

**Algoritmo estocástico para solución de un problema de control**

Alina Fedossova, Ph.D., Kafarov V., Mahecha Bohórquez D.P.

**Biosorción de metales pesados mediante el uso de biomasa microbiana**

Graciela Chalela A. MSc. Dr.rer.nat

**Caracterización química del bagazo de caña, de la yuca raíz sin cáscara y del residuo fibroso de la palma africana como fuentes potenciales en la producción de etanol carburante por vía biotecnológica**

Amleto León Téllez, Ing. Julio César Paba Barbosa

**Efecto doppler de una fuente sonora con movimiento armónico simple**

Ligia Beleño Montagut, Ing. Luis A. Prada Martínez, Jáder E. Guerrero Bermúdez,

**Modelos matemáticos para procesos de mercado**

Henry Lamos Díaz, Ph.D., Luis Alfredo Rojas



Editorial  
UNAB

© 2004

1

# Cuadernos de Ingeniería

**Algoritmo estocástico para solución de un problema de control**

**Biosorción de metales pesados mediante el uso de biomasa microbiana**

**Caracterización química del bagazo de caña, de la yuca raíz sin cáscara y del residuo fibroso de la palma africana como fuentes potenciales en la producción de etanol carburante por vía biotecnológica**

**Efecto doppler de una fuente sonora con movimiento armónico simple**

**Modelos matemáticos para procesos de mercado**

COLECCIÓN  
HE X DOC

# Cuadernos de Ingeniería

1

Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería  
**Director: Dr. German Oliveros Villamizar**

Facultad de Ingeniería de Mercados  
**Decana: Adriana Santarelli Franco**

Facultad de Ingeniería de Sistemas  
**Decano: Ing. Cesar Dario Guerrero Santander**

Facultad de Ingeniería en Energía  
**Decano: Dr. Jorge Luis Grosso Vargas**

Facultad de Ingeniería Financiera  
**Decano: Dr. Jorge Raúl Serrano Díaz**

Facultad de Ingeniería Mecatrónica  
**Decano: Ing. Eduardo Calderón Porras**

© Para Cuadernos de Ingeniería No. 1:  
Editorial UNAB 2004

Calle 48 No. 39-234  
Bucaramanga, Colombia  
Todos los derechos reservados,  
Primera Edición

La reproducción parcial o total de esta obra sólo se  
puede hacer previa autorización de Editorial UNAB

Edición, diagramación y producción:  
Editorial UNAB,

Editorial UNAB está afiliada a la asociación de  
editoriales universitarias de Colombia ASEUC.

Impreso y hecho en Colombia  
Print and made in Colombia



Editorial  
UNAB

©2004

Colección Hexdoc  
Bucaramanga, 2004



HEMEROTECA



# Contenido

	Pág
<b>Presentación</b>	7
<b>Algoritmo estocástico para solución de un problema de control</b>	11
Alina Fedossova, Ph.D. <sup>1</sup> , Kafarov V., Mahecha Bohórquez D.P. afedosova@unab.edu.co kafarov@uis.edu.co	
<b>Biosorción de metales pesados mediante el uso de biomasa microbiana</b>	21
Graciela Chalela A. MSc. Dr.rer.nat <sup>2</sup> gchalela@unab.edu.co	
<b>Caracterización química del bagazo de caña, de la yuca raiz sin cáscara y del residuo fibroso de la palma africana como fuentes potenciales en la producción de etanol carburante por vía biotecnológica</b>	33
Amleto León Téllez <sup>3</sup> , Ing. Julio Cesar Paba Barbosa <sup>4</sup> amleto@unab.edu.co jpaba@unab.edu.co	
<b>Efecto doppler de una fuente sonora con movimiento armónico simple</b>	55
Ligia Beleño Montagut <sup>5</sup> , Ing. Luis A. Prada Martínez <sup>6</sup> , Jáder E. Guerrero Bermúdez, lbeleno@unab.edu.co aprada@unab.edu.co	
<b>Modelos matemáticos para procesos de mercado</b>	67
Henry Lamos Díaz, Ph.D. <sup>7</sup> , Luis Alfredo Rojas <sup>8</sup> hlamos@unab.edu.co lrojas@unab.edu.co	

<sup>1</sup> Docente investigadora de la Facultad de Ingeniería de Sistemas, Directora del Grupo de Investigación en Ciencias Aplicada

<sup>2</sup> Directora del Centro de Investigaciones de Biotecnología CINBIA - UNAB

<sup>3</sup> Docente Investigador de la Facultad de Ingeniería en Energía

<sup>4</sup> Docente Investigador de la Facultad de Ingeniería en Energía

<sup>5</sup> Investigadora Grupo de Ciencias Básicas, Docente Facultad de Ingeniería de Sistemas

<sup>6</sup> Docente del Departamento de Matemáticas y Ciencias Naturales

<sup>7</sup> Docente Investigador de la Facultad de Ingeniería de Mercados

<sup>8</sup> Docente de la Facultad de Ingeniería de Mercados



HEMEROTECA - 1 NOV 2012

## Presentación

La aparición de este primer número de Cuadernos de Ingeniería es un punto de inflexión en el desarrollo ordenado de la actividad investigativa en la UNAB y específicamente en la Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería. No es una aparición súbita, es producto del proceso que se inició en los primeros años de la década del 90, cuando la UNAB reflexionó acerca de los factores que iban a incidir en su futuro como Universidad, acorde con los cambios que se iban a dar en educación superior a partir de la Ley 30/92.

No se necesitaba cavilar demasiado, para determinar que sólo aquellas instituciones que le apostaran al desarrollo del conocimiento tendrían vigencia hacia el futuro y serían las que mejor se adaptarían a un mundo que aceleraba su ritmo de cambio. La respuesta de la UNAB la llevó a definir su Proyecto Educativo Institucional, a expedir su Plan Prospectivo de Desarrollo 2000 – 2006 y a diseñar una consecuente reforma curricular que tuvo en la investigación uno de los ejes estratégicos que mediría su definición y norte.

Hechos concretos del propósito de la voluntad institucional fueron la definición de la política institucional de investigación y como consecuencia de ella la estructuración del ente que la pondría en marcha. Dadas estas definiciones el área de Ingeniería de la UNAB inició un desarrollo creciente con la creación del Laboratorio de Computo Especializado – LCE, en 1996; el Laboratorio se convirtió en piedra angular del desarrollo de la investigación en las especializaciones, en la Maestría de Ciencias Computacionales y en guía para desarrollo en el pregrado.

La formación de investigadores, la vinculación de Investigadores formados, la definición de líneas, el apoyo económico de la UNAB al Laboratorio, fueron factores que impulsaron a la Universidad a presentarlo para su evaluación por COLCIENCIAS y, si así lo ameritaba, fuera clasificado como Centro de Investigación. Esta entidad en el año 2000, no sólo reconoció al LCE como Centro de Investigación, sino



que lo escalafonó como uno de los 13 centros de excelencia en el país para ese año. Además de recibir el reconocimiento, obtuvo apoyo financiero de COLCIENCIAS de la misma manera que para los proyectos presentados por sus grupos de Investigación.

La decisión institucional dio sus frutos y además de los éxitos que alcanzó el Laboratorio en el contexto nacional, se constituyó en faro y guía de la investigación formativa y en sentido estricto, en la Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería y, desde luego, en las demás escuelas que nacieron con la Reforma Organizacional del 2001 - 2002.

La producción intelectual, ponencias y artículos de los investigadores, han mostrado en Colombia y en el Exterior la dinámica de la Investigación que se vive en la UNAB, de gran significación para una institución joven, baluarte de la calidad de los contenidos de los programas de pregrado y postgrado de la Escuela y de la Universidad. En cifras es satisfactorio decir que desde el reconocimiento del LCE como centro, sus grupos han generado 58 publicaciones, de las cuales 26 son internacionales, y, de éstas, 18 son tesis de Maestría.

Para la Ingeniería en la UNAB, para la orientación académica de sus 5 programas de pregrado, de sus 5 especializaciones y de la Maestría en Ciencias Computacionales, en convenio con el TEC de Monterrey, la actividad investigativa del LCE, resultado de los proyectos desarrollados en gran parte por profesores de la Escuela, ha sido esencial para que la calidad de estos programas tenga el nivel que hoy exige el gobierno nacional.

Con el mismo esquema del LCE y en ejecución del Plan Prospectivo de Desarrollo 2002 - 2006, la UNAB dio el primer paso para la creación de un núcleo nuevo de investigación en el área de las ciencias ambientales con el nacimiento del Proyecto Ambiental, responsable de la gestión de la innovación biológica para conseguir la armonía con el entorno natural.

Estos primeros avances de los trabajos de investigadores y docentes de la Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería dan nacimiento a los "Cuadernos de Ingeniería", de circulación semestral, se constituyen en la expresión de la manera como en la escuela hemos tomado los hechos del conocimiento, relacionados con el fundamento de la ciencia y su aplicación en la formación de profesionales de las ingenierías.

Esta publicación se presenta como un espacio para la reflexión y el debate de las ideas en ciencia y tecnología con el propósito de decantar la producción intelectual de investigadores e iniciados en investigación. En especial para que los jóvenes investigadores, los semilleros de investigación y nuestros docentes se atrevan a presentar sus planteamientos al debate de la comunidad académica en las áreas de las ciencias básicas y de la ingeniería.

Germán Oliveros V.  
Director de la Escuela de  
Ciencias Naturales e Ingeniería

Bucaramanga, Mayo 2004

# Algoritmo estocástico para solución de un problema de control.

Alina Fedosova,  
Kafarov V.  
Mahecha Bohórquez

## Algoritmo estocástico para solución de un problema de control.

Fedossova, Alina, Ph.D., email: afedosova@unab.edu.co

Kafarov V., email: kafarov@uis.edu.co

Mahecha Bohórquez D.P.

### Resumen.

En este trabajo se desarrolla un algoritmo estocástico de aproximaciones externas para resolver un problema de minimizar los costos ocurridos controlando el nivel de la contaminación de aire en una cierta región de dimensión dos que es un problema de optimización semi-infinita.

### Abstract

This work presents a mathematical model that reached compliance with air quality standards for the every ground level point of the mining area, while minimizing the control costs which thereby occur. These air quality standards give rise to an infinite number of constraints and this is a semi-infinite programming problems. Semi-infinite programming is a next level of extension of elementary finite linear programming where now finitely many variables occur in infinitely many constraints.

**Palabras claves:** optimización semi-infinita, problema de contaminación de aire, métodos de aproximaciones externas.

### Introducción.

Muchas países del mundo han establecido las leyes y regulaciones para la calidad de aire y han implementado los estándares de emisión.

La norma de calidad del aire es un dispositivo legal que establece un límite máximo permisible de concentración de un contaminante del aire (dióxido de azufre (SO<sub>2</sub>), monóxido de carbono (CO), dióxido de nitrógeno (NO<sub>2</sub>), ozono (O<sub>3</sub>), plomo (Pb) y material particulado en suspensión PM (polvo, cenizas, partículas metálicas, cemento o polen) dentro de un tiempo promedio de muestreo determinado, definido con el propósito de proteger la salud y el ambiente

Las normas de la calidad aérea llevan <sup>1</sup> al conjunto infinito de restricciones llamado "conjunto de restricciones de la calidad aérea" en una región, es decir, indican que la concentración en cada punto de la tierra debe ser menor o igual que los estándares promedios.

El objetivo general de esta investigación es la construcción del algoritmo estocástico de las aproximaciones externas y el software para solucionar el problema de minimización de los costos de control de contaminación del aire. Los experimentos numéricos se realizan para diferentes problemas de optimización semi-infinita lineal y no lineal.

### Definición del problema y algoritmo principal.

En una región de control bidimensional dada  $S$ , tiene que ser garantizada cierta calidad del aire (2,3). Al mismo tiempo, el promedio de la concentración anual de un contaminante (por ejemplo, dióxido de azufre o monóxido de carbono) tiene ser guardado debajo de una norma prescrita que se describe por una función real  $\varphi$  en  $S$ . Se asume que la concentración existente en  $S$  viene de dos tipos de fuentes: plantas químicas - fuentes que pueden ser controlados y entonces regulados y fuentes que no pueden ser controlados, en primer lugar transporte.

Para minimizar los costos del control de contaminación del aire podemos formular este problema utilizando función lineal de costos y conjunto infinito de restricciones, así llegamos a siguiente problema de optimización semi-infinita:

$$P(S) \text{ Minimizar } c(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeta a las restricciones

$$g(x, s) = \sum_{j=1}^n (1-x_j) u_j(s) + u_0(s) \leq \varphi(s) \quad \forall s \in S,$$

donde  $x_1, \dots, x_n \in [0,1]$  son los factores de reducción de la contaminación (porcentajes de la cantidad de reducción de la contaminación en cada fuente) con sus costos respectivos  $c_1, \dots, c_n$ ;  $u_0$  - contribución a la contaminación de fuente no controlable;  $u_1, \dots, u_n$  son plantas químicas contaminantes (fuentes de contaminación) y  $S$  es el área de control. La función de costos muchas veces es difícil de determinar en la forma explícita.

Muchos problemas de ingeniería, física, robótica, matemáticas se llevan a los problemas de optimización semi-infinita apenas aparece alguna dependencia de las coordenadas o del tiempo (1,3,4). Son problemas de programación matemática donde optimizamos función objetivo sujeta a conjunto infinito de restricciones. Actualmente, en el mercado se encuentra bastante software para la solución de problemas clásicos de optimización. Los problemas de programación semi-infinita son muy complicados y no existe software para resolverlos. Por eso en el área de investigación de operaciones el problema de desarrollo de los algoritmos numéricos para los problemas restringidos con el número infinito de restricciones es muy actual.

Una de las mejores herramientas para la solución de este clase de problemas es el método estocástico de las aproximaciones externas (1,4). Su idea principal consiste en el reemplazo del problema original  $P(S)$  con la secuencia de los problemas aproximadas más sencillas  $P(S_n)$ ,  $n=1,2,\dots$ , donde cada problema  $P(S_n)$  depende solo del conjunto finito  $Y$  de parámetros:

$$P(S_n) \text{ Minimizar } c(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sujeta a las restricciones

$$g(x, s) = \sum_{j=1}^n (1-x_j) u_j(s) + u_0(s) \leq \varphi(s) \quad \forall s \in S_n,$$

aquí  $S_n$  son conjuntos finitos de restricciones activas de cada problema aproximado  $P(S_n)$ . Para encontrarlos el método utiliza búsqueda activa a partir un punto aleatorio de área factible (procedimiento SPROC.ACTIV.medio).

Como el criterio de optimización utilizamos función cuasi-óptima  $\Theta(x, S_n)$  para evaluar que tan cerca se encuentra el punto  $x$  de la solución del problema aproximado  $P(S_n)$ . En este algoritmo el criterio no depende de ningún método especial, es decir, para calcular función cuasi-óptima no necesitamos resolver adicionalmente algún problema como se hacía anteriormente en otros problemas de optimización semi-infinita (vea 4). Así, para nuestro caso la función cuasi-óptima es:

$$\Theta(x, S) = \max(c(x) - \min_{\substack{x \in X : \\ g(x, s) \leq \varphi(s) \forall s \in S}} c(x), \max_{s \in S} g(x, s'))$$

### Algoritmo SMETH.ACTIV.medio

**Paso 0.**  $n:=1$   $S_1 := \emptyset$ .

**Paso 1.** Encontrar  $x^n$  - solución del problema  $P(S_n)$ .

**Paso 2.** Llamar procedimiento SPROC.ACTIV.medio con los parámetros  $x^n$  y  $S_n$ .

Obtener  $\Delta S_n$  y  $\theta_n$ .

**Paso 3.** Formar el conjunto nuevo de restricciones

$$S_{n+1} := \Delta S_n \cup \bigcup_{\substack{j: \theta_j > \delta / n \\ 1 \leq j \leq n-1}} \Delta S_j$$

**Paso 4.**  $n:=n+1$  y regresar al paso 1.



### Procedimiento SPROC.ACTIV.medio

Parámetros de entrada:  $x \in X^0$ ,  $S \in M_r(S^0)$ .

Parámetros de salida:  $\theta \in \mathfrak{R}_+^1$ ,  $\Delta S \in M_f(S^0)$ .

Parámetro del procedimiento:  $\delta > 0$ .

