

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BUCARAMANGA**

**FACULTAD DE INGENIERIA FINANCIERA**

**TRABAJO DE GRADO**



**FRACTALES EN FINANZAS**

**ASESOR**

**EDGAR LUNA GONZALEZ**

**AUTOR**

**WILMER ALEXANDER ISIDRO CORREA**

**Bucaramanga 2010**

## CONTENIDO

	Página	
i	Índice de Figuras	3
ii	Agradecimiento	5
ii	Resumen	6
iii	Abstract	8
iv	Introducción	10
v	Objetivos	11
1.	FRACTALES	
1.1	¿Qué es un fractal?	12
1.2	Características que deben tener los fractales	12
1.2.1	Auto-similitud	12
1.2.2	Notación sencilla	12
1.2.3	Iteración	13
1.2.4	Dimensión no entera	13
1.3	Categorías de los fractales	
1.3.1	Sistema iterado de funciones	13
1.3.1.1	Conjunto de cantor	14
1.3.1.2	Triangulo de Sierpinski	14
1.3.1.3	Copos de nieve de Koch	15
1.3.2	Fractales de recurrencia	15
1.3.3	Fractales aleatorios	15
1.4	Elementos de la geometría fractal	16
2	MODELO DE BACHELIER	17
2.1	Las finanzas como un juego de cara o cruz	19
2.2	Construcción básica de una fractal financiero	21
2.3	Características de los fractales	23
2.4	La dimensión para medir la escabrosidad	24
	APLICACIONES DE FRACTALES EN FINANZAS	
3	PRECIO DEL ALGODÓN	26

3.1	Ley potencial de Zipf	28
3.2	Leyes potenciales clásicas en economía	29
3.3	Leyes del azar excepcional	37
3.4	El caso del algodón, básicamente cerrado	38
3.5	El significado del algodón	40
3.6	Conclusión	43
4	METODOLOGÍA DE PREDICCIÓN DE PRECIOS DEL PETRÓLEO BASADA EN LA DINÁMICA FRACTAL	44
4.1	Metodología	44
4.2	Construcción del modelo de predicción de precios del petróleo	48
4.3	Resultados del análisis estadístico	50
4.4	generación de escenarios probabilísticos	50
4.5	Escenarios	54
4.6	Conclusiones	57
5	ANÁLISIS FRACTAL DEL MERCADO DE VALORES DE MÉXICO	60
5.1	Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)	60
5.2	Objeto de estudio	60
5.3	Análisis estadístico del IPC	63
5.4	Prueba Jarque-Bera	63
5.5	Análisis fractal del IPC	64
5.6	Análisis de resultados obtenidos	64
5.7	Conclusión	65
6	PROPUESTA DE APLICACIONES PARA EL MERCADO COLOMBIANO	
6.1	ANÁLISIS FRACTAL DEL IGBC	66
6.2	PREDICCIÓN DEL PRECIO DEL CAFÉ	70
6.3	DECISIÓN DE COMPRA O VENTA DE UNA ACCIÓN CON BASE EN EL EXPONENTE DE HURST	73
7.	Conclusiones y recomendaciones	75
8.	Bibliografía	77

## INDICE DE FIGURAS

Figura	Nombre	Página
1.1	Conjunto de Cantor, después de cinco iteraciones	12
1.2	Triangulo de Sierpinski, después de cinco iteraciones	12
1.3	Copos de nieve de Koch, después de tres iteraciones	13
2.1	Bosquejo inicial no aleatorio de un fractal financiero	19
2.2	Bosquejo aleatorio de un fractal financiero	20
3.1	Curva de ingresos de Pareto	28
3.2	Ley potencial creciente	30
3.3	Campana de Gauss para un juego de cara o cruz	33
3.4	Distribución de los incrementos del precio del algodón	37
3.5	Hileras de algodón	37
3.6	Bosquejo de la variación de los precios del algodón	40
4.1	Graficas históricas de la volatilidad del precio del petróleo	46
4.2	Distribuciones de probabilidad de la volatilidad	47
4.3	Promedios globales del exponente de Hurst	49
4.4	Precios mensuales históricos y pronosticados	55
4.5	Precios mensuales pronosticados	55
5.1	Índice de precios y cotizaciones (IPC) por sexenios	61
5.2	Rentabilidad diaria del IPC	62
5.3	Volatilidad diaria del IPC	62

## INDICE DE TABLAS

Tabla	Nombre	Página
4.1	Precios máximos y mínimos promedio del petróleo	53
4.2	Promedios de los precios con tendencia alcista y bajista	54
4.3	Proyecciones de cinco empresas, Pemex y tesis	56
4.4	pronóstico de cinco empresas, Pemex, tesis y real	58
5.1	Prueba de normalidad Jarque-Bera	64
5.2	Exponente de Hurst y función de correlación	65
6.3.1	Decisión de compra o venta de una acción	74

## **AGRADECIMIENTOS**

Estando a las puertas de alcanzar un escalón tan importante para mi vida, quiero agradecerle en primer lugar a Dios que me dio la vida, salud, inteligencia, sabiduría y paciencia para poder superar los obstáculos y darme fortaleza en los momentos difíciles, a mis padres y hermana que son el trípode que me sostiene y que en su medida éste triunfo es de ellos ya que me brindaron su apoyo incondicional para verme convertido en profesional y me brindaron oportunidades que ellos no tuvieron, a profesores y compañeros que me ayudaron a crecer intelectual y personalmente, a la universidad que me brindo el apoyo y la oportunidad de desempeñarme en una de las cosas más importantes en mi vida: El deporte, el cual me ha enseñado que todas las metas propuestas son alcanzables, solo hay que tener disciplina, perseverancia y ganas para lograr todo lo que nos proponamos.

## RESUMEN

En el actual mundo acelerado y globalizado se hace importante, necesario y complejo el entendimiento y análisis de los mercados para poder tener un eficaz y eficiente manejo de las empresas y en general de las inversiones para garantizar niveles mínimos de rentabilidad, es así como se hace necesario buscar creativamente estudios y estrategias que puedan generar un éxito y resultados positivos en el corto y largo plazo, de esta manera el quedarse solo con índices financieros que muchas veces se desconoce su significado ya no es suficiente y no sirve, se debe crear un pensamiento sistémico donde se involucre componentes externos e internos de la empresas al igual que sectores y procesos, analizando, pensado y utilizando las herramientas que nos proporciona la economía, estadística, finanzas y demás ciencias afines que generan un sistema de elementos interrelacionados donde cualquier alteración de alguno de estos componentes genera un inevitable cambio subsecuente que van a determinar la toma de decisiones y resultados.

“El estudio de las finanzas es muy complejo por cuanto están estrechamente relacionado con un sinfín de factores como la microeconomía, la macroeconomía, la política económica, la psicología, la sociología, la cultura, y demás aspectos que de una u otra forman afectan o inciden en las decisiones que toma el ser humano en cuanto al dinero. Es por ello que en finanzas no todas las leyes, reglas o parámetros son universales, puesto que cada sociedad, cada población tiene elementos diferentes que condicionan y modifican la conducta humana frente al dinero.”<sup>1</sup> Teniendo en cuenta este concepto y la complejidad que se presenta para aprender, estudiar y analizar todos los factores que componen las finanzas nace la inquietud de hacer un estudio de la geometría fractal y de esta manera tener

---

<sup>1</sup>CONCEPTO DE FINANZAS

<http://www.gerencie.com/concepto-de-finanzas.html>

otra alternativa diferente a las históricas y convencionales para tratar de encontrar un orden, comprensión y análisis en cierta medida mas practica de las finanzas.

El estudio fractal presenta determinadas características como la existencia de estructuras complejas, que se observan a diferentes niveles, cuyo origen no esta simplemente al azar, sino en determinados procesos y pautas simples. Estas pautas generan un orden por medio de iteraciones repetidas, claro, que en cantidades gigantescas. De esta manera los fractales generan un orden para formar modelos capaces de organizar y diversificar por medio de pautas simples y eficaces. Como lo dice Mandelbrot en su libro “descubrir una nueva rama de la matemática que percibe el orden oculto en lo aparentemente desordenado, el plan en lo no planificado, la regularidad en la irregularidad y la escabrosidad de la naturaleza”<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> FRACTALES Y FINANZAS: Una aproximación matemática a los mercados, arriesgar, perder y ganar, Pág.29, Beroit Mandelbrot y Richard L. Hudson, Tusqueds editores 2006.



## ABSTRACT

It is important, necessary, and complex in our current accelerated and globalized world the understanding and analysis of markets in order to be able to hold an efficient and cost-effective management of companies and, overall, investments so as to guarantee minimum levels of profitability. This is how it is made essential to creatively try to find studies and strategies being able to generate short and long-term success and positive results; this way, it is not enough or functional to only rely on financial indexes which many times have unknown meanings. Rather, it must be created a systemic thought where external and internal components of the company are involved as well as sectors and processes through the analysis, thought, and use of tools that economics, statistics, finance, and other comparable sciences provide us with, which generate an interrelated elements system where any alteration of any of the above components generate an unavoidable, subsequent change leading to decision-making and results.

“The study of finance is very complex given that it is strictly related to an endless number of factors such as microeconomics, macroeconomics, economic politics, psychology, sociology, culture, and other aspects which would in the end affect or influence on the decisions that human beings make as far as money. This is why not all laws, rules, or regulations having to do with finance are universal, as every society and every population have different elements that modify and make human conduct conditional on money”.<sup>3</sup> Keeping in mind this concept and how complex learning, studying, and analyzing all factors making finance up is, the interest in making a study of fractal geometry emerges and so having another alternative different from the traditional and conventional ones in order to find a relatively more practical order, comprehension, and analysis of finance.

---

<sup>3</sup> *CONCEPT OF FINANCE.*

<http://www.gerencie.com/concepto-de-finanzas.html>

Fractal studies pose such features as the existence of complex structures which are observed at various levels, whose origin is not purely given at random, but in certain given processes and uncomplicated guidelines. Such guidelines generate an order through repeated iterations, of course, than in gigantic amounts. Thus, fractal studies generate an order to develop models capable to organize and diversify by means of straightforward and efficient guidelines. Just like Mandelbrot stated in his book, “discovering a new branch of mathematics that perceives a hidden order in what is apparently disorganized, a plan in the chaos, regularity in irregularity, and roughness in nature.”<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> FRACTAL STUDIES AND FINANCE: A Mathematical Approach to Markets, Risking, Losing, and Winning Page 29, Benoit Mandelbrot and Richard L. Hudson, Tusquets Editors 2006.

## INTRODUCCION

Es innegable el cambio y complejidad que a través de los años ha presentado el estudio de las finanzas debido a cambios tecnológicos, la globalización, el boom del internet y demás factores que hacen que financieros y en especial nosotros como ingenieros, investiguemos y diversifiquemos nuestro conocimiento y herramientas que cada vez nos hagan más competitivos y eficientes. Las crisis mundiales e inesperados comportamientos de los mercados, hacen que tengamos que analizar las repercusiones que éstas traen en las finanzas personales, empresariales y globales.

Benoit Mandelbrot padre de la teoría fractal y todas las investigaciones que ha hecho hasta el momento va a ser la base fundamental de esta investigación, ya que nos proporciona nuevas herramientas que nos ayudan a ver desde otro punto de vista el comportamiento que tienen los mercados y las finanzas en general, para lograr comparar los métodos y teorías convencionales.

La teoría económica convencional asume, que una variación de precios puede modelarse mediante procesos aleatorios, como si cada subida o bajada viniera establecida por el lanzamiento de una moneda. Lo que podemos apreciar en los fractales, y se tratará de describir en esta investigación, es que el comportamiento real de los precios se aleja considerablemente de ese patrón. Es así como se propone un modelo más preciso, el multifractal, donde plantea una nueva teoría económica para evaluar la variación de precios.

De esta manera lo que se pretende es explorar y analizar las diferentes aplicaciones de los Fractales en la Finanzas para observar su funcionalidad que estos tienen y así tener otra herramienta diferente a las convencionales a la hora de analizar y estudiar las Finanzas, y que de igual manera el mercado colombiano haga aplicación de esta teoría para analizar su mercado.

## **OBJETIVOS**

### **Objetivo General**

Explorar las aplicaciones de los fractales en las finanzas para su posible aplicación al mercado Colombiano.

### **Objetivos Específicos**

1. Estudiar y analizar la teoría Fractal enunciando las aplicaciones que ha tenido en diferentes áreas.
2. Analizar e investigar aplicaciones que se hayan hecho de fractales en las finanzas.
3. Plantear una réplica de una aplicación para el mercado Colombiano.

# 1. FRACTALES

## 1.1 ¿Qué es un fractal?

Viene del adjetivo latino fractus “romper en pedazos”. Que básicamente significa una figura de superficie irregular. Término inventado por Mandelbrot que indica que es un reflejo de las formas, figuras y en general de la geometría que se encuentra en la naturaleza. Montañas, nubes, sistemas fluviales, árboles, etc., todos tienen formas fractales. De esta manera se puede definir los fractales como formas irregulares donde cada pequeña parte es muy parecida a una imagen reducida del todo. ¿Cuánto mide la costa Colombiana? o ¿Cuánto mide el río Amazonas? Son preguntas que a primera vista tienen una respuesta, pero a ciencia cierta no, ya que cualquier costa o río tiene irregularidades en su recorrido de tal forma que al hacer la medición en escalas más pequeñas la longitud de estos siempre van a aumentar.



## 1.2 Características que deben tener los fractales:

**1.2.1 Auto-similitud:** Un fractal debe conservar la misma apariencia a diferentes escalas. Siempre consta de una clara semejanza entre partes muy distantes de una misma figura fractal.

**1.2.2** Las fórmulas, algoritmos o notaciones que los definen son relativamente sencillos y con un conjunto reducido de datos.

**1.2.3** Su algoritmia es definida por una característica clave: La **iteración**, que significa repetir un proceso varias veces.

**1.2.4 Dimensión no entera:** Al contrario de la geometría clásica, en la que las figuras tienen 1, 2 o 3 dimensiones, un fractal puede desarrollarse en una dimensión no entera, como, por ejemplo la curva de Koch, que lo hace en la dimensión 1.26; esto es, ocupa parte del plano pero no llega a tener la forma de figura bi-dimensional.

Según Campbell 1991, la geometría fractal permite analizar cuatro puntos principales:

- 1) Provee dimensiones adicionales y más cercanas a la realidad en comparación con la geometría euclidiana.
- 2) La mayoría de los sistemas complejos son caóticos, y éstos exhiben conductas extrañas asociadas con límites o campos que no pueden ser representados en dimensiones enteras.
- 3) Los sistemas dinámicos pueden ser representados en series de tiempo y sus dimensiones son importantes si se busca estudiarlos.
- 4) Los fractales son escalables, esto es, se puede reducir o ampliar su análisis para observar detalles, mientras que las formas básicas se conservan en cada escala.

### **1.3 Categorías de los fractales**

**1.3.1** Sistema iterado de funciones, estos tienen una regla de punto fijo geométrico. Ejemplos: Conjunto de Cantor, triángulo de Sierpinski, curva de Peano, copo de nieve de Koch.

### 1.3.1.1 Conjunto de cantor:

Este conjunto es calificado como el precursor de los fractales, aunque fue quedando relegado por su complejidad para su definición ya que se desaparece gradualmente hasta hacerse invisible (se convierte en polvo). Aunque se acepta como una infinita sucesión de segmentos diferentes de cero. Consiste en dividir un segmento en tres y eliminar la fracción central y así repetir este proceso con cada fracción resultante como se observa en la figura.

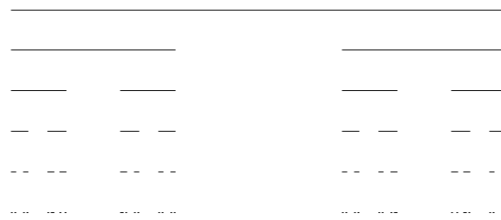


Figura 1.1 Conjunto de Cantor, después de cinco iteraciones

### 1.3.1.2 Triangulo de Sierpinski:

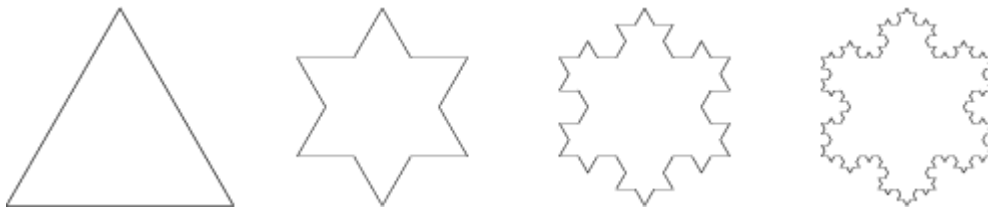
Modelo inventado por Waclaw Sierpinski, el cual comienza con un triangulo equilátero, después dentro de este se ubica otro triangulo equilátero invertido donde los vértices coinciden con la mitad de los lados del triangulo mayor, como se aprecia en la figura se continua con la iteración hasta el infinito.



Figura 1.2 Triangulo de Sierpinski, después de cinco iteraciones

### 1.3.1.3 Copos de nieve de Koch:

Este conjunto empieza con un triángulo equilátero donde se obtiene y retira la tercera parte de esta figura, dando como resultado una estrella, para la siguiente figura se obtiene repitiendo esta iteración en las puntas de la estrella que conforman otro triángulo equilátero y así hasta el infinito generando las siguientes imágenes:



**Figura 1.3** Copos de nieve de Koch, después de tres iteraciones

**1.3.2** Los fractales definidos por una relación de recurrencia en cada punto de un espacio (como el plano complejo). Ejemplos: conjunto de Mandelbrot o el conjunto de Julia.

**1.3.3** Fractales aleatorios, generados por procesos estocásticos. Por ejemplo: Paisajes de fractal. Los fractales aleatorios tienen una gran aplicación práctica, usándolos para describir varios objetos muy irregulares del mundo real. Ejemplos son las nubes, montañas, turbulencia, costas y árboles.



## 1.4 Elementos de la geometría Fractal

Para entrar a mirar las aplicaciones de los fractales en finanzas es indispensable hablar de la escabrosidad. La geometría euclidiana, la que todos aprendemos en la escuela líneas, planos, esferas son conceptos que residen en la mente humana, no en la irregularidad y complejidad de la naturaleza ¿Cuántos elementos a nuestro alrededor se ajustan a las viejas patrones griegos? Tal vez un estanque cuando no hay viento ni oleaje parezca totalmente plano, o el iris de un recién nacido se observe casi perfectamente circular ¿pero cuantas otras cosas naturalmente sobrias se pueden enunciar? Como lo expresa Mandelbrot “las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, la corteza no es lisa, y el rayo no viaja en línea recta”.

