

DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL DE POSICIÓN DE UN HELICÓPTERO
DE TRES GRADOS DE LIBERTAD (3GDL)

AUTORES:

ALEXANDER ANGULO URIBE

JOAN SNEIDER GARCÍA ARDILA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL
BUCARAMANGA
20 DE NOVIEMBRE 2017

DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL DE POSICIÓN DE UN HELICÓPTERO
DE TRES GRADOS DE LIBERTAD (3GDL)

TESIS DE PROYECTO DE GRADO PARA OPTAR A TÍTULO DE INGENIERO
MECATRÓNICO

AUTORES:

ALEXANDER ANGULO URIBE

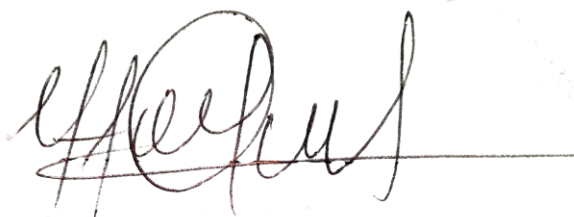
JOAN SNEIDER GARCÍA ARDILA

DIRECTOR:

M.Sc. HERNANDO GONZÁLEZ ACEVEDO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL
BUCARAMANGA
20 DE NOVIEMBRE 2017

Nota de aceptación:



M.Sc. Hernando González Acevedo
Director



M.Sc. Darío José Hernández Bolívar
Evaluador



M.Sc. Johann Barragán Gómez
Evaluador

Bucaramanga, 20 de noviembre de 2017

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero que nada a Dios por darme la suficiente confianza de poder hacer lo que me propongo y no dejar desvanecer mis ideas.

A mi familia por creer en mí, a mi novia por el apoyo incondicional que siempre me brinda y especialmente a mis papás por apoyarme moral y económicamente en mis ideas.

A mi compañero de proyecto por la amistad y el conocimiento brindado a lo largo de la carrera, a nuestra auxiliar de laboratorio de electrónica por el apoyo brindado en todo momento.

A los profesores en general que dedicaron tiempo en compartir sus conocimientos, a nuestros evaluadores por la ayuda brindada y a mi director de tesis por guiarnos durante el desarrollo del proyecto.

Joan Sneider García Ardila

Quiero agradecer a mi familia, por creer en mí, apoyarme y aconsejarme en estos años, en especial a mi madre que es la piedra angular de mi vida.

A mi compañero de proyecto, por brindarme su amistad y trabajar de la mano en este proceso que terminó siendo una de esas experiencias que quedan como anécdotas para recordar con nostalgia.

A nuestra auxiliar académica del laboratorio de electrónica, que con su buena energía, su apoyo y colaboración hizo más grato este proceso.

A los profesores que nos acompañaron y orientaron, dedicándonos parte de su tiempo, especialmente a nuestro director de tesis por su paciencia y motivación ya que nos animaba cada vez que nuestro ritmo de trabajo disminuía.

Alexander Angulo Uribe

TABLA DE CONTENIDO

OBJETIVOS	13
GENERAL	13
ESPECÍFICOS	13
INTRODUCCIÓN	14
CAPITULO 1: HELICOPTERO 3GDL	15
<i>1.1 Modelo matemático</i>	<i>17</i>
1.1.1 Ecuaciones de movimiento	17
1.1.1.1 Eje de cabeceo	18
1.1.1.2 Eje de elevación	18
1.1.1.3 Eje de viaje	22
1.1.2 Modelo de unidad de propulsión	23
1.1.3 Resumen de las ecuaciones	24
<i>1.2 Diseño Mecánico</i>	<i>25</i>
1.2.1 Dimensionamiento.....	26
1.2.2 Parámetros del sistema.....	32
1.2.3. Diseño y análisis del eje de elevación.....	33
1.2.4 Diseño y análisis del eje de cabeceo	36
1.2.5 Diseño y análisis del eje de viaje	42
<i>1.3 Diseño electrónico</i>	<i>44</i>
1.3.1 Sensores	44
1.3.1.1 Filtrado de las señales de sensores	45
1.3.1.2 Caracterización de sensores	46
1.3.1.3 Ajuste de offset control de viaje	51
1.3.2 Motores	54
1.3.2.1 Caracterización motores.....	55
1.3.3 Sistema de adquisición de datos.....	56
1.3.4 Circuitos	57
<i>1.4 Prototipo final.....</i>	<i>60</i>

1.4.1 Modelo final en software CAD y modelo final en físico.....	60
CAPÍTULO 2: CONTROL.....	61
2.1 <i>Control clásico PID</i>	61
2.1.1 Estrategia de control en cascada	61
2.1.1.1 Estrategia de control en cascada PID (1GDL).....	62
2.1.1.2 Estrategia de control en cascada PID (2GDL).....	63
2.1.2 Espacio de estados del sistema	64
2.1.3 Puntos de equilibrio.....	65
2.1.4 Linealización del modelo en espacio de estados	67
2.1.5 Modelo lineal en espacio de estados en discreto:.....	69
2.1.6 Comparación modelo lineal y no lineal.....	71
2.1.6.1 Limitaciones a la salida de los controladores	72
2.1.7 Controladores PID (1GDL) en tiempo discreto.....	73
2.1.8 Controladores PID (2GDL) en tiempo discreto.....	76
2.2 <i>Control robusto QFT (Quantitative-Feedback-Theory)</i>	80
2.2.1. Concepto de incertidumbre y robustez en el modelo.	81
2.2.2 Metodología de diseño según QFT	82
2.2.3 Diseño de la estrategia de control robusto QFT mediante la Toolbox de Matlab® (QFTCT)	84
2.2.3.1 Modelo parametrizado	84
2.2.4 Diseño del lazo de elevación.....	88
2.2.4.1 Especificaciones de desempeño del controlador.....	88
2.2.4.2 Diseño del controlador para elevación.....	92
2.2.4.3 Diseño del pre-filtro para elevación	93
2.2.5 Diseño del lazo de cabeceo	95
2.2.5.1 Especificaciones de desempeño del controlador de cabeceo	96
2.2.5.2 Diseño del controlador para cabeceo	97
2.2.6 Diseño del lazo de viaje	98
2.2.6.1 Especificaciones de desempeño del controlador de viaje	100
2.2.6.2 Diseño del controlador para viaje	101

2.2.6.3 Diseño del prefiltro para viaje	101
2.2.6 Discretización de los controladores y prefiltros	102
CAPITULO 3: VALIDACIÓN DE LOS CONTROLADORES	103
3.1 Controladores PID	104
3.2 Controlador QFT sin corrección de OFFSET	105
3.3 Controlador QFT.....	106
CONCLUSIONES	109
BIBLIOGRAFÍA	111
ANEXOS.....	112
ANEXO A: Cotización Quanser	112
ANEXO B: Datasheet de los potenciómetros.....	113
ANEXO C: Datasheet de los motores.....	114
ANEXO D: Planos del helicóptero de 3GDL.....	115
ANEXO E: Guía de usuario.....	150
ANEXO F: Manual de operación.....	160

TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama de cuerpo libre del helicóptero 3GDL.Fuente propia.	15
Figura 2. Eje de cabeceo DCL (vista frontal). Fuente propia.	18
Figura 3. Eje de elevación DCL (vista lateral).	19
Figura 4. Sistema de coordenada local (rojo) y global (negro).	20
Figura 5. Eje de viaje DCL (vista superior).	22
Figura 6. Modelo estático de identificación de los motores.	23
Figura 7. Vista isométrica 1 del modelo CAD.	25
Figura 8. Vista isométrica 2 del modelo CAD.	25
Figura 9. Vista superior del modelo.	26
Figura 10. Vista frontal del modelo.	26
Figura 11. Vista derecha del modelo.	27
Figura 12. Estructuras principales del sistema.	28
Figura 13. Viga principal del modelo. Vista lateral.	28
Figura 14. a) Vista isométrica del modelo del soporte para los motores. b) Vista isométrica del soporte acoplado a las rejillas de protección.	29
Figura 15. Vista isométrica de la estructura base.	30
Figura 16. (a) estructura de la mesa. (b) helicóptero sobre la mesa.	31
Figura 17. a) Vista isométrica del acople del eje con la platina rectangular. b) Ubicación de la platina (resaltada de amarillo) en el helicóptero.	33
Figura 18. Análisis de esfuerzo de Von Mises eje de elevación.	34
Figura 19. Deformación eje de elevación.	34
Figura 20. Análisis de esfuerzo de Von Mises de la viga principal.	35
Figura 21. Deformación de la viga principal.	36
Figura 22. Soporte de cabeceo (color amarillo).	37
Figura 23. Análisis de esfuerzo de Von Mises eje de cabeceo.	38
Figura 24. Deformación eje de cabeceo.	38
Figura 25. Análisis de esfuerzo de Von Mises soporte de cabeceo.	39
Figura 26. Deformación soporte de cabeceo.	40
Figura 27. Análisis de esfuerzo de Von Mises lámina soporte motores.	41

Figura 28. Deformación lámina soporte de motores.	41
Figura 29. Análisis de esfuerzo de Von Mises del eje de viaje.	43
Figura 30. Deformación eje de viaje.	43
Figura 31. Descripción de los sensores y ubicación.	44
Figura 32. Aplicación del filtro Kalman.	46
Figura 33. Caracterización sensor elevación.	47
Figura 34. Residuos ecuaciones elevación.	48
Figura 35. Caracterización sensor cabeceo.	49
Figura 36. Residuos ecuaciones de cabeceo.	49
Figura 37. Caracterización sensor viaje.	50
Figura 38. Residuos ecuaciones de viaje.	51
Figura 39. Curva para ajuste de control de viaje.	52
Figura 40. Residuos de ecuaciones de viajes.	53
Figura 41. Residuo de ecuación polinómica de grado 10 de viaje.	53
Figura 42. Diagrama de bloques implementación del ajuste de offset del control de viaje.	54
Figura 43. Caracterización motores del helicóptero.	55
Figura 44. Residuos ecuaciones para los motores.	56
Figura 45. Esquema de conexiones.	57
Figura 46. En la imagen a) se observa el circuito. En la imagen b) se muestra el circuito 2.	58
Figura 47. Visualización 3d de los circuitos realizados.	58
Figura 48. En la imagen (a) se observa el modelo final en software CAD y en la imagen (b) se observa el prototipo finalizado.	60
Figura 49. Diagrama en lazo cerrado controlador PID discreto.	61
Figura 50. Diagrama de bloques estrategia de control en cascada PID (1GDL).	62
Figura 51. Diagrama de bloques estrategia de control en cascada PID (2GDL).	63
Figura 52. Comparación ángulo de elevación.	71
Figura 53. Comparación ángulo de viaje (Travel).	71
Figura 54. Comparación ángulo Cabeceo.	72
Figura 55. Diagrama en lazo cerrado helicóptero 3 GDL.	73

Figura 56. Diagrama de controladores PID en cascada.	73
Figura 57. Respuesta transitoria ante diferentes entradas con controlador PID discreto (1GDL).	75
Figura 58. Acción de control para diferentes entradas de fuerzas.	75
Figura 59. Fuerza necesaria en los motores para diferentes entradas.	76
Figura 60. Diagrama en lazo cerrado helicóptero 3 GDL.	76
Figura 61. Diagrama de controladores PID en cascada.	77
Figura 62. Respuesta transitoria ante diferentes entradas con controlador PID discreto (2GDL).	78
Figura 63. Acción de control para diferentes entradas de fuerzas.	79
Figura 64. Fuerza necesaria en los motores para diferentes entradas.	79
Figura 65. Metodología de diseño QFT.	82
Figura 66. Diagrama de bloques estrategia de control en cascada QFT.	84
Figura 67. Diagrama de las funciones de transferencia de los sistemas lineales considerados.	85
Figura 68. <i>Templates</i> de la planta de elevación.	88
Figura 69. Respuesta transitoria a escalón de $\delta 5\epsilon, sup(s)$ (azul) y $\delta 4\epsilon, inf s$ (verde).	92
Figura 70. Síntesis (<i>Loop-shaping</i>) del controlador de elevación.	93
Figura 71. Respuesta en frecuencia de la planta nominal con prefiltro.	94
Figura 72. Respuesta en lazo cerrado del conjunto de plantas de elevación.	95
Figura 73. <i>Templates</i> de la planta de cabeceo.	96
Figura 74. Síntesis (<i>Loop-shaping</i>) del controlador de cabeceo.	98
Figura 75. <i>Templates</i> de la planta de viaje.	99
Figura 76. Síntesis (<i>Loop-shaping</i>) del controlador de viaje.	101
Figura 77. Interfaz gráfica.	103
Figura 78. Validación de los controladores PID (2GDL) ante entradas aleatoria.	104
Figura 79. Validación controlador PID (2GDL) ante entrada senoidal y cuadrada.	104
Figura 80. Acción de control PID (2GDL).	105
Figura 81. Validación del controlador QFT sin corrección de <i>offset</i>	106

Figura 82. Validación del controlador robusto QFT.....	106
Figura 83. Acción de control robusto QFT.	107
Figura 84. Validación del controlador QFT ante señal senoidal y cuadrada.	107
Figura 85. Validación controlador QFT.	108

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Descripción de variable.....	15
Tabla 2. Descripción de parámetros	16
Tabla 3. Valores de los parámetros helicóptero 3GDL	32
Tabla 4. Varianza filtro Kalman.....	45
Tabla 5. Datos de identificación de sensor de elevación.	46
Tabla 6. Datos de identificación de sensor de cabeceo.....	48
Tabla 7. Datos de identificación de sensor de viaje.....	50
Tabla 8. Características de motores Brushless Turnigy de la serie D2826.....	54
Tabla 9. Comparativa de familia de arduinos.....	57
Tabla 10. Condiciones de diseño y resultados.	59
Tabla 11. Descripción de parámetros controladores en cascada.	64
Tabla 12. Características controlador PID discreto (1GDL).....	74
Tabla 13. Características controlador PID discreto (2GDL).....	77
Tabla 14. Parámetros del modelo con incertidumbre.....	86
Tabla 15. Controladores y prefiltros en tiempo discreto.....	102
Tabla 16. Frecuencia de la señal de referencia.	105
Tabla 17. Frecuencias de las señales de referencia para controlador QFT.....	108
Tabla 18. Frecuencias de las señales de referencia para QFT.	108

OBJETIVOS

GENERAL

Analizar el comportamiento de dos estrategias de control, PID y robusto, para regular los ángulos de elevación, cabeceo y viaje.

ESPECÍFICOS

- Construir un sistema que emule el comportamiento dinámico de un helicóptero 3GDL.
- Determinar el modelo dinámico de un helicóptero 3GDL.
- Diseñar la estrategia de control PID para regular el ángulo de elevación, cabeceo y viaje de un helicóptero 3GDL.
- Diseñar la estrategia de control Robusto para regular el ángulo de elevación, cabeceo y viaje de un helicóptero 3GDL.
- Diseñar una interfaz gráfica que permita el monitoreo de las variables del sistema en tiempo real.

INTRODUCCIÓN

El campo de acción de los vehículos aéreos no tripulados (UAV), aumenta cada día, desde sistemas de vigilancia en tiempo real a control de tráfico, protección ambiental, monitoreo de zonas boscosas o zonas hostiles entre muchas otras, así como estudios de actividad volcánica. De esta manera es posible garantizar la seguridad de los operarios, sustituyendo el recurso humano por los sistemas aéreos no tripulados.

Este tipo de sistemas establecen un banco de pruebas completo e interesante para la ingeniería de control, uno de los más estudiados de esta familia de aparatos son los helicópteros a escala, dado su gran impacto en la investigación de efectos aerodinámicos, así como sus características no lineales. Motivo que fundamentó el diseño, construcción y control de un prototipo de un helicóptero 3GDL basado en el sistema de control en tiempo real Helicopter 3-DOF ofrecido en el mercado por la empresa canadiense QUANSER®.

El helicóptero 3GDL es un módulo didáctico de 3 grados de libertad que consta de un brazo largo pivotado sobre una base fija vertical, el cual a través de variaciones en el voltaje de dos motores brushless instalados en el extremo del brazo crean una fuerza de empuje que junto al contrapeso ubicado en el extremo contrario permiten controlar los ángulos de elevación (altura que alcanza el cuerpo del helicóptero), el cabeceo (cabeceo en torno al eje longitudinal del prototipo) y el viaje (giro en torno al eje perpendicular al suelo), utilizando 3 sensores, cada uno para registrar las variaciones en los tres ángulos a controlar.

La regulación del sistema se hace por medio de estrategias de control de la familia PID, teniendo en cuenta que esta técnica es ampliamente utilizada en la industria moderna destacándose por su simplicidad en estructura; de igual manera se hace un control robusto que se adapte a la dinámica del sistema. Como software de programación se utiliza Matlab, desde donde se controla el sistema mediante una interfaz gráfica que permita la interacción con el usuario de manera fácil y didáctica, monitoreando las diferentes señales de las variables del sistema.

CAPITULO 1: HELICOPTERO 3GDL

El helicóptero en cuestión es un sistema de 3 grados de libertad que consta de un brazo largo pivotado sobre una base fija vertical, el cual a través de variaciones en el voltaje de dos motores Brushless instalados en el extremo del brazo crean una fuerza de empuje que junto al contrapeso ubicado en el extremo contrario, permiten controlar los ángulos de elevación (altura que alcanza el cuerpo del helicóptero), cabeceo (cabeceo en torno al eje longitudinal del prototipo) y el viaje (giro en torno al eje perpendicular al suelo) Figura 1, en la Tabla 1 se describen las variables y en la Tabla 2 se describen los parámetros correspondientes del helicóptero.

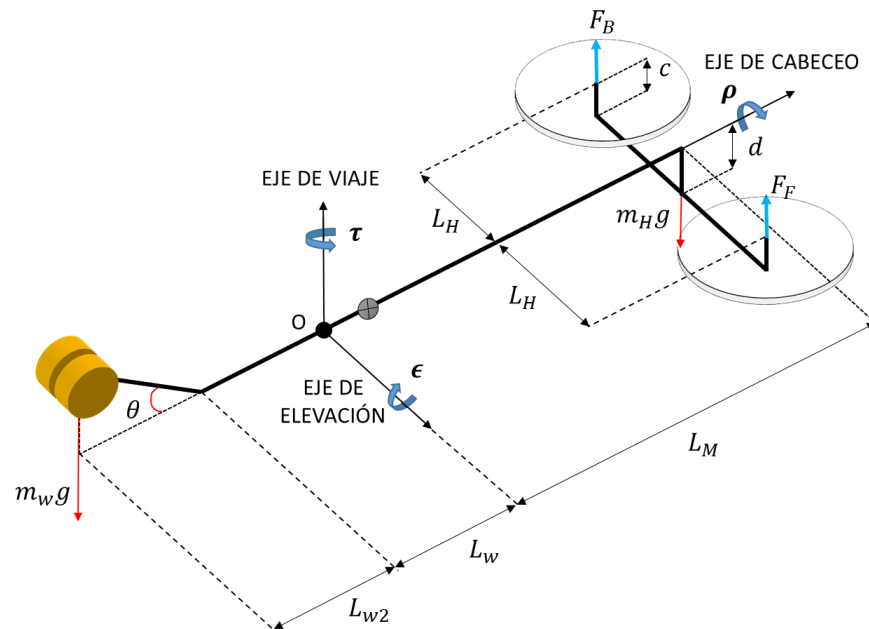


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre del helicóptero 3GDL. Fuente propia.