**Paso 0.**  $i:=1$ .

**Paso 1.** Aplicar el algoritmo de la búsqueda local para solución del problema  $\max_{s \in S^0} g(x, s)$  empezando desde un punto aleatorio  $s_i$  para obtener el punto  $s_i^* \in S^0$ , tal que:

$$s_i^* \in S_{stat}^e(x), \quad g(x, s_i) \leq g(x, s_i^*).$$

**Paso 2.**  $\theta_i = \max(g(x, s_1^*), \dots, g(x, s_i^*))$ .

**Paso 3.** (Paso de control.) Si  $i \cdot \theta_i \leq \delta$  entonces  $i:=i+1$  y regresar al paso 1.

**Paso 4.**  $\theta := \theta_i$ ;  
 $\Delta Y := \{s_i, s_i^*\}$  y salida.

El algoritmo termina de trabajar cuando no hay ya no encontramos puntos activos que no cumplen restricciones del conjunto factible.

El algoritmo propuesto es una versión del método general SMETH.ACTIV propuesto por Zavriev, Volkov en (4).

### Experimentos numéricos y resultados.

El algoritmo propuesto SMETH.ACTIV.medio fue aplicado para los experimentos numéricos para casos lineales y no lineales.

Consideremos tres plantas químicas  $P_i$  las cuales emiten el mismo contaminante. El objetivo es reducir la contaminación del aire hasta los estándares para todo el área de control  $S$ . Las funciones exponenciales  $u_i(s), i=1,2,3$ , son contribuciones de  $P_i$  a las concentraciones del contaminante en el punto  $s \in S$  y las variables  $x_i (i=1,2,3)$  sean los porcentajes necesarias de reducción del contaminante en cada planta a  $P_i$  ( $0 \leq x_i \leq 1$ ) para cumplir con la concentración máxima permitida (aquí es la constante  $\frac{1}{2}$ ) minimizando el costo total de control  $c(x)$ .

### Ejemplo 1. Caso lineal.

Minimizar la función:

$$c(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

sujeta a las restricciones

$$z(x, s) = \sum_{i=1}^3 (1 - x_i) u_i(s) - 1/2 \leq 0, \quad s \in S = ([-1,4] \times [-1,4])^T$$

Aquí  $u_i(s)$ ,  $i=1,2,3$ , dados como

$$u_1(s) = (1/s_1) \exp((-1/s_1)(1 + (s_2 - 1)^2)) \quad \text{para } s_1 > 0$$

$$u_2(s) = (1/s_1) \exp((-1/s_1)(2 + (s_2^2/4))) \quad \text{para } s_1 > 0$$

$$u_3(s) = (1/(s_1 - 2)) \exp((-1/(s_1 - 2))(1 + (s_2 + 1)^2)) \quad \text{para } s_1 > 2$$

$u_{1,2,3}(s) = 0$  en el caso contrario. El sistema de coordenadas y proposiciones se asuman como en (2, 3).

Aplicando el algoritmo SMETH.ACTIV.medio realizamos los experimentos numéricos empezando desde diferentes puntos iniciales, con diferentes parámetros y áreas de control.

En la Tabla 1. podemos observar algunos resultados para este ejemplo. Aquí en la primera columna podemos observar numero de iteraciones que igual al numero de restricciones activas encontradas para solucionar el problema con la exactitud propuesta. Hay que notar que según los cálculos toda la concentración de contaminación de las tres plantas se encuentra aproximado en el punto (2.897737, -0.840293) donde este resultado coincide con (3) que ha solucionado este problema con el método de discretización.

Tabla 1. Resultados para el ejemplo 1 (caso lineal).

No. de iteraciones y el numero de restr. activas	Coordenadas de punto crítico approx. (concentración de la contaminación)	Punto inicial	Punto optimo	Valor de función
3	(2.897737, -0.840293)	(0,0,0)	(0,0,0, 0.2729)	0.27298
5	(3.195362, -0.884669)	(0,0,0)	(0,0,0, 0.2730)	0.27303
4	(3.035533, -0.922631)	(0.15,0.2,0.05)	(0,0,0, 0.2750)	0.27506
3	(3.055767, -0.863967)	(0.15,0.2,0.05)	(0,0,0, 0.2752)	0.27526

El punto óptimo  $x_{opt} = (0.0, 0.0, 0.2730)$  indica que para cumplir con los estándares propuestos en el problema y obtener el costo mínimo solamente hay que reducir en 27.52% la emisión de los contaminantes en la tercer planta química.

En la Figura 1 podemos observar la ubicación del área crítica de color negro (los puntos del área de control que  $z(x, s) > -0.0001$  en el punto óptimo), el área donde  $-0.1 < z(x, s) \leq -0.0001$  de color gris oscuro y el área donde  $z(x, s) \leq -0.1$  de color gris claro. Como podemos ver en el área negro se encuentra el punto crítico aproximado  $(2.897737, -0.840293)$  que aparece en la Tabla 1, además, el área negro es donde la restricción  $z(x, s) \leq -0.0001$  o sea de toda forma en este área estamos cumpliendo que  $z(x, s) \leq 0$  que propone nuestro conjunto factible del problema planteado.

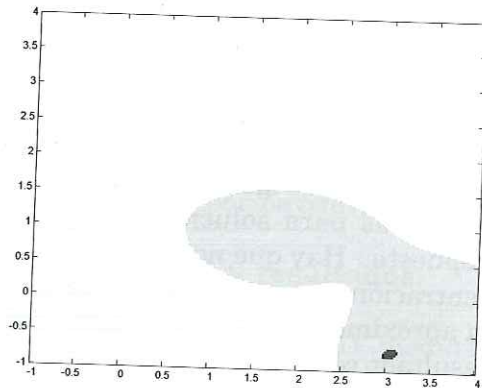


Figura 1. El caso lineal para el punto óptimo  $(0.0, 0.0, 0.2729)$ .

### Ejemplo 2. Caso no lineal

Minimizar la función:

$$c(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 30x_3^2 + 30x_3^3$$

sujeta al mismo conjunto de restricciones y el misma área de control. Aplicando el algoritmo SMETH.ACTIV.medio llegamos a los siguientes resultados (ver Tabla 2).

Tabla 2. Resultados para el ejemplo 2 (caso no lineal).

No. de iteraciones y el número de restr. activas	Coordenadas de punto crítico aprox.	Punto inicial	Punto óptimo	Valor de función
3	(3.054029, -0.840367)	(0,0,0)	(0,0.3552,0.1119)	1.95107
4	(2.991705, -0.857316)	(0,0,0)	(0,0.3542, 0.1122)	1.94966
4	(2.941609, -0.936625)	(0.3,0.2,0.1)	(0,0.3552, 0.1119)	1.95102
5	(3.105584, -0.876363)	(0.0,0.0,0.0)	(0,0.3553,0.1119)	1.95109

En la Figura 2 vemos que la función de restricción se cumple  $z(x, s) \leq 0$  en todo el área de control.

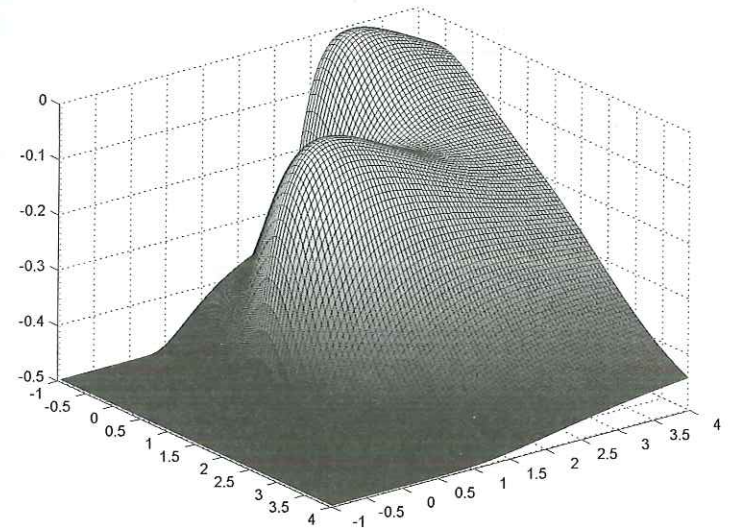


Figura 2. Función  $z(x, s)$  en el punto óptimo  $(0, 0.3552, 0.1119)$  para el caso no lineal.

El punto óptimo  $x_{opt} = (0.0, 0.3552, 0.1119)$  nos indica que para cumplir con los estándares propuestos en el ejercicio y obtener el costo mínimo hay que reducir en 35.52% la emisión de los contaminantes en la segunda planta química y en 11.19% las emisiones en el tercer fuente de contaminación.

## Agradecimientos.

Este trabajo es financiado por COLCIENCIAS y la UNAB proyecto No. 1241-05-11483.

## Bibliografía.

1. Fedosova A.V., 1999. *Los algoritmos estocásticos de las aproximaciones externas para la solución de los problemas convexos de programación semi-infinita. Resumen ejecutivo de la tesis doctoral. DIALOG – MGU, Rusia.*
2. Gustafson S.-A., Kortanek K.O., 1973. *Mathematical models for air pollution control: determination of optimum abatement policies. Models for environmental pollution control. Edited by R.A. Deininger. Ann Arbor: Ann Arbor Science Publishers, Inc., p. 251-265.*
3. Reemtsen R., 1991. *Discretization methods for solution of semi-infinite programming problems. Jour. Of Optim. Th. And Appl., V. 71( No. 1): p. 85-103.*
4. Volkov Y.V., Zavriev S.K., 1997. *A general Stochastic Outer Approximations Method. SIAM J. Control Optim., V. 35 (No. 4): p. 1387-1421.*

# Biosorción de metales pesados mediante el uso de biomasa microbiana

Graciela Chalela A. MSc. Dr.rer.nat



## Biosorción de metales pesados mediante el uso de biomasa microbiana

Graciela Chalela A. MSc. Dr.rer.nat  
Universidad Autónoma de Bucaramanga.  
Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería-  
Proyecto Ambiental,  
e-mail: gchalela@unab.edu.co

### Abstract

Microorganisms are known to remove heavy metal ions from water and their utilization as biosorbents for heavy metal removal, offers a potential alternative to the existent methods for the detoxification and recovery of toxic/precious metals present in industrial waterwastes. Many yeasts, fungi, algae, bacteria and some aquatic plants have the capacity to concentrate metals from aqueous diluted solutions, and to accumulate them inside to cell structure. To date, the most successful biotechnological processes utilize biosorption and bioprecipitation, but others processes as binding by specific macromolecules may have future potential.

Technologies using these processes are currently uses to control pollutions from diverse sources. In this investigation, the term biosorption is used to encompass uptake by whole biomass (living or dead) way physic-chemical mechanisms such as adsorption or ion exchange. Where living biomass is used, metabolic uptake mechanisms may also contribute to the process. Mention is made about systems that employ a mixture of microorganisms as well as higher plants.

**Key words:** Biomass, heavy metal, biosorption, bioprecipitation, microbial removal.

### Resumen

La utilización de microorganismos como biosorbentes de metales pesados, ofrece una alternativa potencial a los métodos ya existentes para la detoxificación y recuperación de metales tóxicos o valiosos, presentes en aguas residuales industriales.

Muchas levaduras, hongos, algas, bacterias y macrobiota acuática tienen la capacidad de concentrar metales a partir de soluciones acuosas diluidas y de acumularlas dentro de la estructura celular microbiana. Actualmente los procesos biotecnológicos más eficientes utilizan la biosorción y la bioprecipitación, pero otros procesos tales como la unión a macromoléculas específicas pueden tener un potencial de remoción en el futuro.

Las tecnologías que utilizan estos procesos se usan generalmente para el control de la contaminación de diversas fuentes. En esta investigación el término biosorción se emplea para la utilización de la biomasa total (viva o muerta), mediante mecanismos fisicoquímicos tales como la adsorción y el intercambio iónico. El mecanismo de utilización metabólica se usa cuando se utiliza la biomasa viva. Así mismo se mencionan sistemas que emplean mezclas de microorganismos así como plantas superiores.

**Palabras clave:** biomasa, metales pesados, biosorción, bioprecipitación, remoción microbiana.

### Introducción

Los avances en la ciencia y la tecnología desde la revolución industrial, han aumentado la capacidad del ser humano para explotar los recursos naturales. Sin embargo esto ha generado perturbaciones en los ciclos biogeoquímicos elementales. La introducción repentina de compuestos químicos xeno-

bióticos o la reubicación masiva de materiales naturales en diferentes comportamientos ambientales, con frecuencia pueden interrumpir la capacidad de autolimpieza de los ecosistemas receptores y por lo tanto dar como resultado la acumulación de contaminantes a niveles problemáticos y hasta perjudiciales. Se hace necesario acelerar la eliminación de los contaminantes para remediar los problemas existentes y disminuir el impacto de incidentes futuros mediante el control del ingreso de contaminantes.

Estos contaminantes se descargan en la atmósfera y en los ambientes acuáticos y terrestres, principalmente como solutos o partículas y pueden alcanzar concentraciones elevadas, especialmente cerca del sitio de descarga. Los efectos de los metales sobre el funcionamiento de los ecosistemas varían considerablemente y son de importancia económica y de salud pública. Entre los mecanismos moleculares que determinan la toxicidad de los metales pesados se encuentran.

1. El desplazamiento de iones metálicos esenciales de biomoléculas y bloqueo de sus grupos funcionales.
2. Modificación de la conformación activa de biomoléculas, especialmente enzimas.
3. Ruptura de la integridad de las biomoléculas
4. Modificación de otros agentes biológicamente activos.

Debido a su movilidad en los ecosistemas acuáticos naturales y su toxicidad para las formas superiores de vida, los iones de metales pesados presentes en los abastecimientos de aguas superficiales y subterráneos, se les ha dado prioridad como los contaminantes inorgánicos más importantes en el ambiente. Aún cuando se encuentren presentes en cantidades bajas e indetectables.<sup>3</sup>

Los avances tecnológicos para el tratamiento de la contaminación por metales tóxicos consisten en el uso selectivo y en el mejoramiento de procesos naturales para el tratamiento de residuos particulares. Los procesos por los cuales los organismos interactúan con los metales tóxicos son muy diversos (Figura 1) Existen en la práctica tres categorías generales de procesos biotecnológicos para el tratamiento de

## Acciones metabólicas celulares

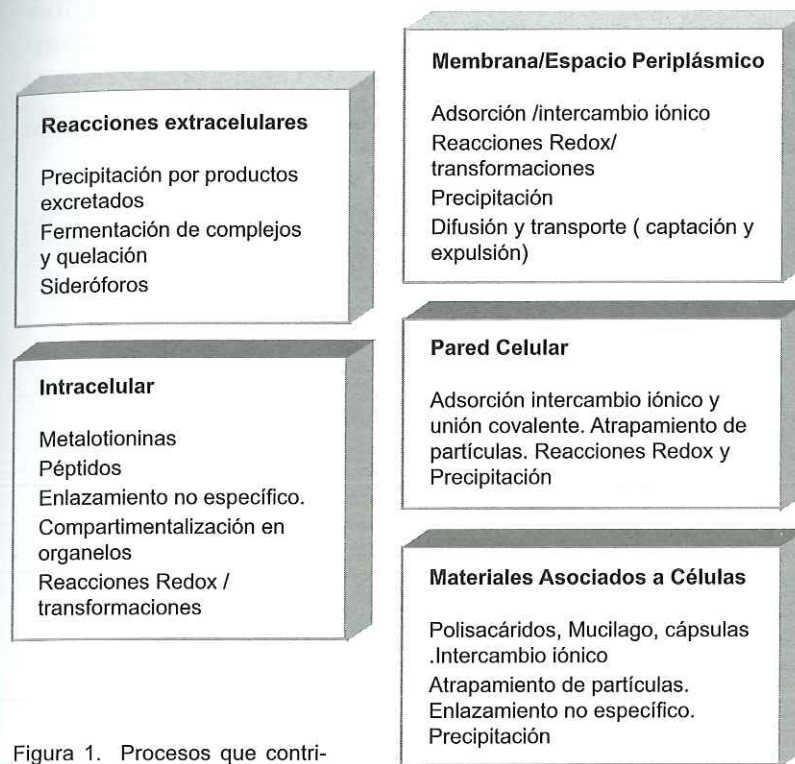


Figura 1. Procesos que contribuyen a la captación microbiana y destoxificación de metales. (Adaptación de la autora, basada en Gadd)

residuos líquidos que contienen metales tóxicos: la biosorción; la precipitación extracelular y la captación a través de biopolímeros purificados y de otras moléculas especializadas, derivadas de células microbianas.<sup>21</sup>

## Metodología

El término "Biosorción" se utiliza para referirse a la captación de metales que lleva a cabo la biomasa microbiana esco-

gida, viva o muerta, a través de mecanismos fisicoquímicos como la adsorción o el intercambio iónico. Cuando se utiliza biomasa viva, los mecanismos metabólicos de captación también pueden contribuir en el proceso. (Tabla 1). (Figura 2)

Tabla 1. Comparación de Biosorción de metales pesados por células inertes o células vivas.