Hablar de fractales puede parecer una divagación del análisis financiero cotidiano, pero un vistazo al extraordinario alcance y potencia de la geometría fractal nos dará una idea de las posibilidades de ésta en las finanzas.

La rugosidad de un gráfico de precios se suele medir por la volatilidad, pero los analistas encuentran que a la vez la volatilidad es volátil, es acá donde empiezan las primeras contribuciones de Mandelbrot al reconocer que en la turbulencia, la rugosidad no es solo la imperfección de lo planeado, sino que se forma por la conjunción de muchos objetos naturales, incluidos los económicos. La clave es encontrar la regularidad en la irregularidad, la manera más rápida de simplificar las cosas es señalar las simetrías, las propiedades fundamentales que no cambian de un objeto a otro, Un fractal es una clase especial de invariancia o simetría que relaciona un todo con sus partes.

En este contexto, si se tiene una serie de tiempo con datos anuales y se consideran tramos mensuales y luego diarios de esta serie. Si estas muestras exhiben autosimilitud a diferentes escalas de tiempo, se puede afirmar que la serie tiene un comportamiento fractal.

La geometría fractal consiste en identificar patrones repetitivos, analizarlos, cuantificarlos y manipularlos. La construcción de los fractales más simples parte de un objeto geométrico básico: un triángulo, una línea recta, una bola sólida. A esto se le llama iniciador.

## 2. MODELO DE BACHELIER

Antes de entrar de lleno a la construcción de uno de los primeros fractales financieros, profundizaremos en la importancia de Bachelier en economía y finanzas, su valor nace en su tesis ***Théorie of the Spéculation***, trataba de la especulación como un negocio, en donde para esa época la venta de títulos con dinero prestado para aprovecharse de una caída de precios era inaceptable, duró veinte años ejerciendo como profesor en diferentes universidades en Francia y buscando el reconocimiento para su tesis. Ésta puso los orígenes de la teoría financiera, formuló los principios básicos sobre el movimiento de los precios y propuso soluciones elementales para algunos, murió a los 58 años casi en el anonimato y solo hasta después de varios años su tesis fue redescubierta y traducida al inglés, sobre ésta, varios economistas crearon una teoría más elaborada de los mercados: como varían los precios, cómo piensan los inversores, cómo administrar el dinero y cómo definir el riesgo, dando origen a lo que hoy se conoce como la teoría económica moderna, aunque, financieros, economistas y asesores de bolsa han hecho modificaciones a las fórmulas para adecuarlas a sus necesidades, los principios fundamentales de Bachelier siguen siendo la estructura fundamental del movimiento global del dinero.

## 2.1 Las finanzas como un juego de cara o cruz

*“Los factores que determinan la actividad de la Bolsa son innumerables, son acontecimientos, actuales o esperados, que ha menudo no guardan relación con la variación de los precios. Junto a las causas más bien naturales de la variación, hay otras artificiales: La Bolsa reacciona así misma, y el comercio presente es una consecuencia no sólo del comercio previo, sino también de su relación con el resto del mercado. La determinación de esta actividad depende de un número infinito de factores, por lo que es imposible esperar una predicción matemática. Las opiniones contradictorias sobre estas variaciones están tan equitativamente repartidas que los compradores esperan una subida en el mismo instante en que los vendedores esperan una caída. El cálculo de probabilidades no puede aplicarse sin dudas a la actividad mercantil, y la dinámica de la bolsa nunca será una ciencia exacta. Pero es posible estudiar matemáticamente el estado del mercado en un instante dado: es decir, establecer las leyes probabilísticas para la variación de precios que dicta el mercado en ese instante. Si el mercado no predice sus fluctuaciones, sí que las pondera como mas o menos probables, y esta probabilidad puede evaluarse matemáticamente” (Líneas iniciales de **Théorie of the Speculation**)<sup>5</sup>.*

La mayoría de los analistas financieros consideran los cambios de los precios como una acción de causa y efecto, algo pasa y los precios reaccionan, como lo visto en la crisis más recientemente sufrida, mal manejo de la cartera de entidades financieras llevo a un descalabro económico a nivel mundial, este concepto es fácil de entender después de que ocurre, pero bastante complicado de prever antes de que suceda, porque simplemente no se puede conocer todo. Bachelier se propuso estimar la probabilidad de que los precios cambien, donde lo desarrolló haciendo una similitud entra la expansión del calor a través de una sustancia y las

---

<sup>5</sup> Louis Bachelier, **Louis Bachelier Théorie of Speculation: The origins of Modern Finance**, translate an introduction by Mark Davis & Alison Etheridge, with a foreword by Paul A. Samuelson, Princenton University Press (2006), ISBN-10: 0-692-11752-7, ISBN-13: 978-0-691-11752-2.

oscilaciones del precio de los bonos. Observó que los dos eran procesos que no se podían predecir con precisión, tanto en el nivel de las partículas de la materia como en el de los inversores individuales, hay muchos factores relevantes que hacen complicado explicar cualquiera de los dos casos, lo que hizo fue abolir detalles complicados para cualquier investigación, el cómo y quien, y contempló una pauta en las ecuaciones del problema de la expansión de la materia y las aplico a las oscilaciones de los precios de los bonos.

Según Stanley, el objetivo de la teoría financiera es el de desarrollar modelos teóricos que describan el comportamiento de los mercados financieros, con un enfoque hacia leyes estadísticas, hacia mecanismos casuales y poder de predicción. Los físicos que han intentado inmiscuir las matemáticas con las finanzas por medio de la física estadística, han partido de fenómenos críticos para examinar hechos empíricos y construir modelos.

Bachelier examinó el mercado de los bonos como el mismo lo denominó “un juego imparcial”. Es acá donde se refiere que en el juego de lanzar una moneda, es igual de probable que caiga cara o cruz, si ganáramos un peso por cada cara y perdiéramos lo mismo por cada cruz, al final de una serie de lanzamientos según la probabilidad se debería esperar un beneficio de cero pesos.

Bachelier asumió un pensamiento dual, dos formas diferentes de contemplar un mismo fenómeno, una anterior y otra después del hecho. Tras un movimiento de un precio se puede deducir una causa-efecto sobre el por qué ocurrió, por ejemplo, el precio de los bonos bajó a causa de un reporte de inflación pesimista, o al rumor de que un gran poseedor de bonos tenía iliquidez. Pero antes de que el precio presentara este cambio habría sido muy difícil anticipar esas informaciones y más saber como iba a reaccionar el mercado, lo más probable es que simplemente se habría mirado los precios y se asumiera que los precios eran justos, que el mercado ya había tenido en cuenta la información importante, que el precio estaba de acuerdo con la oferta y la demanda, y los vendedores estaban a

la par con los compradores, a no ser que se tuviera otra información por la cual cambiara el precio, sería igual de probable como en el lanzamiento de la moneda que el movimiento del precio fuera arriba o abajo, a derecha o izquierda, al norte o al sur.

¿Cuál será el precio de mañana? Como se acaba de mencionar el precio puede subir o bajar, con saltos grandes o pequeños, pero a falta de información decisiva que pueda indicar hacia donde fluctuará el precio, la mejor predicción es el precio actual, al igual que la moneda éste se mantendrá oscilando hacia el punto de partida.

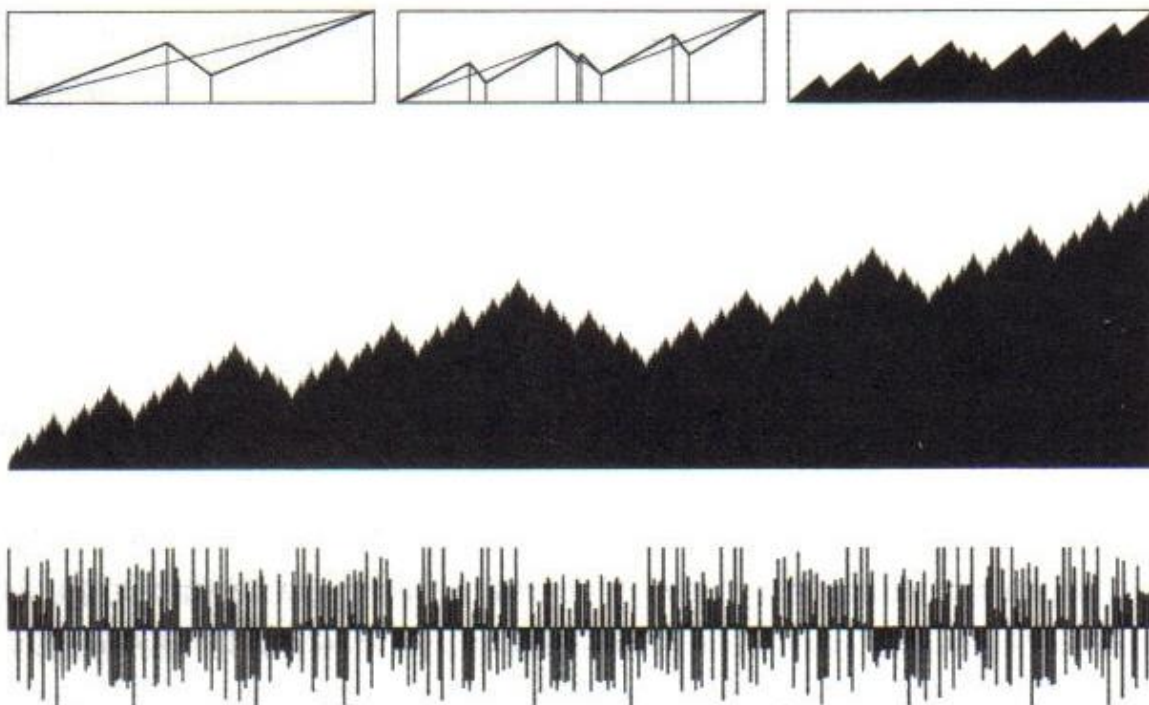
Las personas por lo general siguen el rumor que se expresa en el mercado y comercian con la tendencia (sea a la baja como a la alza) en lugar de comportarse de una manera racional. Los mercados financieros son frecuentemente vulnerables a "burbujas" donde el movimiento de los precios se mueve más por los factores subyacentes del momento. Los mercados pueden estar sujetos a los ratos de optimismo excesivo seguidos por las olas de pesimismo excesivo.

Normalmente, los inversionistas ganan dinero comprando cuando el precio es bajo y vendiendo cuando el precio es alto. Sin embargo, con la burbuja es aprovechable a la compra cuando el precio es alto (si espera que suba más allá) hasta los estallidos de la burbuja.

Un razonamiento más simple hecho por Bachelier, fue que si se representaba gráficamente los cambios de precio de un bono a lo largo de determinada serie tiempo se distribuirán sobre el papel formando la campana de Gauss: numerosos cambios pequeños agrupados en el centro de la campana y pocos cambios grandes en las colas, de ésta manera gracias a la intervención de Bachelier, la curva teórica de Gauss se incorporó al análisis de los mercados financieros.

## 2.2 Construcción básica de un fractal financiero

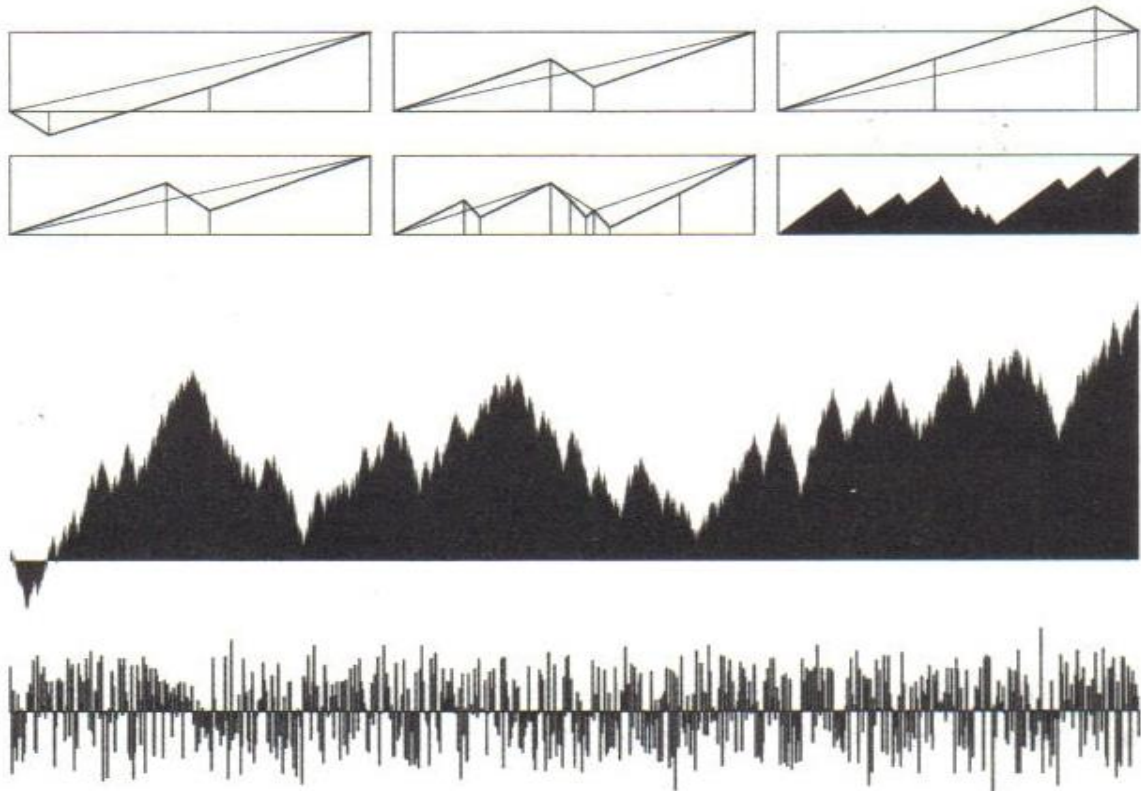
Después de conocer a grandes rasgos los importantes aportes de Bachelier, se profundizara sobre el trabajo realizado por él en fractales financieros, aunque éste es uno de los más sencillos, ayudará a contemplar como se hace la construcción de uno.



**Figura 2.1.** Este gráfico muestra cómo construir un bosquejo no aleatorio de una fractal financiero según Bachelier. La línea superior, de izquierda a derecha, muestra las primeras etapas. El diagrama central en negro es el gráfico fractal completo. La línea inferior muestra los incrementos de un momento al siguiente. Esta construcción es del tipo más sencillo (y menos realista).

Dentro del cuadro se dibuja una línea recta que va desde la esquina inferior izquierda, con coordenadas  $0,0$ , a la esquina superior derecha, con coordenadas  $1,1$ . Ésta es la tendencia subyacente, que nos asegura que el gráfico final indicará una ganancia, con independencia de la fluctuación de los precios. Si se quisiera modelar una caída de la bolsa, se parte de una línea que descienda de la esquina superior izquierda a la inferior derecha. Luego, sobre esta línea recta, se traza otra línea en zigzag llamada generador. Se divide en tres partes, tal como se observa:

primero sube, a partir de un punto crítico baja, y a continuación vuelve a subir. El punto exacto donde se quiebra y con qué frecuencia es crucial para el resultado final.



**Figura 2.2.** Ésta figura ilustra como construir un bosquejo aleatorio de un fractal financiero de Bachelier, es similar a la figura anterior pero con piezas del generador repartidas para crear realismo, Se parte del generador fractal simple de antes, primero ascendente, a continuación descendente y de nuevo ascendente (el recuadro central de la fila superior). Luego se reparten las piezas de los generadores, en una secuencia abajo-arriba-arriba (arriba a la izquierda) o arriba-arriba-abajo (arriba a la derecha). En cada paso de la construcción fractal, se selecciona uno de los tres generadores posibles al azar. La segunda línea muestra tres primeras etapas de la construcción. El diagrama central en negro es el resultado final. La línea inferior muestra los cambios.

Para realizar este gráfico se siguen las siguientes indicaciones. Donde se vea un segmento recto, se reemplaza por una copia reducida y son el rotar de la línea quebrada. Para que ajuste se debe escoger la más horizontal, se suprime en cada paso líneas rectas cada vez más pequeñas y se llena el gráfico con líneas

quebradas cada vez más pequeñas. Si se observa el cuadro final podemos imaginar un gráfico de precios (aunque no muy realista, y demasiado predecible)

Es claro que los gráficos de precios reales no surgen de esta manera, ya que estos son un registro de miles de transacciones individuales, pero no se puede analizar cada uno de los motivos que hay tras cada transacción individual. Este análisis fundamental es superficial, en lugar de esto se puede crear un modelo matemático que limite la realidad, que pueda simular cuánto varía un precio o que tan rápido sube o baja, no será una copia del comportamiento real de los precios, pero tendrá un comportamiento estadístico similar, y a partir del modelo se podría realizar una herramienta nueva para estudiar el mercado, como comparar los riesgos de las inversiones, valorar un producto financiero nuevo o una opción exótica, o quizás anticipar que tan turbulento se está volviendo el mercado, y es al tocar el término turbulencia donde empiezan a intervenir los **multifractales**, que hacen una forma fundamentalmente nueva de analizar las finanzas. Los mercados ya no muestran los comportamientos racionales y mansos de los teóricos financieros del pasado, actualmente se ven como lo que realmente son: sistemas dinámicos, impredecibles y hasta peligrosos para transferir riqueza y poder.

### **2.3 Características de los fractales**

La variedad de fractales es inmensa, pero todos tienen unos rasgos comunes, en primer lugar, la escala aumenta o disminuye por una cantidad específica; las partes evocan el todo según una fórmula precisa, los fractales más simples cambian de escala en todas las direcciones; por eso se dice que son autosimilares, lo que se ve a una distancia será lo mismo que se ve a otra. Si se retorna al modelo de Bachelier, éste cambia de escala más en una dirección que en otra, a esta clase de fractales se le denominan *autoafines*, si el cambio de escala se hace de maneras distintas en diferentes direcciones se habla de multifractales. Los fractales son muy visuales y bastante intuitivos.