Tabla 1. Descripción de variable.

Símbolo	Descripción
ϵ	Ángulo de elevación.
ρ	Ángulo de cabeceo.
τ	Ángulo de viaje.
F_B	Fuerza de motor 1.
F_F	Fuerza de motor 2.

Tabla 2. Descripción de parámetros.

Símbolo	Descripción
L_M	Distancia entre el eje de elevación y el helicóptero.
L_W	Distancia entre el eje de elevación y el pliegue del contrapeso.
L_{W2}	Distancia entre el pliegue del contrapeso hasta el contrapeso.
L_H	Distancia entre el eje de cabeceo y el centro de las hélices.
L_A	Distancia entre el eje de elevación y el centro de masa de la viga principal.
d	Distancia entre el eje de cabeceo y la base de los motores.
c	Distancia entre la base de los motores y las hélices.
h	Distancia entre eje de elevación y el centro de la viga principal.
m_W	Masa del contrapeso.
m_H	Masa del helicóptero (los dos motores y las hélices).
m_A	Masa de la viga principal.
θ	Ángulo del contrapeso.
I_ρ	La inercia de rotación alrededor del eje de cabeceo.
I_ϵ	La inercia de rotación alrededor del eje de elevación.
$k_{d\rho}$	Coeficiente de fricción dinámico eje de cabeceo.
$k_{d\epsilon}$	Coeficiente de fricción dinámico eje de elevación.
$k_{d\tau}$	Coeficiente de fricción dinámico eje de viaje.

Las hélices se encuentran acopladas a los motores que se encuentran fijados sobre una barra la cual puede rotar en torno al eje longitudinal del prototipo, estas crean una variación en el ángulo de cabeceo, si hay una diferencia en el voltaje aplicado a los motores. Ver Figura 2. Si se envía un voltaje igual a los motores causa una rotación en el brazo y por tanto una variación en el ángulo de elevación. Ver Figura 3. Para generar un cambio en el ángulo de viaje, se requiere crear una variación en el ángulo de cabeceo y luego suministrar un voltaje a los motores para generar la fuerza de empuje en la dirección que se desea viajar. Ver Figura 5.

1.1 Modelo matemático.

El modelo matemático que se utiliza en este proyecto se desarrolla a continuación. En primer lugar, longitudes, fuerzas, ángulos y torques que actúan sobre el helicóptero durante la operación son definidos. Ver Figura 1. Esto es seguido por un análisis de diagrama de cuerpo libre (DCL), análisis usado en la segunda ley del movimiento de Euler. [1]

Un sistema de coordenadas se ha introducido según la Figura 4. El sistema gira con el brazo alrededor de los ejes de viaje y de elevación. El brazo se fija en el montaje del punto O. Cuando se describe la posición del helicóptero tres ángulos son usados. Cabeceo (pitch), elevación (elevation) y viaje (travel).

Las inercias son definidas como:

I_ρ : La inercia de rotación alrededor del eje de cabeceo.

I_ϵ : La inercia de rotación alrededor del eje de elevación.

I_τ : La inercia de rotación alrededor del eje de viaje.

Además, las fuerzas F_F y F_B representan el empuje generado por los motores.

1.1.1 Ecuaciones de movimiento.

Con el fin de identificar las ecuaciones que rigen el sistema de helicóptero un análisis del diagrama de cuerpo libre tiene que ser llevado a cabo en cada uno de los ejes.

1.1.1.1 Eje de cabeceo.

En la Figura 2 se muestran las fuerzas que actúan sobre el eje de cabeceo.

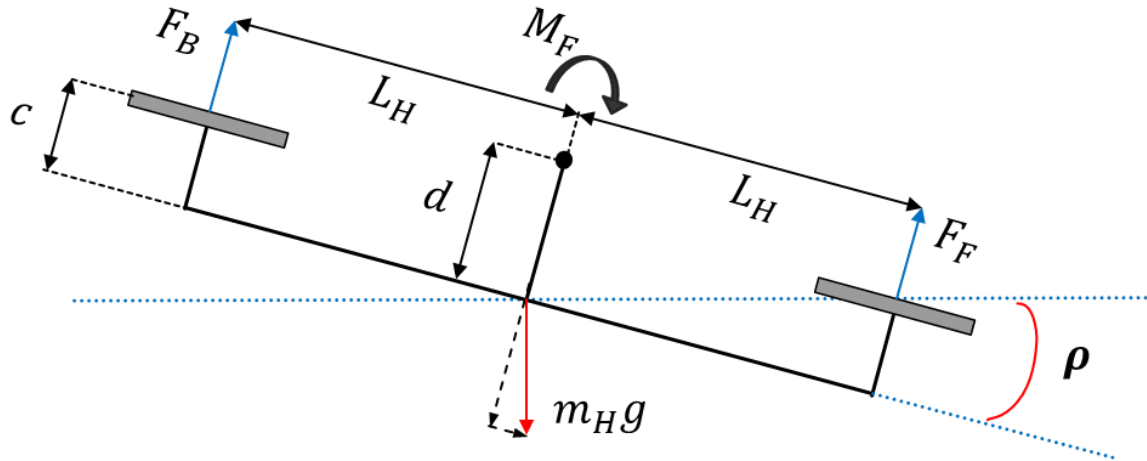


Figura 2. Eje de cabeceo DCL (vista frontal). Fuente propia.

De la Figura 2 se puede ver fácilmente que el par principal alrededor del eje de cabeceo proviene del empuje generado por los motores. Cuando $\rho \neq 0$ la fuerza gravitacional del ensamble también producirá un par alrededor del eje de cabeceo. La fricción de la junta se representa como $M_F = k_{d\rho}$. De la segunda ley de Euler se obtiene:

$$I_\rho \ddot{\rho} = (F_B - F_F)L_H - m_H g(d - c) \sin \rho \cos \epsilon - k_{d\rho} \dot{\rho} \quad (1)$$

En la ecuación (1) la fuerza de Coriolis se ha despreciado.

1.1.1.2 Eje de elevación.

En la Figura 3 el eje de cabeceo ha sido girado un ángulo de ρ , aquí se muestran las fuerzas que actúan sobre el eje de elevación, siendo $M_G(\epsilon)$ el momento gravitacional que ejercen dichas fuerzas. La fricción de la junta se representa como $M_F = k_{d\epsilon}$. Sin embargo, debido al hecho de que el brazo podría estar girando alrededor de los ejes de viaje y elevación al mismo tiempo, el eje de elevación no puede ser analizado en forma aislada.

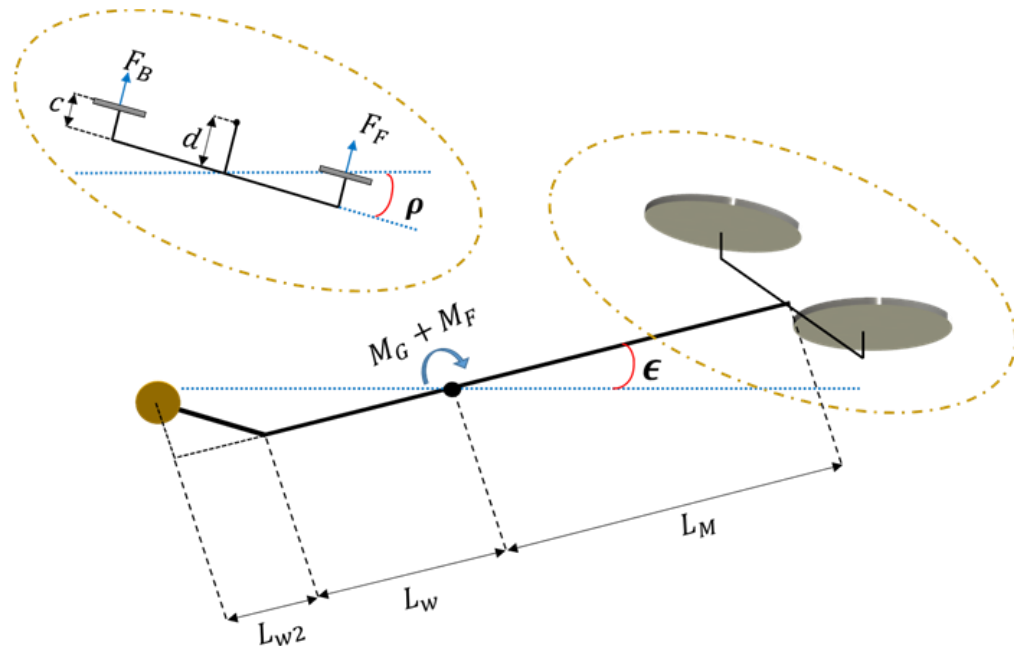


Figura 3. Eje de elevación DCL (vista lateral).

Un nuevo sistema de coordenadas se fija en el helicóptero de acuerdo con la Figura 4. El sistema de coordenadas locales ϵ, ρ, τ' (rojo) se fija en el brazo. El sistema global X, Y, T (negro) es el sistema de referencia inercial. El sistema de coordenadas locales está compartiendo origen O con el marco de referencia global (inercial) y está girando con el brazo alrededor de los ejes de viaje y de elevación.

La segunda ley de Euler sobre el punto O (h_0 denota el movimiento angular con respecto al punto O):

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{d\vec{h}_0}{dt}$$

Dado que el sistema de coordenadas fijo en el helicóptero está girando en comparación con el sistema inercial global la derivada de la cantidad de movimiento angular está dado por:

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \left(\frac{d\vec{h}_0}{dt} \right)_{\epsilon\rho\tau'} + \vec{\Omega} \times \vec{h}_0$$

Donde la derivada se evalúa en el sistema de coordenadas locales y $\vec{\Omega}$ es el vector de velocidad angular que describe cómo el sistema local rota en comparación con el global. Además \vec{h}_0 es dado por:

$$\vec{h}_0 = I_0 \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} I_\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & I_\rho & 0 \\ 0 & 0 & I_\tau \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\tau} \sin \epsilon \\ \dot{\tau} \cos \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_\epsilon \dot{\epsilon} \\ I_\rho \dot{\tau} \sin \epsilon \\ I_\tau \dot{\tau} \cos \epsilon \end{pmatrix}$$

Esto da:

$$\left(\frac{d\vec{h}_0}{dt} \right)_{\epsilon\rho\tau'} = \begin{pmatrix} I_\epsilon \ddot{\epsilon} \\ I_\rho (\ddot{\tau} \sin \epsilon + \dot{\tau} \dot{\epsilon} \cos \epsilon) \\ I_\tau (\ddot{\tau} \cos \epsilon - \dot{\tau} \dot{\epsilon} \sin \epsilon) \end{pmatrix}$$

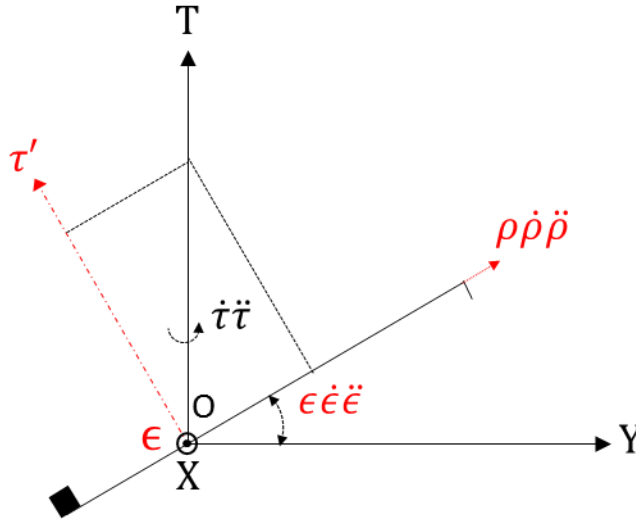


Figura 4. Sistema de coordenada local (rojo) y global (negro).

Seguido por el producto cruz:

$$\vec{\Omega} \times \vec{h}_0 = \begin{pmatrix} (I_\tau - I_\rho) \dot{\tau} \cos \epsilon \dot{\tau} \sin \epsilon \\ (I_\epsilon - I_\tau) \dot{\epsilon} \dot{\tau} \cos \epsilon \\ (I_\rho - I_\epsilon) \dot{\epsilon} \dot{\tau} \sin \epsilon \end{pmatrix}$$

Que da el cambio en el momento angular como:

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \begin{pmatrix} I_\epsilon \ddot{\epsilon} + (I_\tau - I_\rho) \dot{\tau}^2 \cos \epsilon \sin \epsilon \\ I_\rho \ddot{\tau} \sin \epsilon + (I_\epsilon + I_\rho - I_\tau) \dot{\epsilon} \dot{\tau} \cos \epsilon \\ I_\tau \ddot{\tau} \cos \epsilon - (I_\tau + I_\epsilon - I_\rho) \dot{\epsilon} \dot{\tau} \sin \epsilon \end{pmatrix}$$

El cambio en el momento angular alrededor del eje de elevación se identifica ahora como:

$$\frac{dh_{0,\epsilon}}{dt} = I_\epsilon \ddot{\epsilon} + (I_\tau - I_\rho) \dot{\tau}^2 \cos \epsilon \sin \epsilon \quad (2)$$

Utilizando la ecuación (2), junto con la segunda ley de Euler da:

$$I_\epsilon \ddot{\epsilon} = (F_F + F_B) L_M \cos \rho - (I_\tau - I_\rho) \dot{\tau}^2 \cos \epsilon \sin \epsilon + M_G(\epsilon) - k_{d\epsilon} \dot{\epsilon} \quad (3)$$

Donde la ecuación del momento gravitacional con respecto al ángulo de elevación es:

$$\begin{aligned} M_G(\epsilon) = & -m_H g((d - h) \sin \epsilon \cos \rho + L_M \cos \epsilon) \\ & + m_W g(L_W + L_{W2} \cos \theta) \cos \epsilon + m_W g(L_{W2} \sin \theta + h) \sin \epsilon \\ & - m_A L_A g \cos \epsilon \end{aligned} \quad (4)$$

En la ecuación (3) los pares generados por los motores se desprecian. Son proporcional a la velocidad de rotación al cuadrado y, posiblemente, puede ser bastante significativos. Sin embargo, los motores en nuestro caso están rotando en direcciones opuestas, por lo tanto, se contrarrestan entre sí. Está claro que todavía va a generar un par neto al girar con diferentes velocidades (cuando cambiamos el ángulo de cabeceo) pero para simplificar se desprecia este efecto.

Además, las inercias alrededor del eje de viaje y de cabeceo utilizadas en la ecuación (3) son las inercias alrededor de cada eje. Al analizar la inercia del eje de elevación alrededor del eje de viaje debe ser compensado el hecho de que el brazo se ha desprendido de la montura, mientras que la inercia de cabeceo debe ser compensada por la inercia del brazo más la lucha contra el peso y la distancia entre el eje de cabeceo y el eje que se extiende a través del brazo. Sin embargo, la diferencia es pequeña, así que con el fin de evitar tener que introducir nuevas variables el error es despreciado.

1.1.1.3 Eje de viaje

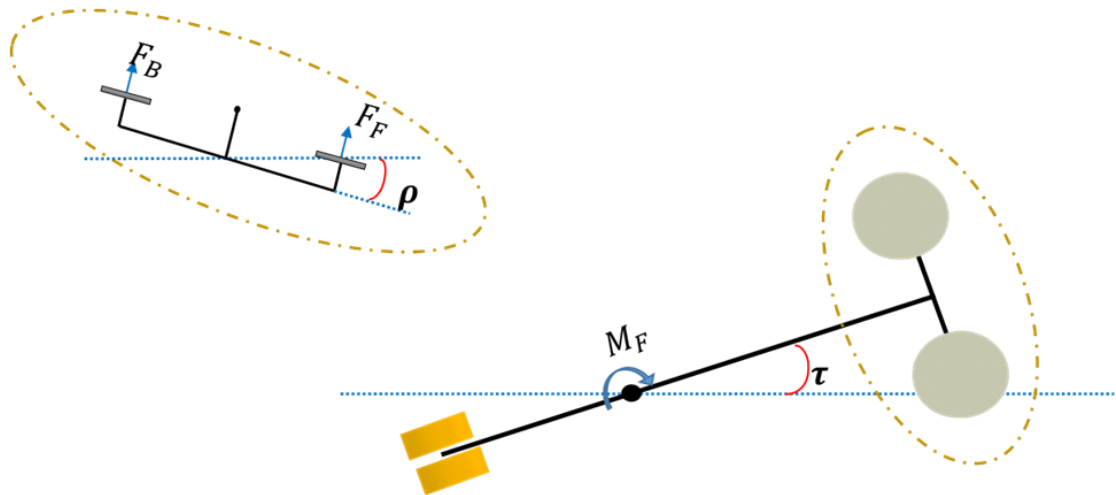


Figura 5. Eje de viaje DCL (vista superior).

Las principales fuerzas que actúan sobre el eje de viaje son el empuje generado por los dos motores. Cuando el ángulo de cabeceo es distinto de cero las fuerzas de empuje tendrán una componente generando un par de torsión alrededor del eje de viaje. La componente se incrementará con el aumento de ρ , así como disminuye con el aumento de ϵ ángulo de elevación. Al contrario de la inercia de cabeceo y de elevación, la inercia de viaje variará bastante significativamente a medida que el helicóptero se mueve alrededor. Aproximando el helicóptero y el contrapeso como masas puntuales e ignorando la inercia de viaje del brazo puede ser expresado según la ecuación (3).

$$I_{\tau}(\epsilon) = \cos^2 \epsilon (m_W(L_W + L_{W2} \cos \theta)^2 + m_H L_M^2) \quad (5)$$

El factor $\cos^2 \epsilon$ causará una reducción bastante significativa (en comparación con $\epsilon = 0$) de la inercia incluso para ángulos relativamente pequeños. Cabe destacar el hecho de que la inercia de viaje no es constante, sino más bien una función del ángulo de elevación se puede expresar como $I_{\tau} = I_{\tau}(\epsilon)$. La Figura 5 y la segunda ley de Euler permite que:

$$I_{\tau}(\epsilon)\ddot{\tau} = (F_F + F_B)L_M \cos \epsilon \sin \rho - k_{d\tau}\dot{\tau} \quad (6)$$

De manera similar al eje de elevación, los torques del motor han sido despreciados.