Adsorción mediante biomasa inerte inmovilizada	Tratamiento con células vivas inmovilizadas
<b>Ventajas</b>	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. No necesita de nutrientes o de disposición de nutrientes, ni productos metabólicos.</li> <li>2. Los procesos no están sujetos a limitaciones biológicas.</li> <li>3. La selección de la técnica de inmovilización no está influenciada por limitaciones de toxicidad o inactivación térmica.</li> <li>4. Son muy rápidos y eficientes en la remoción de metales, la biomasa se comporta como un intercambiador de iones.</li> <li>5. Los metales pueden ser liberados fácilmente y luego recuperados.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Aunque cada célula puede llegar a saturarse, el sistema se auto-restablece debido al crecimiento.</li> <li>2. Los metales se depositan en un estado químico alterado y menos sensible a la desorción espontánea.</li> <li>3. La actividad puede utilizar sistemas multienzimáticos.</li> <li>4. Se pueden mejorar las cepas por medio de selección o por manipulación genética.</li> <li>5. Se puede emplear dos o más organismos de una manera sinérgica.</li> <li>6. El crecimiento microbiano puede ser controlado, bien sea por agitación o aireación</li> </ol>

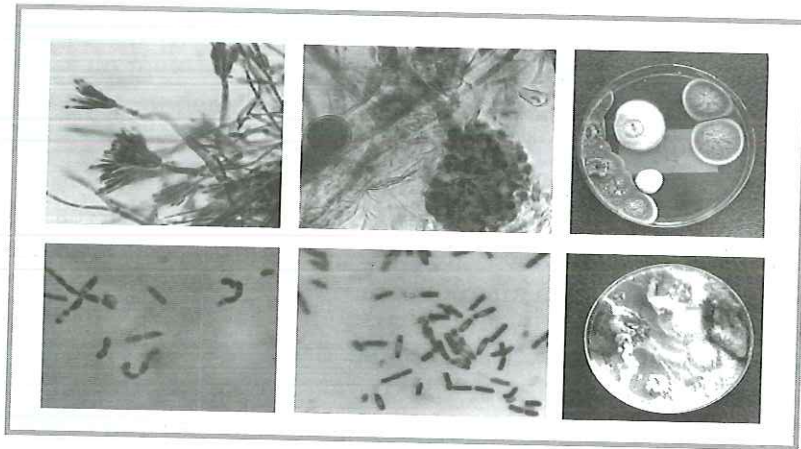


Figura 2. Biomasa Potencial: Bacterias y mohos.

La biomasa microbiana puede ser usada en su estado natural o modificada, por ejemplo por medio de un tratamiento alcalino, para mejorar la eficiencia de biosorción.<sup>8,9,19</sup> La biomasa de *Bacillus circulans* se trata con álcali para potenciar su acción. (Tabla 2) (Figura 3). O la biomasa puede ser inmovilizada (Figura 4)

Tabla 2. Biomasa de uso potencial como biosorbente de metales pesados.

- Saccharomyces boulardii ( Industrias de Probióticos)
- Penicillium notatum ( industria de antibióticos)
- Rhizopus oryzae ( industria alimentaria)
- Aspergillus niger ( industria de ácido cítrico y enzimas)
- Bacillus circulans. ( industria de aminoácidos)
- Streptomyces spp. ( industria farmacéutica)
- Lodos activados. PTAR
- Biomasa de desecho industrial: caña de azucar.
- Biocompost
- Spirulina
- Chlorella

### Tipos de Biorreactores

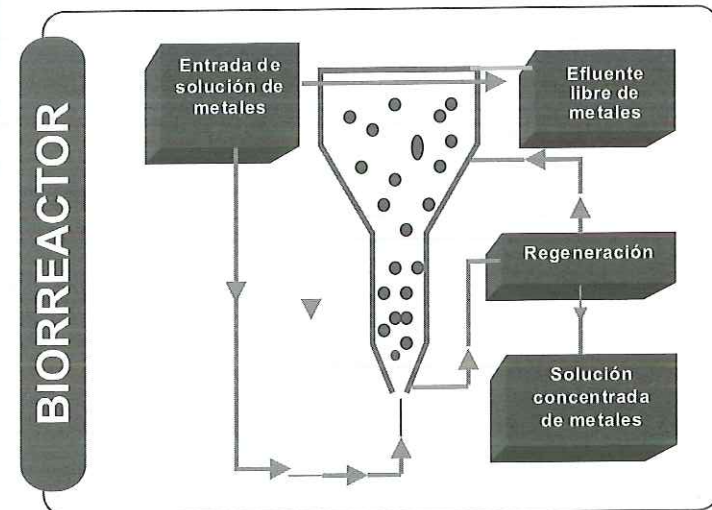


Figura 3. Procesos que utilizan biorreactores con biomasa inerte para disminuir la contaminación por metales tóxicos. Bioproceso en lecho fluidizado.

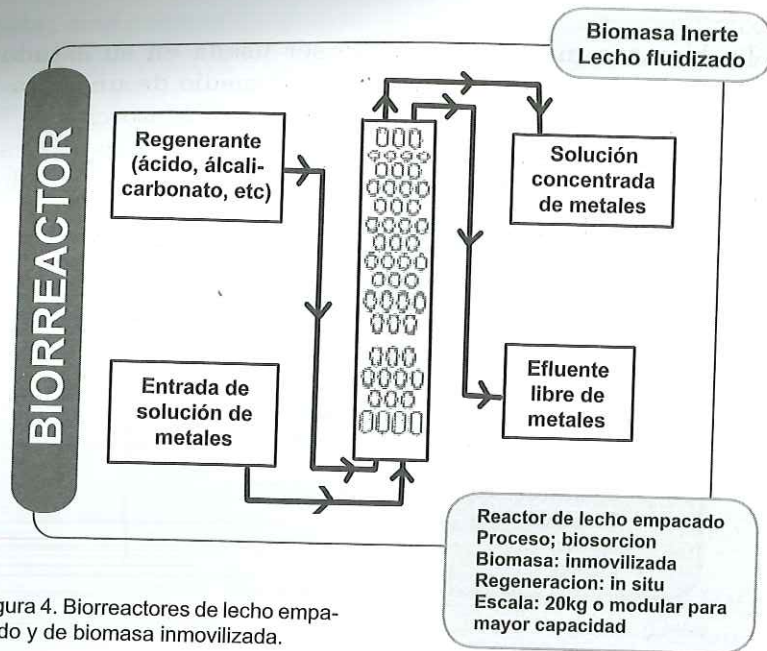
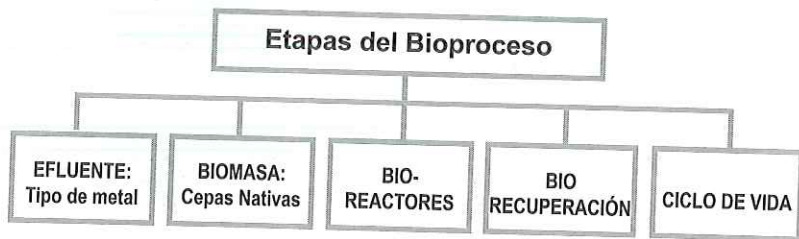


Figura 4. Biorreactores de lecho empacado y de biomasa inmovilizada.

## Conclusiones



El desarrollo potencial de los sistemas microbianos para la recuperación de metales, depende de muchos factores que incluyen la capacidad, eficiencia y selectividad del biosorbente, su facilidad de recuperación, su equivalencia con los tratamientos físicos y químicos actualmente en uso, así

como su economía y tolerancia en contra de interferencias de otros componentes de los efluentes o de las condiciones de operación. Se ha sugerido que para poder competir con las tecnologías existentes, las eficiencias de remoción tienen que ser >99% y sus capacidades de carga deben ser >15 mg/g.<sup>11</sup>

Existe una amplia variedad de mecanismos que pueden estar involucrados en la acumulación microbiana de metales pesados y sin duda ciertos tipos de biomasa o productos derivados de ella, tienen gran capacidad y pueden actuar como agentes altamente eficientes para la eliminación de metales; las selección de las cepas microbianas y el lugar de aislamiento son sin duda dos factores decisivos en la eficiencia del bioproceso<sup>4</sup>

La selectividad constituye un problema para muchos sistemas de biosorción de metales, pero ésta puede disminuirse dependiendo de las concentraciones relativas de los diferentes metales presentes. Además se puede alcanzar un cierto grado de selectividad a través de una selección de cepas microbianas aisladas<sup>1-3-7-10-11</sup>.

Tanto la biomasa viva como la muerta y sus productos derivados o excretados pueden acumular metales. La Biomasa de células vivas tiene posibilidades en procesos comerciales y la biomasa microbiana procedente de lodos activos parece ser un sistema eficiente y de fácil disponibilidad, derivada de los biotratamientos de aguas residuales.

Se enfatiza en la producción de metalotioninas, en la acumulación de metales particulados, en la precipitación extracelular y en la formación de complejos procesos bioquímicos que llevan a cabo biomasa de células vivas. El proceso de biorecuperación de contaminantes a partir de biomasa viva puede ser difícil no solo a causa de los metales pesados, sino también debido a las condiciones ambientales del Bioproceso como la temperatura, el pH y las concentraciones y tipo de metales. Para facilitar los métodos se debe proceder con procesos iniciales de adaptación de la biomasa

a diferentes concentraciones de los metales a recuperar o a descontaminar. Se debe tener en cuenta además el efecto de la aireación y de la agitación.<sup>7-8</sup>

Parece ser que el uso de biomasa muerta tiene ventajas sobre las células vivas: no es necesario adicionar nutrientes, resulta inmune a la toxicidad o a condiciones de operación adversas, la recuperación de los metales es más fácil por medio de tratamientos que permiten la regeneración de la biomasa y la propia biomasa puede obtenerse de manera más económica, como un producto industrial de desecho. Para algunos tipos de biomasa y elementos como el uranio y el torio, la eliminación parece ser completamente por un proceso de biosorción independiente del metabolismo.<sup>4-5</sup>

Cuando se trata de la recuperación de metales valiosos, el consenso general es utilizar preparaciones de células microbianas inmovilizadas vivas o muertas o en forma de copos o masas.<sup>11-12</sup>

Cuando no se trata de elementos valiosos, en donde no resulta de interés su recuperación, la biomasa contaminada resulta un problema; por lo tanto cualquier proceso deberá producir volúmenes bajos y residuos que se puedan reutilizar en procesos de reciclaje al incorporarlos de nuevo a su ciclo de vida.<sup>4</sup>

## Bibliografía.

1. **Bedell, G.W. y D. W. Darnall.** 1990 *Immobilization of non viable biosorbent, algal biomass for the recovery of metal ions.* In: *Biosorption of Heavy Metals.* B. Volesky (ed.) CRC Press. Boca Raton FL. Pp. 312-326
2. **Belliveau, B.H. M. E. Starodub. C. Cotter y J.T. Trevors.** 1987 *Metal resistance and accumulation in bacteria* *Biotechnol. Adv.* 5:101-127
3. **Beveridge J.T.** 1989 In: *Metal Ions and Bacteria.* T. J. Beveridge y R.J. Doyle (eds) John Wiley & Sons New York pp. 1-20
4. **Chalela, G. 2.001.** *Biosorción de cadmio por medio de Aspergillus niger y Rhizopus oryzae.* Universidad Industrial de Santander. CINBIN.

5. **Chalela, G. 2.001.** *Biosorción de mercurio por medio de Pseudomonas spp Circinella spp.* Universidad Industrial de Santander. CINBIN.
6. **Brierley. C.L.** 1990 a. *Bioremediation of metal contaminated surface and groundwater,* *Geomicrobiol. J.* 8: 201-223
7. **Brierley J.A.** 1990 b. En: *Biosorption of Heavy Metals.* B. Volesky (ed) CRC Press. Boca Raton. FL pp 305-311
8. **Brierley J.A. y C.L. Brierley.** 1983. *Biomineralization and Biological metal accumulation.* Reidel Publ. Dordrech, pp. 499-509
9. **Brierley J.A. G. M. Goyak y C.L. Brierley.** 1986 *En Immobilisation of ions by Bio-sorption* H. Eccles y S. Hunt (eds) Ellis - Horwood. Chichester spp. 105-117
10. **Brierley, C.L. D. P. Kelly K. J. Seal y D. J. Best.** *Biotechnology. Principles and Applications* I.J. Higgins. D.J. Best y J. Jones (eds) Blackwell. Oxford pp. 163-212
11. **De Rome. L. Y G.M. Gadd,** 1991 *Use of pelleted and immobilized yeasts and fungal biomass for heavy metal and radionuclide recovery,* *J. Ind Microbiol* 7:97-104
12. **Ehrlich, H.L Y C.L. Brierley (eds)** 1990 *Microbial Mineral Recovery* McGraw Hill.



## **Producción de etanol a partir de residuos amiláceos y lignocelulósicos**

Primera fase 1: caracterización química del bagazo de caña, de la yuca raíz sin cáscara y del residuo fibroso de la palma africana como fuentes potenciales en la producción de etanol carburante por vía biotecnológica

**Amleto León Téllez**

## Producción de etanol a partir de residuos amiláceos y lignocelulósicos

Amleto León Téllez  
Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería  
Facultad de Ingeniería en Energía  
e-mail: amleto@unab.edu.co

### Resumen

El presente trabajo se centra en la caracterización química de los componentes del bagazo de caña, del residuo fibroso de la palma africana y de la yuca con materia prima potencial para la producción de etanol carburante por vía biotecnológica. Los residuos amiláceos y lignocelulósicos señalados fueron seleccionados de acuerdo con la disponibilidad y abundancia dentro de las empresas agroindustriales de la región analizadas.

En el proceso de la obtención de aceite de palma se generan 0.7 toneladas de residuo por tonelada de fruto de palma procesada, generando unas 370.000 toneladas por año de residuo fibroso potenciales para el tratamiento a alcohol carburante, igualmente por cada tonelada de azúcar que se obtiene de la caña se derivan 5 toneladas de bagazo, con un alto potencial para la conversión, vía química y microbiológica a etanol. En relación con la yuca se encontró un potencial de 100.000 toneladas de residuo amiláceo por año para conversión a alcohol carburante, de acuerdo con los resultados obtenidos del análisis del contenido de almidón en la yuca que está del orden del 80%, se pueden obtener unos 240.000 metros cúbicos de etanol, resultando ser el residuo con mayor posibilidad de conversión a alcohol carburante.

Se encontró que los residuos fibrosos de la palma africana, en principio no son aptos para la producción de etanol, por



poseer un alto contenido de lignina, que es la que dificulta la fase de hidrólisis para la obtención de azúcares fermentables. Mientras que el bagazo de caña de azúcar por su composición química, buen porcentaje de celulosa, hemicelulosa y baja en lignina, resulta ser un precursor ideal para la obtención de hidrolizados de polisacáridos.

### **Palabras claves:**

Bioetanol, etanol, residuo lignocelulósico y amiláceo, biocombustibles, almidón de yuca, fermentación etanólica, hidrólisis enzimática.

### **Introducción**

El etanol carburante se conoce hoy en día como un combustible renovable por su procedencia agrícola y tiene un gran valor desde el punto de vista ambiental. El proceso de transformación parte de la elaboración de una biomasa, término que se define como toda la materia orgánica de origen vegetal o animal, incluyendo los materiales procedentes de su transformación natural o artificial.

El etanol carburante disminuye la contaminación producida por los automóviles, especialmente los gases de efecto invernadero, responsables del calentamiento de la tierra. El proyecto, evitará la emisión en Colombia de seis millones de toneladas al año de Bióxido de Carbono o CO<sub>2</sub>.

En términos generales, los alcoholes como carburantes son menos contaminantes, no sólo en las emisiones que surgen del vehículo, sino también en todo el ciclo, desde cuando son producidos hasta cuando son quemados.

El uso del etanol trae beneficios ecológicos, económicos y sociales, por lo tanto es importante desarrollar tecnologías para una producción que permita satisfacer la demanda a precios accesibles. Por todo lo anterior, es necesario tener herramientas y criterios que le permitan a nuestro país tomar las decisiones adecuadas y planear una estrategia

que asegure el desarrollo, la autonomía y el equilibrio con el medio ambiente.

