas educativas encaminadas a generar cambios importantes. La UNESCO (2004) entre sus recomendaciones planteó:

Invertir más en una educación de calidad para todos, a fin de garantizar la igualdad de oportunidades.... El acceso a la educación y calidad de esta deben concebirse como necesidades y derechos interdependientes e inseparables; la educación debe preparar a los educandos para afrontar los desafíos del siglo XXI y Multiplicar los lugares de acceso comunitario a las tecnologías de la información y la comunicación, para facilitar la comunicación entre redes.

Las TIC ha hecho que docentes y estudiantes encuentren recursos para mediar en la enseñanza y los aprendizajes. Poco a poco se ha venido afianzando los diferentes recursos que son creados bajo el lenguaje de programación Java, y de fácil acceso. La mayoría de ordenadores tienen instalado este programa que permite la visualización de los applets que muchos investigadores y autores publican en diversas páginas web educativas, algunos con acceso en línea, otro cómo los recursos de GeoGebra que permiten descargarse y copiarlos en los ordenadores.

**GeoGebra (GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone).** GeoGebra es un software de uso libre, dinámico que permite un ambiente agradable tanto para el estudiante como para el profesor, sus autores Hohenwarter & Fuchs (2004), quienes inician el diseño de un software donde se pudiera combinar de forma dinámica la geometría, álgebra y cálculo la definen a GeoGebra como:

Un programa interactivo de geometría, que también ofrece posibilidades algebraicas como entrar directamente ecuaciones. Está dirigido a estudiantes (de 10 a 18 años) y los maestros de las escuelas secundarias. El programa anima a los estudiantes a acercarse a las matemáticas de forma experimental. Por ejemplo, es posible investigar los parámetros de la ecuación de un círculo arrastrando el círculo con el ratón. Por otro lado, los estudiantes también pueden manipular directamente la ecuación y ver el círculo modificado en el cuadro geometría (p. 2).

El protocolo de construcción de GeoGebra permite volver a hacer construcciones en cualquier momento, insertar nuevos elementos e incluso cambie su orden en retrospectiva. Siempre que los estudiantes están entrando o eliminar las expresiones que deben estar al tanto de las dependencias funcionales. En ese sentido Ruiz & Villa (2013) describe el programa como una herramienta didáctica por el entorno que ofrece y García (2011) donde expresa los atributos como constructividad, interactividad y facilidad de uso y rapidez de respuesta y con sus ventajas, como función motivadora.

Tomando como base de las consideraciones anteriores, y resumiendo la experiencia con el grupo de participantes, GeoGebra se mostró como un recurso didáctico, práctico, entendible que

motiva el aprendizaje de las matemáticas, mostrándose en el presente trabajo como una herramienta donde se evidenció en sus participantes concentración, interés en abordar actividades planteadas, facilidad en el manejo del software, un ambiente agradable de aprendizaje, entre otros.

## **Diseño Metodológico**

La investigación Se enfoca en comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto, Hernández Sampieri, et al. (2010) refiere al estudio de los diferentes situaciones de la vida diaria de los participantes que penetra a través de los sentidos, y explorando el medio que nos rodea profundizando en sus experiencias (p. 364).

Esta investigación fue diseñada bajo un enfoque cualitativo con metodología investigación-acción, y se sustenta a través de: las observaciones en el aula de clase, plasmadas en el diario pedagógico, las opiniones o participaciones realizados por los participantes de manera directa, la observación de los videos, el análisis de resultados en pruebas tanto externas como internas realizadas por los estudiantes, de la prueba diagnóstica y de la prueba final entre otras. Elliott (2000) define la investigación acción como:

el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma, su objetivo consiste en proporcionar elementos que sirvan para facilitar el juicio práctico en situaciones concretas y la validez de las teorías e hipótesis que genera no depende tanto de pruebas “científicas” de verdad, sino de su utilidad para ayudar a las personas a actuar de modo más inteligente y acertado la investigación acción se convierte en una oportunidad para ayudar a los estudiantes a identificar sus problemáticas de aprendizaje y buscar alternativas de solución (p. 88).

**Población y Muestra.** La población corresponde a los sujetos o participantes que intervienen en la investigación, Fracica (1988 citado por Bernal, 2010) define la población como “el conjunto de todos los elementos a los cuales se refiere la investigación. Se puede definir también como el conjunto de todas las unidades de muestreo” (p. 161). La población objeto de estudio en esta investigación corresponde a los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal Los Patios de la jornada de la tarde. La muestra es la parte de la población que se selecciona, de la cual realmente se obtiene la información para el desarrollo del estudio y sobre la cual se efectuarán la medición y la observación de las variables objeto de estudio (Bernal, 2010, p. 161) Para el caso de esta investigación los participantes corresponden al grado noveno A de la jornada de la tarde del INSTEC.

**Instrumentos para la Recolección.** La recolección de los datos en una investigación cualitativa permitió obtener información relevante para analizarla, compararla y encontrar características que nos llevaron a conclusiones relevantes acerca de un objeto de estudio. Hernández Sampieri, et. al. (2010) describe los principales métodos para la recolección de información:

La observación, la entrevista, los grupos de enfoque, la recolección de documentos y materiales, y las historias de vida. El análisis cualitativo implica organizar los datos recogidos, transcribirlos a texto cuando resulta necesario y codificarlos. La codificación

tiene dos planos o niveles. Del primero, se generan unidades de significado y categorías. Del segundo, emergen temas y relaciones entre conceptos. Al final se produce teoría enraizada en los datos (p. 406).