1.1.2 Modelo de unidad de propulsión.

La identificación de los motores se realiza de forma experimental siguiendo el modelo estático mostrado en la Figura 6, en este montaje se tiene el motor a un lado de la viga y al otro extremo se tiene una balanza que recibirá la fuerza de empuje generada por el motor dada unas variaciones de PWM. De esta manera se registran los datos de PWM enviados al motor y los observados en la balanza.

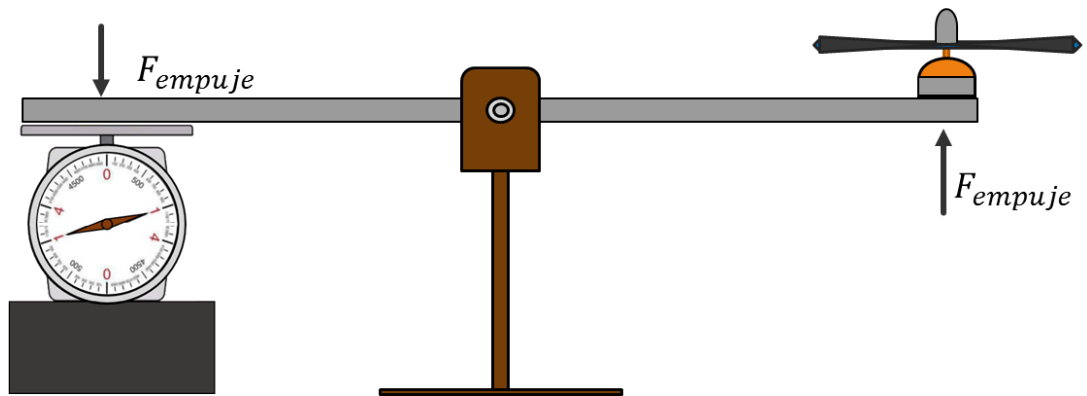


Figura 6. Modelo estático de identificación de los motores.

Estos datos son utilizados para obtener un modelo estático de PWM a fuerza del motor, en la sección 1.3.2.1 se explica el análisis para obtener dicha ecuación (7).

$$PWM = 6.842357951 F_{motor} + 75.112281951 \quad (7)$$

1.1.3 Resumen de las ecuaciones.

La aplicación de la segunda ley de Euler en los diferentes ejes proporciona un modelo dinámico del helicóptero:

$$\begin{cases} I_\epsilon \ddot{\epsilon} = (F_F + F_B)L_M \cos \rho - (I_\tau - I_\rho)\dot{\tau}^2 \cos \epsilon \sin \epsilon + M_G(\epsilon) - k_{d\epsilon}\dot{\epsilon} \\ I_\rho \ddot{\rho} = (F_B - F_F)L_H - m_H g(d - c) \sin \rho \cos \epsilon - k_{d\rho}\dot{\rho} \\ I_\tau(\epsilon)\ddot{\tau} = (F_F + F_B)L_M \cos \epsilon \sin \rho - k_{d\tau}\dot{\tau} \end{cases} \quad (8)$$

Ecuación inercia del ángulo de viaje.

$$I_\tau(\epsilon) = (\cos \epsilon)^2 (m_W(L_W + L_{W2} \cos \theta)^2 + m_H L_M^2) \quad (9)$$

Ecuación del momento gravitacional.

$$\begin{aligned} M_G(\epsilon) = & -m_H g((d - h) \sin \epsilon \cos \rho + L_M \cos \epsilon) \\ & + m_W g(L_W + L_{W2} \cos \theta) \cos \epsilon + m_W g(L_{W2} \sin \theta + h) \sin \epsilon \\ & - m_A L_A g \cos \epsilon \end{aligned} \quad (10)$$

Modelo de unidad de propulsión.

$$PWM = 6.842357951 F_{motor} + 75.112281951 \quad (11)$$

1.2 Diseño Mecánico

El diseño mecánico del helicóptero 3GDL se realizó con base al prototipo que ofrece la empresa Quanser®, facilitando de esta manera parte del diseño mecánico. En la Figura 7 y Figura 8 se detallan dos vistas isométricas del prototipo.



Figura 7. Vista isométrica 1 del modelo CAD.



Figura 8. Vista isométrica 2 del modelo CAD.

1.2.1 Dimensionamiento

El dimensionamiento del prototipo parte de la idea principal de que el modelo debe contar con tres grados de libertad. El primer grado de libertad (viaje) está ubicado sobre el eje principal de toda la estructura (eje “y”), el cual permite rotar 360 grados, sin embargo, debido a los cables, se restringe a ± 90 grados como se muestra en la Figura 9.

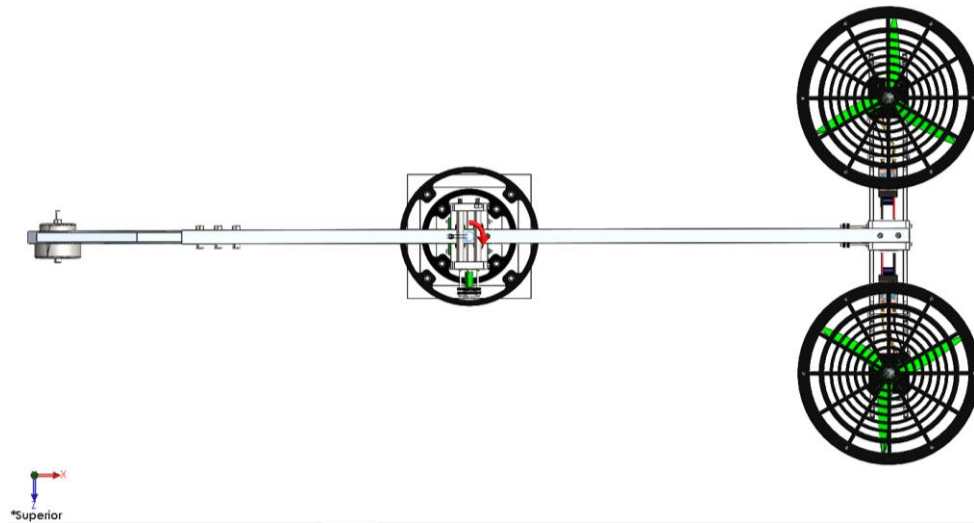


Figura 9. Vista superior del modelo.

El segundo grado de libertad corresponde al eje de elevación y se ubica en la parte superior del eje principal (eje “z”) como se muestra en la Figura 10.

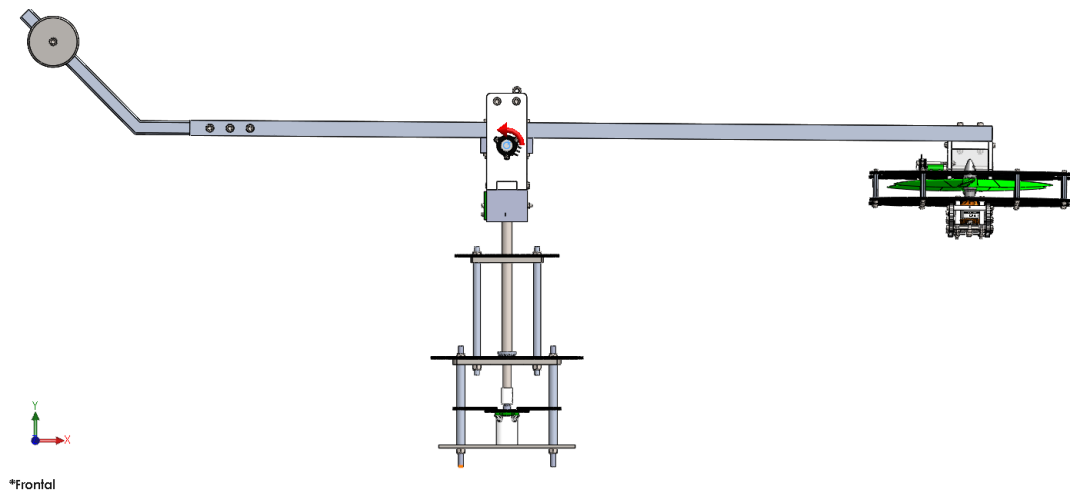


Figura 10. Vista frontal del modelo.

Este cuenta con un rango limitado de movimiento debido a los separadores que sujetan el conjunto que lo sostiene y la restricción de la mesa; este rango es aproximadamente 65 grados (+41 por encima de la horizontal y -24 grados por debajo).

El tercer eje se encuentra en el extremo derecho y está ubicado sobre el eje “x” como se muestra en la Figura 11; tiene un rango limitado de movimiento debido a la estructura que sujeta el eje de cabeceo, aproximadamente 60 grados (± 30 grados).

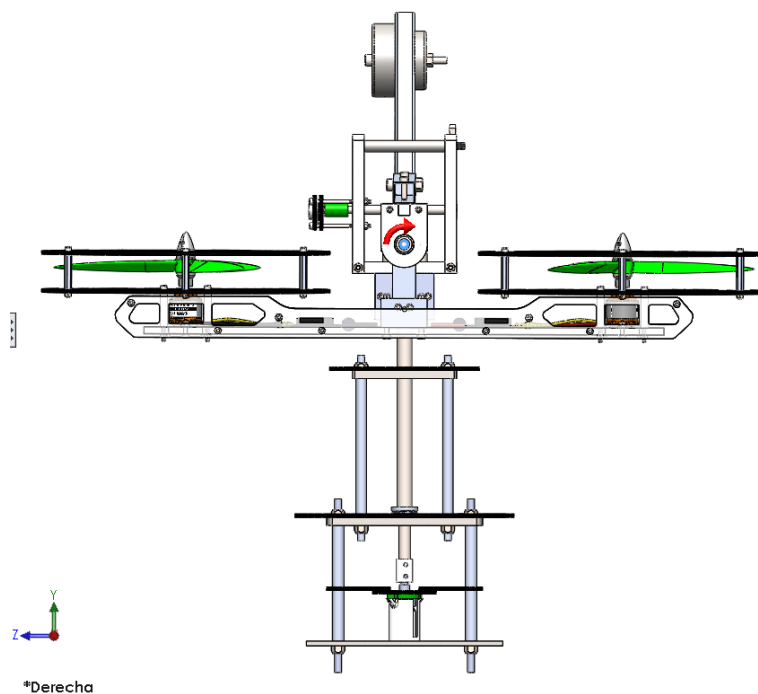


Figura 11. Vista derecha del modelo.

El sistema está dividido en tres estructuras principales viga principal, estructura motores y estructura base, las cuales se pueden observar en la Figura 12. Esto le da al prototipo la característica modular facilitando el transporte y el mantenimiento del mismo.

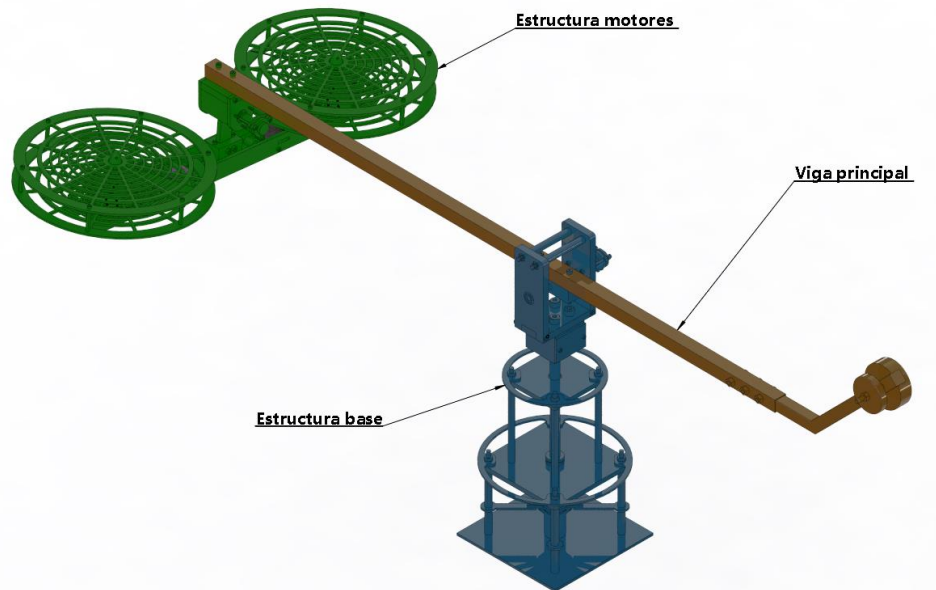


Figura 12. Estructuras principales del sistema.

La viga principal (ver Figura 13, viga de color amarillo) se encargada de soportar el peso del conjunto de motores y del contrapeso. Esta tiene una longitud total desde el contrapeso hasta los motores de 127 cm. El contrapeso tiene una inclinación de +40 grados con la horizontal, donde aparecen dos componentes de peso adicionales, aumentando de esta manera el torque efectivo de este con respecto a la base, es decir, disminuir el esfuerzo de los motores.



Figura 13. Viga principal del modelo. Vista lateral.

El valor del contrapeso se obtuvo al analizar la masa de todo el conjunto de motores mediante la herramienta “Propiedades físicas” de Solidworks, la cual utiliza los materiales y la geometría de los objetos para calcularla. El valor de la masa obtenido fue de 1.2 kg y partir de este valor se estima el contrapeso, el cual debe tener un peso menor no muy cercano al del conjunto motores, dado a que esto causaría que una pequeña variación provocada por el empuje de los motores tenga un cambio de posición del brazo muy brusco. Con base en lo anterior, se utiliza un contrapeso de 1kg para todos los análisis.

Sobre la estructura motores de la Figura 12, se diseñó un soporte para los mismos, tal como se muestra en la Figura 14 a. Este soporte en acrílico encierra los motores y permite sujetarlos a la base de la estructura, también tiene un espacio para adecuar los controladores electrónicos de velocidad (ESC) que requieren los motores. Para la protección de las hélices de los motores y evitar posibles accidentes durante el funcionamiento del helicóptero, se diseñaron unas rejillas protectoras circulares con un diámetro mayor al de la hélice, tal como se muestra en la Figura 14 b.

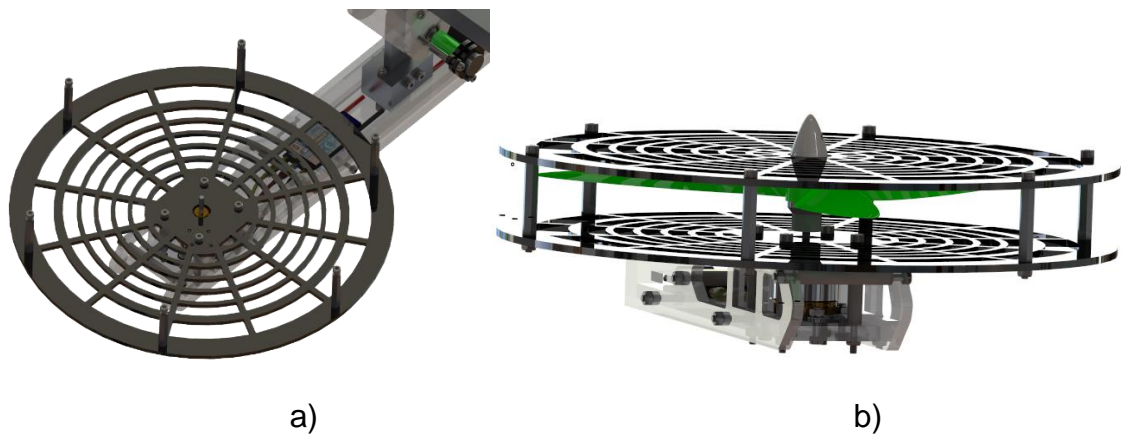


Figura 14. a) Vista isométrica del modelo del soporte para los motores. b) Vista isométrica del soporte acoplado a las rejillas de protección.

La estructura base está conformada por tres láminas de aluminio separadas por cilindros del mismo material, consiguiendo la altura necesaria en cada una de estas secciones. En la parte inferior se localiza una estructura de soporte encargada de fijar y centrar el sensor de viaje. En la parte media de la estructura se tiene localizado

un rodamiento de carga axial/radial de bola, este soporta todo el peso del helicóptero. En la parte superior se acopla el eje de viaje con su bloque de soporte, sobre este se encuentra el circuito donde se concentran las conexiones del helicóptero y el soporte de elevación. Adicionalmente, se utilizan dos anillos de acrílico para dar mayor libertad de giro en el eje “y” y eliminar el problema de enredo de cables que comunican sensores y actuadores con la tarjeta de adquisición de datos. (Ver Figura 15).



Figura 15. Vista isométrica de la estructura base.

Para utilizar de manera óptima el helicóptero de 3GDL se diseña una mesa que cumpla con las funciones necesarias para este banco de pruebas acorde a los requerimientos del laboratorio, como contar con un área de descanso para el helicóptero y un espacio para ubicar la fuente de alimentación.

La mesa cuenta con una estructura construida con perfiles de acero cuadrados de 1 ½” calibre 14, se utilizó pintura electrostática y dos tablas de madera, una superior para el área de trabajo del helicóptero y otra inferior con el espacio necesario para poner la fuente de alimentación. Esta mesa permite el manejo y traslado del

helicóptero de forma independiente lo que proporciona facilidad de movilidad. El modelo de la mesa se puede apreciar en la Figura 16.

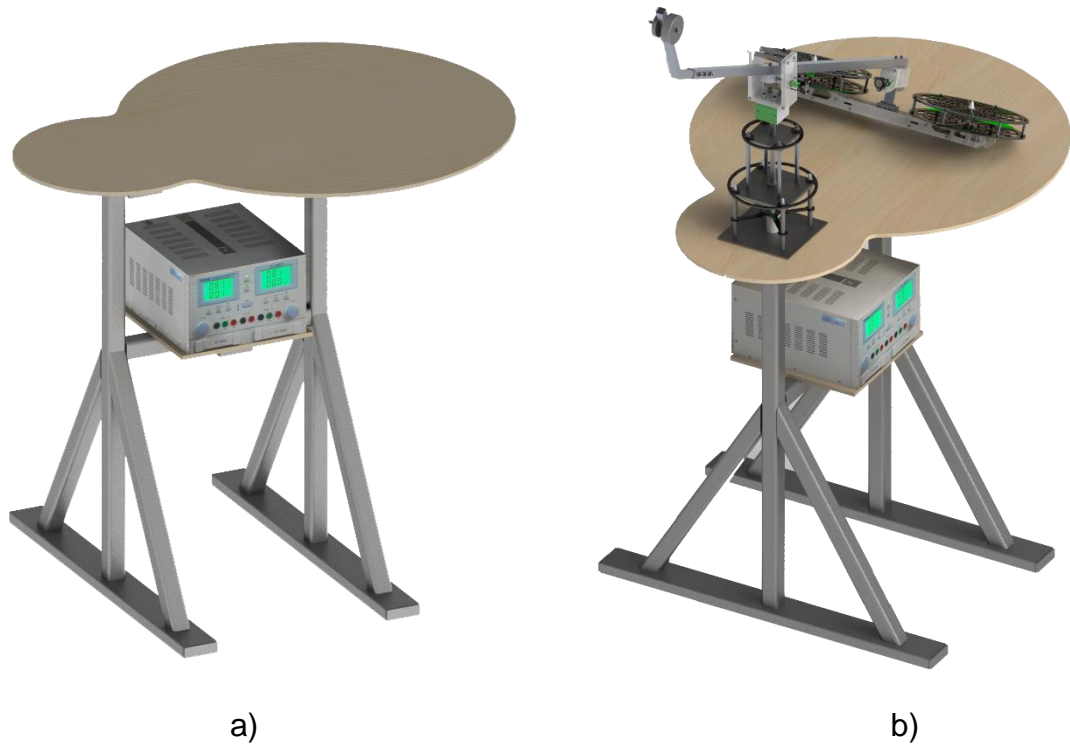


Figura 16. (a) estructura de la mesa. (b) helicóptero sobre la mesa.