## 2.4 La dimensión para medir la escabrosidad

Uno de los temas más complejos y en los que se debe tener más mente abierta para la percepción de cosas nuevas, es el concepto de dimensión. Desde los tiempos de Euclides la humanidad ha estado relacionada con tres dimensiones básicas, la línea recta tiene una dimensión, un plano, dos y el espacio con el que estamos familiarizados, tres. Los matemáticos pueden tener la idea de generar más dimensiones (que son ficticios, pero que a lo largo de la historia han servido para resolver problemas de ingeniería, economía y física).

La dimensión es relativa, varía con el observador y con cada punto de vista, un mismo objeto puede tener más de una dimensión, según como se mida y qué se quiera hacer con él. La dimensión no tiene por qué ser un número entero, puede ser fraccionario, se debe pensar en la dimensión como un instrumento de medida. Retomando el ejemplo de ¿Cuánto mide la costa colombiana? Cuando se quiere medir una línea recta se puede utilizar una regla, pero si pretendemos medir una línea curva se puede emplear una regla más corta y avanzar tramo a tramo a lo largo de la curva y contar cuantas veces se ha desplazado la regla, y si se quiere una medida más precisa se repite este procedimiento con una regla cada vez más corta, siendo cada medida un poco más larga que la primera, pero ¿Si la curva es irregular? En el caso mencionado de la costa colombiana, se podría comenzar con un instrumento y medir montaña por montaña, luego con una cinta métrica, medir tramo a tramo, después con una vara, posteriormente con un calibrador y hasta con un microscopio, pero todo esto sería infructuoso, a diferencia de una curva lisa la costa rocosa no proporciona una estimación mejor de la longitud.

Para apartarse del problema consiste en representar sobre el papel la medida obtenida para cada tamaño de regla, es claro que ésta aumenta a medida que se acorta la regla, pero para satisfacción del medidor esto ocurre a una tasa casi permanente. Para entender lo anterior partamos de un ejemplo básico, una línea recta. Supóngase que la primera regla tiene exactamente la longitud del segmento

de recta que se quiere medir. Luego probemos con una regla la mitad de larga, nos da una medida de dos reglas. Posteriormente tomemos una regla la mitad de larga y tendremos una longitud de cuatro reglas. Ahora volvamos a medir la ondulada costa, a medida que se acorta la regla ocurre algo inusual: la longitud aumenta más rápido de lo que se acorta la regla. Y este fenómeno se mide por una magnitud llamada dimensión fractal.

Existen varios métodos para calcular la dimensión fractal, tales como el exponente de Hurst y la función de autocorrelación. Una de las interpretaciones de la dimensión, se relaciona con la capacidad de los objetos para ocupar el espacio euclidiano en el que se encuentran ubicados. Es decir, la dimensión ayudará en la determinación del contenido o medida de un conjunto, en particular de los conjuntos fractales.

Así, cuantificar fractales será, definir la proporción del espacio físico que es llenado por ellos. Encontramos una diferencia fundamental con los objetos euclidianos: si magnificamos sucesivamente un objeto euclidiano “unidimensional”, se observa segmentos rectilíneos. Sin embargo, si se engrandece sucesivamente un objeto fractal, encontramos objetos con niveles de complicación comparables a los del conjunto de partida.

### 3. PRECIO DEL ALGODÓN

Después de tener un conocimiento general de lo que son los fractales y de la aplicación básica de éstos en las finanzas (modelo de Bachelier), entraremos a precisar sobre la más profunda e importante aplicación que hizo Mandelbrot de fractales en finanzas, ésta se baso en el comportamiento de los precios del algodón. Como ya se ha mencionado, éste trabajo investigativo se basa en su mayoría, en los estudios hechos por Benoit Mandelbrot quien es un científico puro insaciable de conocimiento y para entrar a estudiar ésta aplicación deseo compartir el proceso que él realizo para llegar a encontrar un comportamiento “razonable” de los precios del algodón.

Es muy raro que los grandes descubrimientos y leyes hechas por científicos lleguen en un instante donde a estos se les enciende el bombillo como lo vemos en las tiras cómicas o que salten de una bañera diciendo Eureka con una nueva ley física en la mente. Es más común que se llegue a estos logros después de un camino tortuoso y donde hay más preguntas que respuestas, siendo común que se parta de una teoría establecida y nuevos datos que la desafían. Mandelbrot trabajaba en los laboratorios de IBM, marca que se había convertido para esa época (1961) en la pionera de las computadoras electrónicas y reclutó a varios científicos brillantes que fueran capaces de abordar cualquier tema imaginable, Mandelbrot estaba trabajando en un nuevo uso para los ordenadores: la economía, se dedicaba a estudiar montones de datos digitalizados, analizando cómo se distribuía los ingresos en una sociedad: la proporción de ricos y pobres, o de archimillonarios y ricos. Su trabajo llamo la atención de unos pocos economistas lo que le valió para ser invitado a dar una charla en Harvard.

Como él mismo lo enuncia al llegar se encontró con una gran sorpresa al visitar la oficina de su anfitrión, el profesor Hendrick S. Hounthakker, observó un diagrama en su pizarra que tenía forma convexa peculiar, una uve torcida a la derecha. Era casi idéntico al gráfico que él iba a mostrar en su charla para tratar de explicar la

distribución de ingresos, “¿Cómo es que en su pizarra está dibujado mi diagrama?”, preguntó Mandelbrot a Hounthakker, donde éste le responde que él no sabía que pensaba hablar de los precios del algodón, y es acá donde nace la pregunta que necesita un científico para empezar una investigación “¿Por qué un diagrama sobre la distribución de ricos y pobres se parece a otro sobre las oscilaciones de precios del algodón?”, Hounthakker llevaba estudiando los precios del algodón por algún tiempo sin llegar a ninguna parte, en esa época varios economistas estaban escudriñando la hipótesis antes mencionada de Bachelier, en la que menciona a la variación de precios como un juego de cara o cruz. Estaban empezando a buscar y analizar tablas de registros de precios, aunque para esa época era difícil conseguir registros fiables y amplios de mercancías y títulos, el algodón era una excepción ya que en Nueva York se tenía un registro diario de los precios por ser un mercado enorme en todo Estados Unidos que abarcaba desde los grandes cultivos en el sur hasta las grandes fabricas textiles en el norte, se tenían datos antiguos, precisos y centralizados, que para cualquier investigador sería un ilusión, pero para Hounthakker se convirtieron en una pesadilla. No podía hacerlos cuadrar de ninguna forma en el modelo de Bachelier habían demasiadas subidas y bajadas desmesuradas, donde la media estándar (la volatilidad, o desviación estándar) presentaba un continuo cambio con el tiempo, y no encontraba una herramienta estadística que le ayudara a comprender éste comportamiento, ya que nada era constante. Mandelbrot le propuso que el se encargaría de los precios del algodón y le solicito las cajas de cartón llenas de tarjetas perforadas con los datos digitalizados.

El punto de partida de Mandelbrot fue el diagrama que había visto en la pizarra del profesor que le serviría de guía visual, solicitó en IBM que le asignaran un programador informático que analizaría los registros del precio del algodón, al igual que había hecho en el caso de la distribución de ingresos ¿cuántos saltos grandes, y cuántos pequeños, cuantos ingresos grandes y cuantos pequeños?, además buscó todo dato del que se pudiera valer, escribió al ministerio de agricultura en Washington y visitó innumerables bibliotecas buscando más

registros de precios e información que le ayudara a explicar las oscilaciones que se presentaban, realizó un repertorio de precios del algodón diarios, semanales, mensuales y anuales que abarcaban más de un siglo y los ordenadores le ayudaban a buscar pautas.

Pese a que los resultados encontrados por los ordenadores fueron sorprendentes, Mandelbrot enuncia que para resolver el misterio del algodón sería necesario abarcar tres amplias líneas de pensamiento: “las leyes potenciales, la distribución de los ingresos personales, y un tema entonces esotérico en lo que parecía un universo totalmente distinto, la matemática de las distribuciones estables”<sup>6</sup> Mandelbrot se basó en tres pistas fundamentales:

### **3.1 Ley potencial de Zipf**

Una de sus principales referencias y puntos de partida fue los estudios de George Kingsley Zipf, quien era un profesor universitario de Harvard en una disciplina inventada por él mismo que denominó, ecología humana estadística. Zipf quien era un enciclopedista afirmaba en su libro *Human Behavior and the principle of Least Effort*, que “*las leyes potenciales no están presentes solo en las ciencias físicas, sino que rigen todos los aspectos de la conducta, organización y la anatomía humana (incluso el tamaño de los órganos sexuales)*”. El juego de Zipf consiste en tomar un texto y contar cuantas veces aparece cada palabra del mismo. Luego se le da un rango a cada palabra: 1 para la más común, 2 para la segunda más común y así sucesivamente. Por último se representa gráficamente el número de apariciones de una palabra correspondiente a su rango. En los resultados Zipf encontró que la curva no desciende con suavidad de la palabra más común a la menos común, sino que baja vertiginosamente al principio y luego de forma más lenta, siendo una pauta Escalante.

---

<sup>6</sup> FRACTALES Y FINANZAS: Una aproximación matemática a los mercados, arriesgar, perder y ganar, Pág.162, Bernoit Mandelbrot y Richard L. Hudson, Tusquets editores 2006.

*La fórmula que Zipf le asignó a la probabilidad de ocurrencia de cada palabra en un texto fue:*

$$Q(r) = Fr^{-1/\alpha}$$

Donde  $Q$  es la función de distribución de probabilidad,  $r$  es el número de orden de la palabra,  $F$  es una constante que Zipf estimó en  $1/10$ , y  $1/\alpha$  es el factor crítico de la ley potencial. Cuanto mayor es el valor de  $\alpha$ , más rico es el vocabulario (lo que implica que las palabras raras aparecen más a menudo). Zipf afirmó que  $\alpha$  es igual a 1, lo que hizo que ésta ley fuera criticada ya que no reflejaba con precisión lo que ocurre en los lenguajes reales, pero a Mandelbrot le llamó la atención desde el punto de vista matemático y lo llevo a una generalización la cual denominó ley de Zipf-Mandelbrot.

Lo que hizo Mandelbrot fue jugar con la ecuación de Zipf y encontró que con ésta podría construir un instrumento de medida social. Con una mejora de la fórmula podría cuantificar la riqueza de vocabulario y darle una puntuación numérica: nota alta, vocabulario rico; nota baja, vocabulario pobre. Era capaz de hallar la diferencia entre textos y hablantes. Aunque Mandelbrot fue criticado por algunos de sus colegas ya que contar palabras no era verdadera matemática, él enuncia que leer a Zipf lo llevó a la economía. “La dicción no era lo único que podía reducirse a una ley potencial. Nuestra riqueza o pobreza, nuestra prosperidad o hambre, también parecía estar bajo su fuerte influencia”<sup>7</sup>.

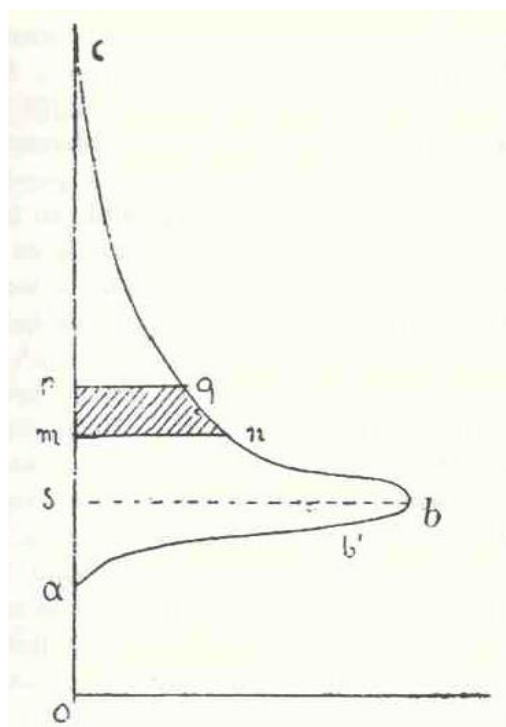
### **3.2 Leyes potenciales clásicas en economía**

Otro de los referentes de Mandelbrot para su investigación fue Vilfredo Pareto quien era un industrial, economista y sociólogo italiano. A Pareto le fascinaba el

---

<sup>7</sup> FRACTALES Y FINANZAS: Una aproximación matemática a los mercados, arriesgar, perder y ganar, Pág.165, Bernoit Mandelbrot y Richard L. Hudson, Tusqueds editores 2006.

poder y la riqueza. ¿Cómo los obtenía la gente?, ¿Cómo los usan quienes los tienen? La brecha entre ricos y pobres siempre ha sido parte de la condición humana, pero Pareto decidió medirlo, para realizar este estudio reunió datos sobre riqueza e ingresos a lo largo de diferentes siglos en diferentes países: registros de impuestos en Basilea (Suiza) en 1454 y Augsburg (Alemania) en 1471, 1498 y 1512; ingresos personales en Gran Bretaña, Sajonia, Irlanda, Italia, Perú, entre otros. Cuando representó gráficamente los ingresos en un eje y la población en el otro, observó la misma pauta casi en todo tiempo y lugar. Concluyendo que la sociedad no era una pirámide social que descendía de forma paulatina de una clase social a otra, sino que la denominó una “flecha social”, siendo muy ancha abajo, donde se sitúa la mayoría de la población, y muy delgada arriba donde está la elite más rica, estos datos no se ajustaban a la campana de Gauss si la riqueza se distribuyera normalmente al azar.



**Figura 3.1.** La curva de ingresos. Éste es el diagrama de Pareto, publicado en 1909, de la distribución de la riqueza en cualquier sociedad humana, con independencia de la época o el país. El eje vertical corresponde a los ingresos y el horizontal a la población (los economistas anteriores han intercambiado las coordenadas). El área sombreada representa el número de personas con ingresos entre  $m$  y  $p$ . El grueso de la población se sitúa en la parte ancha inferior de la curva, y la

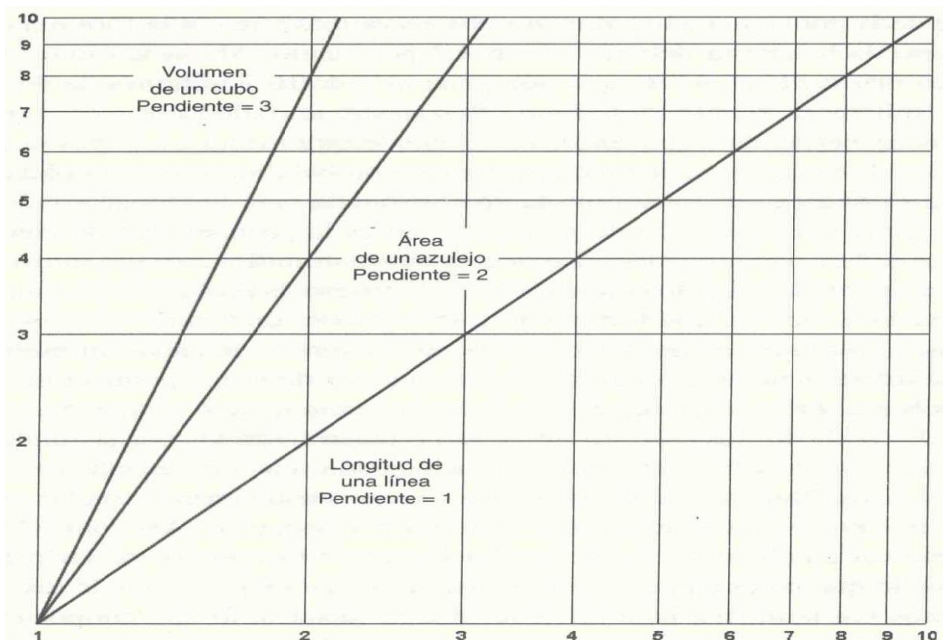
*minoría privilegiada en lo alto. A diferencia de la campana de Gauss, la curva de los ingresos no es simétrica.*

En el análisis de la gráfica, Pareto resaltó que en lo más bajo de la curva los adultos pasan hambre y los niños mueren a edad temprana. En la amplia región media de la curva, todo es oscilación y movimiento: gente que sube o baja, que queda desempleada, que asciende en virtud a su talento o suerte. En la reducida cima se encuentra la elite más pudiente, que tiene el poder y controla la riqueza, hasta que llega una nueva clase que lo destrona o una revolución. “La democracia es un fraude. La naturaleza humana es primitiva, emocional, inflexible. Los más inteligentes, capaces fuertes y astutos se llevan la parte del león. Los débiles se mueren de hambre, de otro modo la sociedad degeneraría”, éste análisis hizo que Pareto fuera beatificado por el común de la población y demonizado por las elites que tenían el poder para la época.

Lo que hizo Pareto fue agrupar la gente por sus ingresos, contó cuantos había en cada categoría y luego representó gráficamente los resultados. Estos datos se ajustaban a una **ley potencial**, que exhiben una pauta cuando se representa en el papel logarítmico, Lo que se hace es, en vez de numerar el eje x con 1, 2, 3 y 4 en intervalos iguales, se llaman 1, 10, 100 y 1000, en potencias de 10. Estos datos escalantes formaran una línea recta inclinada. Como ejemplo se puede representar el área de un conjunto de azulejos (pieza plana de cerámica vidriada de poco espesor) de baño cuadrados. Sea el eje horizontal la longitud de cada azulejo, y el vertical su área, Un azulejo de 2 cm de lado tiene un área de 4 cm<sup>2</sup>, uno de 3 cm de lado tiene un área de 9 cm<sup>2</sup>, y así sucesivamente, al representarse estos datos gráficamente se obtendrá una línea recta que asciende de izquierda a derecha, a razón de cambio de 2 unidades verticales por una horizontal, donde 2 es también el valor del exponente al que se eleva la longitud para hallar el área. En conclusión, la pendiente de la recta es también la potencia en la ley potencial. Si se hace otro ejemplo sencillo con otra potencia, se llena un cuarto con cajas cúbicas, el volumen aumentará según la potencia de 3 y la



pendiente será más inclinada. Si se toma una cuerda con el fin de unir dos extremos, la pendiente será de 1.



**Figura 3.2.** La imagen de una ley potencial creciente. Éste es el aspecto de una ley potencial, como la investigada por Pareto, la pendiente de la línea es igual a la “potencia” de la ecuación. Por ejemplo, el área de los azulejos cuadrados aumenta con el cuadrado (potencia 2) de la longitud del lado. El volumen de las cajas cúbicas aumenta con el cubo (potencia 3) del lado. Y la longitud de una línea aumenta en proporción directa (potencia 1) a la longitud de los segmentos que se unen para formarla.