Entre los instrumentos para la recolección de la información se tiene el diario pedagógico, datos fotográficos, la observación directa, videos, pre-test y pos-test herramientas que sirvieron para el análisis de la información y el reflejar los resultados de la propuesta. Sobre estos instrumentos Porlan & Matín (1998) en su obra *El diario del profesor*, menciona el diario cómo “una guía para la reflexión sobre la práctica, favoreciendo la toma de conciencia del profesor sobre su proceso de evolución y sobre sus modelos de referencia” (p. 23).

Las fotografías se convierten en algunos casos en fuente de información para dar muestras de los avances de los estudiantes, Según Elliot (2000) se pueden captar aspectos visuales de una situación, y además expresa algunas características visuales acerca del contexto del aula. (p. 98).

La observación directa es una acción o actividad para asimilar información, que puede implicar el registro de la misma. Sobre la observación Stake (1999, citado por Bedoya, 2014) expresa que las observaciones “conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso” (p. 47). En el mismo sentido Hernández Sampieri, et. al. (2010), describe que la observación es un método de recolección de información que “consiste en el registro sistemático, válido y confiable de comportamientos y situaciones observables, a través de categorías y subcategorías” (p. 261).

Las grabaciones de videos pueden usarse para grabar clases, total o parcialmente. Los beneficios de las grabaciones al escucharlas o mirarlas evidencia episodios que resultan interesantes o importantes (Elliot, 2000, p. 99).

Así mismo, el análisis del PEI y los resultados en las pruebas saber también fueron instrumentos de recolección de información, estos fueron acordados y validados por el director de tesis. De esta manera la validez de expertos es una de las formas como se sustenta la validación de los instrumentos para este proyecto, en ese sentido Hernández Sampieri et. al. (2010) menciona la “face validity”, o validez de expertos se refiere al grado en que aparentemente un instrumento de medición mide la variable en cuestión, de acuerdo a “voces calificadas” esta se encuentra vinculada a la validez del contenido (p. 204).

En ese mismo orden, sobre el pre-test, pos-test y de las diferentes sesiones de cada proyecto, fueron revisadas una a una, por docentes, pares, especialistas en el área de matemáticas, que realizaron las sugerencias y puntos de vista, cuyos aportes ayudaron a reformar situaciones que no eran tan claras para los estudiantes, estos docentes corresponden a pares idóneos de la institución educativa donde se llevó a cabo el proyecto.

**Resultados y Discusión.** La triangulación es una estrategia para recolectar, analizar y contrastar información de diferentes fuentes con el fin de determinar relaciones que conduzcan a conclusiones y hallazgos de una investigación; Hernández Sampieri, et. al. (2010) “al hecho de utilizar diferentes fuentes y métodos de recolección, se le denomina triangulación de datos” (p. 439). Para los resultados y discusión el investigador establece unas categorías iniciales, categorías propuestas como resultado del análisis de las competencias y los proyectos diseñados.



COMPETENCIAS [D]	COMUNICACIÓN [D.1]	cartesianas	
		Características de las funciones	[D.1.2]
		Representar funciones	[D.1.3]
		Evaluar expresiones	[D.1.4]
		modelar situaciones de variación	[D.1.5]
		Traducir registros	[D.1.6]
	TECNOLOGIA [D.2]	Uso de GeoGebra	[D.2.1]
		Uso de Tablet	[D.2.2]
		Uso de Office	[D.2.3]
		Recursos web	[D.2.4]
	ACTITUDINALES [D.3]	Actitud positiva	[D.3.1]
		Predisposición	[D.3.2]
		Interés	[D.3.3]
		Motivación – ambiente agradable	[D.3.4]
		Atención	[D.3.5]
Participación		[D.3.6]	
Emoción		[D.3.7]	
Aprendizaje significativo [A]	Producción de ideas	[A.1]	
	Razonamiento y observación	[A.2]	
	Conocimientos previos	[A.3]	
	Reconocimiento de la situación en contexto	[A.4]	
	Puesta en común	[A.5]	

En la aplicación del diagnóstico se pudo detectar los conocimientos previos de los participantes, verificar como razonan ante preguntas de situaciones que tienen que ver con el concepto de relación, función. Sobre estos se puede decir que la mayoría de los participantes hicieron deducciones de nivel 1 teniendo en cuenta los niveles de razonamiento de Van Hiele haciendo descripciones sin tener en cuenta el vocabulario propio de los conceptos o situaciones planteadas, según Fouz & De Donosti (2005) hacen “descripciones meramente visuales y asemejándoles a elementos familiares del entorno” (p. 91). Se pudo evidenciar en el diagnóstico la ausencia del mediador para comprender profundamente las actividades propuestas sobre todo las de análisis, las respuestas no fueron tan significantes, en ese sentido Díaz & Hernández (2002) describen “que el estudiante por sí solo no construye su conocimiento, sino que lo hace gracias a la mediación con los otros, y en el ambiente del aula se encuentran el docente y sus compañeros” (p. 3).

Sobre el reconocimiento de las herramientas de GeoGebra con la finalidad de que se familiarizaran con el entorno de trabajo, los estudiantes mostraron capacidad para seguir instrucciones manifestándose en diferentes tareas asignadas, lucieron concentrados, manipulando las tareas de forma independiente; en ese sentido García (2011), lo resume explicando que GeoGebra es “una herramienta efectiva para mejorar las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes, debido al gusto y confianza que ellos depositaron en su uso para el estudio de contenidos geométricos” (p.524).