El gobierno colombiano consciente de este aspecto, elaboró la Ley 693 de 2001 (septiembre 19) por la cual se dictan normas sobre el uso de alcoholes carburantes, se crean estímulos para su producción, comercialización y consumo, y se dictan otras disposiciones. Dicha Ley reza así en su artículo primero: "A partir de la vigencia de la presente ley, las gasolinas que se utilicen en el país en los centros urbanos de más de 500.000 habitantes tendrán que contener componentes oxigenados tales como alcoholes carburantes, en la cantidad y calidad que establezca el Ministerio de Minas y Energía, de acuerdo con la reglamentación sobre control de emisiones derivadas del uso de estos combustibles y los requerimientos de saneamiento ambiental que establezca el Ministerio del Medio Ambiente para cada región del país".

El etanol se puede producir a partir de 3 principales tipos de materias primas: Materias ricas en sacarosa como la caña de azúcar, la melaza y el sorgo dulce. Materias ricas en almidón como los cereales (maíz, trigo y cebada, entre otros) y los tubérculos como la yuca, camote, papa, malanga, etc. Materias ricas en celulosa como la madera y los residuos agrícolas como en nuestro caso bagazo de caña y residuo fibroso de la palma africana.

Desde el punto de vista técnico, la caña de azúcar es una de las materias primas más atractivas. Lo anterior se debe a que los azúcares que contiene se encuentran en una forma simple de carbohidratos fermentables. No obstante, avances en pretratamiento químico de desechos celulósicos, lignocelulósicos y amiláceos para la conversión biológica de las moléculas resultantes (tales como azúcares) son el objetivo principal para reducción de costos.

En Colombia existen amplias extensiones de tierra que en la actualidad se usan para el cultivo de caña de azúcar, pero que se destina a la fabricación de panela, producto de bajo valor agregado y poca rentabilidad para la población

campesina que deriva su sustento de este producto. Con la producción de etanol carburante se agregaría valor al producto final mejorando los ingresos de los trabajadores involucrados en la cadena.

En nuestro país se proyecta toda una industria alrededor del jugo azucarado de la caña de azúcar que busca construir doce plantas industriales o biorefinerías de alta tecnología en el país, que producirían 2,5 millones de litros por día de etanol anhidro, para mezclarlo al nivel del 10 por ciento en volumen con las gasolinas. De esta forma se requerirían cerca de 150.000 hectáreas de caña de azúcar, lo que significa la generación de alrededor de 170.000 empleos permanentes entre directos e indirectos, principalmente de campesinos. Las zonas agroindustriales estarían ubicadas en la Costa Norte, Antioquia, Santanderes, Boyacá, Cundinamarca, Valle del Cauca, Eje Cafetero, Hulla, Nariño, Llanos Orientales y Putumayo, y en general el Piedemonte de nuestras cordilleras.

Alrededor de las zonas de cultivo de caña de azúcar, se construirán las biorrefinerías donde se produciría el alcohol antes de transportarlo a las plantas de abasto cercanas a los principales centros de consumo o ciudades capitales y menores. Allí se mezclará el etanol con la gasolina antes de llevarla en carrotaques a las estaciones de servicio.

El empleo del etanol es una alternativa que permitirá disminuir y sustituir la utilización de derivados del petróleo como energéticos.

De acuerdo con lo anterior, la atención del gobierno fundamentalmente está centrada en la producción de etanol a partir de azúcares simples, nuestra investigación busca generar información acerca de la utilización de azúcares complejos, para la bioproducción de etanol, como lo son los almidones, las celulosas, hemicelulosas y ligninas de residuos agroindustriales existentes en la región.

La industrialización de la producción de etanol a partir de residuos amiláceos y lignocelulósicos traerá como consecuen-

cia la apertura de nuevas fuentes de trabajo, tanto en las instalaciones del proceso como en las zonas de cultivo. Además en la producción de etanol a partir de residuos amiláceos, se pueden obtener productos intermedios elaborados durante el bioproceso tales como proteína unicelular, glucosa libre y preparados de actividad enzimática comprobada, los cuales constituyen compuestos de alto valor añadido, también *los residuos no hidrolizables* (de yuca o de sustancias amiláceas), que pueden utilizarse como alimentos balanceados y materia prima para la producción de biogás.

Para tal fin se han planteado los siguientes objetivos, separados en dos fases:

#### **FASE 1.**

-Seleccionar e identificar las principales industrias agroindustriales y alimenticias que generan residuos amiláceos y lignocelulósicos existentes en la región.

-Caracterizar fisicoquímicamente los residuos amiláceos y lignocelulósicos de tres empresas agroindustriales previamente seleccionadas, mediante técnicas analíticas de aislamiento y cuantificación de la celulosa, hemicelulosa, lignina y demás extractivos como lo son; el contenido de proteína, grasa, carbohidratos solubles y el contenido total de sales presente.

#### **FASE 2.**

-Evaluar las diferentes técnicas de hidrólisis para convertir el almidón, la hemicelulosa y celulosas obtenidas hasta la forma de azúcares reductores fermentables.

-Diseñar, evaluar y poner en marcha un biorreactor para la fermentación anaeróbica de los azúcares a etanol.

## METODOLOGÍA

Para la realización del primer objetivo se hizo un estudio detallado de las industrias agropecuarias y de alimentos que son fuentes potenciales de generación de residuos amiláceos y lignocelulósicos, acudiendo las fuentes bibliográficas nacionales e internacionales bajo los criterios de precio, origen y disponibilidad, abundancia, producción, toxicidad, potencial de conversión y pretratamiento de los potenciales residuos.

También se realizaron visitas de campo a las industrias agropecuarias y de alimentos para recoger datos directamente de la fuente.

Se seleccionaron y visitaron las siguientes industrias representativas de la región:

MOLINO DE ORIENTE S.A.

SALSAMENTARIA SANTANDER LTDA. SALSAN LIMITADA

GAVASSA & CIA. LTDA.

TOSTADORA DE CAFE BON-AMI LIMITADA

INDAGRO LIMITADA

ICOPAN LIMITADA

AVIMOL S.A.

MOLINOS SAN MIGUEL LTDA.

CARNES Y SALSAMENTARIA BAVIERA LTDA.

INDUSTRIA HARINERA DE SANTANDER LIMITADA

COMERCIALIZADORA INTERNACIONAL SANTANDEREANA DE ACEITES S.A.

NEO FRUT LTDA

PIPE'S PRODUCTOS ALIMENTICIOS LIMITADA

PROCESAMIENTO, TRILLA Y COMERCIALIZACION DE ARROZ Y SUBPRODUCTOS DEL ARROZ.

Las industrias señaladas **no** cumplieron con el perfil en cuanto a calidad, abundancia y disponibilidad de residuos amiláceos y lignocelulósicos..

Se procedió por tanto a buscar aquellas industrias que por sus antecedentes se sabía que son potenciales generadoras de residuos amiláceos y/o lignocelulósicos: Las industrias agroindustriales fueron: La Industria de la Palma Africana, la Industria de la Caña de Azúcar y la Industria de La Yuca.

Se realizó una visita y toma de muestras de residuos a Palmas Oleaginosas Bucarelia en Puerto Wilches, donde se tomaron muestras de residuo fibroso de la palma africana.

Se obtuvieron muestras de Residuos de Bagazo Caña en la región de la Hoya del Río Suárez, específicamente de Oiba.

Se recolectaron muestras de Yuca, de variedad típica de la Plaza de mercado Central para un análisis bromatológico.

Se realizó un estudio del Estado del Arte de la Palma Africana, La Caña de Azúcar y de la Yuca en cuanto a su origen, taxonomía, condiciones de cultivo, composición química, producción, comercialización y principales usos industriales.

La caracterización fisicoquímica de los diferentes residuos amiláceos y lignocelulósicos se realizaron teniendo en cuenta los componentes fundamentales de un alimento y/o forraje o tejido vegetal, como se muestra en la figura siguiente:

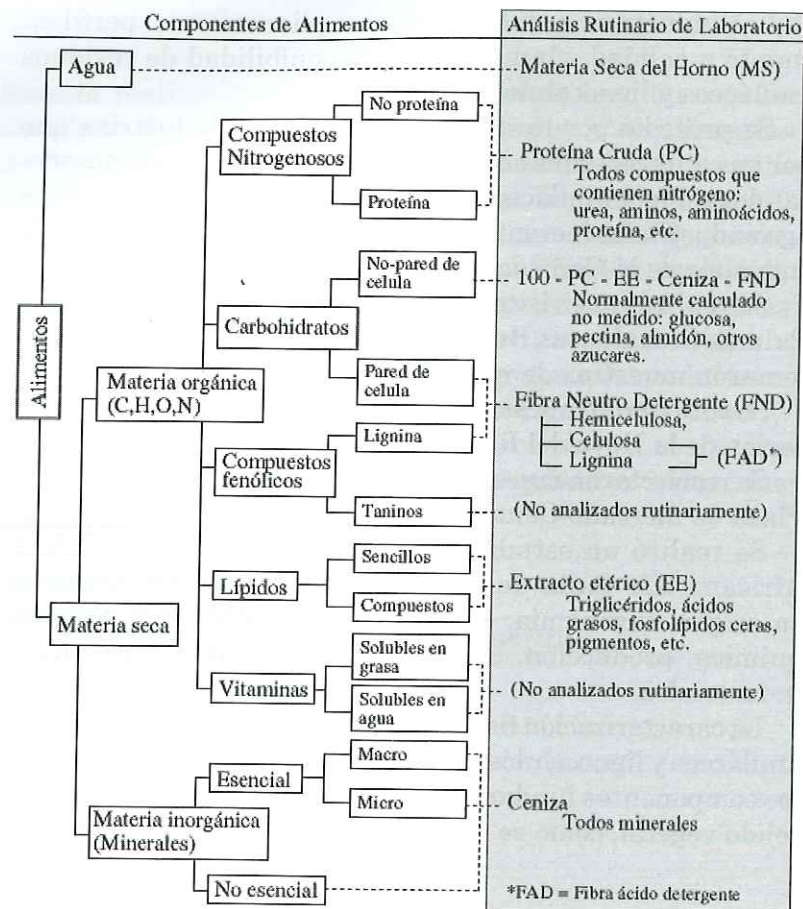


FIGURA 1. Componentes de los alimentos y del material vegetal objeto de estudio.

**Determinación de nitrógeno y proteína** La determinación de nitrógeno total se realizará por el método de Kjeldahl, el contenido de proteína resulta de multiplicar el nitrógeno total por 6.25 (Association of Official Analytical Chemists, A.O.A.C., 1980.)

**Determinación de grasas.** La determinación de grasas se realizará por el Método de 7056 de la Association of Official Analytical Chemists, A.O.A.C., 1980.

**Determinación de carbohidratos.** La determinación de carbohidratos se realizará por el Método sugerido por Whistler Roy L. en Methods in Carbohydrate Chemistry Vol. IV. Los carbohidratos resultan de restarle al total los porcentajes de fibra, humedad, cenizas, grasas y proteínas.

**Determinación de Fibra Detergente Neutra.** El análisis de Fibra Detergente Neutra (FDN) abarca a todos los componentes de la pared celular (celulosa, hemicelulosa, y lignina). La determinación de FDN se realizó por el Método de 7061 de la Association of Official Analytical Chemists, A.O.A.C., 1980.

**Determinación de la Fibra Detergente Ácida (FDA):** Corresponde a la pared celular del tejido vegetal, menos la hemicelulosa, la FDA representa el porcentaje de celulosa más la lignina. La determinación de FDA se realizó por el Método de 7069 de la Association of Official Analytical Chemists, A.O.A.C., 1980.

**Determinación de la Lignina detergente ácida (LDA):** Compuesto indigestible que reduce la disponibilidad de la celulosa y hemicelulosa. La LDA, representa el porcentaje de lignina en el tejido vegetal. La determinación de LDA se realizó por el Método de 7072 de la Association of Official Analytical Chemists, A.O.A.C., 1980. La hemicelulosa se calcula por diferencia considerando los valores de la FDN, FDA y la LDA.

**Determinación del Extracto No Nitrogenado ENN:** Se encuentran en el contenido celular y se pueden dividir en: a) azúcares simples y sus conjugados activos para el meta-

bolismo intermedio (glucosa, fructosanos) y b) sustancias de reservas (almidón, sacarosa). Su determinación Normalmente se saca por diferencia según la siguiente ecuación:  $ENN = 100 - (FDN + Proteína + Grasa + Cenizas)$ .

**Determinación Humedad y Cenizas** La determinación de humedad y cenizas se realizará por los Métodos 7003 y 7009 de la Association of Official Analytical Chemists, A.O.A.C., 1980.

**Determinación de la relación NPK. (Nitrógeno, Fósforo y Potasio)** Según Metodología recomendada por el Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Métodos Analíticos del laboratorio de Suelos y Standard Methods 4500-N, 4500-P, 3500K.

**Aislamiento del almidón.** La extracción del almidón de la yuca se realizó de acuerdo a los siguientes pasos: (Wistler, R. 64).

-Lavado: Con el fin de retirar tierra y otras impurezas .

- Rallado: Se hace con el fin de desintegrar las células para dejar libre el almidón.

- Tamizado: Que consiste en colar la pulpa que ya ha sido rallada, lavándola con agua abundante, para separar el almidón de la fibra 10 mL H<sub>2</sub>O/g, el tamiz corresponde a un tamaño de grano de 0.1 mm.

El almidón es arrastrado por el agua a través del tamiz y la fibra permanece en éste, con la cual se logra separarlo.

-Sedimentado: Consiste en decantar la lechada que sale del tamiz para separar los gránulos del agua. También sirve para retirar de los gránulos de almidón partículas de fibra y otros materiales indeseables, los cuales se separan por decantación.

-Secado: Tanto el almidón como la fibra se secan en una estufa a 40°C de temperatura y durante 24 horas.

**Determinación de Amilosa y Amilopectina** La determinación de amilosa y amilopectina se realiza por el Método sugerido por Lilo B y Gilbert M. en Methods in Carbohydrate Chemistry. La amilosa es separada del almidón mediante

fraccionamiento con 1-butanol donde se precipita por centrifugación a 3000 rpm por 15min. La fracción de amilopectina gel es lavada y centrifugada varias veces con NaCl al 1%.

## Resultados

Tabla 1. Análisis bromatológico básico del bagazo de caña, como potencial para la producción de etanol

\*Los porcentajes están expresados en base seca.

PARÁMETRO	Humedad Total %	Proteína %	Grasa %	Fibra %	Ceniza %	E.N.N. %	Valor Calórico Kcal/100g
MUESTRA N°1	70.3	10.5	4.4	48.0	5.0	32.1	210.0
MUESTRA N°2	63.2	9.6	2.2	46.9	4.9	36.4	203.8
MUESTRA N°3	65.3	8.5	3.2	50.2	5.4	32.7	193.6
PROMEDIO	66.2	9.5	3.2	48.4	5.1	35.2	202.5

Tabla 2. Análisis bromatológico básico del residuo fibroso de la palma africana, como potencial para la producción de etanol

PARÁMETRO	Humedad Total %	Proteína %	Grasa %	Fibra %	Ceniza %	E.N.N. %	Valor Calórico Kcal/ 100g
MUESTRA DE RESIDUO FIBROSO							
MUESTRA N°1	6.2	14.5	25.0	45.0	4.0	11.5	329.0
MUESTRA N°2	5.4	10.5	18.0	52.0	7.1	12.4	253.6
MUESTRA N°3	5.7	9.8	16.4	50.4	7.8	15.6	249.2
PROMEDIO	5.8	11.6	19.8	49.1	6.3	13.2	277.3

Tabla 3. Análisis bromatológico básico de la yuca raiz sin cáscara, como potencial para la producción de etanol

PARÁMETRO	Humedad Total %	Proteína %	Grasa %	Fibra %	Ceniza %	E.N.N. %	Valor Calórico Kcal/ 100g
MUESTRA DE YUCA RAIZ SIN CASCARA							
MUESTRA N°1	64.8	0.80	0.22	0.92	0.91	87.5	355.2
MUESTRA N°2	63.7	0.72	0.18	0.71	0.85	86.8	351.7
MUESTRA N°3	68.2	0.92	0.27	1.23	0.94	85.4	347.7
PROMEDIO	65.5	0.81	0.22	0.95	0.90	86.5	351.5



Tabla 4. Promedios del análisis bromatológico básico del bagazo de caña, de la yuca raíz sin cáscara y del residuo fibroso de la palma africana como potenciales para la producción de etanol

PARÁMETRO	Humedad Total %	Proteína %	Grasa %	Fibra %	Ceniza %	E.N.N. %	Valor Calórico Kcal/ 100g
MUESTRA							
BAGAZO DE CAÑA	66.2	9.5	3.2	48.4	5.1	35.2	202.5
YUCA, RAÍZ SIN CÁSCARA	65.5	0.81	0.22	0.95	0.90	86.5	351.5
RESIDUO FIBROSO DE LA PALMA	5.8	11.6	19.8	49.1	6.3	13.2	277.3

Tabla 5. Análisis de almidón, celulosa, hemicelulosa y lignina del bagazo de caña, de la yuca raíz sin cáscara y del residuo fibroso de la palma africana como potenciales para la producción de etanol

PARÁMETRO	Almidón %	Celulosa %	Hemicelulosa %	Lignina %
MUESTRA				
BAGAZO DE CAÑA	2.3	38.5	34.4	5.0
YUCA, RAÍZ SIN CÁSCARA	84.0	2.8	0.80	0.12
RESIDUO FIBROSO DE LA PALMA	0.10	44.5	28.0	25.0

### Análisis de resultados

El análisis bromatológico del bagazo de la caña de azúcar muestra porcentajes de fibra y carbohidratos solubles (ENN) importantes para nuestro propósito de producir etanol vía fermentación de los azúcares reductores obtenidos previa hidrólisis de los polisacáridos del bagazo, los altos contenidos de proteína y cenizas, en promedio 9.5 y 5.1 respectivamente, presuponen buena fuente de nitrógeno y sales, fundamentales en los procesos de transformación de los azúcares a etanol por vía microbiana.