Aunque estos ejemplos son sencillos, para otros datos más complejos siempre que haya una ley potencial aparecerá una línea recta, y esto fue lo que vio Pareto cuando representó los ingresos en función del número de personas, donde concluyó que estaba clara la presencia de una ley potencial, la línea se inclinaba hacia abajo ya que la potencia era negativa. Y alfa (la denominación de Pareto para el valor absoluto de la pendiente) era de  $3/2$ . Significaba que entre más inclinada es la pendiente, más uniforme es la distribución de ingresos. En el caso del vocabulario humano enunciado en la pista nº1, Zipf le dio a la pendiente el valor de 1, lo que significaba que la persona media utilizaría unas pocas palabras

muy a menudo, pero todavía tendría un vocabulario bastante rico. Una pendiente de 3/2 significaba que mucha de la riqueza se concentraba en muy pocas manos.

La fórmula de Pareto en notación algebraica es la siguiente:

$$P(u) = \left[ \frac{u}{m} \right]^{-\alpha}$$

$P(u)$ : Significa que proporción de gente tiene ingresos por encima de cierto valor de  $u$ . Para ilustrar ésta fórmula se hará por medio de un ejemplo, si se eligiera un grupo de personas que podría ser el formado por todo aquel que ingrese más de 515.000 pesos mensuales, o 6.180.000 pesos anuales (el salario mínimo establecido por el gobierno colombiano para el 2010). ¿Qué porcentaje de la población gana al menos 10 veces más? Según la fórmula de Pareto, la respuesta debería ser un 3,2%, y si vamos un poco más arriba ¿Qué proporción gana más de 6.180.000.000 pesos, mil veces más el salario mínimo? Respuesta: un 0,003% (un número bastante pequeño). Ahora veamos el anterior ejemplo algebraicamente:

$$P(10) = \left[ \frac{61.800.000}{6.180.000} \right]^{-3/2}$$

$$P(u) = 10^{-\frac{3}{2}}$$

$$P(u) = 0,032 \text{ ó } 3,2\%$$

De acuerdo con la fórmula de Pareto, un 3,2% de la gente que ingresa más que el salario mínimo está ganando más de 61.800.000 pesos al año.

Ahora para saber quien gana más de 1000 veces el salario Mínimo:

$$P(1000) = \left[ \frac{6.180.000.000}{6.180.000} \right]^{-3/2}$$

$$P(u) = 1000^{-\frac{3}{2}}$$

$$P(u) = 0,000032 \text{ ó } 0,0032\%$$

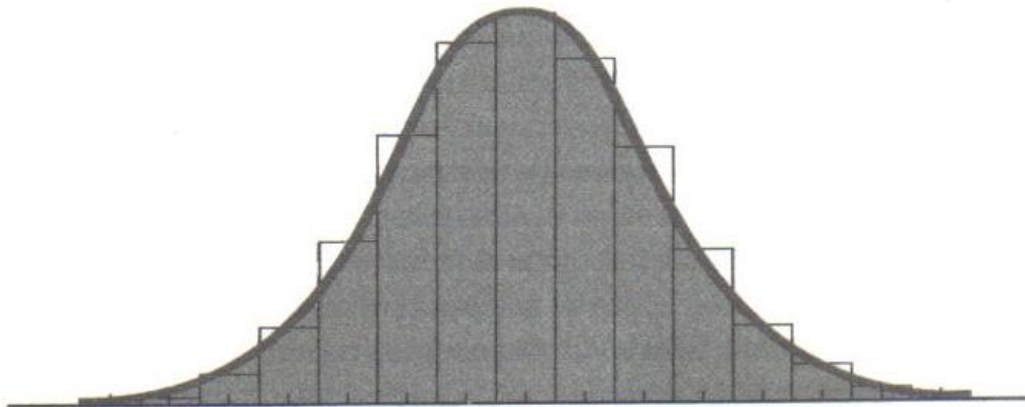
Lo que significa que, un 0,0032% de la gente que ingresa más que el salario mínimo está ganando más de 61.800.000.000 pesos al año.

Como se puede apreciar las posibilidades de ser multimillonario son muy escasas, según esta fórmula la probabilidad de llegar a tener una fortuna de 1000 millones teniendo 500 millones, es la misma que la de ganar un millón si se tiene medio millón, en conclusión, como el adagio popular, dinero llama dinero, y pobreza llama pobreza, aunque suena injusto pero cierto tanto social como matemáticamente.

En el análisis hecho por Mandelbrot resalta que ésta fórmula solo funciona cuando se aplica a los muy ricos. Pareto Pretendía ver una ley universal para todo territorio y época, Así como Zipf quiso ver un alfa universal de 1 para la frecuencia de las palabras, lo que no es cierto, Pareto creía que la ley potencial era la misma para todas las clases sociales, lo que tampoco es cierto. Lo que si es claro partiendo de la fórmula y teniendo como base los ejemplos mencionados y la gráfica de distribución de ingresos, es que, en una sociedad, muy pocos son exageradamente ricos, pocos son muy ricos, y la gran mayoría es de clase media o pobre. El alfa de la fórmula de Pareto es una manera de cuantificar que tan inequitativa es la sociedad.

### **3.3 Leyes del azar excepcional**

Para entrar a mirar la tercera “pista” utilizada por Mandelbrot recordemos el ejemplo mencionado de lanzar una moneda y mirémoslo bajo la curva de gauss:



**Figura 3.3.** Si se apuesta que sale cara, y en cada tanda de mil lanzamientos se anota las ganancias o pérdidas acumuladas. La altura de la curva representa la frecuencia de cada tipo de resultado. La mayoría de las veces, las ganancias por tanda son pequeñas y se ubican en la zona central de la curva. Solo ocasionalmente son enormemente positivas o negativas, y éstas se ubican en las <colas> derecha o izquierda de la curva. Ésta es la distribución de un proceso aleatorio conocido como **normal**.

La ecuación de la campana de Gauss, da la probabilidad de un evento (por ejemplo, la estatura de una persona) en una población dada que cumple ciertas condiciones básicas. Su fórmula es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En la fórmula,  $x$  es el valor particular de la variable estudiada: una estatura de 1,80 metros, por ejemplo.  $\mu$ , o mu, denota el valor medio de todas las  $x$  de la población;  $\sigma$ , o sigma, denota la desviación estándar (la media de la dispersión de las  $x$  alrededor del promedio). Cuando  $\mu=0$  y  $\sigma = 1$ , se investiga en qué parte de la curva gaussiana se encuentra. Si la probabilidad es alta, nos ubicaremos cerca de la media, si la probabilidad es baja, en valor estará ubicado en los extremos laterales (las colas). La desviación estándar determina qué clase de campana de Gauss se obtiene: gruesa y baja (sigma alta), o estrecha y alta (sigma baja).

Augustin-Louis Cauchy ideó un pensamiento diferente al de Gauss, donde los errores no se distribuyen de manera uniforme, mientras Gauss propone el error como la suma de errores pequeños, Cauchy sugiere que el error mayor será casi tan grande como la suma del resto. La ecuación de densidad de probabilidad reducida de Cauchy es mucho más simple:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Aunque la matemática gaussiana es sencilla y se ajusta a la mayoría de los aspectos de la realidad, con el análisis de la geometría fractal, el caso de Gauss comienza a parecer menos “normal”. La diferencia entre los modelos de Gauss y Cauchy equivalen a dos maneras de ver el mundo: una en que los grandes cambios son el resultado de cambios pequeños, y otra en que los acontecimientos de gran dimensión tienen una importancia muy grande.

Ahora bien, después de repasar superficialmente los modelos de Gauss y Cauchy, fue Paul Lévy quien le dio la orientación a Mandelbrot para aplicar su modelo a su estudio del comportamiento de los precios del algodón, Lévy quien hizo la teoría de la probabilidad la cual denominó distribuciones de probabilidad estables, en este caso, estable significaba que se puede tener un objeto (girarlo, reducirlo, sumarlo, etc.) y sus propiedades básicas se mantiene iguales. Una campana de Gauss es estable en este contexto, la teoría de los errores asume que, los errores de cualquier tipo forman una campana de Gauss. Y es estable: se puede sumar errores de medida de dos fuentes de datos y estos combinados seguirán formando la campana de Gauss. Mandelbrot llamó a la familia de distribuciones de probabilidad “L-estables” en honor a Lévy quien fue su profesor en la École Polytechnique en Francia.

La campana de Gauss y la distribución de Cauchy son dos casos extremos, y Lévy las conectó con una gran visión. “Solo los parámetros (los detalles, matemáticamente hablando) difieren”<sup>8</sup>. Si se juega con los parámetros, se obtienen curvas achaparradas o altas, con algunos valores extremos, desviadas a la derecha o a la izquierda, simétricas o asimétricas. El parámetro más importante es el alfa, el mismo que aparece en las fórmulas de Pareto y Zipf.

$$\log f(t) = i\delta t - \gamma |t|^\alpha [1 + i\beta(t/|t|)\tan(\alpha\pi/2)]$$

Significa que las distribuciones de probabilidad L-estables tienen cuatro parámetros (las variables claves que deciden cuál será la forma final de la curva). Son los que ilustrarán si se describe una campana de Gauss, una curva de Cauchy o algo radicalmente diferente. El parámetro de <localización> es  $\delta$ . El parámetro de <escala> es  $\gamma$ , lo que determina la magnitud de las probabilidades en general. El índice de sesgo es  $\beta$ : si es 0, la curva es simétrica. Y el parámetro más importante es  $\alpha$ , que determina el grosor de las colas. Cuando  $\alpha$  es 2 y  $\beta$  es 0, se obtiene la distribución de Cauchy con su característica principal <colas gruesas>.

### 3.4 El caso del algodón, básicamente cerrado.

Así pues, Mandelbrot tenía tres pistas para llegar a una conclusión del comportamiento de los precios del algodón: las leyes potenciales, la distribución de ricos y pobres, y las distribuciones de probabilidad L-estables. La primera es una visión general del mundo, la segunda un ejemplo de economía, y la tercera una serie de consideraciones matemáticas al que nadie le encontraba utilidad.

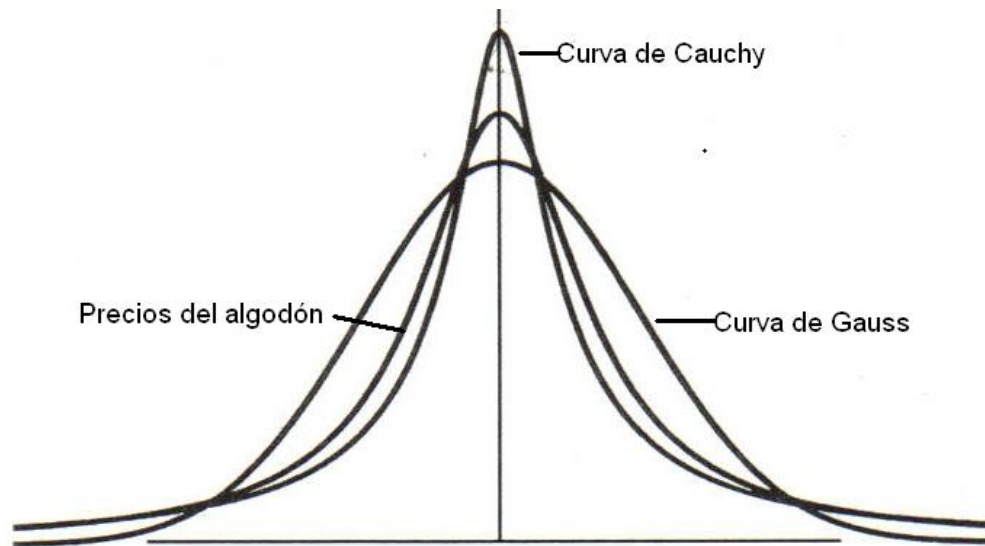
---

<sup>8</sup> FRACTALES Y FINANZAS: Una aproximación matemática a los mercados, arriesgar, perder y ganar, Pág.173, Benoit Mandelbrot y Richard L. Hudson, Tusquets editores 2006.

En el centro de cálculo de IBM se procesaron los miles de datos de precios del algodón, tal como los había solicitado Mandelbrot, encontrando que los cambios de precios diarios, semanales, mensuales o anuales no tenían un comportamiento como el sugerido por el modelo de Bachelier, la varianza se comportaba de manera irregular, ya que cada vez que se añadía un dato extra al conjunto de datos, la varianza cambiaba. No se obtenía un valor fijo sino que daba saltos muy grandes, por ejemplo del 0,4 al 3 por ciento, y había cambios de precios muy grandes que no se ajustaban a la campana de Gauss.

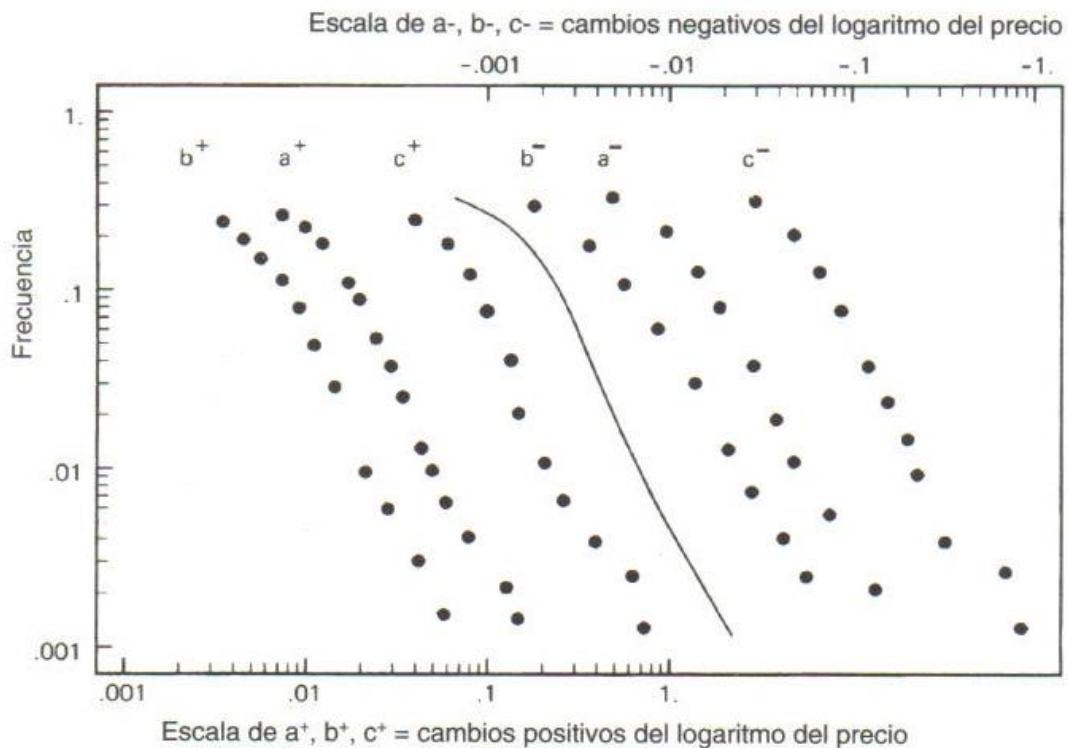
Mandelbrot, supuso que había una ley potencial similar a las de Zipf y Pareto, ya que la magnitud de los cambios de los precio variaban de la misma manera. Encontró unos cambios muy grandes junto a una serie de movimientos de precios pequeños. Haciendo una comparación con las aplicaciones de Zipf y Pareto: Al igual que en el diccionario se encuentran una multitud de palabras raras al lado de un número pequeño de palabras comunes, y grandes grupos de pobres conviven en el mundo con unos pocos ricos privilegiados.

Ésta era parte de su hipótesis, para probarla debía hallar un valor del alfa que rigiera la curva de precios del algodón. Lo que hizo fue seguir la guía de Pareto y trazó un diagrama de precios en papel logarítmico, lo cual para cada grupo de datos tendían hacia una línea recta, aunque los datos de las líneas no eran precisos, estimó con una regla una pendiente de -1,7 ya que las líneas son descendentes, por lo que el alfa es de 1,7. Las distribuciones de Cauchy y Zipf tenían un alfa igual a 1, El de Pareto de 1,5, y el del beneficio de un juego de cara o cruz de 2. De ésta manera Mandelbrot concluyó que “la variación de los precios del algodón se encontraba entre el sueldo de un trabajador y las ganancias de un jugador”.



**Figura 3.4.** En ésta figura se aprecia tres diagramas. La curva más baja y con colas delgadas corresponde a la campana de Gauss (juego de cara o cruz con alfa de 2). La curva más alta es la de Cauchy la cual tiene colas más elevadas. Y la curva intermedia corresponde a la distribución de los incrementos del precio del algodón representados por Mandelbrot.

El gráfico obtenido en el papel logarítmico fue el siguiente:





**Figura 3.5.** *Hileras de algodón. El resultado son seis hileras de puntos. Las escalas horizontales corresponden a la magnitud de los cambios de precio; los grandes se sitúan a la derecha. La escala vertical corresponde a la frecuencia de cada cambio; los más comunes se sitúan arriba. Las seis hileras tienen más o menos la misma inclinación, como muestra la línea continua.*

Los símbolos  $b^+$  y  $b^-$  muestran la variación diaria de los precios de 1944 a 1958 ( $b^+$  indica las subidas de precio y  $b^-$  las bajadas)  $a^+$  y  $a^-$  muestran la variación diaria a lo largo de un periodo anterior, de 1900 a 1945. El tercer conjunto,  $c^+$  y  $c^-$ , muestra la variación mensual de 1888 a 1940. Como se puede apreciar todos se parecen, un mes se ve como un día, un conjunto de días se ve igual a otro. Si se quitaran las etiquetas no se podría distinguir cuál es cuál. Lo mismo se puede decir de los gráficos de precios que aparecen en los periódicos o los que usualmente se analizan, unos suben y otros bajan, pero da igual que sea diario, mensual o anual, no hay gran diferencia en su aspecto general.

“movedizo” fue el término científico que Mandelbrot le dio a estos comportamientos y hasta que desarrollo la geometría fractal no hubo manera de cuantificar ésta intuición. Pero esto es lo que se puede apreciar de los datos del algodón: una pauta fractal, en este caso el escalamiento fractal no pertenece a una figura o forma, sino a una pauta de otra clase: la variación de los precios. De ésta manera no era coincidencia que el gráfico de Hounthakker de la variación de precios del algodón se pareciera al de la distribución de la riqueza de Mandelbrot, la matemática que utilizaron era la misma.