Durante la implementación de las estrategias de intervención del proyecto I: acercamiento al concepto de función, al indagar acerca sobre lo que se entiende por relación [C.1.1] se logra la categoría [A4] reconocimiento de la situación de contexto, al clasificarla según su característica, se puede decir que muestran razonamientos de nivel 1 en los N.R.V.H. Se pudo ver que de un ejemplo sencillo para referirse al concepto de relación, los estudiantes fueron capaces de usar

términos que se encuentran en Becerra (2004) “describe que una relación es un conjunto de parejas ordenadas, formadas de la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos” (p. 15), términos cómo los usados por E15 o E17.

Al proponer preguntas sobre representación tabular [C.4.4] emergen las categorías modelar situaciones de variación [D.1.5] y razonamiento y observación [A.2] pudiéndose decir que están construyendo conocimiento, evidenciándose aprendizaje significativo, en ese sentido Moreira (1997) expresa que “el aprendizaje significativo es el proceso que se genera en la mente humana cuando asume nuevas informaciones de manera no arbitraria y sustantiva” (p. 2) de ahí expresa Moreira la importancia del interés del estudiante en asumir el reto de aprender, a través de un material que sea potencialmente interesante que le dé al que aprende unas pautas que generen razonamiento, un pensar, un sentir.

Al presentar situaciones sobre registro gráfico cartesiano [C.4.3], los participantes logran categorías de aprendizaje [D.1.5] y [D.1.6] respuestas que podemos considerar de nivel 2 en los N.R.V.H. Castiblanco et. al. (2004), describe en un documento del MEN sobre la utilización de situaciones de cambio en tareas asignada a los educandos y afirma la importancia de “las gráficas y tablas para modelar situaciones de cambio y la importancia de ejercitar las traducciones de una a otra de las distintas representaciones de una función” (p. 12) de esta manera se convierten en ambientes para propiciar en los estudiantes el desarrollo de competencias cómo observar y describir situaciones de variación, expresar y traducir [D.1.6] entre diferentes registros de representación [C.4] [C.5.2][D.1.1][D.1.3]. Al proponer cambiar desde un registro gráfico a un registro algebraico los participantes requieren el refuerzo [M.4] para asimilar este cambio, de esta manera se llega a evaluar una expresión algebraica [D.1.4]. Los estudiantes por si solos no van a poder avanzar al siguiente nivel de razonamiento, Salvador (1994) expresa que un estudiante podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada, lo que implica estrategias para que el estudiante logre avance en el nivel de razonamiento que se pretende (p. 14).

Los recursos Web cómo los videos son adecuados para estudiar la representación de funciones [C.4]. Esta fue una forma divertida de atender a información relacionada con representaciones de registro cartesiano, tabular y algebraico de funciones. Fue divertida tanto para estudiantes cómo para el docente. Estos recursos se convierten en un instrumento para acercar las matemáticas a los estudiantes. Se gozó, hubo atención o fijación en el recurso presentado, se pudo ver un ambiente ameno durante la actividad [D.2.4] [D.3.5][D.3.4]. Cacheiro (2010), comenta sobre la importancia de los videos que se encuentran en la web afirma que estos repositorios se pueden encontrar inclusive por ejes temáticos, cómo el de TeacherTube (url: [teachertube](http://teachertube.com)) en el que se y que se convierten en documentos de apoyo para el docente y para el estudiante. De la misma manera expongo sobre la importancia del uso del material con excelentes recursos como los encontrados en <http://bit.ly/2qO7Q0W>, en [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) y [www.educaplus.org](http://www.educaplus.org).

En la secuenciación usando el software GeoGebra [C.5.4] se propuso a los participantes realizar una serie de instrucciones y tareas en un ambiente diferente, con el propósito de centrar al estudiante y proponer tareas nuevas. En esta ocasión el estudiante usa el software pero debe dar cumplimiento en papel sobre tareas que determinan algunas características y elementos de las funciones asignadas cómo dominio, codominio, rango, la determinación y explicación si la función representada en el plano correspondía a una función o no. El uso del programa

GeoGebra es muy práctico, se refleja en la primera tarea los participantes no tuvieron inconvenientes para el ingreso en la caja de entrada las siguientes expresiones, y todas se visualizaban en el mismo área de trabajo,  $y = x^2 - 8x + 16$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $-4y^2 + x - 8y = 6$  y  $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ , aunque algunos lo hacen más rápido que otros al final todos incluyen la información. Se tiene la oportunidad de estudiar los elementos de la función, verificar si una curva en el plano es función [C.2]. La Tablet y el software de uso libre se convierten en artefactos mediadores del aprendizaje, Cole (1989, citado por Sarduy, 2008) describe que la mediación "...no es más que la interacción adecuada a la significación que ha hecho el sujeto del artefacto, en virtud de una significación compartida [...] La aproximación a los artefactos, en este caso tecnológicos, está mediada por significaciones compartidas (p. 3).

Los estudiantes se mostraron concentrados, y se pudo evidenciar en los videos y observaciones del profesor. [D.3.7]. Durante la actividad, se reflejó la ayuda del compañero. El trabajo en grupo y colaborativo se evidenció, a pesar de que cada uno tenía su guía orientadora, donde trabajaban de manera individual.