El porcentaje promedio de carbohidratos solubles de las muestras de bagazo analizadas son significativamente altos, lo que lo hace aún más atractivo como precursor de etanol.

La fibra total del bagazo, que está distribuida en los porcentajes de celulosa, hemicelulosa y lignina, muestran va-

lores significativos para la celulosa y hemicelulosa y valores bajos en lignina, lo cual indica que la posibilidad de hidrólisis es alta, como es bien sabido cuando se tienen porcentajes altos de lignina las hidrólisis son muy difíciles.

En relación con el residuo fibroso de la palma africana, se encontraron altos contenidos de proteína grasa y fibra, lo que en principio es bueno como precursor de hidrolizados de carbohidratos, pero al discriminar la fibra, se encontró con porcentajes muy altos de lignina lo que indica un alto grado de dificultad hidrolítica, la lignina eclipsa o interfiere en la hidrólisis de la celulosa y hemicelulosa.

Los resultados del análisis de la yuca raíz sin cáscara, nos muestra alto contenido de carbohidratos, diferentes a los carbohidratos de la fibra, representados por la ENN (Extracto No Nitrogenado = almidón, pectina y otros azúcares) que fue del orden del 86.5 en promedio, representado fundamentalmente por el porcentaje de almidón, para nuestros propósitos nos resulta significativamente importante, toda vez que, el ENN es de fácil fraccionamiento hidrolítico, generando así concentraciones altas de azúcares reductores totales con alto potencial de conversión a etanol por acción de las levaduras especializadas para tal efecto.

## Conclusiones

-De acuerdo con el estudio preliminar, las empresas de la región, es decir, de Bucaramanga y su área metropolitana no poseen residuos amiláceos y/o lignocelulósicos abundantes y disponibles para efectos de someterlos a tratamiento para uso potencial en la producción de alcohol carburante.

-Las empresas agroindustriales del orden regional y nacional con residuos amiláceos y/o lignocelulósicos como posibles precursores de bioetanol son: La Industria de la Palma Africana, la Industria de la Caña de Azúcar y la Industria de La Yuca.

-Por cada tonelada de fruto de palma procesada para obtener aceite de palma crudo se generan 0.7 toneladas de residuos, si consideramos la producción del 2002, según Fedepalma, de 528.400 toneladas, estamos hablando de unas 370.000 toneladas de residuo fibroso potenciales para el tratamiento a alcohol carburante.

-Por cada tonelada de azúcar que se obtiene de la caña se derivan 5 toneladas de bagazo, si consideramos la estadísticas de Cenicaña de 2 millones de toneladas de azúcar producidas en el 2002, tenemos entonces alrededor de 10 millones de toneladas de bagazo, igualmente potenciales para la conversión, vía química y microbiológica a etanol.

-De acuerdo con el Ministerio de Agricultura, Colombia en el 2001 produjo 2 millones de toneladas de yuca, en 180.000 ha de cultivo, de las cuales se desperdician alrededor del 5%, lo que corresponde a 100.000 toneladas de yuca, con un valor potencial muy alto para producir etanol.

-De acuerdo con los resultados obtenidos del análisis del contenido de almidón en la yuca que está del orden del 80%, se tienen entonces 80.000 toneladas de almidón que teóricamente se pueden obtener unos 240.000 metros cúbicos de etanol.

-El residuo fibroso de la palma africana, en principio no es apto para la producción de etanol, por poseer un alto contenido de lignina, que es la que dificulta la fase de hidrólisis para la obtención de azúcares fermentables.

-El bagazo de caña de azúcar por su composición química, buen porcentaje de celulosa, hemicelulosa y baja en lignina, resulta ser un precursor ideal para la obtención de hidrolizados de polisacáridos.

-Los resultados de la caracterización de la yuca muestran un alto contenido de almidón, que es de fácil hidrólisis, si la comparamos con la hidrólisis de la celulosa o la hemicelulosa, esto quiere decir, que en la yuca tenemos un potencial superior para la bioproducción de etanol.

## Bibliografía

1. Abouzied. M. M., Reddy, A. C., Direct Fermentation of Potato Starch to Ethanol by Cocultures of *Aspergillus niger* and *Saccharomyces cerevisiae*., *Appl. Environ. Microbiol.* 52(5), 1055-1059 (1986).
2. Aibara, S., Yamashita H., Morita, Y., Molecular Shape and Packing in Crystals of Soybean Alpha-Amylase., *Agric. Biol. Chem.*, 48(6), 1575-1579 (1984).
3. Alexander, N. J., Genetic Manipulation of Yeast for Ethanol Production from Xylose. *Food technol.*, 40 p. 99-103, (1989).
4. AOAC. Oficial Methods of Analysis of the Association Oficial Anality Chemist. De. Sidney William. 1984.
5. Ballesteros M., Martínez J. y Carrasco J. Obtención de Bioalcohol. *Ingeniería Química. Madrid España Febrero 1994.*
6. Ballesteros, R. *Revista Coyuntura Colombiana, Centro de Estudios Ganaderos y Agrícolas N°54 de Diciembre de 1995.*
7. Ballesteros, I.; Oliva, J.M.; Ethanol production from lignocellulosic byproducts of olive oil extraction. *Applied Biochemistry and Biotechnology*, 2001, vol. 91-93, p. 237-252. 1998
8. Ballesteros, M. Estado del desarrollo tecnológico del aprovechamiento de biomasa: Biocombustibles para el sector del transporte. *Energía*, 2001, vol.161, p: 29-34.
9. Ballesteros, M. Biocombustibles para el transporte. *Tecnologías Energéticas e Impacto Ambiental. McGraw-Hill, 2001, p. 357-370.*
10. Banerjee, M., Debnath, S., Majumdar, S. K., Production of Alcohol from Starch by Direct Fermentation., *Biotechnol. Bioeng.*, 32, 831-834 (1988).
11. Bucholz, S. E. y M. M. Dooley. Growth of *Zymomonas* on Lactose. *J. Ind. Microbiol.*, 4, pp. 19-27, (1992).
12. Buzás, Zs., Dallmann, K., Szajáni, B., Influence of pH on the Growth and Ethanol Production of Free and Immobilized *Saccharomyces cerevisiae* Cells., *Biotechnol. Bioeng.*, 34, 882-884 (1989).
13. Carrizales, V., Producción de Enzimas Extracelulares en Cultivo Semisólido. *Biotecnología de Enzimas, UNAM, 1983.*
14. Cohen, Georges. *Microorganismos y Biología Molecular. Ediciones Omega, S.A., Barcelona, 1977*
15. Demain A, and Solomon N. *Manual of Industrial Microbiology and Biotechnology. American Society for Microbiology, Washington, D.C. 1986.*
16. El-Aassar, S. A., Omar, S. H., Gouda, M. K., Ismail, A. M., Abdel-Fattah, A. F., Purification of  $\alpha$ -Amylase from *Bacillus lentus* cultures., *Appl. Microbiol. Biotechnol.*, 38, 312-314 (1992).
17. Escalante H. Humberto. Aislamiento y purificación de amilasa alfa y beta a partir de un extracto enzimático de *Manihot Sculenta*, Tesis de Grado, Ingeniería Química. UIS, 1987.
18. Fabre, F. A UV supersensitive mutant in the yeast *Schizosaccharomyces pombe*. *Molec. Gen. Genet.*, 110:134-143, 1981.
19. Farahnak, F. et al., Construction of Lactose Assimilating and High Ethanol Producing Yeast by Protoplast Fusion. *Appl. Environ. Microbiol.* 5, p. 362-367, (1992).
20. Fujii, M., Homma, T., Taniguchi, M., Synergism of alpha Amylase and Glucoamylase on Hydrolysis of Native Starch Granules., *Biotechnol. Bioeng.*, 32, 910-915 (1988).
21. García G. Mariano, Quintero R. Rodolfo y López M. Agustín; *Biotecnología Alimentaria. Limusa Noriega Editores. Mexico, 1993.*
22. Godfrey, T. y Reichelt, J. *Industrial Enzymology, The Nature Press, 1983.*
23. Graber M., Combes D., Action Pattern of Alpha-Amylase from *Aspergillus oryzae* in Concentrated Media., *Biotechnol. Bioeng.* 36, 12-18 (1990).
24. Goulter, P. R., Potter, O. E., The Rate at Which Starch Becomes Suceptible to Hydrolysis by Enzymes., *Ind. Eng. Chem.*, 13(4), 324-327 (1984).
25. Grosz, R., Stephanopoulos, G., *Physiological, Biochemical, and Mathematical Studies of Micro-Aerobic Continuous Ethanol Fermentation by Saccharomyces cerevisiae. I: Mathematical Model of Cellular Energetics and Catabolism.*, *Biotechnol. Bioeng.*, 36, 1030-1040 (1999).
26. Guerrero R. *Diagnóstico de la Fertilidad del Suelo. Sociedad Colombiana de la Ciencia del Suelo. Bogotá. 1980.*
27. Hao, L. CH., Fulmer, E. Y., Underkofler, I. A., Alcoholic Fermentation of Corn., *Industrial and Engineering Chemistry*, 35(7), 814-818 (1993).-
28. Hobley, T. J., Pamment, N. B., Differences in Response of *Zymomonas mobilis* and *Saccaromyces cerevisiae* to Change in Extracellular Ethanol Concentration., *Biotechnol. Bioeng.*, 43, 155-158 (1994).
29. Hong, J. and Lee, C. K. Unsteady-state operation of continuous fermentor for enhancement of cell mass production. *Biotechnol. Bioeng.* 30, 187 (1987)

30. Hyun, H. H., Zeikus, J. G., *Simultaneous and Enhanced Production of Thermostable Amylases and Ethanol from Starcha by Colcultures of Clostridium thermosulfurogenes and Clostridium thermohydrosulfuricum.*, *Appl. Environ. Microbiol.* 49(5), 1174-1181 (1985).
31. Kato, Y., Mikuni, K., Hara, K., Hashimoto, H., Nakajima, T., Kobayashi, S., Kainuma, K., *The Structure of High Molecular Weight Dextrins Obtained from Potato Starch by Treatment with Bacillus macerans Enzyme.*, *J. Ferment. Technol.*, 66 (2), 159-166 (1990).
32. Kim Hock; Lynda Ferguson and Carlton Constance. *Conversion of Cassava Starch to Biomass, Carbohidrates, and Acids by Aspergillus niger.* *J. Appl. Biochem.* 80-90 (1984).
33. Manzanares, P. *Bioetanol a partir de biomasa lignocelulósica: una opción cercana.* *Infopower*, 2000, vol. 31, p: 99-109. 1997
34. Negro, M.J.; Ballesteros, M. *Effect of particle size on steam explosion pretreatment of herbaceous agricultural wastes.* In *1st Conference on Biomass for Energy and Industry.* James & James (Science Publishers), 2001. p. 414-417. 1996
35. Nielson, J. *Rapid determination of Starch: An index to maturity in starchy vegetables,* *Industrial & Engineering Chemistry (Analytical Edition)* 15 (3), 1963.
36. Prentis, S. *Bioteología, Biblioteca Científica Salvat, Salvat Editores,* (1986).
37. Quintero R. Rodolfo, *Ingeniería Bioquímica. Teoría y Aplicaciones.* Ed. Alambra. Mexico, 1981.
38. *Standard Methods for the Examination of Water, Wasterwater and Soil.* American Public Health Association. 18Th Edition 1992. Washington DC.
39. Whistler Roy L., Bemiller James N. "STARCH": *Chemistry and Technology.* Academic Press. 1984  
<http://www.baff.nu/start.cfm>  
<http://www.bcentral.com/resources/news.asp?LID=33028>  
<http://www.ars.usda.gov/is/espanol/pr/2002/020415.es.htm>  
<http://www.sagarpa.gob.mx/Forma/documentos/ingenio03.htm>  
<http://www2.safagava.edu/webciencia/COCH3.html>  
[http://www.mct.gov.br/clima/espan/comunic\\_old/bagaco02.htm](http://www.mct.gov.br/clima/espan/comunic_old/bagaco02.htm)  
<http://cipres.cec.uchile.cl/~mderout/Taller2.html>

## Efecto doppler de una fuente sonora con movimiento armónico simple

Ligia Beleño Montagut, Ing. Luis A. Prada  
Martínez, Jáder E. Guerrero Bermúdez,

## **Efecto doppler de una fuente sonora con movimiento armónico simple**

Jáder E. Guerrero Bermúdez, Luis A. Prada Martínez y  
Ligia Beleño Montagut  
Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería  
Departamento de Matemáticas y Ciencias Naturales  
e-mail: lbeleno@unab.edu.co  
e-mail: aprada@unab.edu.co

### **Resumen**

Se presenta una experiencia demostrativa que permite cuantificar el corrimiento Doppler de la frecuencia emitida por una fuente que oscila armónicamente en relación con un observador en reposo. La fuente sonora se acopla a un oscilador masa-resorte, y se somete a un movimiento oscilatorio con velocidades mucho menores que la velocidad del sonido en el medio, esto origina un desplazamiento armónico en la frecuencia de la señal sonora. La evolución temporal de la frecuencia observada por un receptor en reposo es visualizada en un espectrograma. Se confronta el modelo teórico con el experimento.

**Palabras claves:** Efecto Doppler, espectrograma Doppler, movimiento armónico simple

### **Abstract**

The Doppler effect of a source moving with harmonic simple motion is present. The emphasis is placed when the source oscillates with velocity lower than the speed of sound in the medium. The temporal evolution of the frequency observed by a receptor staying in rest is displayed in a spectrogram.

Mathematical considerations and experimental results are given.

**Keywords:** Doppler effect, Doppler spectrogram, harmonic simple motion

## 1. Introducción

El efecto Doppler acústico es un fenómeno ondulatorio bien conocido y se produce debido al movimiento relativo entre una fuente sonora y un observador. El efecto Doppler, también llamado corrimiento Doppler, se caracteriza por el cambio de la frecuencia observada respecto a la frecuencia emitida por la fuente sonora.

Clásicamente el estudio del efecto Doppler en ondas elásticas y en ondas electromagnéticas, toma parte de los cursos de física general para estudiantes de ciencias básicas, ingeniería y ciencias de la salud; a pesar de su importancia en la comprensión y manejo de diversos dispositivos tecnológicos, por ejemplo, las herramientas de inspección ultrasonográfica médica e industrial y los instrumentos para la medición de velocidades, el énfasis experimental en estos cursos, reside en las demostraciones cualitativas y muy pocas cuantitativas.

Generalmente el equipo básico para las demostraciones cuantitativas del efecto Doppler requiere transductores ultrasónicos, tanto para la emisión como para la recepción de la señal<sup>[1]</sup>, sin embargo, recientemente algunas experiencias de carácter didáctico para ilustrar el corrimiento Doppler, con relativo bajo costo y facilidad de implementación han sido propuestas empleando transductores en el rango de las ondas sonoras (audibles)<sup>[2,3]</sup>.