### **3.5 El significado del algodón**

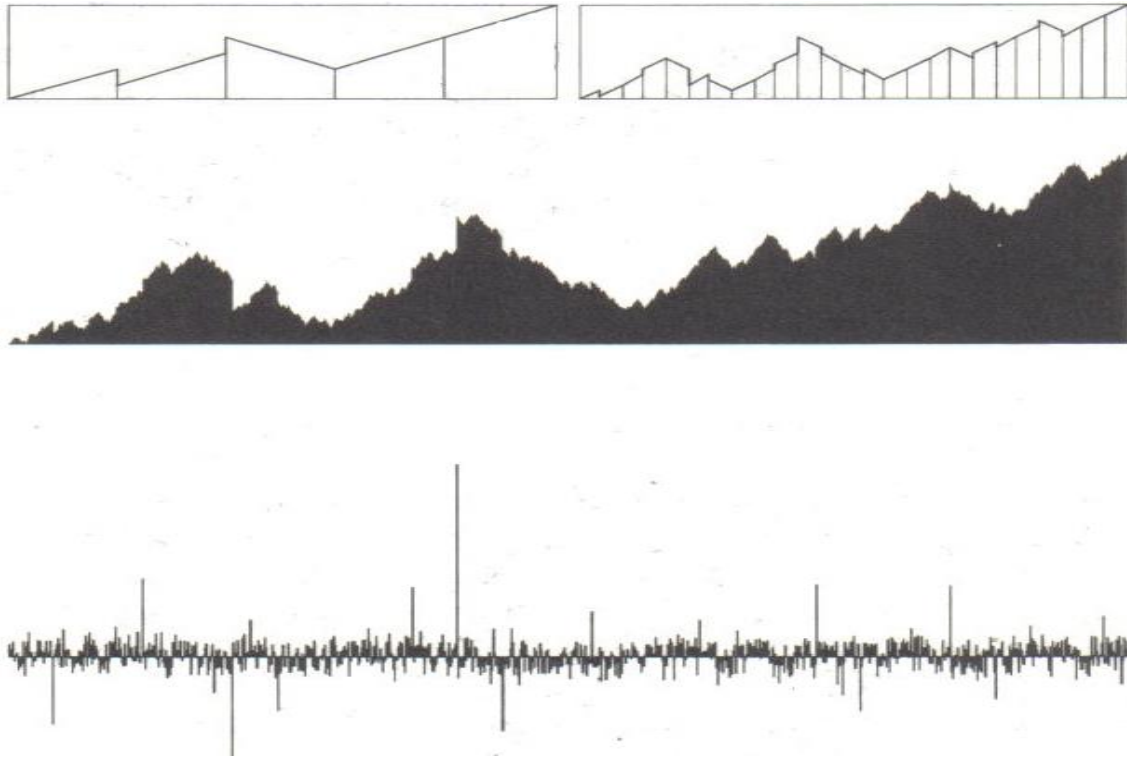
Si los cambios de precios del algodón se ajustaran a la teoría estándar, deberían ser como granos de arena en un montón: puede que varíen algo su tamaño, pero todos serían granos de arena, los resultados de Mandelbrot arrojaron otra cosa: los cambios se parecían a una mezcla de arena, grava, piedras y grandes bloques. Había días en que los precios casi que permanecían constantes frente al

cierre del día anterior; son los granos de arena. Pero otros días se presentaban cambios muy grandes; son los grandes bloques.

Esto explica las **colas gruesas**, o cambios anormalmente grandes, el factor Escalante es el tiempo y no el espacio, ya que algunos lapsos de tiempo son relevantes. El ciclo de siembra y cosecha tiene un efecto periódico regular sobre el comercio: las cantidades aumentan tras la cosecha y van disminuyendo hasta la siguiente recolección, en este sentido, el precio debería tener un comportamiento razonable simplemente con la relación de oferta y demanda (girar en torno a una media gaussiana neta). Pero los resultados demuestran que los precios pueden variar, y lo hacen de forma violenta e inesperada, demostrando que el mercado es muy arriesgado. Cualquiera que estudie los registros de los precios del algodón podría imaginar que está viendo “correcciones”, “niveles de resistencia” y otras señales que el análisis técnico busca para comprar, vender o mantenerse.

Para finalizar, la historia del algodón muestra un extraño vínculo de diferentes ramas de la economía, así, como de la economía y la naturaleza. Que los precios del algodón varíen como los ingresos, que sus fórmulas matemáticas se parezcan al uso de las palabras en un texto, éste es un verdadero misterio.

Como ya se ha mencionado los fractales son muy gráficos y ayudan a tener una mejor comprensión, la siguiente imagen muestra la imitación de la variación de precios del algodón, ilustrando la relación entre los cambios de precios abruptos, las “colas gruesas” de los gráficos financieros reales, y las contemplaciones del análisis fractal.



**Figura 3.6.** A diferencia del gráfico browniano de Bachelier mostrado anteriormente, este diagrama tiene un generador fractal mucho más complicado. Se parte de cinco intervalos inclinados, y se le agrega dos discontinuidades verticales. El gráfico central muestra la construcción completa, y el inferior los cambios de un momento al siguiente.

Recordemos: Para hacer la construcción de un fractal browniano se comenzaba con un iniciador recto ascendente y un generador en zigzag. Se hacían copias del generador, se reducía y se introducían en el diagrama reemplazando todas las líneas rectas por el generador a una escala adecuada. Repitiendo ese procedimiento varias veces se llegaba a un gráfico que simulaba empíricamente el comportamiento de los precios de una acción o commodity cualquiera. Para este caso se partía del punto 0,0, subía al punto  $4/9, 2/3$ , bajaba al punto  $5/9, 1/3$ , y terminaba en el punto 1,1. La clave era la magnitud de los tres segmentos del generador utilizado. Las amplitudes eran  $4/9, 1/9, 4/9$ , y sus alturas  $2/3, -1/3$  y  $2/3$ . Nótese que las alturas son el cuadrado de las amplitudes, apreciándose una relación clara y regular.

En el caso de este gráfico se partió de un generador dividido en cinco segmentos: dos ascendentes, uno descendente y otros dos ascendentes, aparte se añadieron dos saltos verticales el primero hacia abajo entre el primer y segundo segmento, y el segundo hacia abajo, entre el segundo y tercer segmento, a diferencia del modelo de Bachelier éste tiene discontinuidades abruptas, la distribución de los saltos positivos o negativos se rigen a una ley potencial. El escalamiento ha generado “colas gruesas” que se mide con el exponente alfa (como en la curva de Pareto y el caso L-estables mencionado anteriormente), cambiando el exponente alfa, también lo hace el grado de asimetría de las colas.

Para cerrar ésta aplicación, el propósito de hacer énfasis en ésta fue la de mostrar a través de los fractales, la extraña relación entre dos casos aparentemente sin relación: la aleatoriedad de un juego de cara o cruz, y la complejidad y el riesgo de un gráfico de los precios del algodón.

### **3.6 Conclusión**

El precio se comporta de manera muy diferente a un movimiento browniano geométrico, los eventos y cambios extremos son mucho más probables.

## 4. METODOLOGIA DE PREDICCIÓN DE PRECIOS DEL PETRÓLEO BASADA EN LA DINAMICA FRACTAL

Oswaldo Morales Matamoros

Alexander Balankin

Luis M. Hernández Simón

Grupo interdisciplinario “Mecánica Fractal”

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME)

Instituto Politécnico Nacional (IPN)

Como punto de partida de esta aplicación de la geometría fractal se tomaron las volatilidades históricas del precio del petróleo, en los cuales se encontraron un crecimiento de interfases rugosas, el objetivo principal de este trabajo consistió en construir un modelo de predicción y en generar tres escenarios probabilísticos sobre el comportamiento futuro de los precios del petróleo.

Los autores de este trabajo analizaron y caracterizaron la dinámica de las fluctuaciones de los precios mediante el análisis fractal o de escalamiento, mediante las siguientes consideraciones.

### 4.1 Metodología:

La investigación se desarrollo en tres etapas (1) marco conceptual, (2) caracterización estadística y (3) metodología de predicción.

- (1) En el marco conceptual se incluyeron las distribuciones de leyes potenciales, autocorrelación y la teoría de los fractales (invarianza de escala, escalamiento dinámico y crecimiento de interfases rugosas).

La aleatoriedad de la dinámica espacio-tiempo se caracteriza por las fluctuaciones de los parámetros observables, definidos por:

$$\sigma(\Delta, t) = \langle \langle [Z(X, t) - \langle Z(X, t) \rangle_{\Delta}]^2 \rangle_{\Delta} \rangle_{R^{1/2}}$$

En donde,  $\langle [Z(X, t) - \langle Z(X, t) \rangle_{\Delta}]^2 \rangle$  denota el promedio del espacio, de una ventana de tamaño  $\Delta$ , y  $\langle \dots \rangle_R$  muestra el promedio de todas las caracterizaciones realizadas.

Para comprobar que el conjunto cumpla con una dinámica de escalamiento se verifica con la siguiente fórmula:

$$\sigma(\Delta, t) = t^{\beta} f[\Delta/\varepsilon^z(t)]$$

Donde  $\varepsilon(t)$  es la función de correlación de la escala del espacio, y la función de escalamiento es  $f(y) = y^H$ ;  $H$  es el exponente de Hurts que indica si hay un comportamiento aleatorio, el exponente  $z$  indica qué tan rápido se expanden las correlaciones a través de un sistema. Y  $\beta = H/z$  es el exponente de crecimiento (indica el comportamiento que tendrá el sistema en el corto plazo).

El exponente de Hurts indica si un fenómeno o una serie de tiempo presentan un comportamiento fractal al igual que la dependencia de la serie de tiempo en el largo plazo. Cuando  $H=0,5$  se dice que el fenómeno analizado es aleatorio, si,  $0,5 < H < 1$ , es persistente (un periodo de crecimiento es seguido por otro similar), y si,  $0 < H < 0,5$ , es antipersistente (un periodo de detrimento es seguido por uno crecimiento).

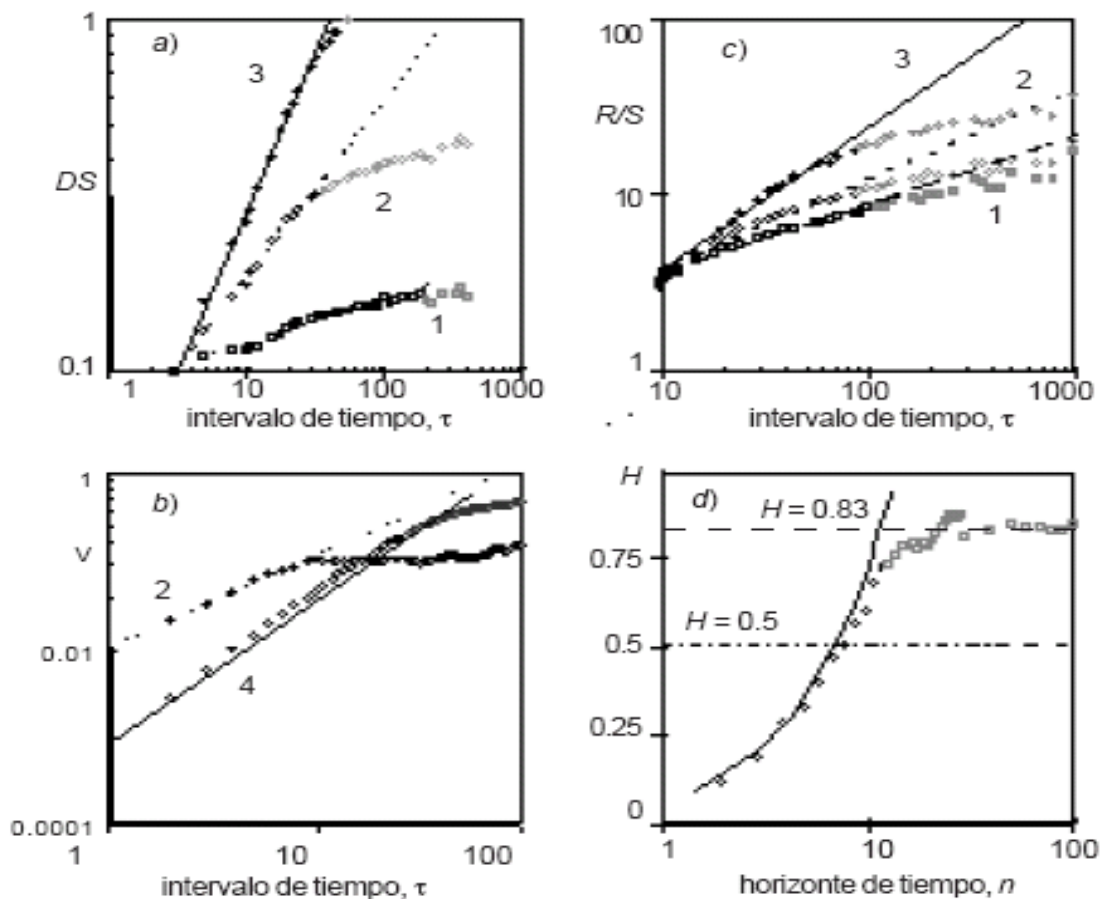
Para medir el escalamiento se aplicó la formula sugerida por Sittler y Hinrinchsen, los cuales incluyen los exponentes antes mencionados que varían constantemente.

$$\sigma(\Delta, t) \propto \Phi(\Delta^{H(t)}, t^{\beta(\Delta)}),$$

Donde  $\Phi$  es la función de escalamiento.

Los cambios en los precios por lo general se miden como el incremento de éstos, los rendimientos logarítmicos o el valor absoluto de los rendimientos, el rendimiento logarítmico del precio en un periodo se calcula como el logaritmo del precio final menos el inicial.

$$\delta_t(\tau) = \ln(1 + \Delta_t) = \ln(P_t/P_{t-\tau}) = p_t - p_{t-\tau}$$



**Figura 4.1** (a-c) Gráficas fractales de volatilidades históricas de los precios del petróleo, obtenidas por los métodos de trazado autoafín: a) rugosidad-longitud, b) variograma y c) rango reescalado; los números son los diferentes horizontes de tiempo 1. N=3, 2. N=8, 3. N=20 y 4. N=60 días hábiles. d) Dependencia de H vs horizonte (los círculos y los cuadrados son los datos experimentales, mientras la línea continua representa el ajuste de los datos por medio de una ley potencial).

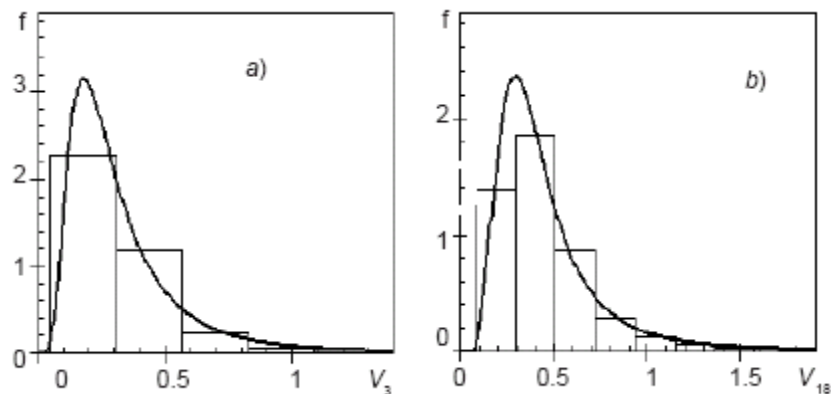
La volatilidad es la desviación estándar del precio, para calcular la volatilidad histórica del precio para diferentes periodos de tiempo se hace de la siguiente manera:

$$V_n(\tau) = (n - 1)^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (P^2(\tau+i) - \langle P^2(\tau) \rangle)}$$

Donde  $P^2(\tau)$  es el tiempo promedio de negociación, y  $\tau$  es el tiempo para realizar las transacciones, donde se excluyeron fines de semana y festivos del mercado.

Al hallar la volatilidad de los precios del petróleo, y con respecto a las gráficas anteriores los autores concluyeron que ésta tenía un comportamiento persistente a largo plazo, es decir, correlaciones positivas a largo plazo; mientras que a corto plazo es antipersistente que obedece a una ley de escalamiento donde varían los exponentes ( $H$  y  $z$ ) continuamente.

De igual manera, observando la siguiente gráfica se aprecia que el paso de un comportamiento antipersistente a uno persistente está relacionado con el cambio de la distribución estadística de la volatilidad.



**Figura 4.2** Distribuciones de probabilidad condicional de volatilidad para los horizontes de a)  $n=3$ : distribución de Pearson ( $p=0.41$ ); y b)  $n=18$ : distribución log-logística ( $p=0.38$ )

En las anteriores gráficas se aprecia que para  $n < 18$  el sistema no tiende a una estabilización dentro del estado crítico para horizontes en el largo plazo, mientras



para  $n > 18$  la volatilidad histórica de precios tiende a una dinámica de escalamiento, donde podría ser predecible su comportamiento en el largo plazo.

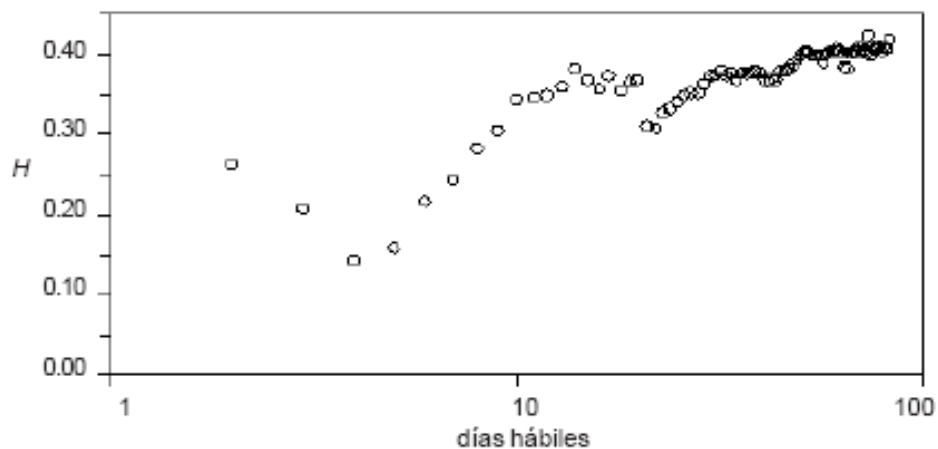
De acuerdo a la conclusión anterior, ésta sirvió de punto de partida para crear una metodología de predicción de precios del petróleo, generando escenarios probabilísticos del futuro comportamiento del precio del petróleo.