El software permite la interacción entre el registro algebraico, gráfico cartesiano e inclusive el tabular, que se evidenció cuando los estudiantes debían hacer una réplica de las gráficas en su guía [C.4]. Con las instrucciones indicadas se pueden sacar ventajas cómo el estudio del comportamiento gráfico varias expresiones, verificar si es o no función traduciendo el registro a forma gráfica [C.5.2]. El uso de GeoGebra en clases de matemáticas motiva al estudiante a explorar las matemáticas, que de una forma organizada puede llevar al estudiante a elevar su razonamiento del pensamiento variacional. El uso de la tecnología provoca interés en este mundo cambiante y avanzado en esos campos. Los estudiantes reflejan un ambiente agradable, de predisposición a realizar las tareas y diferentes actividades que se proponen. [D.2.1] [D.2.2] [D.3.4]

Para la actividad 1 se presentaba una situación de variación entre dos magnitudes, una situación con una gráfica cartesiana [C.4.3] con una serie de tareas que implican observación análisis y razonamientos para elaborar conclusiones. En esta situación de cambio aparece involucrada el tiempo, cómo en la mayoría de las situaciones de la vida cotidiana según Castiblanco et. al. (2004) "el poder identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y modelarlo, son las características del pensamiento variacional" (p. 17) Vemos que las respuestas dadas por los participantes muestran la capacidad de describir la caracterización correspondiente al crecimiento, decrecimiento o constante de la situación. Los estudiantes han realizado un reconocimiento de la situación en contexto y han podido describir la situación a partir de una situación de variación representada en un gráfico cartesiano, hubo muestra de la producción individual e interesante [A.2][D.1.1][D.1.5].

Se pudo engranar el Modelo de Van Hiele con GeoGebra y sus correspondientes niveles de razonamiento sobre todo situaciones de nivel 1 y 2 de razonamiento. Los participantes estuvieron animados, trabajando en grupo e individualmente discutiendo acerca de las situaciones planteadas.

Durante la intervención del proyecto II: la función cuadrática se abordaron diversas situaciones, se detallaran algunas que se consideraron como las más representativas del proyecto

pedagógico de aula. Se proponen situaciones desde una representación de lenguaje natural [C.4.1] en este caso el movimiento de dos pelotas que parten del mismo lugar, con el mismo alcance y el mismo tiempo gastado en el movimiento parabólico. En esta pregunta se puede ver la capacidad que tienen la mayoría de los estudiantes para interpretar esquemas que representan el movimiento de un cuerpo donde hay una situación de variación [D.1.5] entre la altura y el tiempo transcurrido. está incorporando al pensamiento del joven, la trayectoria del movimiento parabólico de los cuerpos, con curvas, mostrando que hay una altura máxima, acercándolos al vértice, una concavidad, la existencia de infinitas parejas que se pueden hacer corresponder entre el (tiempo, altura), la simetría cuando se menciona que una pelota puede estar a la misma altura en dos momentos diferentes de tiempo, como el caso de (1 segundo, 48 m), (3 segundo, 48m), y conceptos ya trabajados como por ejemplo si la situación es funcional, dominio, rango, intervalo de crecimiento, decrecimiento, los aspectos de dependencia e independencia entre variables, todos estos elementos se pueden trabajar desde el esquema inicial. [C.3.1].

Otra situación que se propone a los estudiantes parte de un registro algebraico [C.4.2] donde los estudiantes consiguen las categorías de aprendizaje [D.1.4][D.1.6] las respuestas dadas por los participantes corresponden a las esperadas. La intervención docente es crucial para que los estudiantes alcancen con éxito los aprendizajes. Las diferentes representaciones que se trabajan en esta sesión corresponden a fórmulas (funciones en este caso), las gráficas de tipo cartesiano y las representaciones tabulares. El MEN (1998) en los lineamientos curriculares los menciona: “entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, [...] las fórmulas y las expresiones analíticas” [C.4]. (p. 50)

Otra actividad importante para comentar tiene que ver con la secuenciación usando el software Geogebra [C.5.4] que permitió a los participantes a través del uso de la Tablet [D.2.2] Sobre las tareas asignadas los participantes crearon ejemplos de funciones generados por ellos mismos usando la herramienta arrastre, y también se les propuso un ejercicio particular para que ubicaran en la guía algunos elementos cómo los valores  $(a, b, c)$  el vértice, cortes con el *eje X*, corte con el *eje Y*, dominio, Rango, concavidad, intervalo de crecimiento, decrecimiento y el eje de simetría, de unas forma guiada para que vayan adaptándose a las siguientes tareas [C.3.1].

Para el mejor aprovechamiento del software se sugiere que el estudiante realice procesos de deformaciones como las contempla Gutiérrez & Prieto (2015) donde muestra en su trabajo el uso de deslizadores para apreciar como al cambia el valor de  $a$  en  $f(x)=ax^2$ , logrará introducir al aprendiz lo que sucede cuando cambia  $a$  cuando cambia entre  $(0, 1)$  o entre  $(0,-1)$  y también cuando  $a$  toma valores mayores que 1 o menores que -1.

Gutiérrez & Prieto (2015) estudió las transformaciones de funciones y las clasifica entre transformaciones rígidas y no rígidas, y para mejorar este taller sería conveniente el estudio de las transformaciones rígidas como las traslaciones y las reflexiones que fueron detectadas por muy pocos estudiantes.

Una de las tareas tiene que ver con la organización de los elementos de la función cuadrática, desde los valores de  $a, b, c$ , el vértice, el tipo de abertura, eje de simetría, dominio y rango. El participante debe identificar los diferentes elementos y características de la función cuadrática [C.3.1] [D.1.2]. Al hacer un análisis de los datos podemos relacionar algunas respuestas de los

estudiantes que tienen que ver con los elementos de la función cuadrática, como vértice, concavidad, eje de simetría, de la misma manera que lo subcategorizan en Gómez & Carulla (1999), donde incluye categorías de sistema de representación gráfica describiendo a concavidad, eje de simetría, vértice, máximos y mínimos, crecimiento entre otros.

Sobre las competencias [D] que debían desarrollar los estudiantes se puso de manifiesto la forma de expresar funciones entre diferentes registros de representación, entre lenguajes verbal, gráfico y tabular. La interacción del docente [M] y entre estudiantes es lo que logra fortalecer el proceso de aprendizaje. Los estudiantes solos no van a comprender profundamente los conceptos que se requieren estudiar.