En este trabajo se propone una experiencia demostrativa, que permite la determinación cuantitativa del corrimiento Doppler de la frecuencia emitida por una fuente sonora que se mueve con movimiento armónico simple (M.A.S).

Inicialmente se hacen las consideraciones teóricas del procedimiento propuesto, enseguida se describe el montaje experimental; posteriormente se consideran aspectos básicos de un espectrograma Doppler y finalmente se presentan los resultados y conclusiones.

## 2. Marco Teórico

Un receptor en reposo, relativo al medio de propagación de una onda sonora, observa en su marco de referencia, una frecuencia mayor que la frecuencia emitida por una fuente, cuando ésta se acerca hacia él; contrariamente la frecuencia observada en el marco del receptor, es menor que la frecuencia de la fuente si ésta se aleja del receptor.

En la figura 1.a se muestran los frentes de onda en el marco de referencia de la fuente. En la figura 1.b, se presentan los frentes de onda en el marco de referencia de un observador en reposo. Un receptor delante de la fuente,  $S$ , observa un acortamiento en la longitud de onda,  $\lambda_o$ , es decir un incremento en la frecuencia en comparación con la frecuencia de la fuente. Un receptor atrás de la fuente registra un alargamiento en la longitud de onda o de manera equivalente una disminución en la frecuencia.

La frecuencia observada,  $f_o$ , en el marco de referencia del receptor, cuando la fuente con frecuencia  $f_s$ , se mueve sobre la línea que los une con una velocidad  $v_s$  está dada por la expresión

$$f_o = \frac{f_s}{\left(1 \pm \frac{v_s}{u}\right)} \quad (1)$$

donde  $u$ , es la velocidad del sonido en el medio<sup>[4]</sup>. El signo (+) en la ecuación (1), se utiliza en el caso de alejamiento de la fuente con relación al receptor y el signo (-) en caso de acercamiento.

Si la fuente sonora presenta un movimiento armónico simple (M.A.S), con período  $T$ , frecuencia angular,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  y con amplitud constante,  $A$ ; se puede mostrar que su velocidad variará armónicamente con el tiempo

$$v_s(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

en la ecuación anterior  $\varphi$  es la fase inicial o constante de fase.

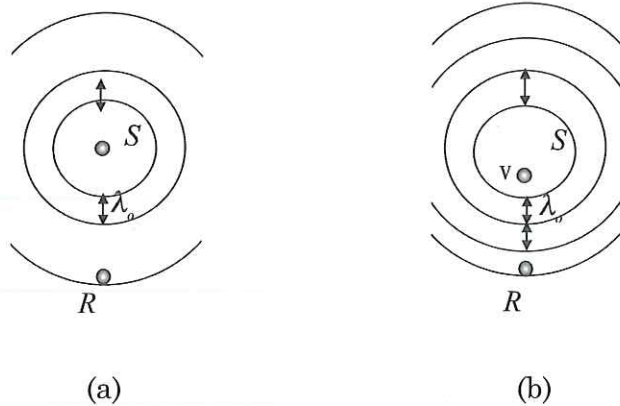


Figura 1. Propagación de una onda sonora a partir de una fuente (a) en reposo y (b) con velocidad constante

Reemplazando  $v_s$  en la ecuación (1), se tiene para la frecuencia observada,

$$f_o = \frac{f_s}{\left(1 + \frac{\omega A \cos(\omega t + \varphi)}{u}\right)} \quad (3)$$

Cuando la máxima velocidad alcanzada por la fuente sonora con un M.A.S,  $v_{max} = \omega A$ , es mucho menor que la velocidad del sonido en el medio. La expresión (3) puede desarrollarse en serie y aproximarse hasta el término lineal, mediante

$$f_o \approx f_s \left(1 - \frac{\omega A \cos(\omega t + \varphi)}{u}\right) \quad (4)$$

con  $\omega A \ll u$ . En esta aproximación, la ecuación (4) muestra un corrimiento Doppler  $\Delta f$  armónico y proporcional a la frecuencia real emitida por la fuente sonora,  $f_s$ .

$$\Delta f = f_o - f_s \approx f_s \frac{\omega A \cos(\omega t + \varphi)}{u} \quad \text{con } \omega A \ll u \quad (5)$$

### 3. Descripción del montaje

La fuente sonora empleada en la experiencia, consta de un *tweeter* piezoeléctrico, con un rango de emisión de frecuencias entre los 5 kHz - 20 kHz acoplado a un generador de señales. La fuente se suspende de un resorte de constante de fuerza  $k$  de  $32.6 \pm 0.4$  N/m. La masa,  $m$ , que oscila es  $200 \pm 0.1$ g (ver figura 2).

El sistema masa-resorte proporciona un movimiento armónico simple a la fuente, respecto al marco de referencia

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.5 \text{ s, y frecuencia angular } \omega = 12.5 \text{ s}^{-1}.$$

El receptor es un micrófono con ancho de banda entre (100 Hz y 12kHz) y permite el registro de la señal sonora en formato digital mediante una tarjeta de sonido y un ordenador.

El sonido es digitalizado a una tasa de 22.050 Hz, codificado a 8 bytes y posteriormente procesado numéricamente mediante el software *Matlab 6.1*.

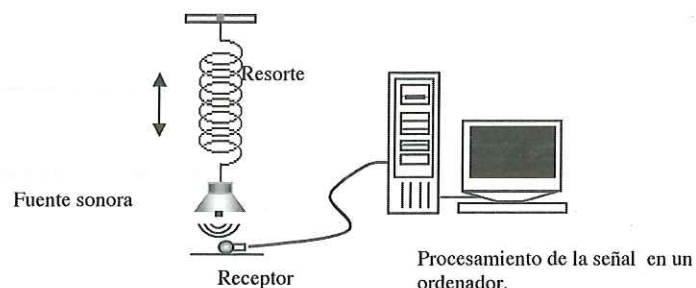


Figura 2. Equipo para determinar el corrimiento Doppler de una fuente sonora que se mueve con movimiento armónico simple.

#### 4. Espectrograma

Un espectrograma ó diagrama tiempo-frecuencia, resulta útil para visualizar la evolución temporal del corrimiento Doppler de la frecuencia emitida por la fuente sonora al someterse a un movimiento armónico simple.

El espectrograma es un arreglo matricial, con columnas constituidas por la magnitud de la transformada de Fourier de segmentos de la señal sonora tomados a intervalos regulares de tiempo. Estos segmentos constituyen vectores que pueden traslaparse y sobre los cuales las propiedades

espectrales son aproximadamente estacionarias. En vectores demasiado largos las propiedades espectrales pueden cambiar significativamente, contrariamente, un segmento demasiado corto podría no ser representativo para la estimación espectral en un tiempo determinado.

#### 5. Resultados

Inicialmente se observa el máximo corrimiento Doppler, para diferentes frecuencias comprendidas entre 5.000 Hz y 11.000 Hz (ver figura 3). La fuente sonora se somete a una oscilación armónica con amplitud,  $A = 0.05 \pm 0.01 \text{ m}$ , que le proporciona una velocidad máxima  $V_{Max} = \omega A = 0.63 \text{ m/s}$ , mucho menor que la velocidad del sonido en el aire a  $24^\circ\text{C}$ . ( $u \approx 345 \text{ m/s}$ ), esto permite emplear la ecuación (5).

La curva de tendencia en la figura 3, indica un aumento lineal del corrimiento Doppler con la frecuencia emitida por la fuente, por ejemplo, para una frecuencia cercana a los 10.000 Hz, se presenta un corrimiento aproximado de  $18 \pm 2.5 \text{ Hz}$ .

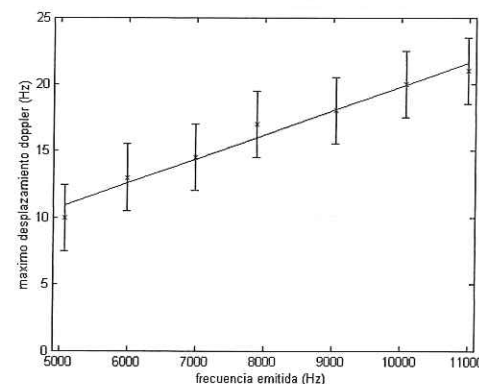


Figura 3. Máximos corrimientos Doppler en función de la frecuencia emitida por la fuente



La frecuencia emitida por la fuente es 9998 Hz y su evolución temporal debido a las oscilaciones de la fuente se observa en el espectrograma de la figura (4). La transformada de Fourier se realiza sobre 4096 muestras de la señal sonora, a intervalos de aproximadamente 6 ms de duración (128 muestras). El segmento de la señal es multiplicado por una ventana de *Hanning* del mismo tamaño; este procedimiento es muy común en la estimación espectral y aumenta su precisión.

En la figura (4), se muestra la magnitud de la transformada de Fourier para valores mayores de 60 db., durante los primeros 1.5 s de movimiento de la fuente. En la figura (5) se toman los valores máximos de la transformada de Fourier para diferentes tiempos, y se comparan con la curva teórica, en el límite de  $V_{Max} \ll U$ , dada por la ecuación (4). La curva se ajusta para la mayor cantidad de puntos dentro del intervalo de incertidumbre de  $\pm 2.5$  Hz.

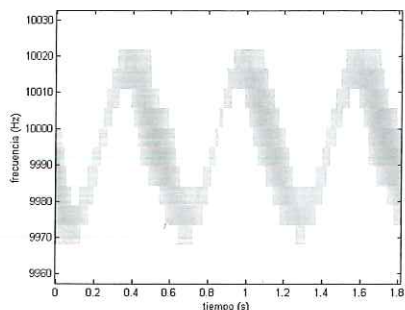


Figura 4. Espectrograma, mostrando las

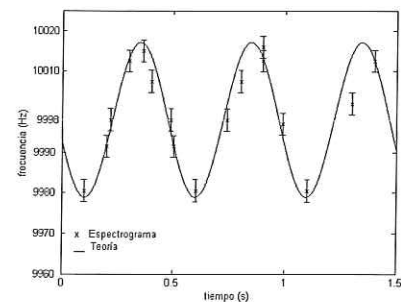


Figura 5. Comparación de los valores componentes espectrales con pesos de la frecuencia observada, tomados superiores a los 60 db. del espectrograma y valores teóricos.

Una transformada de Fourier de la totalidad de la señal sonora emitida por la fuente es mostrada en la figura 6. En ella se aprecia el ancho espectral para valores superiores a 70 db y se observa la coincidencia con el desplazamiento Doppler máximo de  $\approx \pm 18$  Hz.

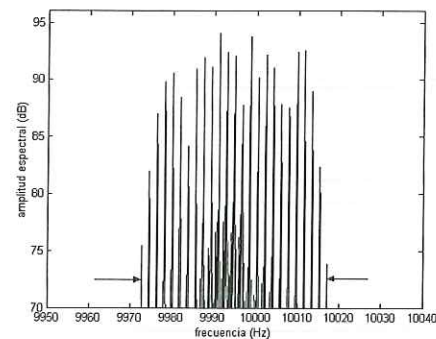


Figura 6. Transformada de Fourier de la señal de la Fuente sonora al moverse con M.A.S

## 6. Conclusiones

Se ha presentado una experiencia demostrativa que permite cuantificar el corrimiento Doppler de la frecuencia de una señal sonora emitida por una fuente que se mueve con una oscilación armónica.

La coincidencia entre el modelo teórico y los datos obtenidos de un espectograma permite validar la experiencia.

En trabajos futuros podría considerarse tanto el tratamiento de rangos con velocidades cercanas a la velocidad del sonido, como el cambio en la posición del receptor.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería de la Universidad Autónoma de Bucaramanga por el préstamo de sus equipos en el desarrollo de esta experiencia.

## Referencias

1. *Catalogue of Physics Experiments Leybold Didactic GmbH. 2001, Germany. p.p 58.*
2. Saba, Marcelo, Da S. Rosa Rafael. *The Doppler effect of a sound source moving in a circle. The Physics Teacher. vol. 41 February 2003 p.p 89-91.*
3. Saba, Marcelo, Da S. Rosa, Rafael *A quantitative demonstration of the Doppler effect. The Physics Teacher. vol 39. Octubre 2001. p.p 431-433.*
4. Alonso, M. y Finn, E. *Física, Pearson Educación. México 1995. p.p 655-656.*

# Modelos matemáticos para procesos de mercado

Henry Lamos Díaz, Ph.D., Luis Alfredo Rojas



HEMEROTECA

## **Modelos matemáticos para procesos de mercado**

Henry Lamos Díaz Ph. D., e-mail: hlamos@unab.edu.co  
Luis Alfredo Rojas, e-mail: lrojas@unab.edu.co

### **Resumen**

En la actualidad la dinámica de las empresas ha obligado el desarrollo de sistemas organizacionales complejos, al cuyo análisis requiere de modelos conceptuales llamados también diagramas de flujos, modelos estructurales o modelos causales. La construcción de Modelos Matemáticos en Ingeniería de Mercados es de desarrollo reciente. El presente artículo pretende dar cierta orientación sobre el uso e importancia de los Modelos Matemáticos que pueden ser usados como herramienta en los procesos de toma de decisiones; es decir mediante la modelación matemática lograr conocer, entender e interpretar los fenómenos del Mercado. El término de Modelo en el presente trabajo se refiere a un conjunto de ecuaciones que relaciona variables y parámetros en la descripción de un proceso o sistema.

### **Abstract**

At the present time the dynamics of the companies has forced the development of complex organizational systems whose analysis requires of models conceptual calls diagrams of flows, structural models or causal models. The construction of Mathematical Models in Engineering of Markets is of recent development. The present article seeks to give certain orientation about the use and importance of the Mathematical Models that can be used as tool in the processes of taking of decisions; that is to say through the modeling to be able to know, to understand and to interpret the phenomena of the Market. The term model, as used in this work, is understood to refer to the ensemble of equations which describe and interrelate the variables and parameters of process o system. The term modeling in turn refers to the derivation of appropriate equations that are solved for a set of system or process variables and parameters.

## 1. Introducción

Robert Frost sugirió que un poema es una forma concisa de expresión que por definición, no puede traducirse nunca con suficiente precisión. Eso mismo puede decirse de las matemáticas: la mejor manera de comprender y apreciar la belleza de una ecuación es verla como descripción del "mundo".

Por la complejidad de los problemas de Mercados en la toma de decisiones el Ingeniero de Mercados no sólo debe contentarse con una descripción verbal del objeto o medio (la cual es muy importante), sino que debe ser capaz de dar una formulación matemática del proceso u objeto de estudio, es decir, describir matemáticamente los factores esenciales del proceso y sus interrelaciones. La descripción verbal se realiza en términos de relaciones entre las variables significativas, por ejemplo, el precio, publicidad, tamaño de mercado, ambiente de competencia, demanda o en términos de diagramas de flujo. En el proceso de la formulación del Modelo Matemático para las variables pertinentes se postulan relaciones en forma de leyes ("ley de la conservación de la energía", "ley del momentum"), fórmulas, teorías, todo esto es lo que constituye la idealización del "mundo real" al "mundo matemático".

Un modelo se dice que es satisfactorio, si es satisfactorio para el proceso de toma de decisiones, en caso contrario se dice que no es satisfactorio. Un modelo matemático satisfactorio está sujeto a dos requisitos contradictorios. Debe ser suficientemente detallado para representar la situación del mundo real con relativa exactitud, y aun así debe ser lo suficientemente sencillo para resolver las correspondientes ecuaciones (hacer un análisis matemático). Si el modelo es demasiado detallado en la representación del mundo real, entonces el análisis matemático puede ser demasiado difícil de llevar a cabo. Si el modelo es demasiado simple, los resultados de predicción pueden ser demasiados pobres e

imprecisos que sean inútiles; por lo tanto, hay un compromiso ineludible entre lo que es físicamente realista y lo que es matemáticamente posible.

## 2. Modelación matemática

La modelación es el proceso de reconstrucción de un proceso natural de su "medio" a una forma llamada modelo, el cual puede analizarse por medio de técnicas que entendemos y en las que confiamos. Un modelo es un dispositivo que ayuda al investigador a predecir o explicar el comportamiento de un fenómeno, experimento o suceso. Por ejemplo, para pronosticar la cantidad total de personas que verán un comercial de publicidad, es claro que sola la intuición no nos alcanza para determinar claramente el alcance del comercial. En la figura 1 se ilustra el uso de modelos para explicar los resultados de una situación observable.