## **4.2 Construcción del modelo de predicción de precios del petróleo**

El primer paso fue calcular el valor absoluto de los rendimientos logarítmicos ( $|\delta(\tau)|$ ) para diferentes periodos de tiempo  $n=1,2,3, \dots, 100$ . Esto se realizó porque  $|\delta(\tau)|$  indica la amplitud de las fluctuaciones de los precios, y se interpreta como la volatilidad de los precios, la cual se correlaciona en el tiempo como una ley potencial.

Enseguida, se calculó el exponente de Hurst ( $H$ ) de  $|\delta(\tau)|$  para cada uno de los 100 periodos de estudio, se utilizaron cinco métodos de trazado autoafin (rango reescalado, de espectro de potencia, el variograma, de ondoletas y de rugosidad-longitud) utilizando el programa Benoit 1.3.

Después, se promedió los valores de  $H_{|\delta(\tau)|}$  de las 100 series de tiempo. Y estos promedios se graficaron para identificar a partir de que momento los  $H_{|\delta(\tau)|}$  mostraban un comportamiento constante (estado estacionario).



**Figura 4.3** Promedios globales de  $H_{|\delta(\tau)|}$

Lo observado en la gráfica indica que aproximadamente a partir de dato 15 los valores de  $H_{|\delta(\tau)|}$  alcanzan un estado estacionario, lo que indica que cada tres semanas contando solo los días hábiles, las fluctuaciones de los precios se estabilizan. En base a este dato la predicción de precios debería realizarse para cada 15 días hábiles.

En consecuencia, el siguiente paso consistió en calcular el promedio de  $H_{|\delta(\tau)|}$ , desde el dato 15 hasta el 100, dando como resultado un valor de 0.38, valor que se utilizó para generar escenarios probabilísticos sobre el comportamiento de los precios.

Después, se obtuvo el rango de las fluctuaciones para cada 15 días hábiles (el máximo de fluctuaciones que se podrían tener en ese intervalo de tiempo). Este procedimiento se realizó calculando el valor de  $|\delta(\tau)|$  para cada 15 días, o sea, en el primer punto se tomó desde el precio 1 hasta el 15, para el segundo desde el 2 hasta el 16. Y así sucesivamente hasta el último punto que fue desde el precio 4.485 hasta el 4.500, de esta manera se obtuvieron 4.485 datos de  $|\delta(\tau)|$ .

Enseguida determinaron valores máximos y mínimos de todos los datos y se calculó un rango para estos datos (valor máximo menos valor mínimo) dando un

valor de 0,48. Valor que también fue utilizado en la generación de escenarios probabilísticos del comportamiento de precios del petróleo.

### **4.3 Resultados del análisis estadístico**

- La volatilidad histórica de los precios de petróleo, guarda invarianza de escala.
- La volatilidad a corto plazo es antipersistente (correlación negativa): distribución de colas ligeras para un  $H < 0,5$ .
- La volatilidad a largo plazo tiende a una dinámica de escalamiento, mientras que en el corto plazo muestra una ley de escalamiento con exponentes que varían constantemente.
- Cuando se pasa de un comportamiento antipersistente a uno persistente, va acompañado de un cambio en la distribución estadística que ajusta el comportamiento de la volatilidad.

### **4.4 Generación de escenarios probabilísticos para los precios del petróleo**

Para la generación de escenarios se utilizaron los valores anteriormente mencionados que sirvieron como parámetros estadísticos, (1) el promedio del exponente de Hurts para  $|\delta(\tau)|$  ( $H_{|\delta(\tau)|} = 0.38$ ); y (2) el rango de  $|\delta(\tau)|$ , para  $\tau=15$  días hábiles, 0.48.

Utilizando el software Benoit 1.3, se generaron los escenarios probabilísticos, donde se crearon 300 series de tiempo, de manera aleatoria partiendo de:  $H=0.38$ , número de puntos de cada traza = 225 y el rango del conjunto = 0.48

Las 300 trazas creadas están formadas por 225 datos, los cuales indican el valor promedio pronosticado del rendimiento logarítmico de precios,  $\delta(\tau)$ , durante un periodo de 15 días hábiles. El horizonte de tiempo de predicción es de enero de 2004 hasta noviembre 2016 (225 datos \* 15 días hábiles = 3 375 días hábiles =12.9 años, teniendo en cuenta que un año tiene 260 días hábiles).

Después, lo que se hizo fue tratar de predecir la tendencia que tendrán los precios, a la baja, al alza o si se mantendrán constantes, o en otras palabras determinar la tendencia de los incrementos (el signo de los incrementos).

Lo que hicieron los autores de ésta aplicación fue usar la teoría de Bachelier antes mencionada en mi investigación, donde habla que el comportamiento de los precios está ligado a un juego de cara o cruz, o en otras palabras, la probabilidad de tener un incremento positivo o uno negativo es del 50% (distribución Normal).

Lo que hicieron fue darle a valor  $\delta(\tau)$  (o precio) un signo positivo, al siguiente valor signo negativo, al próximo signo positivo; así sucesivamente hasta el ultimo valor de la serie de tiempo dándole el signo contrario al valor inmediatamente anterior; de ésta manera al dato 225 se le asignó el signo contrario al del dato 224.

Hasta éste momento se tienen los datos proyectados de  $\delta(\tau)$  con el signo de los incrementos ya asignados, pero lo que les importaba era tener los datos proyectados, así que, calcularon para cada una de las 300 trazas, los 225 precios promedio del petróleo proyectados para 15 días hábiles partiendo de los 225 datos de  $\delta(\tau)$ .

Para calcular  $\delta(\tau)$  es:

$$\delta(\tau) = \ln(P(t)/P(t - \tau))$$

Entonces, Para calcular el valor de precio  $P(t)$ , utilizaron la siguiente fórmula.

$$P(t) = P(t - \tau) * \exp(\delta(\tau))$$

Después de obtener las 300 series de precios, dividieron cada serie en dos subseries. Una con los datos de signo positivo (113 datos), y la otra con los de signo negativo (112 datos). Así pues, se tenían las 300 series de tiempo con tendencia al alza y a la baja.

A continuación, calcularon para las 300 trazas con los 225 datos el valor máximo y valor mínimo promedio para cada punto, donde se obtienen 225 valores máximos y 225 mínimos que representan, los precios más altos y más bajos que se podrían presentar en caso de que ocurra un hecho exógeno que intervenga en el comportamiento del mercado (recesiones, desastres naturales, estallidos de burbujas, etc)

Los datos obtenidos fueron los siguientes:

	Maximo	Mínimo		Maximo	Mínimo		Maximo	Mínimo		Maximo	Mínimo
0	16.6900	16.6900	58	41.1782	8.7835	116	33.6998	8.2138	174	46.7203	6.2005
2	26.9729	14.7486	60	43.7915	8.9926	118	36.4597	8.0528	176	44.3054	6.2563
4	27.5069	14.1140	62	40.7666	8.4105	120	36.9408	7.8469	178	43.7333	6.5156
6	27.2003	13.7396	64	41.2658	8.4467	122	40.2784	8.6603	180	45.2940	6.1083
8	27.4085	13.2257	66	38.6136	7.8031	124	38.3676	8.3045	182	48.8293	6.1580
10	29.8420	13.8361	68	37.8403	8.0709	126	39.8806	8.7774	184	52.7534	6.0145
12	28.9023	13.2596	70	38.1934	8.7405	128	36.9585	8.1097	186	50.5231	6.2131
14	29.9278	12.5380	72	36.1998	8.1190	130	38.4789	8.3178	188	50.5242	6.3552
16	30.3235	12.5600	74	34.4928	7.6197	132	38.3336	8.0872	190	51.1772	6.6072
18	29.8499	12.2057	76	33.1778	8.0055	134	37.5297	7.3773	192	51.7593	6.3112
20	29.2394	12.6098	78	32.5994	7.6835	136	38.1680	7.2436	194	52.0307	5.8640
22	31.7759	12.1320	80	34.3604	8.1443	138	37.9813	7.0534	196	50.5779	6.1966
24	29.1253	11.9082	82	35.3727	7.7758	140	39.3092	6.7451	198	50.2702	6.0579
26	31.9331	11.2585	84	38.8264	8.2762	142	39.6160	7.3708	200	50.6988	6.5788
28	33.0310	10.6155	86	37.8191	7.7684	144	39.7235	7.4322	202	50.1749	6.5627
30	34.5708	10.7935	88	37.6335	7.6103	146	41.0981	7.5704	204	49.6480	6.1638
32	34.0813	11.1065	90	39.8520	7.4746	148	41.4915	7.5646	206	51.6514	6.1048
34	34.6820	11.0641	92	37.7850	7.2926	150	45.2417	7.1018	208	50.7203	6.3709
36	36.9740	11.4008	94	36.7989	7.4069	152	42.8256	7.2600	210	51.1272	6.5179
38	37.1301	11.1079	96	37.4884	8.1217	154	42.9679	7.3147	212	47.2470	6.2213
40	40.3767	11.1677	98	38.3498	7.9568	156	42.0025	7.0434	214	46.4474	6.3013
42	39.0976	10.9922	100	37.0469	8.5083	158	42.1560	7.0573	216	47.0182	6.1628
44	36.8048	10.3684	102	36.8364	8.3162	160	43.8855	7.0081	218	48.9111	5.8874
46	40.0369	9.8014	104	36.7928	8.0238	162	43.9897	7.2606	220	46.9311	5.9926
48	36.5102	9.7568	106	37.5290	8.2728	164	45.1105	7.0808	222	48.3760	5.8997
50	34.7427	9.5615	108	37.4372	8.0586	166	42.2776	6.9188	224	45.7452	5.7952
52	34.7922	9.9009	110	34.3599	7.7552	168	46.7155	6.6883			
54	39.4660	9.9362	112	35.2433	7.8503	170	49.3157	6.3847			
56	39.5675	9.9541	114	35.4722	7.6477	172	46.1426	6.3668			

Tabla 4.1 Valores máximos y mínimos de las 300 series de precios promedio del petróleo.

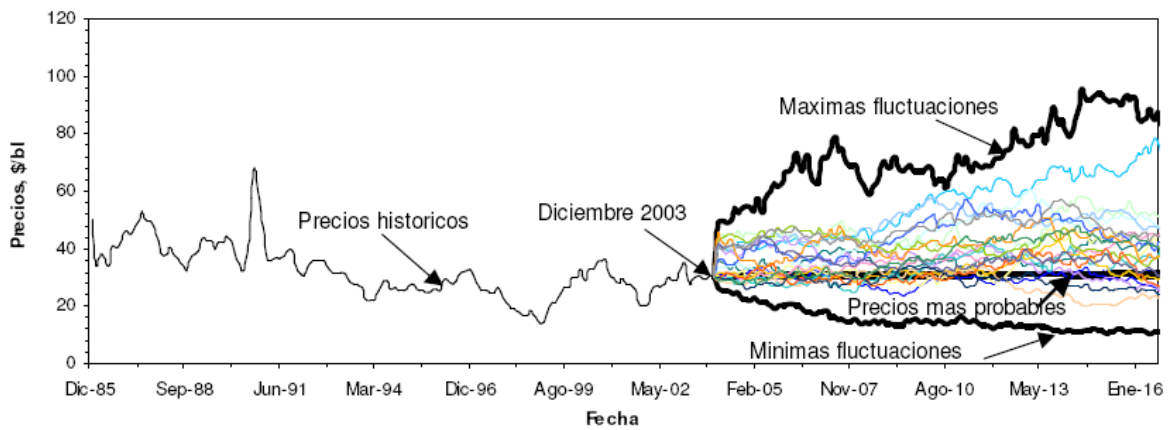
Para calcular el precio del petróleo en un escenario de normalidad del mercado, se estipuló el promedio global para cada uno de los datos, los de signo positivo y negativo. El promedio del valor máximo y el valor mínimo, en cada punto proyectado, representa el valor más probable de ocurrir.

	Promedio (+)	Promedio (-)	PROMEDIO		Promedio (+)	Promedio (-)	PROMEDIO		Promedio (+)	Promedio (-)	PROMEDIO
0	16.6900	16.6900	16.6900	76	17.1803	16.9475	17.0639	152	17.3011	17.0788	17.1889
2	16.6784	16.6872	16.7818	78	17.1695	16.9254	17.0469	154	17.3298	17.1039	17.2163
4	16.6945	16.7273	16.8109	80	17.1605	16.9523	17.0564	156	17.2997	17.0756	17.1876
6	16.6973	16.7146	16.8059	82	17.1810	16.9908	17.0858	158	17.2822	17.0875	17.1848
8	16.6204	16.7637	16.8421	84	17.1971	16.9968	17.0970	160	17.2953	17.0973	17.1963
10	16.6259	16.7597	16.8428	86	17.1538	16.9361	17.0448	162	17.2722	17.0791	17.1757
12	16.6619	16.7752	16.8685	88	17.1788	16.9955	17.0812	164	17.2497	17.1204	17.1850
14	16.6788	16.8016	16.8892	90	17.2077	16.9934	17.1005	166	17.2082	17.0846	17.1454
16	16.6693	16.8044	16.8869	92	17.2129	16.9719	17.0924	168	17.2221	17.0860	17.1540
18	16.6616	16.8001	16.8808	94	17.1874	16.9020	17.0447	170	17.2358	17.0891	17.1624
20	16.6670	16.7916	16.8793	96	17.2181	16.9025	17.0593	172	17.2812	17.1285	17.1939
22	16.6603	16.7793	16.8693	98	17.2081	16.8900	17.0480	174	17.2643	17.0442	17.1543
24	16.6682	16.8333	16.9097	100	17.2538	16.9320	17.0929	176	17.2396	17.0188	17.1292
26	16.6626	16.8224	16.8925	102	17.2510	16.9158	17.0834	178	17.2520	17.0330	17.1425
28	16.6718	16.8011	16.8865	104	17.2467	16.8993	17.0680	180	17.1985	16.9546	17.0766
30	16.6778	16.8210	16.8994	106	17.2413	16.9338	17.0876	182	17.1928	16.9217	17.0572
32	17.0123	16.8659	16.9391	108	17.2643	16.9649	17.1146	184	17.2310	16.9576	17.0943
34	17.0005	16.8330	16.9167	110	17.2391	16.9355	17.0873	186	17.2459	16.9142	17.0801
36	17.0425	16.9131	16.9778	112	17.2175	16.9137	17.0656	188	17.2341	16.8947	17.0644
38	17.0895	16.8806	16.9850	114	17.2428	16.9324	17.0876	190	17.2075	16.8574	17.0324
40	17.1087	16.9044	17.0066	116	17.2287	16.9252	17.0760	192	17.2584	16.8985	17.0775
42	17.1238	16.9423	17.0331	118	17.2204	16.8748	17.0476	194	17.2715	16.8959	17.0837
44	17.1153	16.9536	17.0345	120	17.2548	16.9203	17.0874	196	17.3007	16.9241	17.1124
46	17.1423	16.9625	17.0524	122	17.2787	16.9978	17.1331	198	17.3410	16.9732	17.1571
48	17.1259	16.9717	17.0488	124	17.2250	16.9562	17.0906	200	17.3804	17.0278	17.2041
50	17.1323	16.9539	17.0431	126	17.2694	16.9952	17.1273	202	17.3785	17.0140	17.1963
52	17.1502	16.9644	17.0573	128	17.3091	17.0315	17.1703	204	17.3911	17.0774	17.2342
54	17.1606	16.9671	17.0639	130	17.3077	17.0874	17.1875	206	17.3873	17.0410	17.2042
56	17.1403	16.9628	17.0515	132	17.3134	17.0347	17.1741	208	17.3749	17.0480	17.2115
58	17.1481	16.9614	17.0547	134	17.3052	17.0361	17.1706	210	17.3842	17.0317	17.1980
60	17.1437	16.9482	17.0449	136	17.2334	16.9523	17.0928	212	17.3377	17.0041	17.1709
62	17.1282	16.9118	17.0200	138	17.2637	16.9834	17.1236	214	17.3322	17.0086	17.1704
64	17.1249	16.8972	17.0110	140	17.3182	17.0183	17.1683	216	17.3500	16.9845	17.1672
66	17.1516	16.8742	17.0129	142	17.3511	17.0377	17.1944	218	17.3571	16.9536	17.1553
68	17.1699	16.9143	17.0421	144	17.3392	17.0818	17.2004	220	17.3927	16.9929	17.1928
70	17.1825	16.9422	17.0624	146	17.3345	17.0909	17.2127	222	17.3717	16.9927	17.1822
72	17.1503	16.9079	17.0291	148	17.3385	17.0929	17.2107	224	17.3806	17.0021	17.1813
74	17.1609	16.9686	17.0637	150	17.3057	17.0353	17.1705				

**Tabla 4.2** Promedios globales de los precios con signos positivos (tendencia alcista) y con signos negativos (tendencia descendente).