“La mediación del docente ayuda a los jóvenes a pasar de un nivel de razonamiento  $n$  a un nivel de razonamiento  $n+1$  como se expresa en las características de los niveles de Van Hiele”, donde el mismo Van Hiele (1986, citado por Jaimes, 1998) donde se afirma que el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el nivel básico (p. 14).

En la evaluación final se presentan 5 situaciones de variación [D.1.5], donde 3 de ellas muestran el tiempo como la variable independiente [C.1.2], y las otras dos están relacionadas con el costo de un artículo o del volumen de un líquido. Dirigir preguntas en estos contextos ayuda a los aprendices a encontrar sentido al estudio de funciones. Castiblanco et. al. (2004), comenta la importancia del uso de situaciones de variación en tareas asignada a los estudiantes y describe “las gráficas y tablas son necesarias para modelar situaciones de cambio y la importancia de ejercitar las traducciones de una a otra de las distintas representaciones de una función” (p. 12). Si relacionamos esas tablas y gráficos con situaciones de la vida cotidiana se convierten en ambientes para propiciar en los estudiantes el desarrollo de competencias. Las situaciones de variabilidad que se plantean a los estudiantes deben relacionarse con actividades de la vida cotidiana para que sea considerado interesante su estudio, El MEN (1998) en sus lineamientos curriculares expresa el significado y sentido acerca de la variación, donde puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.

Hay una marcada diferencia entre los resultados del diagnóstico donde los participantes manifestaron razonamientos de nivel 1 y los resultados del pos-test donde la mayoría maneja el vocabulario del objeto de estudio reflejándose el nivel 2 de razonamiento esto se puede ver cuando los estudiantes evaluar una expresión algebraica, traducen registros de representación, grafican una función, extraen sus elementos y características.

**Propuesta Pedagógica.** La propuesta es constructivista, por los diferentes elementos que la componen, aquí se interrelacionan el modelo teórico de Van hiele, que se constituye como el constructo que fundamenta este trabajo, desde la mirada de sus tres niveles iniciales; La función cuadrática como objeto de estudio y GeoGebra cómo un recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas de una forma dinámica. Está constituida por 3 proyectos pedagógicos de aula. Según Carrillo (2001) “un proyecto Pedagógico de Aula es un instrumento de la enseñanza con enfoque global, que toma en cuenta los componentes del currículum, sustentándose en las necesidades de los educandos e intereses de la escuela [...]” (p. 336).

Un proyecto pedagógico de aula según Carrillo, tiene las siguientes características: debe ser innovador, pedagógico, colectivo, factible, pertinente. El proyecto La función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra para el fortalecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios es innovador porque contiene elementos nuevos como el Modelo de Van Hiele y el uso del software GeoGebra. Pedagógico porque se trabaja con jóvenes respondiendo a problemas de aprendizaje del aula, diseñando estrategias para el mejoramiento de los mismos. Colectivo porque deben asumir un compromiso de trabajo colaborativo, y en algunas ocasiones con responsabilidades compartidas. Pertinente, porque se tienen los elementos de software, hardware, diseño de guías orientadoras, acceso recursos de la web, permitiendo desarrollar aprendizajes importantes a los participantes y haciendo que estos entiendan situaciones de la vida cotidiana. A continuación se detallan los proyectos diseñados:

Proyecto I: acercamiento al concepto de función.

Proyecto II: la función cuadrática.

Proyecto III: la ecuación cuadrática.