1.2.2 Parámetros del sistema.

En la Tabla 3 se muestran los valores de los parámetros del modelo matemático para el helicóptero 3GDL, los cuales se usan en el diseño de los controladores PID y robusto. Las inercias se obtienen del modelo CAD utilizando SolidWorks y los coeficientes de fricción dinámicos de los ejes se tomaron de la literatura [1].

Tabla 3. Valores de los parámetros helicóptero 3GDL

Parámetros del helicóptero	Valor	Unidades(SI)
Masa del helicóptero (motores) (m_H)	1.160	kg
Masa del contrapeso (m_W)	1.015	kg
Masa de la viga principal (m_A)	0.19367	kg
Distancia entre el eje de elevación y el pliegue del contrapeso (L_W)	0.47	m
Distancia entre el pliegue del contrapeso hasta el contrapeso (L_{W2})	0.10762	m
Distancia entre el eje de elevación y el helicóptero (L_M)	0.5775	m
Distancia entre el eje de cabeceo y el centro de las hélices (L_H)	0.19	m
Distancia entre el eje de elevación y el centro de masa de la viga principal (L_A)	0.10565	m
Distancia entre el eje de cabeceo y la base de los motores (d)	0.125	m
Distancia entre la base de los motores y las hélices (c)	0.05269	m
Distancia entre eje de elevación y el centro de la viga principal (h)	0.01862	m
La inercia de rotación alrededor del eje de cabeceo (I_ρ)	0.04794	kgm ²
La inercia de rotación alrededor del eje de elevación (I_ϵ)	0.64562	kgm ²
La inercia de rotación alrededor del eje de viaje $(I_\tau(0))$	0.65584	kgm ²
Coeficiente de fricción dinámico eje de cabeceo $(k_{d\rho})$	0.053	Nms/rad
Coeficiente de fricción dinámico eje de elevación $(k_{d\epsilon})$	1	Nms/rad
Coeficiente de fricción dinámico eje de viaje $(k_{d\tau})$	0.5	Nms/rad

1.2.3. Diseño y análisis del eje de elevación

Para el diseño del eje de elevación se tuvo en cuenta el diseño implementado por la empresa Quanser® que limita el ángulo de elevación en 63.5 grados (± 31.75 grados).

Para este diseño se limita el ángulo máximo de elevación en 65 grados (+41 por encima de la horizontal y -24 grados por debajo) acoplado el eje de elevación con una platina rectangular de área cuadrada (ver Figura 17) mediante un tornillo prisionero, de esta manera se transmite el movimiento rotacional que posteriormente será generado por la viga principal y leído por el potenciómetro lineal.

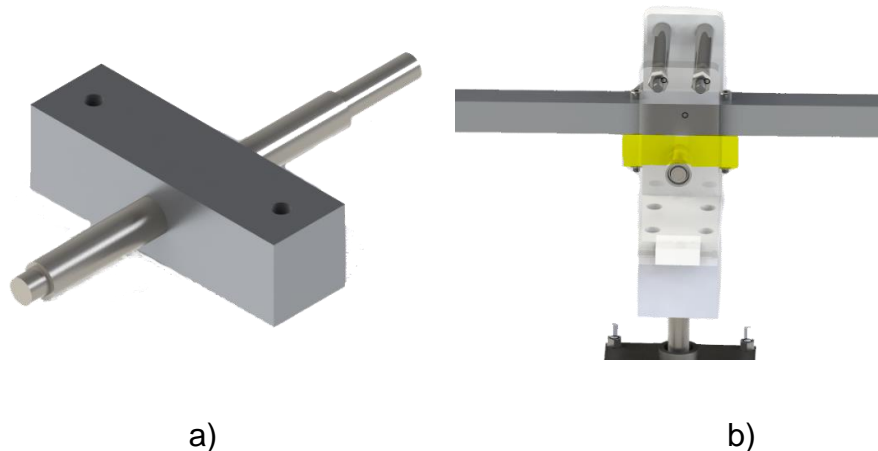


Figura 17. a) Vista isométrica del acople del eje con la platina rectangular.
b) Ubicación de la platina (resaltada de amarillo) en el helicóptero.

El material usado para el eje fue acero inoxidable 316L, para la simulación se usa el complemento de *Solidworks Simulation* donde se realiza el análisis de fuerzas y deformaciones que actúan sobre este conjunto. Para dicho análisis se tienen dos sujeciones fijas a los extremos del eje de elevación representando los apoyos dados por los rodamientos que lo sostienen, se brindan relaciones de contacto con el bloque que se encargara de soportar la fuerza ejercida por el conjunto de los motores y el contrapeso dando un total de 2.5 kgf, siendo este valor un 13.64% por encima de la aproximación entregada por el modelo CAD.

En la Figura 18 se observa el resultado de la simulación, la cual tiene un esfuerzo de Von Mises de 6.703 MPa en el eje de elevación, el límite elástico del acero inoxidable 316L es de 170 MPa, lo que proporciona un factor de seguridad de 25.36 que corresponde al límite elástico del material dividido el máximo esfuerzo obtenido, esto indica que el material es funcional para la aplicación.

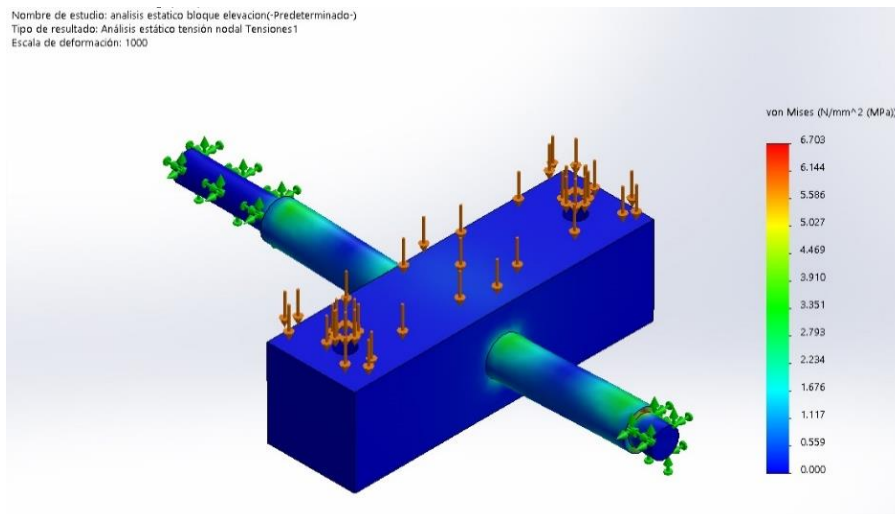


Figura 18. Análisis de esfuerzo de Von Mises eje de elevación.

Se analiza la deformación causada por la fuerza aplicada sobre el eje, como se observa en la Figura 19. Según los datos obtenidos se tiene que la deflexión máxima es de 0.00126 mm, un valor que es permisible, dado a que no afecta al sistema.

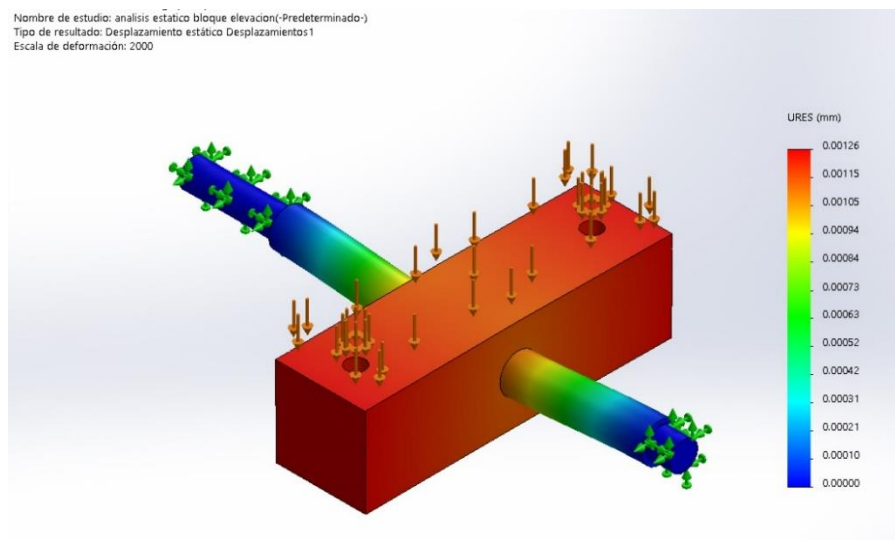


Figura 19. Deformación eje de elevación.

Para el diseño de la viga principal se tuvo como base la longitud de 1 metro utilizado en la referencia [2] Diaz, A. B. (2010). Y apoyados en la longitud total del brazo del prototipo de la empresa Quanser®.

El material usado en la viga principal es una aleación 6061 de aluminio. Para el análisis se tienen una sujeción fija a $L/3$ de la viga sobre el área que ocupa el soporte de elevación; en el extremo más cercano se aplicó una fuerza de 1 kgf que representa el contrapeso del helicóptero y en el extremo lejano se aplicó una fuerza de 1.2 kgf que supone el peso de la estructura motor.

En la Figura 20 se observa el resultado de la simulación, la cual tiene un esfuerzo de Von Mises de 26.797 MPa en la viga principal, el límite elástico de la aleación de aluminio 6061 es de 27.574 MPa, lo que proporciona un factor de seguridad de 1.028995; teniendo en cuenta que este factor debe ser mayor o igual a uno, se verifica que el material es funcional para la aplicación.

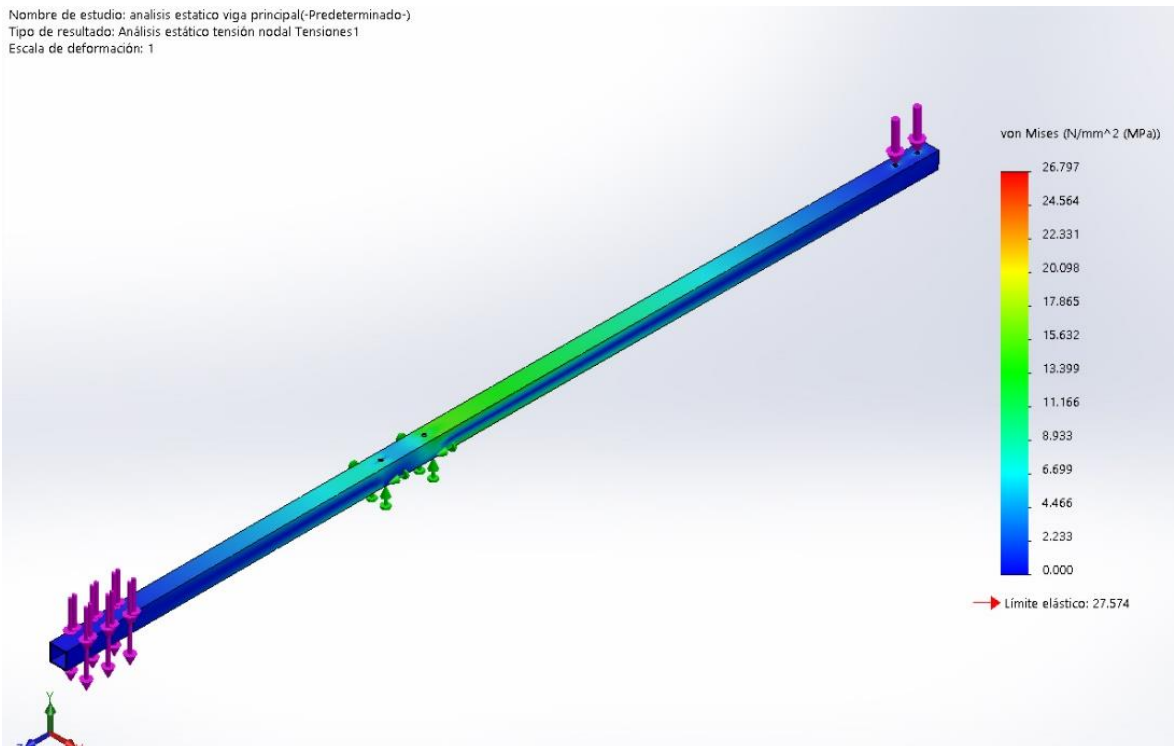


Figura 20. Análisis de esfuerzo de Von Mises de la viga principal.

Se analiza la deformación causada por la fuerza aplicada sobre la viga como se observa en la Figura 21. Según los datos obtenidos se tiene que la deflexión máxima es de 2.701 mm, siendo este un valor permisible, dado a que no afecta al sistema considerablemente.

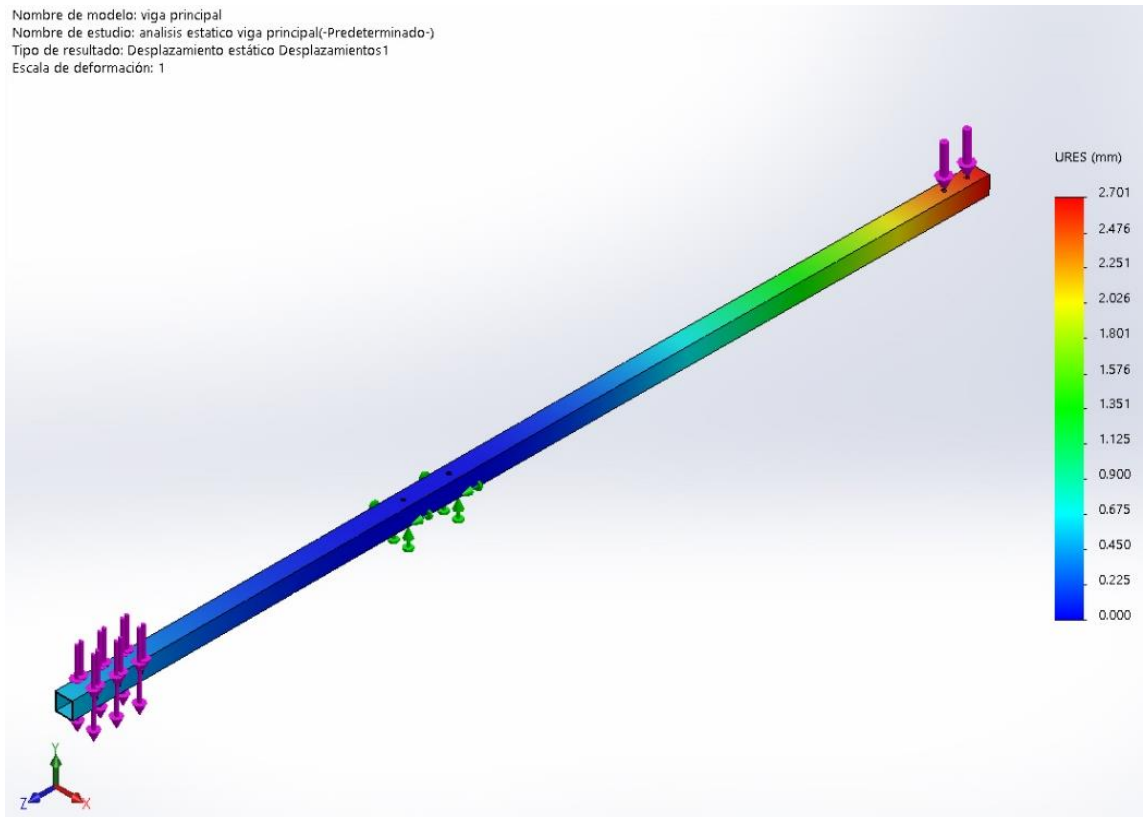


Figura 21. Deformación de la viga principal.

1.2.4 Diseño y análisis del eje de cabeceo

Para el diseño del eje de cabeceo se tuvo en cuenta el diseño implementado por la empresa Quanser® que limita el ángulo de elevación en 64 grados (± 32 grados).

Para este diseño se limita el ángulo máximo de elevación 60 grados (± 30 grados). El eje de cabeceo se acopla con el soporte de cabeceo como se muestra en la Figura 22. Este se une a la barra que soporta los motores mediante un tornillo prisionero; de esta manera se transmite el movimiento rotacional que posteriormente será generado por la diferencia de velocidad en los motores y leído por el potenciómetro lineal.

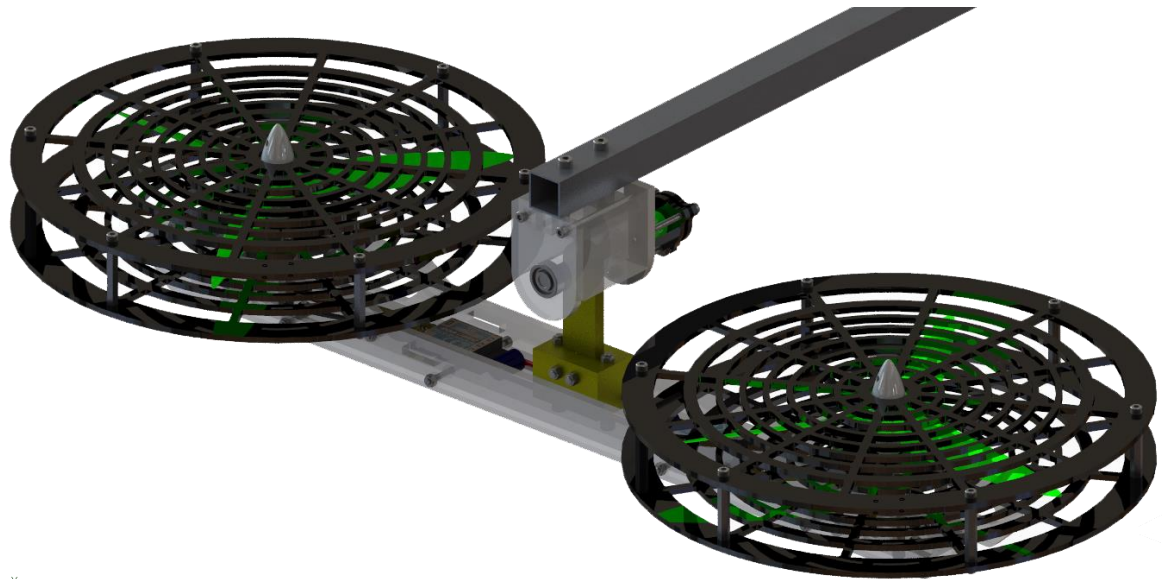


Figura 22. Soporte de cabeceo (color amarillo).