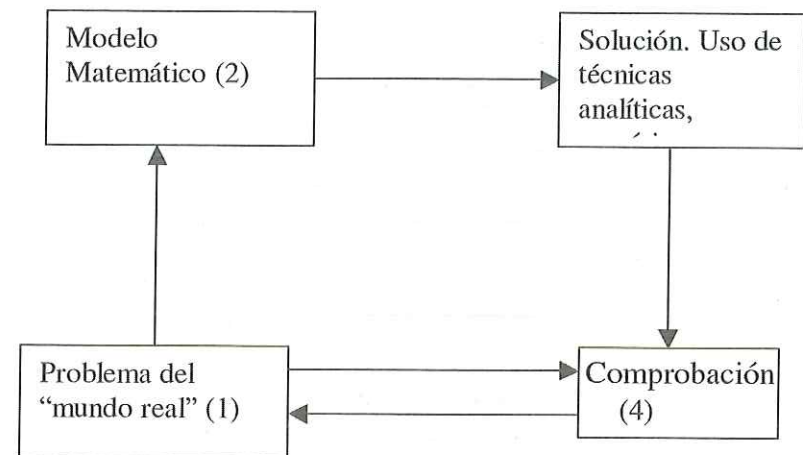


Figura 1

A amplias partes del ambiente natural (el punto 1 de la figura) se les da una expresión matemática mediante un modelo general en el que todos los resultados quedan descritos por algunos principios básicos (el punto 2 de la figura); la traducción del mundo real al mundo matemático por medio de operadores o ecuaciones, luego se resuelve el problema matemático (a menudo con una simulación en la computadora) (punto 3) y el resultado se interpreta en el entorno natural del problema (punto 4).

De manera general el primer paso en la formulación matemática de un problema real es el diseño de la estructura del modelo, esto es, la descripción cualitativa del proceso usando ciertos operadores o ecuaciones. Este procedimiento se llama **IDENTIFICACIÓN ESTRUCTURAL**. Frecuentemente los Modelos Matemáticos básicos para la descripción de procesos están constituidos por operadores diferenciales.

**TIP.** Las ecuaciones diferenciales ordinarias suelen surgir en las aplicaciones como resultado de un principio fundamental: si  $y(t)$  denota una magnitud de interés en el instante  $t$ , entonces la tasa de cambio  $y'(t)$  puede calcularse como el caudal de entrada menos el de salida "ley de equilibrio". Los modelos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias se denominan modelos con "parámetros concentrados" y los modelos descritos por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se llaman modelos con "parámetros distribuidos".

El segundo paso en la descripción de un problema matemático es la identificación de sus parámetros (reflejos de las propiedades o la composición del sistema). Este paso se conoce como **IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA**.

La identificación estructural y la identificación paramétrica de los procesos están fuertemente unidas a la solución de problemas inversos para ecuaciones diferenciales.

Cuando dos clases de magnitudes se relacionan en una dependencia unidimensional causa-efecto y el fin es establecer una relación tipo causa-efecto, es decir dada la

causa encontrar el efecto, estaremos tratando con un problema directo. Si algunas características causales necesitan ser recuperadas a través de cierta información sobre los campos físicos entonces se tiene un problema inverso.

El no cumplimiento de la relación causa-efecto que tiene lugar en el planteamiento del problema inverso puede llevarnos a un problema matemático mal puesto, frecuentemente a la inestabilidad de la solución; denominada sensibilidad/continua respecto a los datos. Por lo tanto, los problemas inversos representan ejemplos típicos de problemas mal planteados.

**TIP.** En resumen podemos decir que un Modelo Matemático es una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales del fenómeno o proceso físico en términos matemáticos, estos es:

**Var. Dep = f (var .ind, param, func. de fuerzas)**

donde, Var.dep es la variable dependiente; es una característica o varias características que generalmente refleja(n) el comportamiento(s) o estado(s) de un sistema; var.ind son las variables independientes, generalmente dimensiones tales como el tiempo, espacio, a través de las cuales el comportamiento será determinado, los parámetros son reflejos de las propiedades o la composición del sistema, suelen ajustarse para "sintonizar" el comportamiento de la respuesta deseada y func. de fuerzas son las funciones de fuerzas las cuales son influencias externas que actúan sobre el sistema.

## 2.1 Pasos para construcción de modelos matemáticos (mm)

Para la construcción de un modelo matemático se requiere habilidad, imaginación y evaluación objetiva. En la formulación del problema se requiere una comprensión del área del problema, lo mismo que de las matemáticas correspondientes.

Las siguientes preguntas son simplemente lineamientos generales que le permiten al investigador seguir una metodología para la construcción del Modelo que representará su realidad.

¿Cuáles son las hipótesis a usar?

¿Cuáles son las dimensiones físicas de las variables?

¿Es el modelo generado internamente consistente en el sentido de que las ecuaciones no se contradigan entre sí?

¿Qué tan difícil resulta obtener las soluciones?

¿Existen soluciones de las ecuaciones que describen el mundo "físico" que se está modelando?

¿Proporcionan las soluciones una respuesta del problema en estudio?

Después de haber sido resueltas las cuestiones anteriores, se debe ir refinando el modelo en cada etapa de validación del modelo, lo cual constituye una prueba de que el modelo se puede utilizar para predecir resultados. Es de anotar nuevamente que un modelo no es la descripción total de una realidad, sino sólo una representación (un retrato) en el lenguaje de las matemáticas. Como todos los retratos, el modelo destaca ciertas características del original y distorsiona otras. Modelos más refinados pueden proporcionar una mejor comprensión de los procesos de la naturaleza, pero podrían traer como consecuencia una dificultad mayor para su solución bien sea analítica o numérica.

Ejemplo de una Ley. **Ley de la Gravitación Universal**

**1. Manzanas y naranjas.** Casi todo el mundo conoce en mayor o menor grado el nombre y la reputación de Isaac Newton (1642-1727), ya que su fama universal como descubridor de la Ley de la Gravitación Universal se ha mantenido incólume a lo largo de los siglos desde su muerte. La ley reza así

$$F = \frac{G \times M \times m}{d^2}$$

donde  $G$  es una constante,  $M, m, d$  son las masas de los cuerpos y la distancia a la que se encuentran. Pero cuál es el significado de esta ley, simplemente podemos decir que el tirón gravitatorio de la Tierra se debilita cuanto más lejos se está de la Tierra y se debilita con el cuadrado de la distancia. Por ejemplo, una manzana dos veces más lejos de la Tierra notaría un tirón equivalente a la cuarta parte. (En otras palabras, la fuerza se divide por cuatro, el cuadrado de dos). Una manzana tres veces más lejos de la Tierra notaría un tirón nueve veces menor, y así sucesivamente. En un lugar tan distante como la Luna, el tirón de la Tierra sería desde luego débil pero seguiría existiendo.

TIP. "Newton había desvelado que buena parte de lo que el Universo había sido, era y sería, era el resultado de una infinidad de partículas materiales que tiraban unas de otras simultáneamente. El resultado de la pelea gravitatoria (los cielos de Aristóteles) que les había parecido a los griegos un cosmos era sencillamente porque la ecuación subyacente que describía su comportamiento había resultado ser un auténtico cosmos en sí: ordenada, bella y decorosa." [2]  
A continuación daremos una serie de ejemplos sencillos que nos permiten ver la metodología en la construcción de un Modelo Matemático.

## 1. UN MODELO DE RESPUESTA AL MERCADO

**MODELO DE VENTAS.** En muchas situaciones se modelan tasas de cambio que de hecho son instantáneas. Por ejemplo, el flujo de calor de un cuerpo caliente o frío ocurre continuamente, por lo que hay una tasa (razón) instantánea de cambio de la temperatura. En otros casos, como en los modelos de poblaciones, se aproxima la tasa media de cambio de la población por la tasa instantánea de cambio de la población. Las tasas son una derivada con respecto del tiempo.

Supongamos que  $N(t)$  representa el número de individuos en una población bajo la influencia de determinado comercial publicitario en el momento de tiempo  $t$  (medido en semanas);

entonces la tasa de cambio neto de individuos de la población que ven el comercial por semana es .

$$\frac{dN}{dt} = N'(t)$$

Según investigaciones de mercados se pronostica que habrá un límite de K personas que verán el anuncio. El propósito es determinar el comportamiento a través del tiempo de las personas que son influenciadas por el comercial.

**HIPOTESIS A USAR:** ¿Cómo podemos determinar la relación funcional entre N y t.? Una suposición simple es pensar que la tasa con que crece o decrece la cantidad de individuos bajo la influencia del comercial sólo depende del número presente de personas que ven el comercial y no de mecanismos dependientes del tiempo, esto es  $N'(t) = f(N)$ , donde  $N'(t)$  denota la derivada de N respecto al tiempo. Ahora es necesario modelar la forma de la función f(N). Ya que la cantidad de personas que verán el comercial es K entonces de la ecuación diferencial tenemos que  $f(K)=0$ ; si tomamos a  $f(0)=r$ ; podemos tener varias funciones que satisfacen estas condiciones. La hipótesis más sencilla es que la función f(N) sea lineal; esto es  $f(N) = c^1 + c^2N$ .

O bien podríamos asumir que la función f(N) es un polinomio de grado 2 o más. ¿Cuál es el polinomio más adecuado? Generalmente se empieza con un modelo más bien sencillo (tomamos a f(N) como una función lineal), si el modelo no resulta satisfactorio para los fines de predicción, podemos entonces tomar la función como un polinomio de mayor grado, por ejemplo, una función cuadrática, obteniendo en este caso la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N\left(r - \frac{r}{K}N\right); \\ N(0) &= N_0 \end{aligned} \quad (1)$$

La solución del problema esta dada por la fórmula

$$N(t) = \frac{aN_0}{bN_0 + (a - bN_0)e^{-at}}, \quad N(0) = N_0, \quad a = r, \quad b = \frac{r}{K}. \quad (2)$$

Esta fórmula nos indica el comportamiento del sistema dinámico que estamos modelando, esto es la dependencia de N con respecto al tiempo t; al variar los parámetros r, K,  $N_0$  podemos observar la dependencia de N(t) respecto a los parámetros.

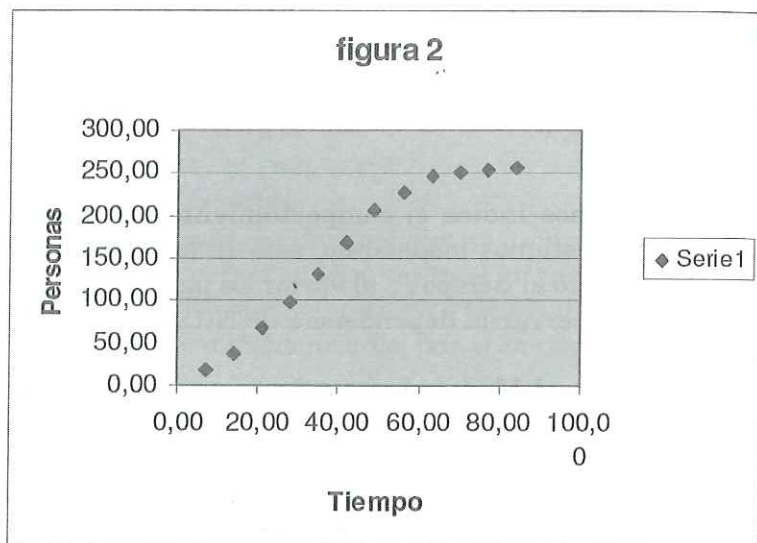
A continuación el Modelador puede preguntarse si esta formulación "es satisfactoria para la descripción del mundo real"; si este es el caso puede usar su Modelo bien sea para fines predictivos o para la toma de decisiones. A continuación presentamos un experimento numérico.

#### Experimento numérico.

Supóngase que tenemos el siguiente conjunto de datos obtenidos de comerciales similares para nuestro producto

Tiempo (días)	Número de personas que ven el comercial (Unidades de 1000)
7	17.93
14	36.36
21	67.76
28	98.10
35	131.00
42	169.50
49	205.50
56	228.30
63	247.10
70	250.50
77	253.80
84	254.50

Este conjunto de datos se grafica en la figura (diagrama de dispersión de las variables versus )



Queremos determinar si el modelo propuesto anteriormente se ajusta al conjunto de datos. Nótese que existen tres constantes desconocidas en la solución:  $N_0, a, b$ . Usando algún software adecuado determinamos las constantes y remplazando en la ecuación (2) tenemos.

$$N(t) = \frac{12.94}{e^{-0.087t} + 0.0498}$$

Ahora evaluemos la función para los diferentes tiempos que se muestran en la tabla de arriba, esto es  $N(t)$ ; los resultados después de la evaluación son: 21.796, 37.44, 61.416, 94.239, 132.86, 170.97, 202.57, 225.21, 239.78, 248.53, 253.57, 256.39. Como se puede observar son bastante similares a los datos reales.

Ahora si nuestro modelo no fuera satisfactorio para la predicción (o los objetivos que se persiguen), entonces sería necesario refinar el modelo propuesto. Refinar un modelo

significa tener en cuenta hechos anteriores que no fueron capturados en el MM inicial; por ejemplo, la función  $f(N)$  depende no solo explícitamente de  $N$  sino también de  $t$  o puede existir alguna fuente que hace que se debilite el anuncio del mensaje.

## 2. Oferta y demanda.

Supóngase que se tiene un bien tal como café o petróleo. Sea  $p$  el precio de este bien por alguna unidad especificada (por ejemplo, barril de petróleo) en cualquier instante  $t$ . Entonces podemos pensar que  $p$  es una función del tiempo  $t$ ; esto es  $p(t)$ .

El número de unidades del bien que desean los consumidores por unidad de tiempo en cualquier tiempo  $t$  la denotaremos como  $D(t)$ . Esta función no sólo depende de  $p(t)$  sino también de la dirección en la cual los consumidores creen que tomarán los precios, esto es, la tasa de cambio del precio o derivada  $p'(t)$ .

Por lo tanto podemos decir que la demanda es una función de la función precio y de su derivada

$$D = f(p(t), p'(t))$$

Llamamos  $f$  la función de demanda.

Similarmente la oferta la denotaremos como  $S(t)$  y las escribiremos mediante

$$S = g(p(t), p'(t))$$

Llamamos a  $g$  la función de oferta.

### HIPÓTESIS PARA UTILIZAR:

1. Una economía libre
2. No hay demora en el suministro
3. No se considera los precios de otros bienes o el ingreso
- 4 Los precios, demanda, y oferta son continuos.





### TIP. Principio económico de la oferta y la demanda:

$$f(p(t), p'(t)) = g(p(t), p'(t)). \quad (3)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial de primer orden para determinar a  $p(t)$  si se conocen las formas de las ecuaciones  $f$  y  $g$ .

Naturalmente surge la pregunta sobre las formas funcionales de  $f$  y  $g$ ; como lo hicimos para el modelo de respuesta el Modelador asume la forma más conveniente y de acuerdo con esto tendríamos varios Modelos para describir nuestra realidad.

Por ejemplo, 
$$\begin{aligned} D &= f(p(t), p'(t)) = a_1 p(t) + a_2 p'(t) + a_3, \\ S &= g(p(t), p'(t)) = b_1 p(t) + b_2 p'(t) + b_3 \end{aligned}$$

Donde son constantes. Al remplazar en el principio económico de la oferta y la demanda obtenemos el siguiente MM

$$p'(t) + \left( \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \right) p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2}$$

que representa una ecuación diferencial. Al resolver el MM tenemos

$$p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} + \left( p_0 - \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} \right) e^{-(a_1 - b_2)t / (a_2 - b_2)}$$

Observemos que nuestra solución depende de los parámetros y de la condición inicial, esto es de suma importancia porque nos permite realizar lo que se conoce como "análisis de sensibilidad", el modelador puede variar sus parámetros para obtener conclusiones acerca de su mundo real bajo diferentes circunstancias. Por ejemplo, si

$$p_0 = \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1}$$

en este caso vemos de la expresión para  $p(t)$  que los precios permanecen constantes en todo el tiempo;  $p(t) = p_0$ . Otro caso es cuando

$$\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} < 0.$$

En este caso vemos que  $p(t)$  crece indefinidamente a medida que  $t$  crece, asumiendo que,

$$p_0 > \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1}$$

esto es, tenemos una inflación continua o una inestabilidad de precio. Es posible por supuesto que las constantes  $a_i, b_i$  cambien de tal manera que sobre un intervalo de tiempo tengamos un conjunto de constantes, sobre otro intervalo un conjunto diferente. Más general, los parámetros  $a_i, b_i$  podrían ser funciones del tiempo.