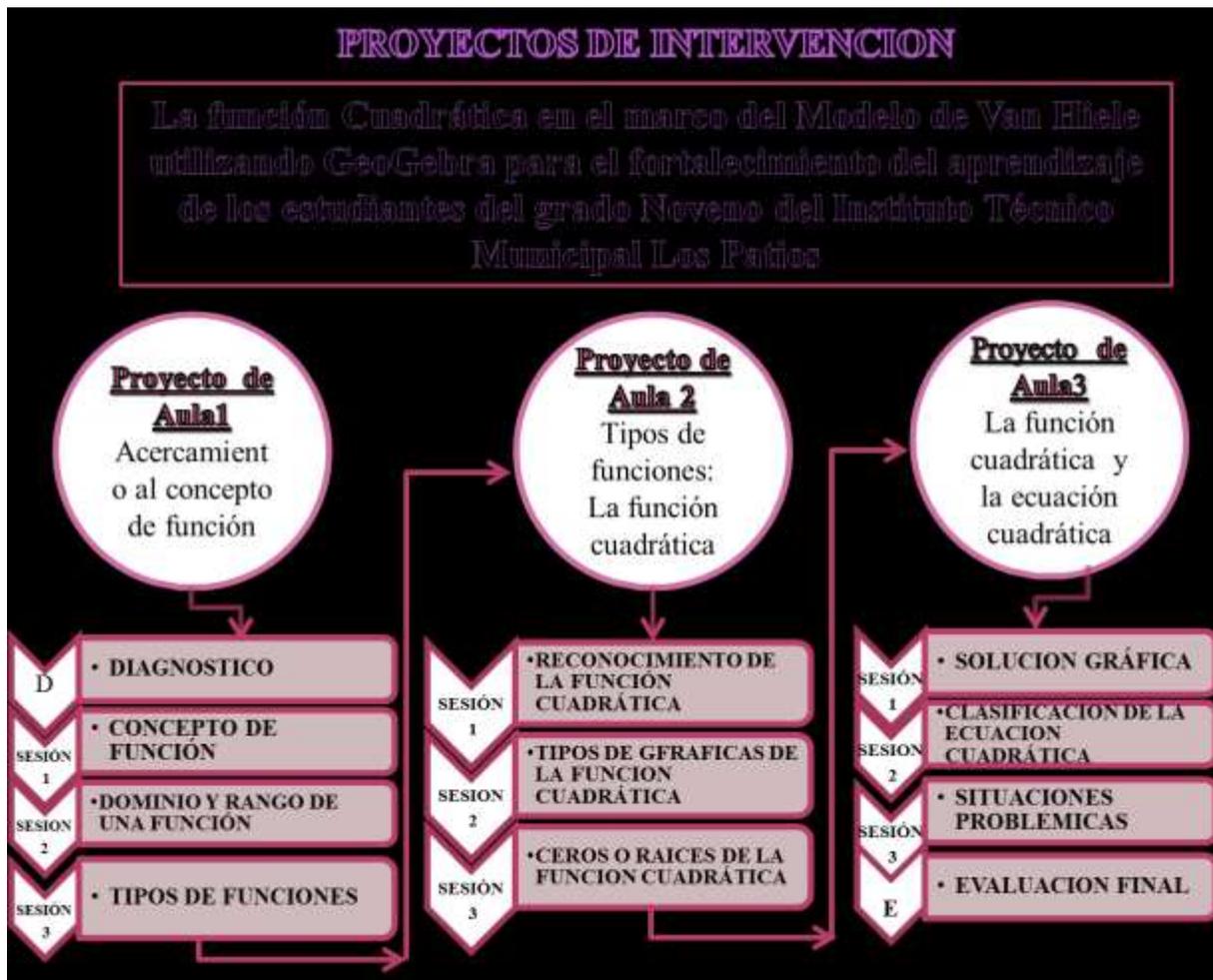


Figura 1. Esquema general de los proyectos pedagógicos de aula

Cada uno de estos proyectos constituidos por sesiones, las sesiones por actividades y las actividades por tareas. La mayoría de las sesiones contienen entre 3 o 2 actividades que representa entre 3 a 2 horas de trabajo y que corresponden a estrategias para el fortalecimiento del pensamiento numérico-variacional y la competencia de comunicación que es la de más bajo rendimiento.

#### 4.2 Justificación

Según el ICFES, los resultados de las pruebas saber de 2016 para el INSTEC, reflejan que se deben implementar estrategias pedagógicas para mejorar en la competencia comunicación, en el componente numérico-variacional. Con la propuesta La función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra para el fortalecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios se diseñaron y aplicaron una serie de actividades que mejorarán los aprendizajes con bajo rendimiento, centrándose en situaciones del pensamiento variacional y en la competencia comunicación. Todas las actividades se diseñaron en el marco del modelo de Van Hiele, que permiten a los estudiantes avanzar en los niveles de razonamiento en el estudio de un objeto de aprendizaje, de lo menos sencillo a lo más complejo.

A demás el MEN ha venido realizando acciones para que la educación en primaria, secundaria y la media estén a la altura de la formación del siglo XXI, realizando diversos programas como contenidos para aprender, supérate con el saber 2.0, Siempre día e, entre otros. También desde el portal Colombia aprende se ha suministrado diversos documentos cómo Las mallas de competencias y aprendizajes, Los derechos básicos de Aprendizaje DBA v.2, Los estándares de competencias básicas, Los lineamientos curriculares, las competencias laborales y las competencia ciudadanas, referentes que fueron tenidos en cuenta en el diseño de propuesta.

Con todo lo anterior, la propuesta La función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando Geogebra para el fortalecimiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios tiene todos los elementos de una propuesta innovadora apoyada en las Tic y en un modelo de razonamiento matemático.

**Competencias y Aprendizajes a Desarrollar** El MEN en su portal Colombia aprende, muestra las competencias y aprendizajes a desarrollar en los grados 3°, 5°, 7° y 9°. La siguiente tabla muestra los aprendizajes y evidencias que se tuvieron en cuenta para la elaboración de las guías de los proyectos.

**Tabla 4. Competencias del componente numérico variacional**

Comunicación	
Aprendizajes	Evidencias
Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan	Observar y describir la variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables
	Identificar el sentido de la unidad de medida en una representación gráfica (p.e. las unidades en los ejes de coordenadas).
	Expresar y traducir entre lenguajes verbal, gráfico y simbólico
	Reconocen mediante gráficas, situaciones continuas y no continuas en diversos

<b>Comunicación</b>	
<b>Aprendizajes</b>	<b>Evidencias</b>
	contextos
	Reconocer rango y dominio de una función en un contexto determinado.
Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes	Identificar equivalencia entre expresiones algebraicas y expresiones numéricas Evaluar expresiones algebraicas
Establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas	Describir propiedades de la gráfica a partir de las características de la ecuación y viceversa. Identificar puntos de intersección entre diferentes gráficas Establecer relaciones de comparación entre diferentes gráficas Identificar y relacionar los elementos de la ecuación asociada a funciones cuadráticas
Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación	Usar expresiones algebraicas como forma de representar cambios numéricos Construir tablas a partir de expresiones algebraicas Construir gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados verbales
<b>Razonamiento</b>	
Interpretar y usar expresiones algebraicas equivalentes	Interpretar una ecuación teniendo en cuenta la situación que se está representando Reconocer procesos necesarios en la solución de ecuaciones Determinar condiciones para que las expresiones algebraicas sean equivalentes
Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación	Analizar situaciones de variación representadas de manera algebraica y tabular, restringidas a funciones lineales, afines y cuadráticas, mediante el uso de propiedades como crecimiento, decrecimiento, valores mínimos y máximos. Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones lineales, afines y cuadráticas
Utilizar propiedades y relaciones de los números reales para resolver problemas	Utilizar propiedades para determinar si un problema, que se representa a través de una ecuación tiene o no solución Estimar un valor numérico teniendo en cuenta las condiciones establecidas en una situación problema
<b>Resolución de Problemas</b>	
Resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas en contextos aritméticos y geométricos	plantear y resolver problemas en otras áreas, relativos a situaciones de variación con funciones polinómicas de grado mayor que 1 Dar significado en un contexto, a la solución de ecuación o un sistema de ecuaciones