Utilizando el complemento de *Solidworks Simulation* para realizar el análisis de fuerzas y deformaciones, se selecciona el material para el eje, el cual es acero inoxidable 316L. En el análisis se tienen dos sujeciones fijas a los extremos del eje de cabeceo que representan los apoyos dados por los rodamientos que lo sostienen. Se define una fuerza aplicada sobre la sección interna que está en contacto con el soporte de cabeceo, ésta se consideró de 1.2 kgf. Según los valores obtenido del modelo CAD.

En la Figura 23 se aprecia el resultado donde se observa un esfuerzo de Von Mises de 2.246 MPa en el eje de cabeceo, el límite elástico del acero inoxidable 316L es de 170 MPa lo que proporciona un factor de seguridad de 75.69, esto indica que el material es funcional para la aplicación.

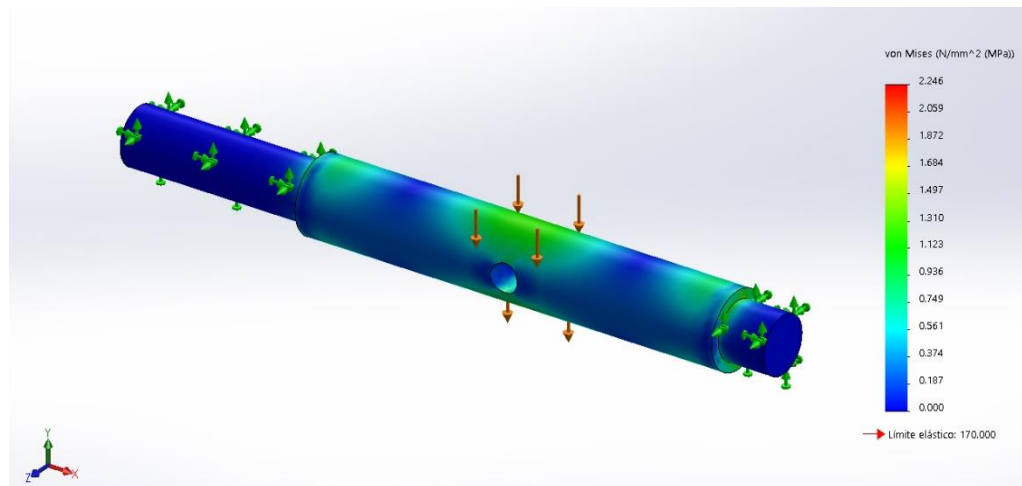


Figura 23. Análisis de esfuerzo de Von Mises eje de cabeceo.

Se analiza la deformación causada por la fuerza aplicada sobre el eje como se observa en la Figura 24. Según los datos obtenidos se tiene que la deflexión máxima es de 0.0002206 mm un valor que podemos despreciar, dado a que no afecta al sistema en forma significativa, por lo que el material del eje cumple las características para su correcto funcionamiento.

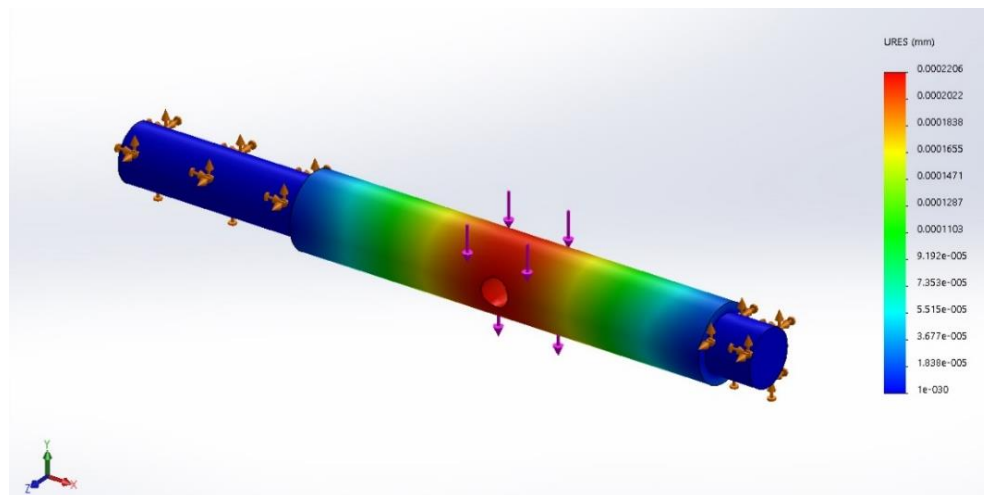


Figura 24. Deformación eje de cabeceo.

Para el análisis de la pieza de soporte de los motores con el eje se utiliza aluminio 6061. En la Figura 25 se aprecia que soporta los esfuerzos producidos, ya que el límite elástico de este material es de 62.1MPa y tomando el resultado máximo de

Von Mises de 0.243 MPa se obtiene un factor de seguridad de 255.55 suficiente para trabajar con este material en el modelo final.

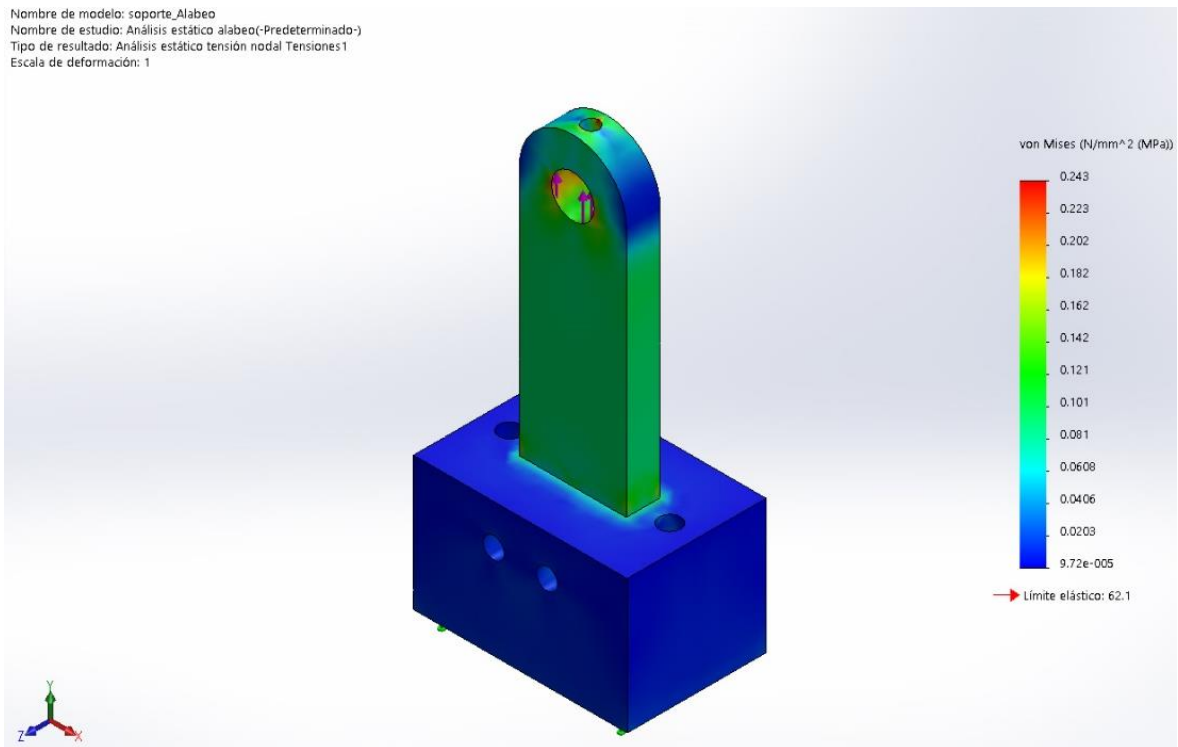


Figura 25. Análisis de esfuerzo de Von Mises soporte de cabeceo.

Se analiza la deformación causada por la fuerza aplicada sobre el eje del soporte como se observa en la Figura 26. Según los datos obtenidos se tiene que la deflexión máxima es de 0.000093 mm un valor que podemos despreciar, dado a que no afecta al sistema en forma significativa, por lo que el material del soporte cumple las características para su correcto funcionamiento.

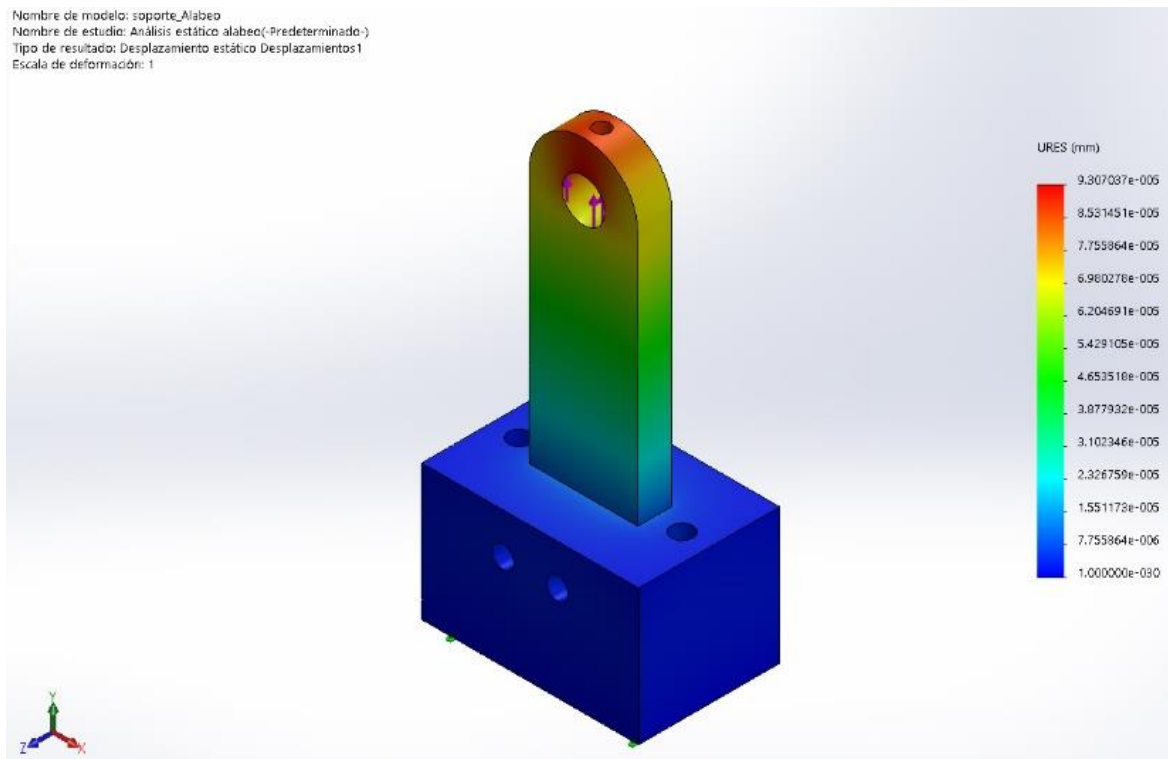


Figura 26. Deformación soporte de cabeceo.

Para el análisis de la lámina de soporte de los motores que está unida al soporte de cabeceo el material es acrílico de 5 mm. Para el análisis se definieron las caras que están en contacto con el soporte de cabeceo con geometría fija y la cara rectangular que está en contacto con la base de dicho soporte. Se aplicó la fuerza máxima de empuje que se probó en simulación 2.8 N en el lugar donde esta cada motor.

En la Figura 27 se observa el resultado de la simulación, se tiene que el límite elástico de este material es de 45MPa y tomando el resultado máximo de Von Mises de 0.2535 MPa se obtiene un factor de seguridad de 177.51 suficiente para trabajar con este material.

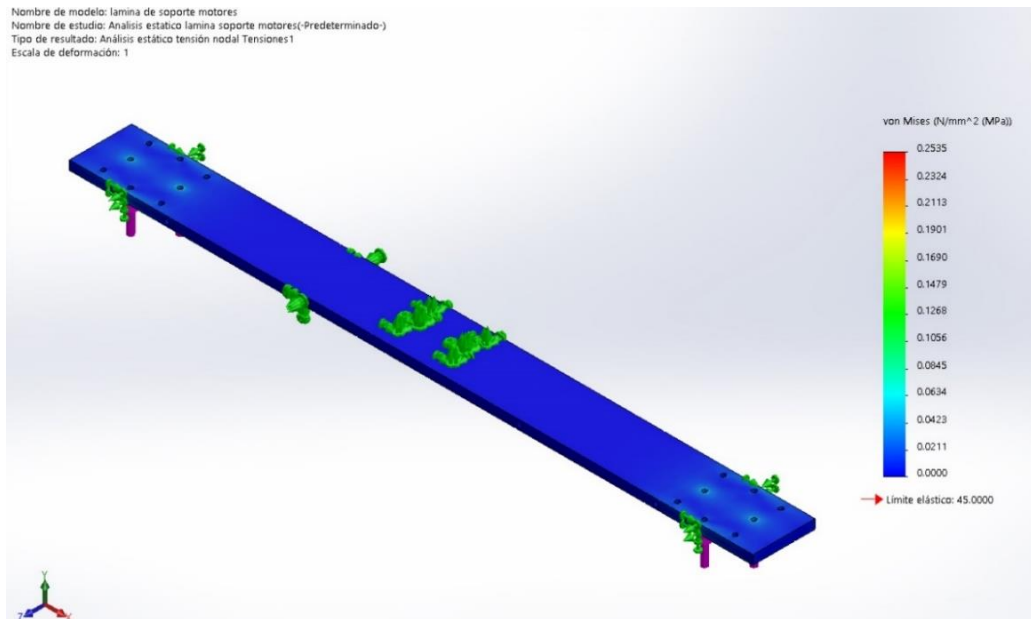


Figura 27. Análisis de esfuerzo de Von Mises lámina soporte motores.

Se analiza la deformación causada por la fuerza aplicada sobre la lámina soporte motores como se observa en la Figura 28. Según los datos obtenidos se tiene que la deflexión máxima es de 0.000387 mm un valor que podemos despreciar, dado a que no afecta al sistema en forma significativa, por lo que el material del soporte cumple las características para su correcto funcionamiento.

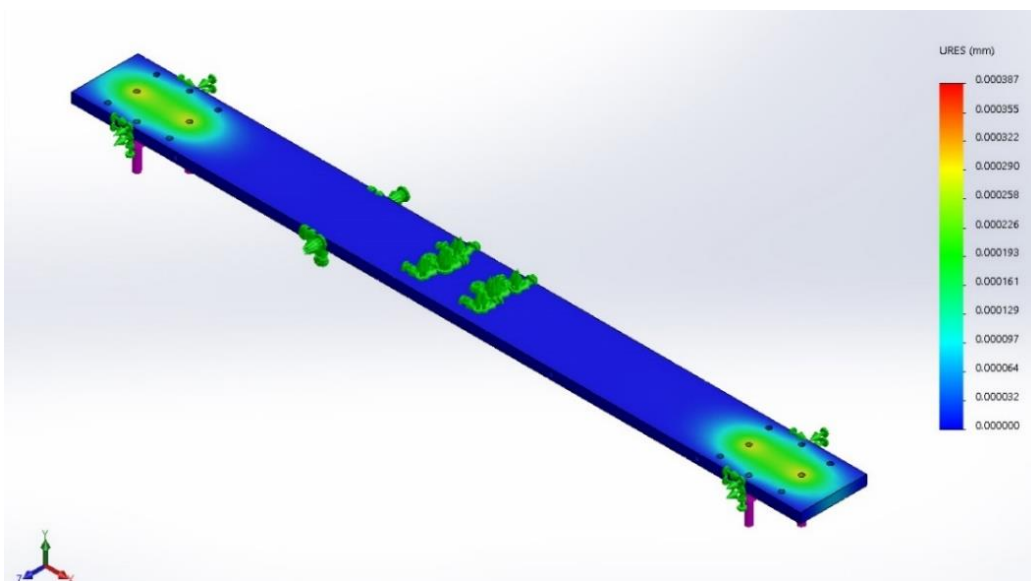


Figura 28. Deformación lámina soporte de motores.

1.2.5 Diseño y análisis del eje de viaje

Para el diseño del eje de viaje se tuvo en cuenta el diseño implementado por la empresa Quanser® que trabaja los 360 grados, sin embargo, en este diseño existe un límite de 180 grados para este eje, el cual se da por los cables de conexión. El eje de viaje está soportado sobre un rodamiento de carga axial/radial de bola, de esta manera el peso del helicóptero no afecta al sensor. En la parte superior es sujetado por la lámina de aluminio (Base soporte 3) para evitar el pandeo y darle otro punto de apoyo, todo esto transmite el movimiento rotacional que posteriormente será generado por la viga principal y leído por el potenciómetro lineal sin tope.

El material usado en el eje fue acero inoxidable 316L. En el análisis se tienen una sujeción fija en la parte media al final del eje de viaje representando el apoyo del rodamiento de carga axial/radial que lo sostiene, también, se tiene otra sujeción de tipo bisagra para la lámina superior de aluminio que lo centra, se aplicarán las fuerzas en la cara superior del eje; estas son las fuerzas ejercidas por los motores y el contrapeso, esta se consideró de 2.5 kgf apoyado en los valores obtenidos del modelo CAD al utilizar la herramienta “Propiedades física” de SolidWorks.

En la Figura 29 se observa el resultado de la simulación, la cual tiene un esfuerzo de Von Mises de 0.403 MPa en el eje de viaje, el límite elástico del acero inoxidable 316L es de 170 MPa, lo que proporciona un factor de seguridad de 421.836 que indica que el material es funcional para la aplicación.

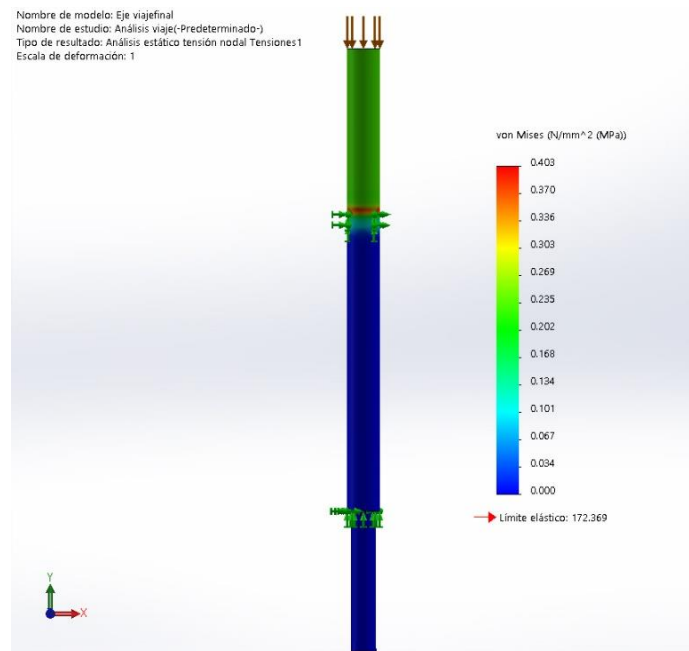


Figura 29. Análisis de esfuerzo de Von Mises del eje de viaje.