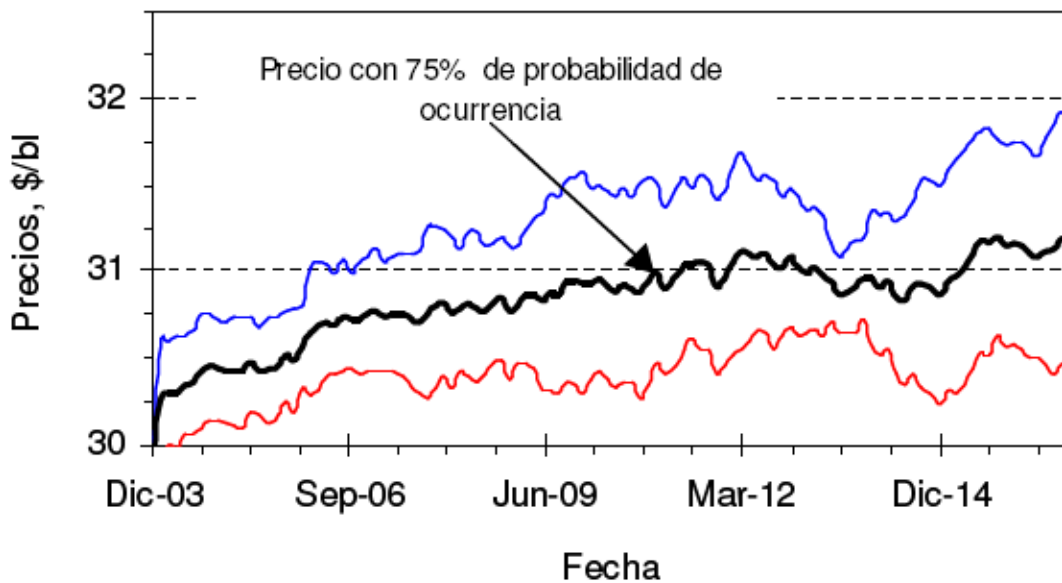
## 4.5 Escenarios

En la siguiente gráfica se observan los precios generados para escenarios de excesiva inestabilidad (máximas y mínimas fluctuaciones con una probabilidad de ocurrir del 25%) y escenario de estabilidad (precios promedio más probables). De igual manera se aprecia que es más probable que el impacto de los fenómenos sociales haga que el precio tenga una tendencia al alza hasta (95\$/bl). Aunque lo más probable es que se mantenga oscilando entre 30 y 32.5\$/bl.



**Figura 4.4** Precios mensuales históricos (enero de 1986 – diciembre de 2003) y pronosticados (enero de 2004 -noviembre de 2016) del petróleo a dólares constantes de 2003.

Para el escenario de estabilidad, se presentó una probabilidad del 75% de ocurrencia.



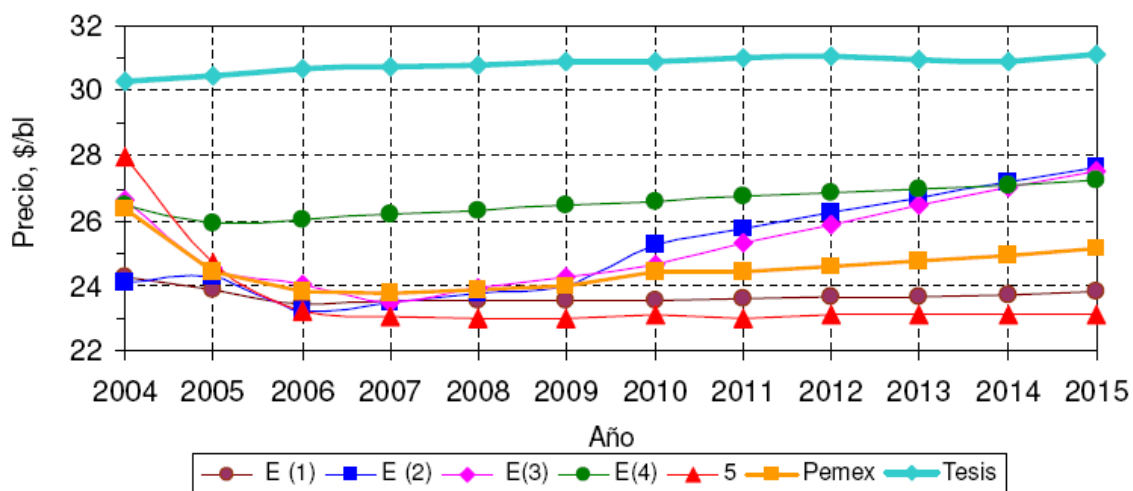
**Figura 4.5** Precios promedios mensuales pronosticados del petróleo crudo (a dólares constantes de 2003) en condiciones de estabilidad.



Los precios obtenidos en la figura anterior fueron la base para compararlos con los precios presentados por cinco firmas especializadas y por Pemex (Petróleos mexicanos), con el objeto de validar la metodología utilizada.

	E (1)	E (2)	E(3)	E(4)	E(5)	Pemex	Tesis
2004	24.24	24.08	26.65	26.50	27.94	26.34	30.31
2005	23.86	24.25	24.54	25.91	24.71	24.45	30.45
2006	23.45	23.23	24.02	26.05	23.23	23.80	30.70
2007	23.54	23.51	23.51	26.19	23.03	23.78	30.75
2008	23.55	23.77	23.92	26.32	23.01	23.89	30.80
2009	23.54	23.98	24.28	26.46	23.01	23.98	30.88
2010	23.57	25.28	24.64	26.58	23.10	24.45	30.92
2011	23.60	25.76	25.31	26.73	22.99	24.41	30.99
2012	23.63	26.23	25.88	26.85	23.08	24.60	31.07
2013	23.68	26.70	26.50	26.99	23.08	24.78	30.94
2014	23.73	27.18	27.01	27.11	23.08	24.95	30.90
2015	23.84	27.65	27.53	27.24	23.08	25.14	31.10

**Tabla 4.3** Proyecciones de cinco empresas internacionales, de PEMEX y del trabajo (Tesis), para los precios anuales del petróleo crudo (2004-2015) en dólares constantes de 2003.



**Figura 4.6** Proyecciones de cinco empresas internacionales, de PEMEX y del trabajo (Tesis), para los precios anuales del petróleo crudo (2004-2015) en dólares constantes de 2003.

Los precios que proyectaron las cinco consultoras y Pemex (Petroleos mexicanos), se mantienen en un rango de 22 - 28 \$/bl, el cual fue establecido por la OPEB, que tenia como objetivo mantener los precios del petróleo dentro de esa banda.

Los datos pronosticados en este trabajo, son los más altos para el precio del petróleo, siendo 30.82 \$/bl el promedio en el periodo 2004-2015, de igual manera es, 4.24 \$/bl más alto que el promedio de la Agencia Internacional de Energía (E(4)).

Según los resultados obtenidos en el trabajo, se aprecia que lo más probable es que los precios se mantengan constantes del año 2004 al año 2015, con un nivel de 30.82 \$/bl.

#### **4.6 Conclusiones**

La volatilidad de los precios del petróleo se caracteriza por:

- Correlaciones negativas a corto plazo (antipersistencia): para horizontes de tiempo  $n < 8$  días.
- Correlaciones positivas a largo plazo (persistencia): en horizontes de tiempo  $n > 18$  días.
- Evolución de un comportamiento de inestabilidad para  $n < 18$ , hacia un uno de estabilidad para  $n > 18$ .

En consecuencia se puede describir al mercado petrolero internacional como un sistema dinámico complejo con características de las propiedades fractales: fractal auto-afin, leyes de potencia, invarianza de escala y correlaciones a largo plazo.

El comportamiento de la volatilidad de los precios del petróleo se caracteriza por la mecánica fractal. Por lo tanto, es posible emplear el método fractal para predecir el comportamiento de las fluctuaciones de los precios del petróleo.

Los precios pronosticados en el trabajo tiene un promedio para el periodo de (2004-2015) de 30.82 \$/bl, siendo mayor a los precios pronosticados por las consultoras y por Pemex (Petróleos de México), los cuales tienen una tendencia a la baja y están bajo el rango establecido por la OPEB (22 - 28 \$/bl).

### **Análisis de los precios proyectados frente a los precios reales que ha tenido el precio del petróleo desde el 2004 hasta lo corrido del 2010**

	<b>E(1)</b>	<b>E(2)</b>	<b>E(3)</b>	<b>E(4)</b>	<b>E(5)</b>	<b>Pemex</b>	<b>Tesis</b>	<b>Real</b>
<b>2004</b>	24.24	24.08	26.65	26.50	27.94	26.34	30.31	43.33
<b>2005</b>	23.86	24.25	24.54	25.91	24.71	24.45	30.45	60.58
<b>2006</b>	23.45	23.23	24.02	26.05	23.23	23.80	30.70	60.53
<b>2007</b>	23.54	23.51	23.51	26.19	23.03	23.78	30.75	96.00
<b>2008</b>	23.55	23.77	23.92	26.32	23.01	23.89	30.80	39.59
<b>2009</b>	23.54	23.98	24.28	26.46	23.01	23.98	30.88	79.33
<b>2010</b>	23.57	25.28	24.64	26.58	23.10	24.45	30.92	86.66

*Tabla 4.4 Pronósticos de los precios del petróleo de cinco consultoras, Pemex y tesis vs precios reales del mercado.*

*Fuente: Grupo Aval para los precios históricos del petróleo.*

Lo que se aprecia comparando los resultados de los pronósticos de las cinco consultoras, de Pemex y la tesis vs los precios reales que han presentado los precios a 31 de diciembre de cada año y a 8 de noviembre del 2010, es que los precios no se comportaron como se esperaba, y al contrario de la tendencia pronosticada por las consultoras (a la baja), el precio real a tenido tendencia al alza siendo los resultados de la tesis (los pronosticados por el método fractal) los que más se acercan a estos precios.

Los precios reales se comportaron como el escenario de inestabilidad propuesto en el análisis fractal, donde se predijo una probabilidad de ocurrir del 25%, y se

planteó la hipótesis, que es más probable que el impacto de los fenómenos sociales haga que el precio tenga una tendencia al alza hasta 95\$/bl.

Entre el año 2004 a 2007 el comportamiento del precio tuvo una tendencia al alza, en el 2008 presentó un descenso considerable que coincide con el inicio de la crisis, para el 2009 y lo corrido del 2010 recupero la tendencia alcista que traía.

## **5. ANALISIS FRACTAL DEL MERCADO DE VALORES DE MEXICO (1978-2004)**

### **Comportamiento el IPC**

Tesis para obtener el grado de doctor en ciencias administrativas

Autor: Ernesto Teobaldo Gálvez Medina

El objetivo de ésta investigación en cuanto al estudio del IPC (Índice de precios y Cotizaciones) consistió en, demostrar que el comportamiento del IPC en el periodo de 1978-2004 presenta características fractales y obtener el mejor ajuste de la distribución de probabilidad de la rentabilidad y la volatilidad del IPC por sexenios.

### **5.1 Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)**

El IPC es el principal índice de la Bolsa de Valores de México, que mide el comportamiento del mercado accionario, lo conforman actualmente 35 acciones de diferentes sectores de la economía clasificadas como de alta y media bursatilidad, la muestra de las acciones que la conforman es revisada semestralmente para evitar que el indicador se vuelva obsoleto, en caso de que alguna emisora ya no cumpla, se le reemplaza por otra que cumpla el criterio de selección.

Suponiendo que no exista arbitraje los factores que influyen en el comportamiento del IPC son los siguientes:

Los flujos de liquidez

Las tasas de interés

Los resultados de las empresas

El riesgo

Las expectativas y el análisis económico y político

### **5.2 Objeto de estudio**

Para el desarrollo de ésta investigación, se tomaron los datos históricos del IPC registrados diariamente sin tomar en cuenta fines de semana ni días festivos. Los registros que emplearon fueron desde el 31 de octubre de 1978 hasta el 28 de

mayo de 2004 (6270 datos) los cuales separaron por periodos presidenciales, por sexenios (el periodo presidencial en México es de seis años), desde el periodo de José López Portillo hasta el periodo de Vicente Fox, de ésta manera se midió el comportamiento político que influyó en el comportamiento del IPC.

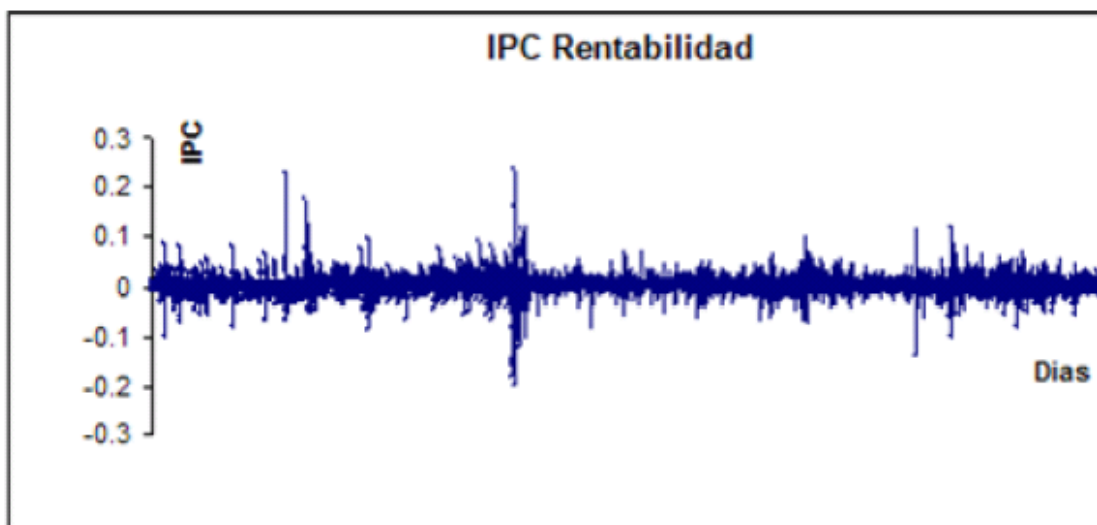
Como primera medida se graficó la rentabilidad y volatilidad presentada en los últimos cinco sexenios desde 1978-2004



**Figura 5.1** Índice de precios Y cotizaciones (IPC) y sexenios

**Fuente:** Bolsa Mexicana de Valores, cotización diaria de IPC

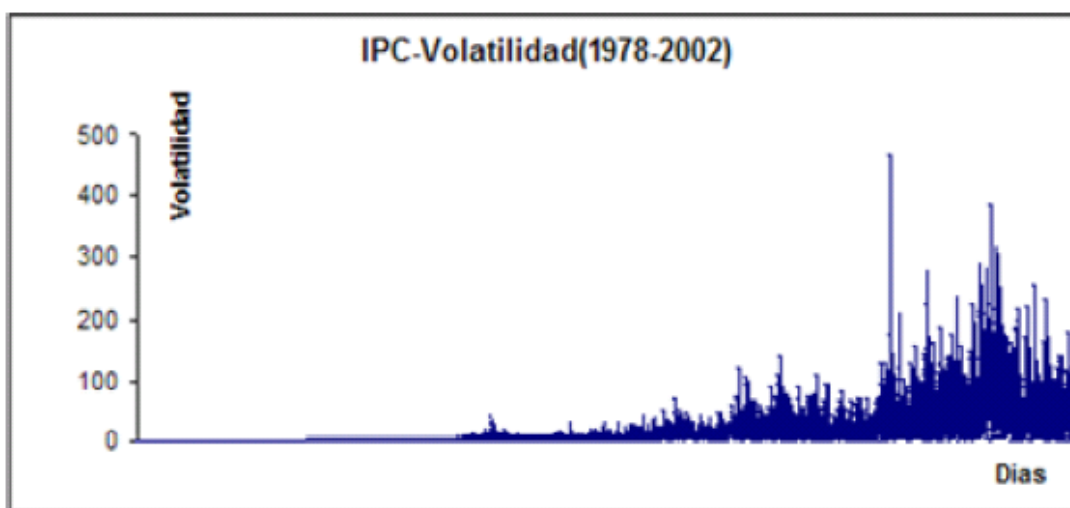
En la anterior figura se aprecia un comportamiento ascendente del índice, donde a partir del periodo de Carlos Salinas, supera la barrera de las 1.000 unidades y llega en el periodo de Vicente Fox a la barrera de 10.000 unidades.



**Figura 5.2** Rentabilidad diaria del IPC en periodo de 1978-2004

**Fuente:** Bolsa Mexicana de Valores, cotización diaria de IPC

Se observa una tasa de rendimiento diario del IPC, siendo similar al comportamiento observado para cada sexenio del IPC, donde en los periodos de mayor volatilidad, la rentabilidad alcanza los mayores niveles históricos.



**Figura 5.3** Volatilidad diaria del IPC en periodo de 1978-2004

**Fuente:** Bolsa Mexicana de Valores, cotización diaria de IPC

En esta gráfica se aprecia la estabilidad que presentó en IPC en los periodos de López Portillo y el de Miguel de la Madrid, y la gran variación que tuvo en los periodos de Zedillo y de Fox.

### 5.3 Análisis estadístico del IPC

En primer lugar el análisis estadístico consistió en verificar si la rentabilidad y volatilidad se ajustaban a una distribución Normal, se dividió el IPC en horizontes de tiempo de diez en diez, en un intervalo de diez años 10, 20, 30, ....., 610, 620 y se calculo para cada serie la Kurtosis.

Para saber si la distribución de frecuencias del IPC correspondía a una distribución Normal se aplico la prueba, Jarque-Bera.

### 5.4 Prueba Jarque-Bera

Se calcula el estadístico de prueba mediante la expresión,

$$LM = \frac{N * sesgo^2}{6} + \frac{N * (Kurtosis - 3)^2}{24}$$

Donde  $LM$  es el estadístico de prueba y se distribuye de acuerdo a una ji-cuadrada con dos grados de libertad. Se consideró la hipótesis de una distribución normal (5.99) con un 95% de nivel de confianza, por lo tanto, la hipótesis afirma que si el valor es diferente a 5.99, no pasa la prueba y la distribución no es normal.

Para realizar la prueba se tomaron los rendimientos del IPC en el año 2000, teniendo en cuenta 258 días de registro. El sesgo fue de 0.1376 y la Kurtosis de 3.81, con estos datos el valor de  $LM$  fue de 7.86, dado que el estadístico de prueba es mayor a 5.99, se concluyó que la serie del IPC, no corresponde a una distribución normal.

Los resultados para cada periodo presidencial analizado, que comprueba que en ninguno se ajusta a una distribución normal fueron los siguientes.



<b>SEXENIO</b>	<b>ESTADÍSTICO DE PRUEBA (LM)</b>
José López Portillo	7.1
Miguel de la Madrid Hurtado	8.2
Carlos Salinas de Gortari	8.5
Ernesto Zedillo Ponce de León	7.9
Vicente Fox Quezada	8.1

*Tabla 5.1 IPC prueba de normalidad Jarque -Bera*

### **5.5 Análisis fractal del IPC**

Para verificar que el IPC tiene un comportamiento fractal, el análisis que realizó el autor fue, detectar si la cola de distribución de probabilidad de la rentabilidad y de la volatilidad cumple con la ley de potencia, y si la serie de tiempo del IPC presenta autosimilitud y autoafinidad, estimando el exponente de Hurst (H). Se estudiaron las distribuciones de ley de potencia por su característica de ser autosimilares en diferentes escalas, después, estimó el exponente de Hurst, por medio del software Benoit, por ultimo, se estudio las funciones de autocorrelación. Para cada sexenio agrupó los datos en periodos de 120 datos, después 240, 480, así sucesivamente, estimando el exponente de Hurst para cada listado, y se obtuvo el promedio de todas las estimaciones realizadas, esto le permitió analizar el IPC a diferentes escalas de tiempo.