## Conclusiones

Evocando el problema de investigación Cómo fortalecer el proceso de aprendizaje de la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando el software GeoGebra, en los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios se pudo constatar las siguientes conclusiones:

Con el diagnóstico se caracterizaron los pre-saberes y saberes acerca del conocimiento de la función y la función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele el cual se pudo constatar que la mayoría de los participantes realizaron razonamientos de nivel 1 y que muy pocos lo hacían en el nivel 2. Tomando como base estos resultados se inició el diseño para generar en los estudiantes razonamientos matemáticos de nivel 2 y 3.

Se diseñaron estrategias pedagógicas encaminadas a estudiar el proceso de aprendizaje de la función cuadrática enmarcada en el Modelo de Van Hiele dando la oportunidad a que los participantes estudiaran el objeto de estudio de una forma deductiva, mostrándoles tareas sencillas de observación o reconocimiento a tareas de análisis y clasificación. Sobre el diseño se tuvo en cuenta los cambios de representación de registro, realizando secuenciaciones como el cambio de contexto, traducción de registros de representación, tratando el registro y utilizando el software de uso libre GeoGebra. Se diseñaron 3 proyectos pedagógicos de aula, acercamiento al concepto de función, la función cuadrática y la ecuación cuadrática, mostrando en cada uno de ellos diversas actividades encaminadas a que el participantes fortaleciera los aprendizajes de la competencia comunicación y el pensamiento numérico variacional.

En la implementación de las estrategias diseñadas se pudo observar que el Modelo de razonamiento de Van Hiele es apropiado para fortalecer los aprendizajes de los estudiantes en el objeto de estudio, la función cuadrática, porque se pudo organizar las actividades y tareas para abarcar aspectos como el concepto de función, los elementos de la función, la función cuadrática elementos y características, su clasificación, partiendo de situaciones gráficas y llevando al participante a generar habilidades como: al análisis de gráficos, modelar situaciones de variación, evaluar una expresión algebraica, traducir representaciones entre otras. En cuanto al uso de GeoGebra se mostró como en una herramienta adicional al proceso de enseñanza aprendizaje, como una alternativa para que el estudiante ejercitara su mente desde un ambiente diferente.

Para evaluar la efectividad de las estrategias implementadas en el marco del modelo de Van Hiele, utilizando como recurso didáctico el software GeoGebra con estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Municipal los Patios se pudo abordar desde tres puntos de vista. El primero tiene que ver con que los proyectos pedagógicos de aula diseñados fueron pertinentes y coherentes con el objeto de estudio porque permitió direccionar los contenidos con los aprendizajes y evidencias que recomienda el MEN. El segundo punto tiene que ver con el uso de las TIC, donde se puso de manifiesto las competencias tecnológicas a través del uso de recursos como las tabletas dotadas por Computadores para Educar y el uso de una aplicación como GeoGebra que representa una calculadora gráfica potente para el aprendizaje de las matemáticas. El tercer punto tiene que ver con la parte actitudinal del estudiante donde se reflejaron características importantes como interés, atención, actitud positiva, concentración, tanto en la solución de la guía de trabajo como en el uso de los diferentes recursos.

Con estas aseveraciones se establece que el proyecto función cuadrática en el marco del modelo de Van Hiele utilizando GeoGebra para el fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes del Instituto técnico Municipal Los Patios constituye una propuesta innovadora.

## **Referencias Bibliográficas**

- Alcaraz, F. (2002). Didáctica y currículo: un enfoque constructivista. Castilla – La Mancha: Universidad de Castilla - La Mancha.
- Andonegui Zabala, M. (2008). La función matemática. Caracas: UNESCO.

- Aravena, M., Gutiérrez, Á. & Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1), 107-128.
- Archer, M. (2010). Estudio de casos sobre el razonamiento matemático de alumnos con éxito académico en la ESO. Tesis de grado, Barcelona, Universitat de Barcelona.
- Ardila, R. (1979). *Psicología del aprendizaje*. Bogotá: Siglo XXI Editores S.A.
- Aristizabal, G., Esteban, G. & Ximénez, D. (2014). El desempeño educativo escolar en Colombia: factores que determinan la diferencia en rendimiento académico entre las escuelas públicas y privadas. *Investigaciones de Economía de la Educación*, 9(9), 895-921.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (Vol. 2). México: Trillas.
- Becerra, J. (2004). *Matemáticas V... el placer de dominarlas sin complicaciones*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Bedoya, D. (2014). La comprensión de las estructuras de tipo aditivo, enmarcada en las fases del modelo de Van Hiele. Tesis de grado, Medellín, Universidad de Antioquia.
- Bernal, C. (2010). *Metodología de la investigación*. Bogotá: Editorial Pearson.
- Cabello, A. (2013). La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri. Tesis doctoral, Salamanca, Universidad de Salamanca.
- Cacheiro, M. (2010). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje. *Revista de Medios y Educación*, 1(39), 69-81.
- Carrillo, T. (2001). El proyecto pedagógico de aula. *Educere*, 5(15), 335-344.
- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. & Moreno, L. (2004). *Tecnología informática: innovación en el currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Díaz, F. & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México: Mc Graw Hill.
- Elliott, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.
- Fouz, F. & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. ¿Cambiarán las computadoras la forma de enseñar geometría? *Sigma Revista de Matemáticas*, 1(245), 92-102.
- Fracica, G. (1988). *Modelo de simulación en muestreo*. Universidad de la Sabana, Bogotá.