Se analiza la deformación causada por la fuerza aplicada sobre el eje como se observa en la Figura 30. Según los datos obtenidos se tiene que la deflexión máxima es de 7.877732×10^{-5} mm, un valor es permisible dado a que no afecta al sistema.

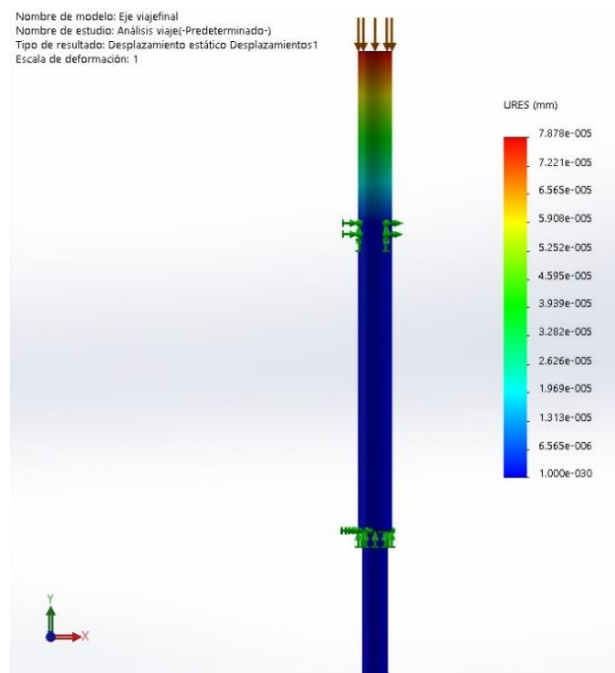


Figura 30. Deformación eje de viaje.

1.3 Diseño electrónico.

1.3.1 Sensores.

Para realizar la retroalimentación del sistema del helicóptero se requiere utilizar tres sensores, el primero se encarga de medir el ángulo en el eje de viaje. Para éste, se utilizó un potenciómetro lineal WDJ22A de una vuelta sin tope de 10K, el segundo debe medir el ángulo del eje de elevación y el tercero debe adquirir la señal del ángulo del eje de cabeceo. Para ambos ejes se utilizó un potenciómetro lineal de una vuelta de la empresa Alpha. En el anexo B se puede ver información detallada de los sensores. Se utilizaron potenciómetros lineales debido al bajo costo que éstos tienen frente al rango de medición que proporcionan como se muestra en la Figura 31. La resolución de los sensores se determinó aplicando las ecuaciones (12) y (13).

$$Resolucion_{elevacion\ y\ cabeceo} = \frac{270^\circ}{4096} \quad (12)$$

$$Resolucion_{viaje} = \frac{(360^\circ - 10^\circ)}{4096} \quad (13)$$

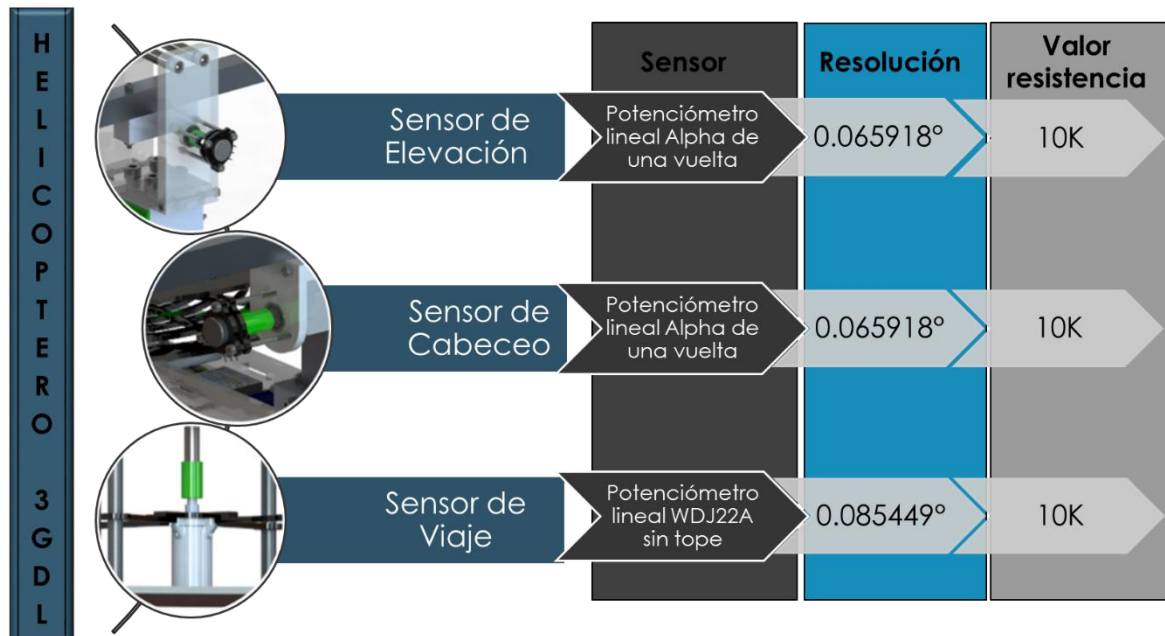


Figura 31. Descripción de los sensores y ubicación.

Para el eje de viaje se utiliza un sensor sin tope que gira los 360° en este caso el sensor utilizado tiene una pequeña zona muerta de 10° con una variación de $\pm 5^\circ$

1.3.1.1 Filtrado de las señales de sensores.

Para mejorar la lectura obtenida de los sensores se implementó un filtro digital de Kalman el cual es un algoritmo que estima el estado de un sistema a partir de datos medidos. El algoritmo del filtro es un proceso de dos pasos: el primer paso predice el estado del sistema, mientras que el segundo utiliza las mediciones de ruido para ajustar la estimación del estado del sistema. [3]

Los filtros de Kalman se emplean de forma habitual en los sistemas con toma de datos proveniente de sensores en la que se sintetizan las señales. Para el diseño del filtro se define la covarianza de ruido para cada señal proveniente de los sensores como lo muestra la Tabla 4, atenuando de esta manera el error de lectura como se muestra en la Figura 32.

Tabla 4. Varianza filtro Kalman.

Ángulo	Varianza del ruido
Elevación	0.09
Cabeceo	0.09
Viaje	0.09

La varianza se definió de manera experimental haciendo cambios en esta, donde se analizó que al aumentar el valor disminuye significativamente el ruido en la señal, pero el seguimiento se vuelve lento y viceversa, encontrando así un valor óptimo de 0.09 donde la disminución del ruido de la señal es buena sin ver afectado el seguimiento.

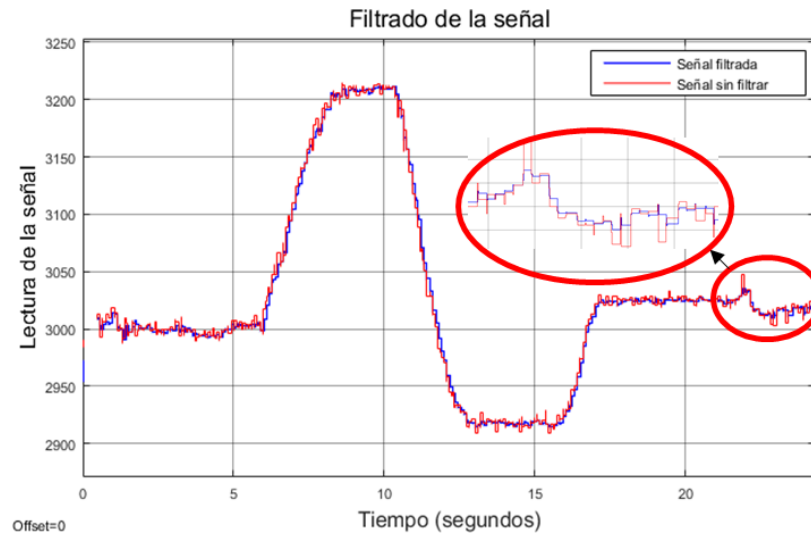


Figura 32. Aplicación del filtro Kalman.

1.3.1.2 Caracterización de sensores.

Para la caracterización de los sensores se toma la lectura análoga para cuatro grados por ejemplo (-90, 0, 90, 180) con estos valores se pasa a realizar una gráfica de estos ángulo vs valor digital, todo esto sirve para obtener la ecuación que caracteriza al sensor lo que permite que ahora la salida de lectura de los sensores estén en grados. Para obtener esta ecuación utilizando Matlab se puede determinar la exactitud de la ecuación al aplicar una comparación de la ecuación lineal frente a la ecuación cuadrática, lo que permite reducir la pérdida de grados en la lectura y no afectar la resolución del sensor.

Caracterización de sensor de elevación.

Para la caracterización del sensor de elevación se toma la lectura análoga para cuatro grados dentro del rango de movimiento para este ángulo tal como se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5. Datos de identificación de sensor de elevación.

Angulo Elevación	Valor Digital
-26,1	2652
0	3035
26	3440
41,5	3700

Con los datos se realiza la gráfica ángulo vs valor digital y se obtiene la ecuación que caracteriza al sensor ver Figura 33 convirtiendo de esta manera del valor análogo a grados.

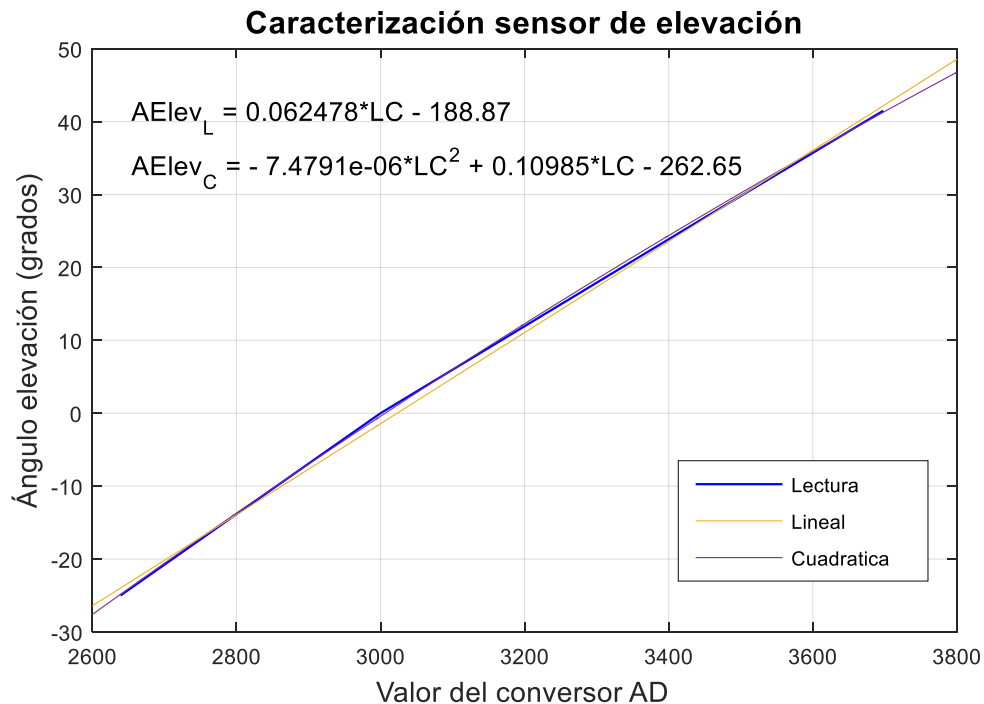


Figura 33. Caracterización sensor elevación.

Por medio de Matlab se puede determinar la ecuación que más se aproxime a la real comparando una ecuación lineal con una cuadrática, en la Figura 34 se muestra el residuo de las dos ecuaciones que se analizaron, donde se observa que la ecuación cuadrática tiene un error máximo de 0.5 grados comparado a la lineal con error de 1.5 grados. Dadas las necesidades del diseño del sistema se selecciona la ecuación cuadrática al tener un error menor.

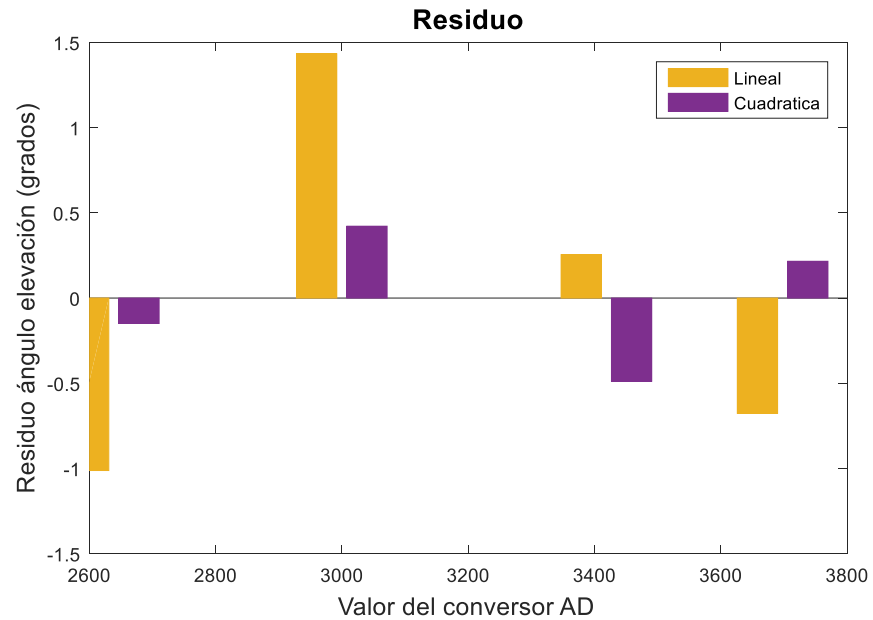


Figura 34. Residuos ecuaciones elevación.

En la ecuación (14) se muestra la función seleccionada para el sensor de elevación donde LC denota la lectura del conversor.

$$AElev_C = -7.4791e^{-0.6} * LC^2 + 0.10985 * LC - 262.65 \quad (14)$$

Caracterización de sensor de cabeceo.

Para la caracterización del sensor de cabeceo se toma la lectura análoga de tres puntos dentro del rango de movimiento para este ángulo tal como se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6. Datos de identificación de sensor de cabeceo.

Angulo Cabeceo	Valor Digital
-34,3	2570
0	2063
31,4	1635

Con los datos se realiza la gráfica ángulo cabeceo vs valor digital y se obtiene la ecuación que caracteriza al sensor ver Figura 35.

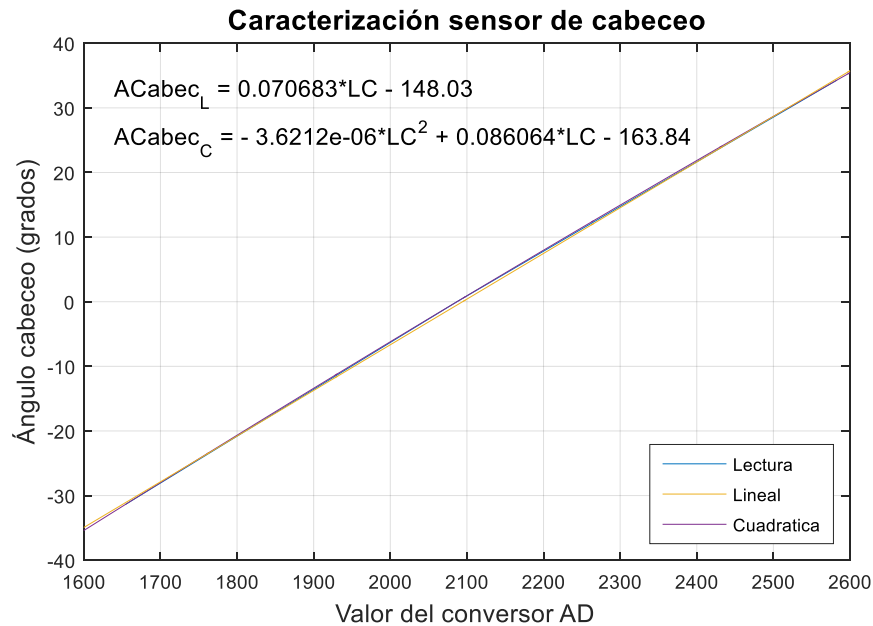


Figura 35. Caracterización sensor cabeceo.

Por medio de Matlab se determina la ecuación que más se aproxima a los datos reales comparando una ecuación lineal con una cuadrática; en la Figura 36 se muestra el residuo de las dos ecuaciones comparadas, donde se observa que la ecuación cuadrática tiene un error máximo de casi 0 grados comparado a la lineal con error de 0.5 grados, con este análisis se selecciona la ecuación cuadrática.

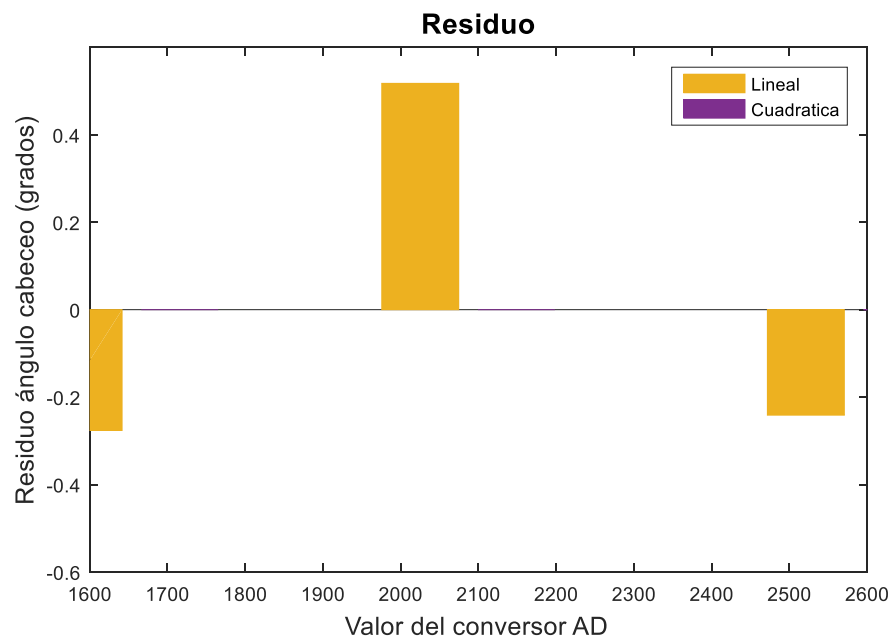


Figura 36. Residuos ecuaciones de cabeceo.