### **5.6 Análisis de resultados obtenidos**

Para los cinco sexenios analizados, el exponente de Hurst (H) estuvo entre 0.5 y 1, lo que indica que el IPC tuvo un comportamiento persistente. Es decir, lo más probable es que continúe con la tendencia alcista en el largo plazo.

Sexenio	Hurst (H)	Dimensión (D)	Autocorrelación	
			Positiva (Días)	Negativa (Días)
José López Portillo	0.619	1.381	280	520
Miguel de la Madrid	0.695	1.305	450	1050
Carlos Salinas de Gortari	0.642	1.358	550	1450
Ernesto Zedillo	0.556	1.444	450	1050
Fox (días)	0.544	1.456	50	350
Fox (minutos)	0.662	1.338		

**Tabla 5.2** Hurst y función de autocorrelación.

Según los resultados de la tabla, se observa que para todos los periodos el exponente de Hurst está entre 0.5 y 1, lo cual indica una correlación positiva, es decir, periodos con precios altos tienden a seguir con ese comportamiento, y periodos con precios bajos seguirán ese comportamiento.

La función de autocorrelación muestra el grado de dependencia de los valores del IPC respecto a valores anteriores, esta relación fue medida en días, en el que se destaca el periodo de Vicente Fox como el de menor días de correlación, sólo en los primeros 50 días de su gobierno el IPC mostró autocorrelación positiva, es decir este sexenio muestra una función de autocorrelación que en lapsos de 50 días cambia de positiva a negativa.

## 5.7 Conclusión

De acuerdo a estos resultados, en los cinco sexenios analizados, el exponente H es mayor a 0.5, lo que indican que tienen propiedades fractales en el mercado de capitales de México: autosimilitud, autoafinidad y persistencia.

## **6. PROPUESTA DE APLICACIONES PARA MERCADO COLOMBIANO**

Después de haber realizado un estudio de la geometría fractal, así como de algunas aplicaciones de la misma a las finanzas, se desea proponer tres aplicaciones para su posible desarrollo en el mercado colombiano y que ésta pueda servir de punto de partida para otro trabajo investigativo, que además valga para seguir explorando esta nueva forma de visualizar y analizar el mundo, y en nuestro caso específico el financiero, más aun que como ingenieros tengamos a la mano más e innovadoras herramientas para desarrollarnos y estar a la vanguardia del conocimiento y la competitividad.

### **6.1 Análisis fractal del IGBC.**

#### **IGBC**

El Índice General de la Bolsa de Colombia, mide la variación de los precios de las acciones más representativas del mercado. Representa la variación de precios del conjunto de acciones más transadas, las acciones que tengan una rotación mayor al 0,5% semestral y una frecuencia mayor 40% son incluidas, éste índice se calcula en cada instante de las negociaciones y el valor del día se calcula 30 minutos después del cierre de mercado.

#### **6.1.1 Método fractal.**

##### **Pautas:**

- Para conocer el comportamiento de la Bolsa de Valores de Colombia es necesario conocer los cambios históricos del Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia IGBC.
- El comportamiento histórico del IGBC debe presentar un movimiento no lineal.

Para aplicar el método fractal a las series de tiempo del IGBC, se debe aplicar las pautas metodológicas sugeridas por Mandelbrot, Bochad, Mantenga Y Stanley. Se debe realizar un análisis estadístico, probabilístico y fractal, posteriormente demostrar que el indicador tiene propiedades de autosimilitud. Con el programa **Benoit 1,3** se estima el exponente de Hurst, cuyo valor es un estadístico de prueba que indica si la serie de tiempo es persistente, antipersistente o aleatorio.

Se demuestra que el IGBC al igual que sus indicadores más representativos como la rentabilidad y la volatilidad, se ajustan a las propiedades fractales. Se analiza que las series de tiempo se ajustan las distribuciones de probabilidad de cola gruesa, ó, a las anteriormente enunciadas distribuciones de Lévy.

A continuación presento una posible metodología que puede ser utilizada como referencia para el análisis del IGBC, hecha por Balankin (2000) y, Hernández Sampieri (1988).

- Metodología del análisis estadístico y fractal del IGBC
- Análisis fractal en un determinado periodo de tiempo: determinar si el IGBC en cada periodo es autosimilar con la estimación del exponente de Hurst, la Ley de Potencia y función de autocorrelación.
- Determinar: si la rentabilidad y volatilidad del IGBC corresponden a una distribución normal.
- Análisis de propiedades estadísticas de la rentabilidad y volatilidad.
- Métodos fractales para la predicción del comportamiento del IGBC.

### **6.1.2 Análisis estadístico**

Consiste en determinar si el comportamiento de la rentabilidad y su volatilidad tienen una distribución normal y cumplen con la distribución de colas gruesas (persistencia).

Se divide el IGBC en escalas de tiempo con una variación de diez en diez, se calcula la kurtosis y el promedio estadístico de este se grafica en escala log-log.

### 6.1.3 Prueba de normalidad

El teorema del límite central indica que cuando se tiene una muestra de tamaño  $N$  suficientemente grande, la distribución de la muestra se aproxima a una distribución normal. Si se considera una muestra de tamaño  $N$  que se distribuye normalmente (media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ ) ésta tendrá una distribución de media  $\bar{x}$  y desviación estándar  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

En finanzas, la media es el rendimiento promedio y la desviación estándar es la volatilidad, la curva se centra alrededor del rendimiento promedio  $\mu$ , la dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de desviación estándar. El sesgo y la Kurtosis son otras dos características de la probabilidad normal las cuales: la primera mide la simetría de la curva y la segunda mide el nivel de levantamiento de la curva con respecto a la horizontal.

$$SESGO = \frac{\sum(x_i - \mu)^3}{(n - 1)\sigma^{\frac{3}{2}}}$$

Donde:  $x_i$ : Nivel del IGBC en cada periodo

$\mu$ : Media en el periodo

$\sigma$ : Desviación estándar

Si el sesgo es igual a cero la curva será una normal perfecta; si es negativo, la curva estará sesgada a la izquierda; si es positivo, la curva estará sesgada a la derecha.

$$KURTOSIS = \frac{\sum(x_i - \mu)^4}{(n - 1)\sigma^4}$$

La kurtosis de una distribución perfecta es igual a 3. La Kurtosis se presenta cuando hay muchas observaciones alejadas de la media (colas gruesas).

#### **6.1.4 Análisis fractal**

Consiste en determinar si la cola de distribución de probabilidad de la rentabilidad y volatilidad cumple con una ley de potencia, y si la serie de tiempo del IGBC tiene las propiedades de autosimilitud, hallando el exponente de Hurts (H), para estimarlo se aplica el software Benoit 1,3.

#### **6.1.5 Estimación del exponente de Hurts**

Este indicador determina si una serie de tiempo presenta un comportamiento fractal y mide la intensidad de dependencia a largo plazo de una serie de tiempo. Cuando  $H=0,5$  se dice que el fenómeno analizado es aleatorio, si,  $0,5 < H < 1$ , es persistente (un periodo de crecimiento es seguido por otro similar), y si,  $0 < H < 0,5$ , es antipersistente (un periodo de detrimento es seguido por uno de crecimiento).

#### **6.1.6 Análisis fractal por periodos**

Con la información del IGBC, mensual y diario, se estima el exponente de Hurst (H) y la dimensión fractal (D), se agrupan los datos en periodos de, por ejemplo, 100, 200, 400, etc., y se estima el exponente de Hurst para cada listado. Se estima el promedio de todas las estimaciones. Esto permitirá analizar el comportamiento del IGBC a diferentes escalas de tiempo.

## 6.2 PREDICCIÓN DEL PRECIO DEL CAFÉ

Tomando como base las aplicaciones estudiadas en esta investigación “PRECIO DEL ALGODÓN” primera investigación hecha por Mandelbrot y “METODOLOGÍA DE PREDICCIÓN DE PRECIOS DEL PETRÓLEO BASADA EN LA DINÁMICA FRACTAL”, deseo proponer una metodología similar, para, en primer lugar estudiar el comportamiento de los precios históricos y verificar que éstos cumplan con las características fractales, y llegar hacer una predicción del comportamiento futuro que tendrán por medio de la metodología fractal.

### Metodología

i. Se deberá considerar una serie de precios históricos, lo suficientemente grande para poder analizar su comportamiento, los cuales se pueden separar en diferentes periodos de tiempo para analizar su comportamiento a diferentes escalas.

ii. Calcular el valor absoluto de los rendimientos logarítmicos de los precios del café para diferentes periodos de tiempo

$$\delta_t(\tau) = \ln(1 + \Delta_t) = \ln(P_t/P_{t-\tau}) = p_t - p_{t-\tau}$$

$|\delta(\tau)|$  Se interpreta como la volatilidad de los precios, que se correlacionara en el futuro a una ley potencial

iii. Hallar el exponente de Hurst (H) para los diferentes valores calculados de  $|\delta(\tau)|$  para cada uno de los periodos de estudio, por medio de los diferentes métodos de trazado con la ayuda del software Benoit 1.3.

iv. Promediar los valores de  $H_{|\delta(\tau)|}$  de las diferentes series de tiempo tomadas, y graficar estos datos, lo cual servirá para encontrar a partir de que dato los  $H_{|\delta(\tau)|}$  tienen un comportamiento constante o estado estacionario. El dato  $n$  en que se observe este comportamiento nos indicara cada cuanto deberíamos hacer la predicción de los precios, por ejemplo cada  $n$  días hábiles.

v. Con respecto al punto anterior, se calcula el promedio de los  $H_{|\delta(\tau)|}$ , desde  $n$  hasta el ultimo valor de la serie que se haya tomado, valor que servirá de referencia a la hora de generar escenarios de la predicción de precios futuros.

vi. Hallar el rango de las fluctuaciones de precios para cada  $n$  días hábiles, se calcula el valor de  $|\delta(\tau)|$ , para el primer punto desde 1 hasta  $n$ , el segundo desde 2 hasta  $n+1$ , el tercero desde 3 hasta  $n+2$ , y así sucesivamente.

vii. Se calculan los valores máximos y mínimos, y se determina un rango (valor máximo menos valor mínimo) éste dato también servirá para la generación de escenarios probabilísticos del comportamiento de precios futuros del café.

### **Generación de escenarios**

i. Para generar los escenarios se utilizan los valores hallados en los puntos v y vii, el promedio de los  $H_{|\delta(\tau)|}$  y el rango  $|\delta(\tau)|$  para  $\tau = n$ , respectivamente.

ii. Se utiliza el programa Benoit 1.3 que ayudará a generar los escenarios probabilísticos para  $N$  series de tiempo de manera aleatoria, tomando como punto de partida  $H_{|\delta(\tau)|}$  y el rango de  $|\delta(\tau)|$ .

iii. Después, se predice la tendencia que tendrán los precios, a la baja, al alza o constantes (el signo de los incrementos), lo cual se hace dándole de manera aleatoria según la teoría de Bachelier signos positivos o negativos a los  $N$  datos dados por el programa.



Hasta éste momento se tiene el valor proyectado de  $\delta(\tau)$ , con los signos de los incrementos asignados, ahora para calcular el precio para las N series de precios se hace por medio de la siguiente fórmula:

$$P(t) = P(t - \tau) * \exp(\delta(\tau))$$

**iv.** El paso a seguir será, separar los precios con tendencia al alza y a la baja (los de signo positivo y negativo) y hallar nuevamente las N trazas con el programa, lo que dará precios máximos y mínimos, que indicaran los precios probables en caso de un comportamiento de inestabilidad en el mercado.

**v.** Ahora, para hallar el precio más probable al que tenderá en caso de un comportamiento estable del mercado, se deberá sacar el promedio entre los valores máximos y mínimos anteriormente encontrados.

**vi.** Graficar los escenarios pronosticados y evaluar el comportamiento posible más probable.

### 6.3 DECISIÓN DE COMPRA O VENTA DE UNA ACCIÓN CON BASE EN EL EXPONENTE DE HURTS

Recordemos las propiedades del exponente de Hurts:

- Varía entre 0 y 1.
- Si  $H = 0,5$  el exponente indica que la serie de tiempo es TOTALMENTE aleatoria por lo cual no se puede inferir en el futuro.
- Si  $0 < H < 0,5$  existe una correlación inversa. Si la tendencia de la serie era decreciente, en intervalos posteriores será creciente, y por el contrario, si su tendencia era creciente, en el futuro será decreciente.
- Si  $0,5 < H < 1$  existe una correlación directa. Si en un intervalo de tiempo la serie es creciente, lo seguirá siendo en el futuro, y viceversa.

Si aplicamos éstas propiedades estudiando el comportamiento de una acción para determinada serie de tiempo, por ejemplo Ecopetrol en el mercado colombiano, la decisión que se debería tomar será:

Si el valor de **H** de la serie de tiempo es **0,5** no se puede decidir que hacer con la acción (comprar o vender).

- Si  $0 < H < 0,5$  y la acción trae un comportamiento creciente  
=> VENDO (infiero que luego el valor disminuirá).
- Si  $0 < H < 0,5$  y la acción trae un comportamiento decreciente  
=> COMPRO (infiero que luego el valor aumentará).
- Si  $0,5 < H < 1$  y la acción trae un comportamiento alcista  
=> COMPRO (infiero que el valor seguirá aumentando).
- Si  $0,5 < H < 1$  y la acción trae un comportamiento decreciente  
=> VENDO (infiero que el valor seguirá disminuyendo).

H	TENDENCIA	COMPRO	VENDO	COMPORTAMIENTO FUTURO
H=0.5	Aleatoria	No es posible identificar que comportamiento tendrá en el futuro.		
$0 < H < 0,5$	Al alza		X	A la baja
$0 < H < 0,5$	A la baja	X		Al alza
$0,5 < H < 1$	Al alza	X		Al alza
$0,5 < H < 1$	A la baja		X	A la baja

**Tabla 6.3.1** Decisión de compra o venta de una acción de acuerdo al exponente de Hurst

## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1. De acuerdo a las aplicaciones investigadas y analizadas se intuye, que es posible la aplicación del método fractal al mercado colombiano, sea en el análisis de un indicador, el precio de un commodity o el comportamiento de una acción, siempre y cuando las series de tiempo tomadas se ajusten a las propiedades estadísticas y fractales necesarias.
2. Es necesario para aplicar la metodología fractal que los datos de las series de tiempo analizadas tengan alguna dependencia o correlación a largo plazo, que lleve a un posible pronóstico de su comportamiento.
3. Según el estudio realizado de la geometría fractal, todo sistema que contenga datos históricos de los que se pueda caracterizar su comportamiento, es posible pronosticar la conducta que tendrá en el futuro. El cual puede servir en diferentes áreas, por ejemplo, desastres naturales (erupciones de volcanes, terremotos, inundaciones), en la medicina (fallas cardiacas, ataques epilépticos, epidemias) y mercados financieros (crisis financieras, comportamientos de acciones, análisis de riesgos, etc.).
4. Los fractales relacionan diferentes campos de conocimiento, como: la física, la matemática, la economía, figuras de la naturaleza, etc. para encontrar una correlación que pueda explicar determinado fenómeno.
5. Para las aplicaciones exploradas y analizadas en ésta investigación se aprecia que, todas se rigen por los estudios y metodología hecha por Benoit Mandelbrot en su estudio inicial del "PRECIO DEL ALGODÓN", ajustando éste procedimiento de acuerdo a las necesidades de cada objeto de estudio.
6. . La teoría convencional sugiere que la variación de precios se puede modelar mediante procesos aleatorios, como si cada cambio viniera

determinado por el lanzamiento de una moneda. Lo que se aprecia en es ésta investigación y en sí, en los fractales, es que el comportamiento real de los precios se aleja de ese patrón, y el modelo multifractal de la variación de los precios sugiere las bases de una nueva teoría económica.

7. Para desarrollar las aplicaciones propuestas para el mercado colombiano es necesario adquirir el software Benoit 1.3, el cual es indispensable para aplicar el método fractal planteado.

## 8. BIBLIOGRAFIA

- FRACTALES Y FINANZAS una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar. Benoit Mandelbrot y Richard L. Hudson, Tusquets editores 2006.
- ANALISIS FRACTAL DEL MERCADO DE VALORES DE MEXICO, Tesis para obtener el grado de doctor en ciencias administrativas. Autor: Ernesto Teobaldo Gálvez Medina. Instituto Politécnico Nacional. México D.F.
- Louis Bachelier, **Louis Bachelier Théorie of Speculation: The origins of Modern Finance**, translate an introduction by Mark Davis & Alison Etheridge, with a foreword by Paul A. Samuelson, Princenton University Press (2006), ISBN-10: 0-692-11752-7, ISBN-13: 978-0-691-11752-2.
- METODOLOGIA DE PREDICCIÓN DE PRECIOS DEL PETRÓLEO BASADA EN LA DINAMICA FRACTAL. Autores: Oswaldo Morales Matamoros, Alexander Balankin y Luis M. Hernández Simón. Grupo interdisciplinario "Mecánica Fractal". Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME). Instituto Politécnico Nacional (IPN)
- Asociación Bancaria y de Entidades Financieras en Colombia  
[www.asobancaria.com](http://www.asobancaria.com)
- [www.fractales.org](http://www.fractales.org)
- CONCEPTO DE FINANZAS  
<http://www.gerencie.com/concepto-de-finanzas.html>

- FRACTALES.ORG JI Andrés Gandalf 29/04/2002  
<http://www.cienciateca.com/fractales.html>
- Geometría Fractal.  
<http://personal.redestb.es/mgmmat/fractales.htm>
- Teoría del Caos: Una breve introducción  
<http://www.astroseti.org/vernew.php?codigo=1256>
- ¿Qué son las Finanzas?  
<http://www.gerencianynegocios.com/canales/finanzas/conceptosfinanzas.htm>
- Conceptos Fundamentales en Finanzas  
<http://www.gestiopolis1.com/recursos7/Docs/fin/conceptos-fundamentales-en-finanzas.htm>
- <http://www.math.yale.edu/mandelbrot/>
- BIBLIOTECA MEGABOLSA  
<http://www.megabolsa.com>
- Portal Grupo Aval  
[www.grupoaval.com](http://www.grupoaval.com)