- García, M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. Tesis doctoral, Almería, Universidad de Almería
- Gómez, P. & Carulla, C. (1999). La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del Distrito Capital. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gualdrón, É. (2014). Descriptores específicos de los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos. *Revista Científica*, 3(20), 26-36.
- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(3), 27-46.
- Gutiérrez, Á. & Jaime, A. (1998). Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. Texto de la ponencia invitada en el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona: Documento Manuscrito.
- Gutiérrez, R. & Prieto, J. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión  $g(x) = ax^2$ . *Números*, 1(88), 115-126.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. & Baptista Lucio, P. (2010). Metodología de la investigación. México: Editorial Mc Graw Hill.
- Hernández, N., Wilches, J. & Robles, J. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. *Panorama*, 9(16), 44-54.
- Hohenwarter, M. & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. Recuperado de: [ombination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra](#). In *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference*
- Instituto Técnico Municipal Los Patios. (2013). Proyecto Educativo Institucional - PEI. Los Patios: Instituto Técnico Municipal Los Patios.
- Jaimes, N. (2012). La noción de función, un acercamiento a su comprensión. Tesis doctoral, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- Llorens Fuster, J. L., & Prat Villar, M. (2015). Extensión del Modelo de Van Hiele al concepto de área. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 2(45), 113-128.
- Maldonado, L. (2013). Enseñanza de las simetrías con uso de geogebra según el modelo de Van Hiele. Tesis de grado, Santiago, Universidad de Chile.

- Mesa, Y. & Villa, J. (2008). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C.
- Meza, J. (2012). Actitudes hacia la matemática y rendimiento en el área, en sexto grado de primaria-Red Educativa No. 1 Ventanilla. Tesis de maestría, Lima, Universidad San Ignacio de Loyola.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas (LC). Bogotá: El Ministerio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2013). Competencias TIC para el desarrollo profesional docente. Bogotá: El Ministerio.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Bogotá: El Ministerio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Bogotá: El Ministerio.
- Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo, 19(44), 1-16.
- Moreno, C. & Willy, J. La circunferencia. Una propuesta didáctica usando modelo de van hiele y geometría dinámica. Tesis doctoral, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.
- Novak, J. & Gowin, D. (1984). Learning how to learn. Cambridge: Cambridge University Press.
- Parra, R. (2015). Prácticas pedagógicas para el desarrollo del componente geométrico y espacial a través del uso del software GeoGebra en estudiantes de séptimo grado. Tesis de grado, San José de Cúcuta, Universidad Francisco de Paula Santander.
- Pastor, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano: la evaluación del nivel de razonamiento. Tesis de grado, Valencia, Universitat de València.
- Pinel, J. (2005). Biopsicología. México: Editorial Rustica.
- PISA. (2012). Resultados de PISA 2012 en Foco Lo que los alumnos saben a los 15 años de edad y lo que pueden hacer con lo que saben. Ginebra: PISA.
- Porlan, R. & Matín, J. (1998). El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula. Sevilla: Diada Editorial.
- Poza, G. (2013). Sistemas de geometría dinámica como herramientas para el aprendizaje significativo. Tesis de grado, Cantabria, Universidad de Cantabria.
- Pozo, J. (1989). Teorías cognitivas del aprendizaje. Madrid: Ediciones Morata.

- Rios, J. & Oyola, A. (2016). Comprensión de las razones trigonométricas mediante el software Geogebra en el contexto del modelo de Van Hiele. Tesis de grado, Medellín, Universidad de Antioquia.
- Rodríguez, E. (2016). El concepto de derivada y el modelo de Van Hiele en estudiantes de licenciatura en matemáticas e informática de la Universidad. *Ecomatemático*, 6(1), 43-49.
- Ruiz, M., Ávila, P. & Villa, J. (2013). Uso de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Salvador, R. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Madrid: Ministerio de Educación.
- Sánchez, J. (2015). *Proyectos saberes matemáticas 9*. Bogotá: Editorial Santillana.
- Sarduy, A. (2008). Bases conceptuales de la mediación y su importancia actual en la práctica pedagógica. *Summa Psicológica UST*, 5(2), 87-96.
- Shunck, D. H. (2012). Teorías del aprendizaje. *Una perspectiva educativa*. 6ª ed. México, DF: Pearson.
- Shuell, T. J. (1988). The role of the student in learning from instruction. *Contemporary Educational Psychology*, 13, 276-295.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de caso*. Madrid: Morata.
- Tapia, J. (1991). *Motivación y aprendizaje en el aula: cómo enseñar a pensar*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- UNESCO. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento*. Paris: Publicaciones UNESCO.
- UNESCO. (2016). *Tercer estudio regional y comparativo y explicativo*. Ginebra: UNESCO.
- Van Hiele, P. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). Ámsterdam: Universidad de Utrecht.
- Van Hiele-Geldof, D. (1957). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. Tesis doctoral, Ámsterdam, Universidad de Utrecht.
- Vargas, G. & Araya, (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.
- Villar, M. (2016). Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área. Tesis doctoral, Valencia, Universidad Politécnica de Valencia.
- Vivas, D. (2010). La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina. *Tiempo de Gestión*, 6(10), 163-180.