En la ecuación (15) se muestra la función seleccionada para el sensor de cabeceo donde LC denota la lectura del conversor.

$$ACabec_C = -3.6212e^{-0.6} * LC^2 + 0.086064 * LC - 163.84 \quad (15)$$

Caracterización de sensor de viaje.

De igual manera, para la caracterización del sensor de viaje se toma la lectura análoga de cuatro puntos dentro del rango de movimiento para este ángulo tal como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Datos de identificación de sensor de viaje.

Angulo Viaje	Valor Digital
-90	380
0	1460
90	2545
180	3625

Con los datos se realiza la gráfica ángulo viaje vs valor digital y se obtiene la ecuación que caracteriza al sensor ver Figura 37.

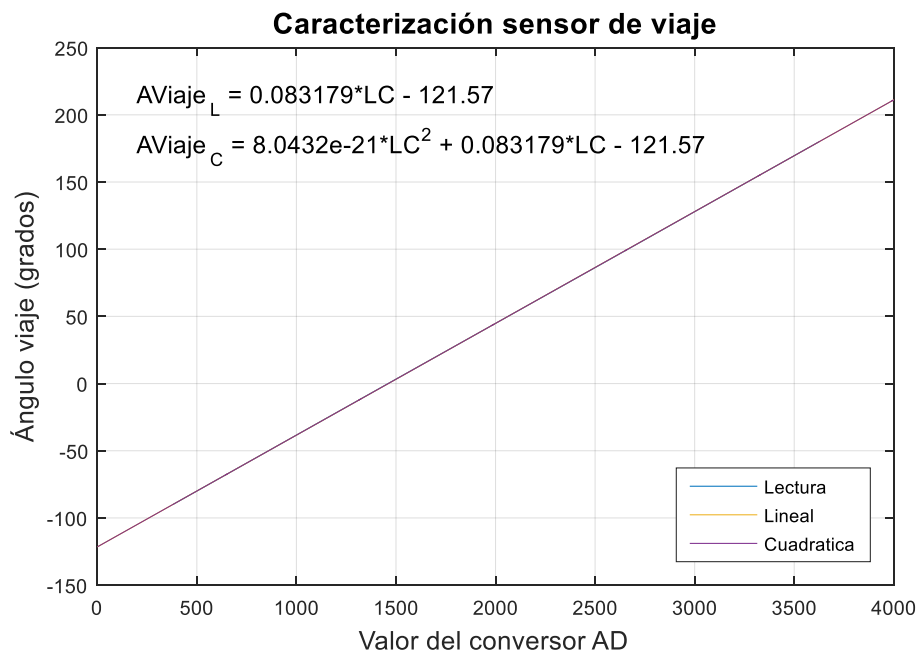


Figura 37. Caracterización sensor viaje.

Por medio de Matlab se determina la ecuación que más se aproxima a los datos reales comparando una ecuación lineal con una cuadrática; en la Figura 38 se muestra el residuo de las dos ecuaciones comparadas, en este caso se observa que ambas ecuaciones tienen un error máximo de aproximadamente 0.125 grados, con esto se selecciona la ecuación lineal ya que operativamente consume menos recursos a la hora de hacer la conversión.

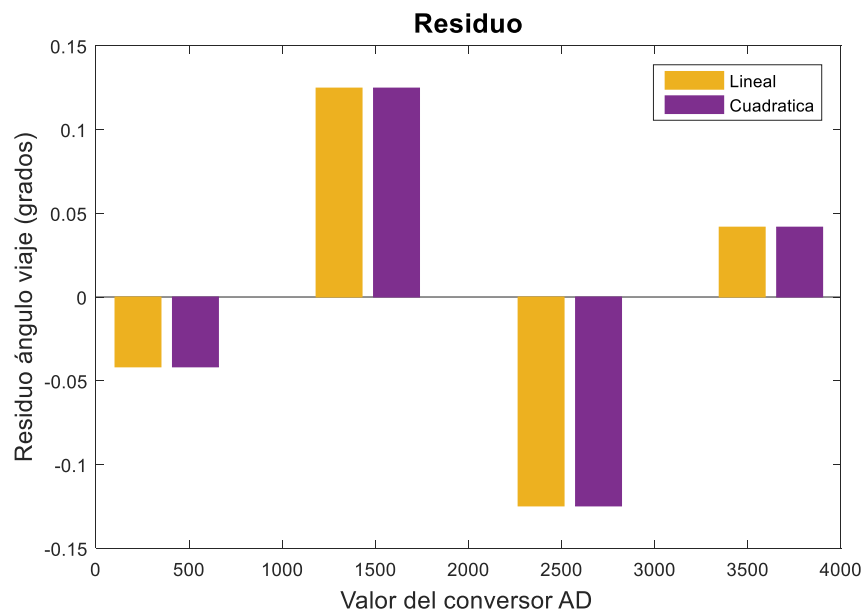


Figura 38. Residuos ecuaciones de viaje

En la ecuación (16) se muestra la función seleccionada para el sensor de viaje donde LC denota la lectura del conversor.

$$AViaje_L = 0.083179 * LC - 121.57 \quad (16)$$

1.3.1.3 Ajuste de offset control de viaje

Fue necesario hacer un ajuste de offset para el control del ángulo de viaje, dado a que se observó en pruebas realizadas que el sistema no llegaba a su punto de consigna al hacer una variación en este. Esto ocurre por las características del sensor, ya que para la lectura de este ángulo se utilizó un potenciómetro lineal de una vuelta sin tope con una zona muerta de ± 5 grados causando un desfase en la lectura del ángulo.

La prueba realizada para esta corrección se basa en dar un punto de consigna en viaje y sacar la diferencia entre el ángulo leído y el punto de consigna, con estos datos se obtiene la curva y su ecuación la cual hace una corrección digital de lo que está leyendo el sensor forzando así el helicóptero a la posición deseada. En la Figura 39 se observa la curva obtenida y su ecuación polinómica de orden diez.

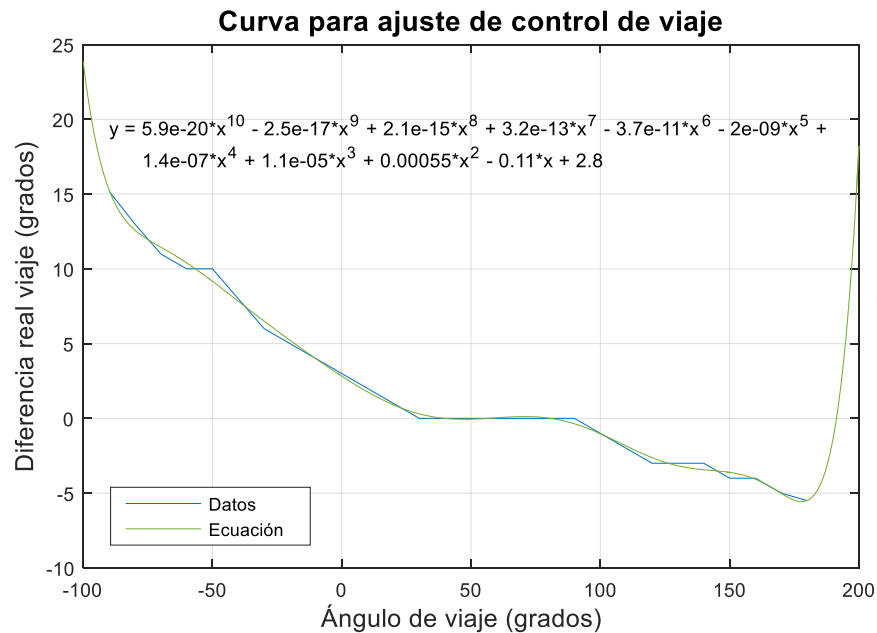


Figura 39. Curva para ajuste de control de viaje

En la Figura 40 se observa el residuo de diferentes aproximaciones que se analizaron, ecuación cuadrática, polinómica de orden 6, 8 y 10, donde se observa que dadas las necesidades del controlador es necesario que el sistema llegue a su punto de consigna con un error mínimo y es por esto que se selecciona la ecuación polinómica de orden 10, la cual tiene un error máximo de 0.8 grados dentro del rango que tiene el helicóptero para moverse en el ángulo de viaje, en la Figura 41 se observa el residuo para la ecuación polinómica de orden 10.

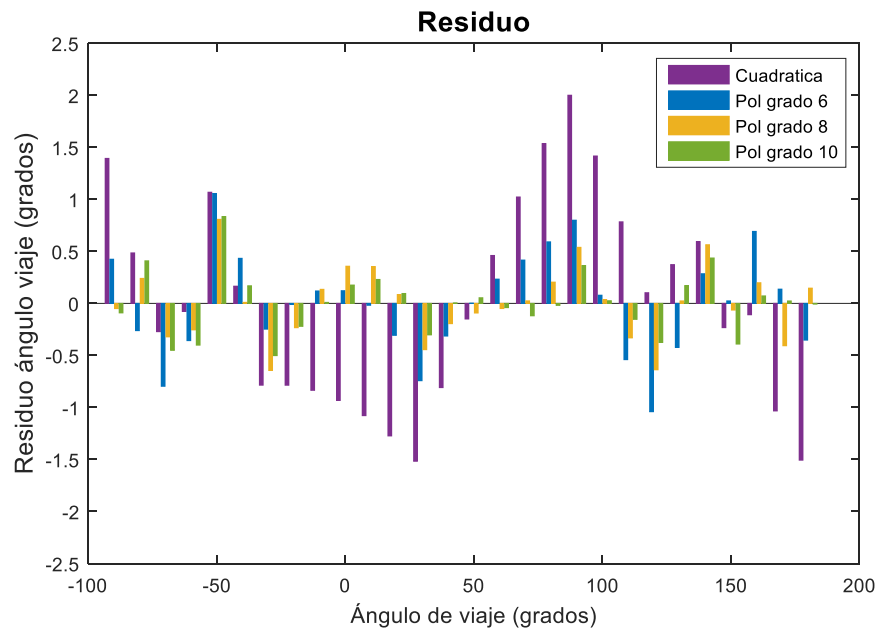


Figura 40. Residuos de ecuaciones de viajes

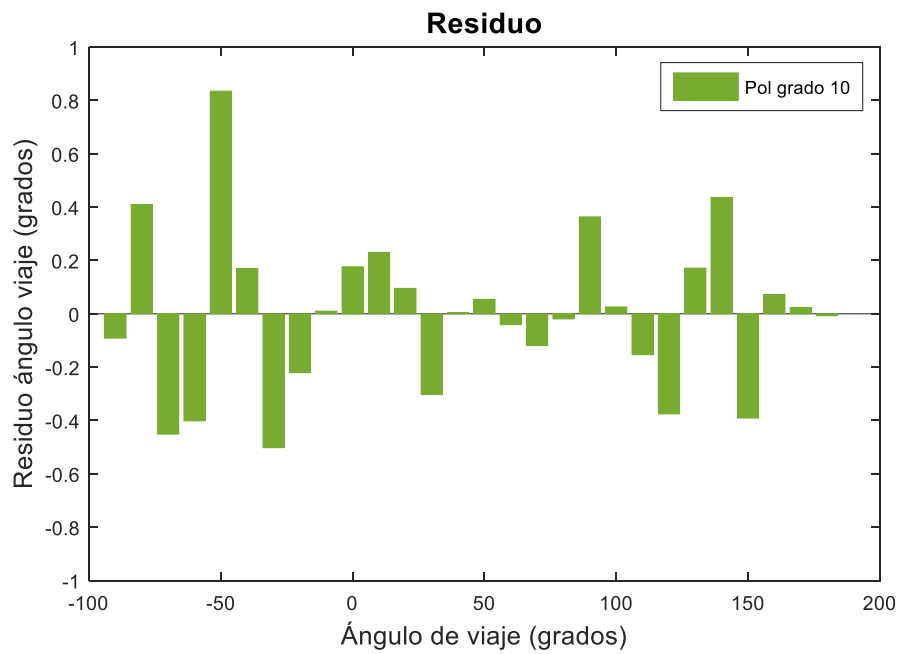


Figura 41. Residuo de ecuación polinómica de grado 10 de viaje.

La ecuación (17) se representa con la letra H en el diagrama de bloques tal como se muestra en la Figura 42.

$$\tau' = 5.9e^{-20}\tau^{10} - 2.5e^{-17}\tau^9 + 2.1e^{-15}\tau^8 + 3.2e^{-13}\tau^7 - 3.7e^{-11}\tau^6 - 2e^{-09}\tau^5 + 1.4e^{-07}\tau^4 + 1.1e^{-05}\tau^3 + 0.00055\tau^2 - 0.11\tau + 2.8 \quad (17)$$

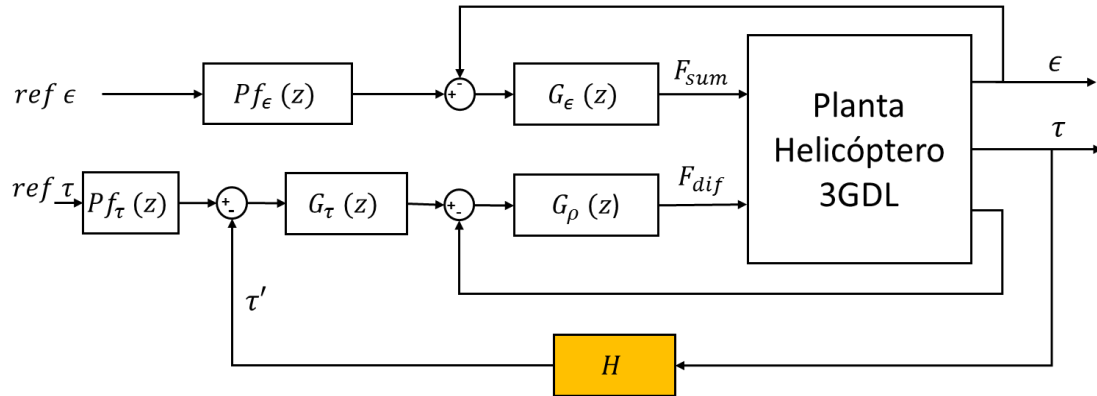


Figura 42. Diagrama de bloques implementación del ajuste de offset del control de viaje

1.3.2 Motores

Para escoger los motores se tuvo en cuenta los resultados de las simulaciones del sistema sección 2.1.7 y 2.1.8 que nos indicaban los rangos de operación de los mismos; los parámetros que se tuvieron en cuenta para escoger los motores fueron los siguientes:

- Fuerza de empuje total de 5 N (Tomando un Factor de sobredimensionado del 25%)
- Alimentación 8.1V a 10 A Max.

Teniendo en cuenta estos parámetros se seleccionaron un par de motores Brushless Turnigy D2826-10 1400kv. Las características de este motor se pueden ver en la siguiente Tabla 8.

Tabla 8. Características de motores Brushless Turnigy de la serie D2826.

D2826 (2212) SERIES OUTRUNNER BRUSHLESS MOTOR							
Model	Volts	KV(rpm/v)	Max pull	Weight	Motor size	Shaft size	ESC(A)
D2826-6	7.4-11.1V	2200	960g	50g	Φ27.7x26mm	Φ3.175x41mm	40A
D2826-10		1400	780g				
D2826-13		1000	660g				
D2826-15		930	645g				

Para utilizar estos motores se requiere un Esc (*Electronic Speed Controller*) de 40A según la Tabla 8. Éste se encarga de regular la velocidad de los motores Brushless. [4]

1.3.2.1 Caracterización motores

La prueba para obtener la ecuación característica de los motores se explicó en la sección 1.1.2, donde se obtuvo la fuerza generada por el motor dada una variación en el PWM. Es importante aclarar que ambos motores y ESC son iguales, sin embargo, la prueba se hizo para ambos y se observó que la ecuación obtenida es la misma para ambos.

En la Figura 43 se observan los modelos lineales y cuadráticos para la fuerza vs PWM enviado a los motores, donde se ve que estos tienen una zona de trabajo comprendida en un rango entre 70 y 103 del rango total el cual es de 0-255, es decir el motor comienza a girar en el valor 70 de PWM y en 103 llega a su valor máximo.

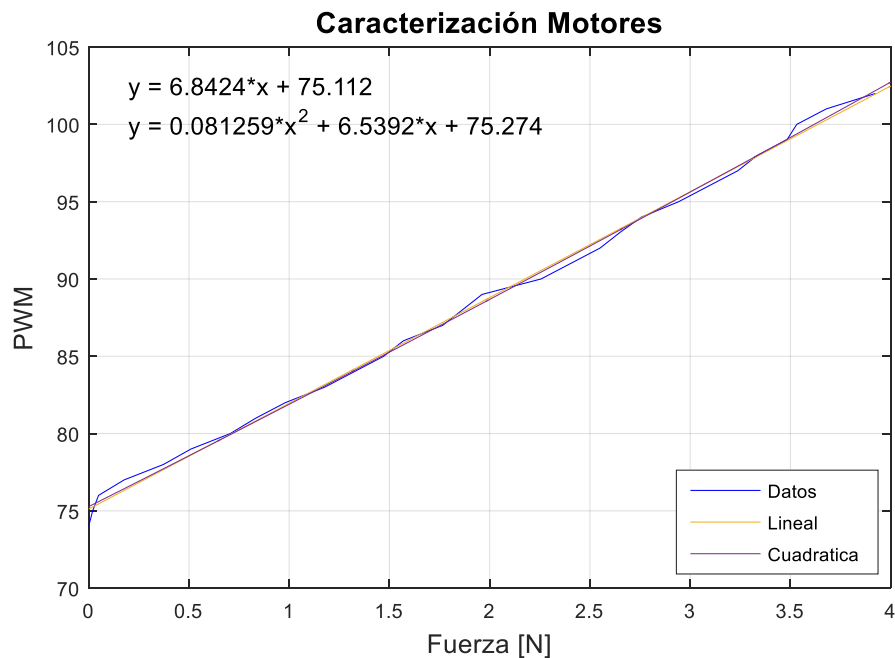


Figura 43. Caracterización motores del helicóptero.

De los dos modelos obtenidos se hace un análisis de residuos para ambas ecuaciones y así seleccionar la ecuación que más se aproxime a los datos reales. En la Figura 44 se observan los residuos para el modelo lineal y cuadrático.