### 3. Modelos compartimentales (comportamentales).

Una técnica poderosa para analizar procesos del Mercado es el análisis de compartimientos que permite estudiar y entender un proceso complejo y separarlo en secciones o compartimientos de tal forma que en cada compartimiento el proceso sea más fácil de estudiar. Un modelo de compartimiento consta de un número finito de componentes (o cajas) unidos por flechas. Cada flecha indica que la "sustancia" de la que se lleva un registro sale de la caja final de la flecha y entra en la caja adonde llega la punta de la flecha. Matemáticamente se describe:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax + Bu + f, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  es la función de salida o solución; las componentes  $x_i(t)$  se denominan variables de estado,  $A$  es una matriz de orden  $n$  llamada matriz de transformación,

los coeficientes de la matriz representan tasa de cambio,  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t))$  es una función de entrada (control),  $B$  es una matriz  $n \times k$  que representa cómo están distribuidas las entradas entre los compartimientos del sistema y  $f$  es una fuente.

**TIP.** La matriz  $A$  puede depender del tiempo e incluso de la variable de estado  $x_i(t)$ .

### 3.1 El problema depredador - presa

Hay muchas situaciones en la naturaleza donde una especie animal se alimenta de otra especie animal, la cual a su vez se alimenta de otras cosas. Teóricamente el depredador puede destruir toda la presa de modo que esta última llegue a extinguirse. Sin embargo, si esto sucede el depredador también se extinguirá puesto que, como se asume, depende de la presa para su existencia. Esta aplicación no se limita sólo a la ecología o a la ciencia de la vida sino también a otros campos.

En marketing, por ejemplo, los productores compiten entre sí por los consumidores, y aún los consumidores pueden competir entre sí por los productos.

Un MM muy conocido es el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = x(-a + by)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-d + cx)$$

donde,  $x$  es la población de depredadores y  $y$  la de presas, y las constantes de tasa de cambio  $a, b, c, d$  son positivas.

### 3.2 Modelos de competencia

Consideremos que hay dos productores  $P_1$  y  $P_2$  de cierto producto  $A$  que compiten por un mercado potencial de

consumidores. Cuando falta un productor, supongamos que la razón de crecimiento de sus ventas de cada productor es

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$\frac{dy}{dt} = cy,$$

donde  $x(t)$ ,  $y(t)$  son las ventas de los productores respectivamente. Pueden darse condiciones iniciales a cada una de las variables de estado, así que tenemos el problema de valor inicial (PVI); las condiciones iniciales las podemos escribir como:  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ . Al resolver nuestras ecuaciones observamos que las ventas de cada productor crecen de manera exponencial lo que nos indica que el modelo no es adecuado para describir la situación, esto es ventas infinitas (sueño ideal de cualquier productor). En la descripción anterior no tuvimos en cuenta que los productores compiten entre sí, por lo tanto las ventas de ambos se ven menguadas por la influencia de cada uno de ellos. Así, un posible modelo para describir la realidad puede ser el siguiente

$$\frac{dx}{dt} = ax - by$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dx$$

aquí  $a, b, c, d$  son constantes positivas. Este sistema se conoce como sistema lineal de ecuaciones diferenciales. La solución la podemos obtener usando un software como matlab.

Por otra parte, bien podríamos suponer que el modelo anterior no describe adecuadamente nuestro mundo real, en su lugar asumimos que cada rapidez de crecimiento de

las ventas en las ecuaciones anteriores disminuyen a una tasa proporcional a la interacciones de los dos productores, supongamos que estas interacciones son **proporcionales al producto de las ventas**

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dxy$$

**TIP.** Lógico que en este momento podemos estar pensando si es real nuestro modelo para describir la interacción entre los competidores, esto es lo que nosotros llamamos "idealización de nuestra realidad".

Podría ser más real si se reemplazan las tasas de crecimiento en las ecuaciones con tasas que reflejen que las ventas de cada productor crece en forma logística, de esta manera nuestro MM tomaría la forma:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2 - c_1xy$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y^2 - c_2xy$$

A continuación presentamos un ejemplo hipotético adaptado del libro [3]

**3.3 MODELO S-I-R.** El siguiente es un modelo simple para la evolución de un anuncio publicitario (por radio, televisión o prensa). Supongamos que tenemos un grupo homogéneo de "N" individuos, que en algún momento "t" se compone de  $S(t)$  individuos susceptibles a la influencia del anuncio (aun no les a llegado el anuncio),  $I(t)$  individuos que ya vieron el anuncio e influyó sobre ellos y  $R(t)$  individuos que lo vieron (o escucharon o leyeron) pero que no incidió sobre ellos

(habían comprado el producto, el anuncio no iba dirigido hacia ellos), estos individuos los llamaremos "inmunes". Note que en realidad sólo tenemos dos cantidades desconocidas, ya que  $S(t) + I(t) + R(t) = N$ .

Si suponemos que la tasa a la cual los individuos susceptibles al anuncio llegan a ver el comercial es proporcional tanto al número de individuos sobre el cual hubo incidencia como al número de individuos susceptibles al anuncio, tendremos la ecuación diferencial

$$S' = -aSI \quad (4)$$

Aquí tomamos  $a$  como una constante positiva, de modo que necesitamos de un signo negativo en esta ecuación, debido a que el número de individuos susceptibles al anuncio debe disminuir.

**HIPÓTESIS: Ecuación de la conservación.** La tasa de cambio del número de individuos influenciados por el anuncio rige por la ecuación de conservación

$$\frac{dI}{dt} =$$

tasa de individuos susceptibles al anuncio - tasa de individuos "inmunes"

Si suponemos que la tasa de individuos "inmunes" es proporcional al número de individuos sobre los cuales hubo influencia (la constante de proporcionalidad sería la constante positiva), entonces tenemos que

$$I = aSI - bI \quad (5)$$

Note que debido a  $S(t) + I(t) + R(t) = N$ , tenemos  $0 \leq S(t) + I(t) = N - R(t) < N$

todo el tiempo, y que la tasa de cambio de la categoría eliminada está expresada por

$$R' = -S' - I' = bl \quad (6)$$

Si suponemos que en el tiempo, un número "n" de personas llegan a ver el anuncio y el resto aún no lo ha visto, nuestras condiciones iniciales son

$$I(0) = n, \quad S(0) = N - n, \quad (7)$$

lo que implica que  $R(0) = 0$ .

La ecuación diferencial que gobierna las órbitas en el plano fase SI es:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{aSI - bI}{-aSI} = -1 + \frac{c}{S},$$

donde  $c = \frac{b}{a}$

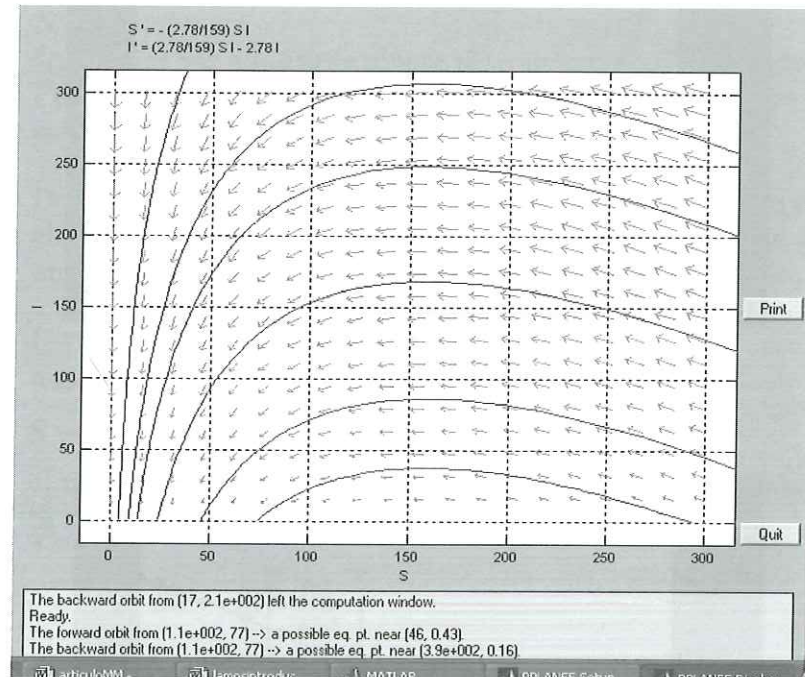
La integración proporciona la función denominada órbitas,

$$I(t) = -S(t) + c \ln S(t) + C \quad (8)$$

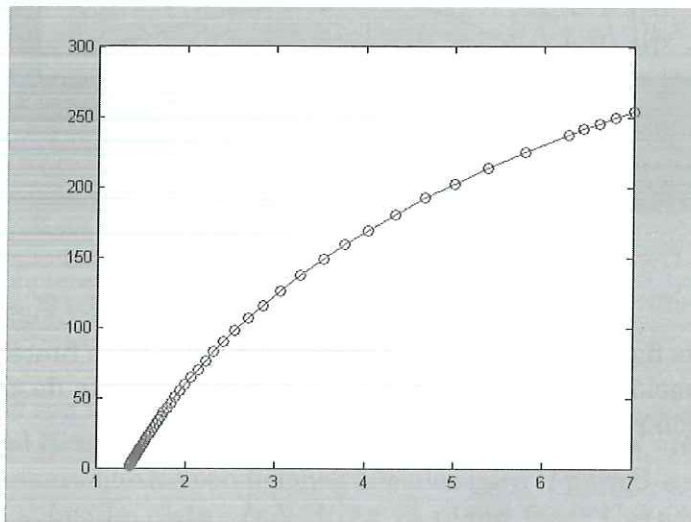
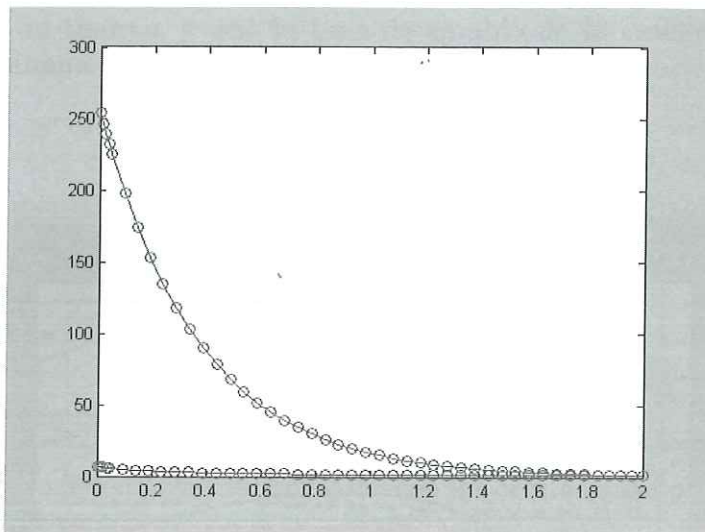
Tomando en cuenta las condiciones iniciales, hallamos que de manera que

$$I(t) = N - S(t) + c \ln \left[ \frac{S(t)}{S(0)} \right] \quad (9)$$

Estás son las órbitas en el plano fase. En vista del hecho de que al tiempo  $t = 0$ ,  $R(0) = 0$ , debemos tener  $I(0) = N - S(0)$ , de manera que las condiciones iniciales para  $I$  para  $S$  deben caer sobre la recta  $I = N - S$  en el plano fase. Usando el software de matlab en las figuras se presenta algunas órbitas.



En las figuras se muestra el comportamiento de la función  $I$  en función de  $S$ , como también el comportamiento de cada función respecto al tiempo.



**EXPERIMENTOS NUMÉRICOS.** En la tabla 2 y la figura 3 muestran un conjunto de datos para el número de personas a la cual va dirigido el anuncio (con una población inicial de 261) desde el comienzo del anuncio hasta llegar a su término en intervalos regulares. Los valores para  $S(t)$  en la tabla 2 fueron calculados a partir de  $S(t) = N - R(t) - I(t)$ , donde  $N = 261$

Queremos ver cuánto se ajusta (9) a este conjunto de datos. Para hacerlo necesitamos efectuar una aproximación de  $c$ , sabiendo que  $N = 261$  y  $S(0) = 254$ .

De la figura 3 observamos que todas las órbitas finalizan en el eje Horizontal, de modo que a medida que finaliza el anuncio,

$$I \longrightarrow 0$$

a medida que

$$S \longrightarrow 83,$$

el número de individuos susceptibles al final de la misma. Si sustituimos esto en (9) encontraremos que

$$0 = 261 - 83 + c \ln \left[ \frac{83}{254} \right]$$

lo cual nos permite obtener el valor aproximado de  $c = 159$

Tiempo	✓	✓	✓
0.0	0.0	7.0	254.0
0.5	11.5	14.5	235.0
1.0	38.0	22.0	201.0
1.5	78.5	29.0	153.5
2.0	120.0	20.0	121.0
2.5	145.0	8.0	108.0
3.0	156.0	8.0	97.0
3.5	167.5	4.0	89.5
4.0	178.0	0.0	83.0

Tabla 2

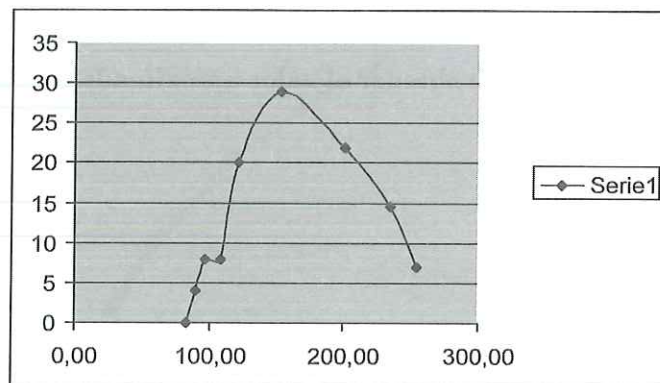


Figura 3

Si nos interesa el número de individuos "inmunes", entonces tenemos que

$$\frac{dS}{dR} = \frac{dS}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{-aSI}{dI} = \frac{-a}{b} S,$$

con solución

$$S(t) = A \exp \left[ -\frac{a}{b} R(t) \right]$$

Donde A es una constante. Tomando en cuenta la condición inicial hallamos que

$$S(t) = S(0) \exp \left[ -\frac{a}{b} R(t) \right] \quad (10)$$

Por consiguiente de (6), (9) y (10), tenemos entonces que

$$\frac{dR}{dt} = bI = b \left\{ N - S(t) + c \ln \left[ \frac{S(t)}{S(0)} \right] \right\} = b \left\{ N - S(0) \exp \left[ -\frac{a}{b} R(t) \right] - \frac{ac}{b} R(t) \right\},$$

Lo cual como consecuencia de que

$$c = \frac{b}{a},$$

se reduce a

$$\frac{dR}{dt} = b \left\{ N - S(0) \exp \left[ -\frac{a}{b} R(t) \right] - R(t) \right\}. \quad (11)$$

No podemos resolver esta ecuación diferencial de primer orden en función de funciones familiares. No obstante, es una ecuación diferencial autónoma, así que podemos analizarla empleando ciertas técnicas que son expuestas en cursos tradicionales de Ecuaciones Diferenciales.

## Conclusiones

1. Los modelos de decisión (Modelos Matemáticos) son la herramienta que se usa para la toma de decisiones de Mercado. La modelación matemática en Marketing es el proceso de formular comportamientos de los fenómenos de Marketing en términos matemáticos.
2. El presente artículo trato sobre los modelos de decisión tipo causa-efecto pero en la nueva Ingeniería de Mercados existen una amplia gama de modelos de decisión adaptables e interactivos, entre los que se encuentran modelos de diagrama de flujos, modelos de agrupamiento, modelos de clasificación, modelos de predicción, modelos de interdependencia, modelos de minería de datos y modelos de efecto-causa que se usan para el análisis, la planeación e implementación de estrategias y tácticas del Marketing.
3. La Facultad de Ingeniería de Mercados ha venido trabajando en la tarea de dar al Marketing una configuración rigurosa desde el punto de vista cuantitativo sin olvidar el paradigma cualitativo, así que nuestra intención al escribir este artículo fue aportar un grano en la construcción de este camino.

## Referencias bibliográficas

- [1] G. L Lilien ; A. Rangaswamy. Marketing Engineering. Addison-Wesley
- [2] M. Guillen. Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo. TEMAS DE DEBATE. 1999
- [3]D. Lomen; D. Lovelock. Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. CECSA.2000
- [4] A. Astous; R. Sanabria; S. Sigue. Investigación de Mercados. Grupo Editorial Norma.2003