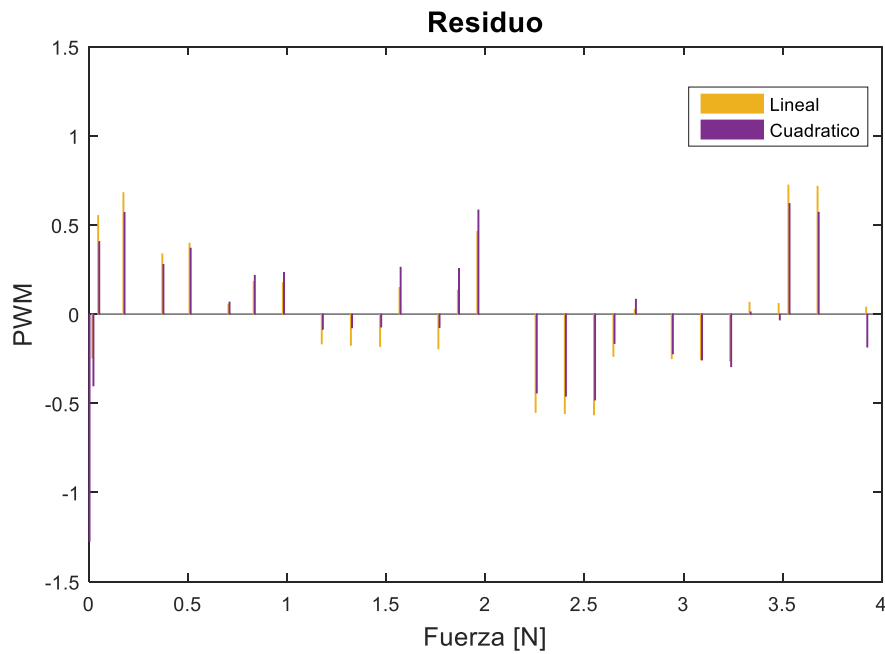


Figura 44. Residuos ecuaciones para los motores.

Según lo anterior se selecciona la ecuación (19) ya que esta tiene una mejor aproximación a los datos reales dentro del rango comparado. Las ecuaciones comparadas son ecuación (18) y ecuación (19).

$$y_L = 6.8424x + 75.112 \quad (18)$$

$$y_c = 0.081259x^2 + 6.5392x + 75.274 \quad (19)$$

1.3.3 Sistema de adquisición de datos.

Para el sistema de adquisición de datos se realizó una comparación de microcontroladores de la familia Arduino como se muestra en la Tabla 9.

Tabla 9. Comparativa de la familia de arduino.

Característica de Arduino	UNO	Mega 2560	Leonardo	DUE
Tipo de microcontrolador	Atmega 328	Atmega 2560	Atmega 32U4	AT91SAM3X8E
Velocidad de reloj	16MHz	16MHz	16MHz	84MHz
Pines digitales	14	54	20	54
Entradas analógicas	6	16	12	12
Salidas analógicas	0	0	0	2(DAC)
Memoria de programa (Flash)	32kb	256kb	32kb	512kb
Memoria de datos (SRAM)	2kb	8kb	2.5kb	96kb
Memoria de auxiliar (EEPROM)	1kb	4kb	1kb	0kb
Bits de procesamiento	8bits	8 bits	8bits	32 bits
Convertor análogo/digital	8 bits	8 bits	8bits	12 bits

Luego de analizar las características de cada microcontrolador se concluye que el microcontrolador del Arduino DUE por la velocidad de reloj y el convertor A/D de 12 bits que permite utilizar una resolución de 4096 es el ideal para esta aplicación.

1.3.4 Circuitos.

Se diseñaron dos circuitos, el primero fue diseñado para concentrar los dos sensores, señales de motores y su alimentación de la parte superior del helicóptero y el segundo se diseñó para centralizar los cables del circuito 1, del sensor de viaje y de potencia de los motores, esto se puede apreciar claramente en la Figura 45, de esta forma se facilita la conexión con el sistema de adquisición de datos.

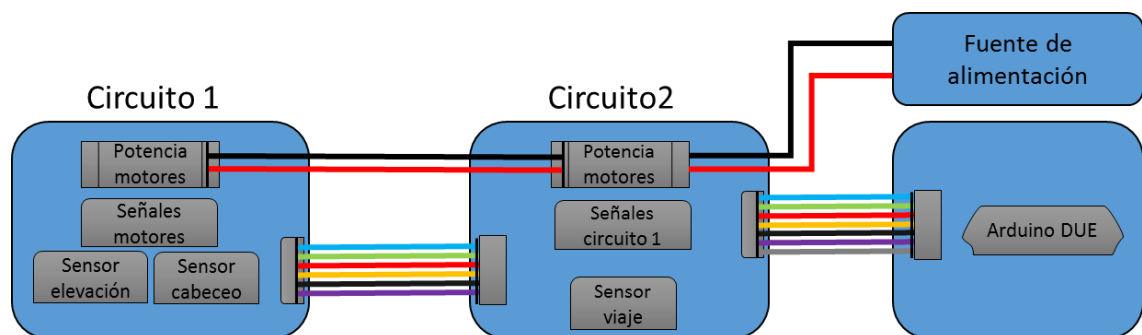


Figura 45. Esquema de conexiones.

Estos circuitos se diseñaron e hicieron en Proteus ISIS y se pasaron a la herramienta ARES de Proteus, la cual permite agregar los componentes utilizados con las medidas reales de éstos para ubicarlos en la PCB y definir sus rutas como se observa en la Figura 46.

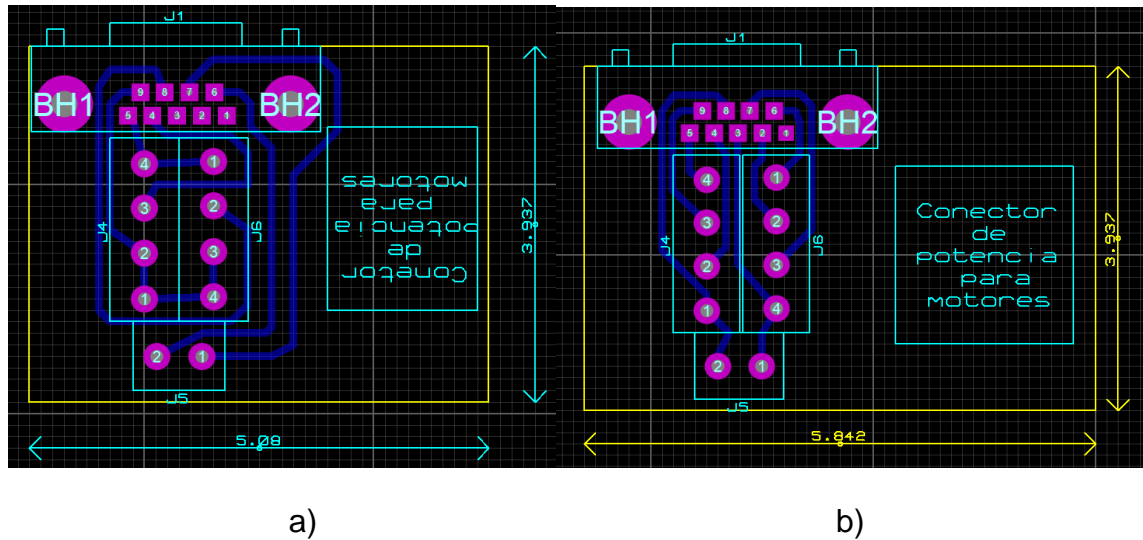


Figura 46. En la imagen a) se observa el circuito. En la imagen b) se muestra el circuito 2.

Para este caso se tomó la medida de una baquela virgen de 5x4 cm, otra de 6x4 cm y se realizó una visualización 3d del circuito. Ver Figura 47.

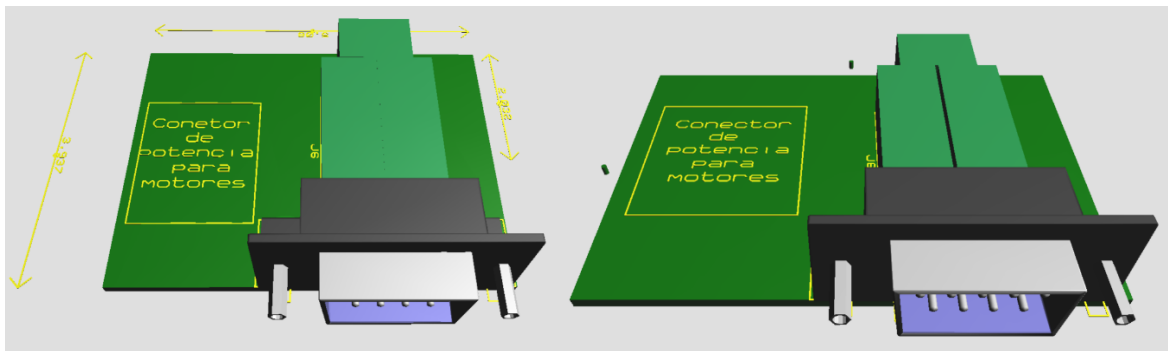


Figura 47. Visualización 3d de los circuitos realizados.

El cálculo del espesor de los caminos se hizo de acuerdo a [5] donde los parámetros de diseño son la corriente de trabajo y espesor de la capa de cobre en la baquela. De acuerdo con lo anterior la corriente de trabajo máxima es la que puede entregar el Arduino DUE siendo esta 800mA y el espesor mínimo de cobre en la baquela es

1 oz/ft^2 . En la Tabla 10 se muestran las condiciones de diseño y resultados obtenidos para el cálculo del espesor del camino.

Tabla 10. Condiciones de diseño y resultados.

CONDICIONES DE DISEÑO		
Parámetro	Nominal	Fs = 2.75
Corriente [A]	0.8	2.22
Espesor de capa [oz/ft^2]	1	
RESULTADOS		
Espesor camino [mm]	0.221	0.902

Cabe aclarar que los cables de potencia de los motores, dado a que estos manejarán un rango de hasta 10 A se acomodaron usando regletas de potencia de 15 A. Se evitó manejar esta potencia en la baqueta para evitar cualquier daño en ésta, por levantamiento de caminos, dada la corriente de trabajo que se tendría; para la conexión de la regleta se utiliza cable calibre 14 para la alimentación a cada motor y en la línea que llevaría los 10 A se utilizó uno calibre 10.

1.4 Prototipo final.

1.4.1 Modelo final en software CAD y modelo final en físico.

En la Figura 48 se muestra el modelo final del helicóptero 3GDL después de tener en cuenta todos los requerimientos físicos necesarios para el funcionamiento correcto y se muestra el resultado del prototipo.

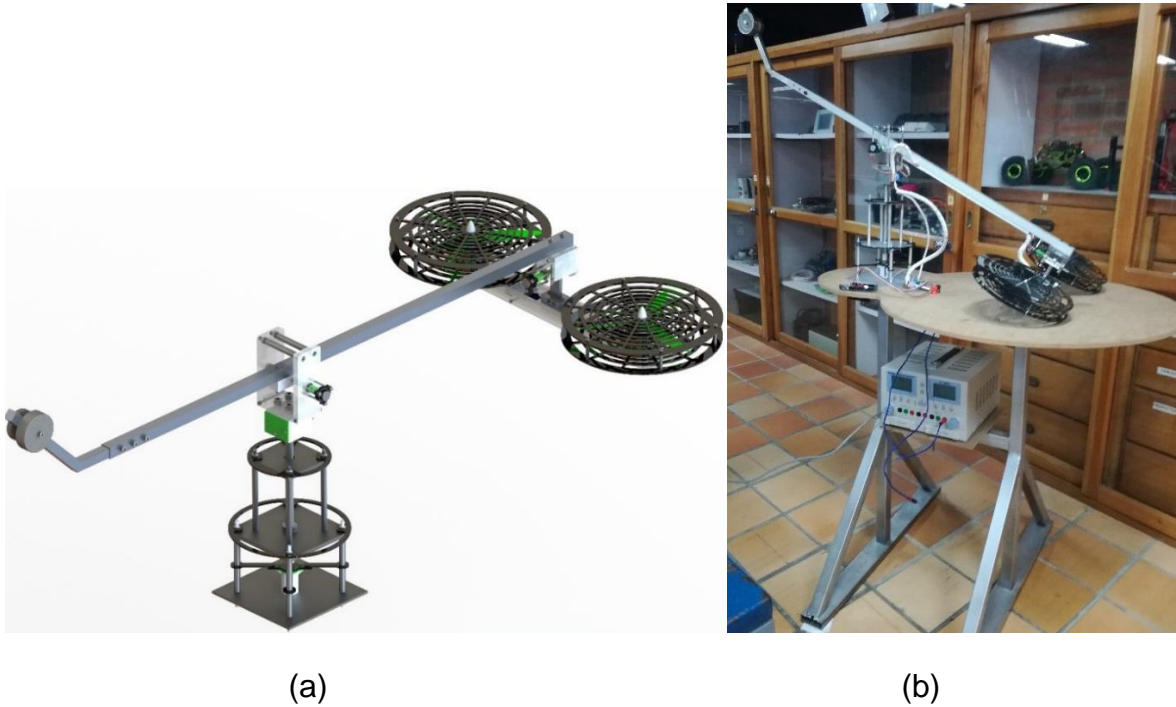


Figura 48. En la imagen (a) se observa el modelo final en software CAD y en la imagen (b) se observa el prototipo finalizado.

CAPÍTULO 2: CONTROL

2.1 Control clásico PID.

El controlador PID es con frecuencia el más usado y uno de los que ofrecen mayor precisión dentro de la regulación automática. El controlador recibe su nombre, ya que es una combinación de una acción de control proporcional, una acción de control integral y una acción de control derivativa; por lo que se denomina acción de control proporcional – integral – derivativo o PID. El algoritmo del cálculo del control PID requiere de tres parámetros distintos: el proporcional, el integral y el derivativo. En la Figura 49 se muestra el diagrama en lazo cerrado de este controlador en discreta, siendo T_s el periodo de muestreo.

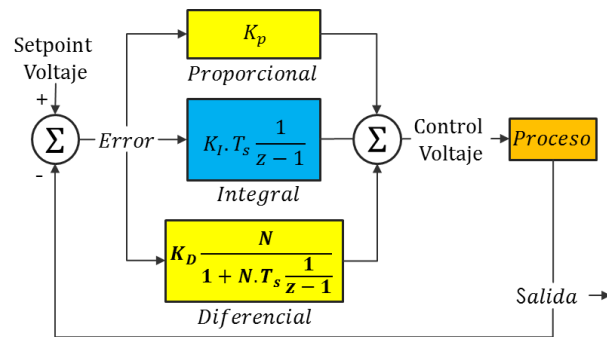


Figura 49. Diagrama en lazo cerrado controlador PID discreto

El PID tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La acción proporcional produce una señal de control proporcional a la señal de error. La acción integral proporciona una corrección para compensar las perturbaciones y mantener la variable controlada en el punto de consigna. La acción derivativa anticipa el efecto de la acción proporcional para estabilizar más rápidamente la variable controlada después de cualquier perturbación. [6]

2.1.1 Estrategia de control en cascada.

La estrategia de control en cascada es un sistema de control más elaborado, la cual consta de dos lazos de realimentación, uno de los cuales es interno al otro. En este sistema (helicóptero 3GDL) es necesario utilizar un control en cascada para la regulación de los tres ángulos (Elevación, Cabeceo y Viaje) teniendo en cuenta que el sistema es subactuado (más grados de libertad que número de actuadores).

Teniendo en cuenta lo anterior, la estrategia de control para el helicóptero 3GDL se basa en un lazo directo para el ángulo de elevación, el cual recibe la señal de referencia para este ángulo y la salida es la suma de la fuerza de los motores; por otro lado, se diseña un control en cascada para la regulación de los ángulos Cabeceo y Viaje, recibiendo como señal de referencia variaciones en viaje, y a su vez la salida de este controlador es la señal de referencia para el control del ángulo de cabeceo y su salida es la diferencia de las fuerzas de los motores. En apartados posteriores se explican las estrategias en cascada para PID de un grado y dos grados de libertad, y lo correspondiente a la suma y diferencia de las fuerzas como señal de control.

2.1.1.1 Estrategia de control en cascada PID (1GDL).

El diseño de la estrategia de control en cascada se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 50, donde se observa el lazo cerrado del controlador PID de un grado de libertad (1GDL) para la regulación de los ángulos de elevación, Viaje y Cabeceo. Donde ref_ϵ (referencia ángulo de elevación) y ref_τ (referencia ángulo Viaje) son las entradas del sistema. La ecuación (20) representa la estructura de un controlador PID de un grado de libertad, los parámetros son definidos en la Tabla 11.

$$C1(z) = P + I.T_s \frac{1}{z-1} + D \frac{N}{1+N.T_s \frac{1}{z-1}} \quad (20)$$

La ecuación (20) es la utilizada en el diagrama de bloques del PID en cascada de un grado de libertad de la Figura 50.

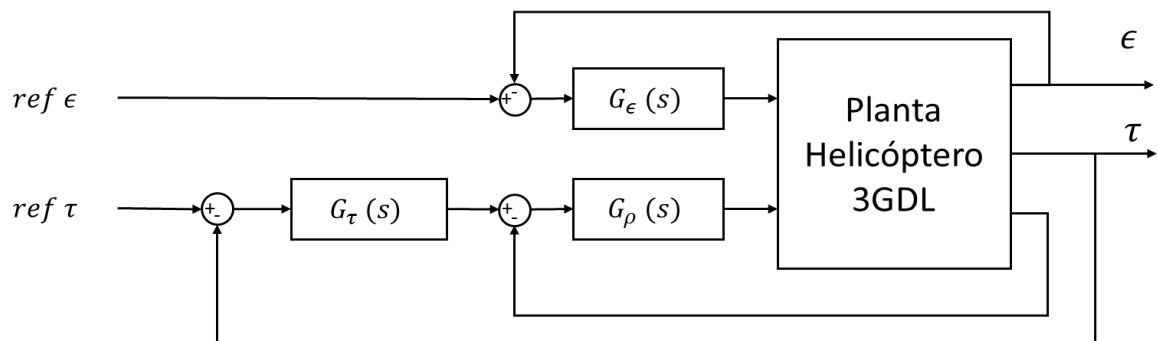


Figura 50. Diagrama de bloques estrategia de control en cascada PID (1GDL).

2.1.1.2 Estrategia de control en cascada PID (2GDL)

Por lo general, la mayoría de controladores de los lazos de control realimentado, son sintonizados para el rechazo de las perturbaciones o bien para un buen seguimiento del cambio en la señal de consigna, siendo necesaria la elección de uno de los dos, obteniendo, como regla general, un mal rendimiento en seguimiento cuando se utiliza una sintonización para regulación y viceversa.

La formulación de dos grados de libertad (2GDL) tiene como objetivo tratar de satisfacer estas dos condiciones. El segundo grado de libertad proviene de la relativa flexibilidad obtenida a la hora de diseñar un sistema de control, en lo que se refiere a la posibilidad de procesar de manera independiente las señales de referencia y salida. [7]

En el diagrama de bloques en la Figura 51 se muestra la estrategia de control en cascada con controladores PID de dos grados de libertad (2GDL) para la regulación de los ángulos de elevación, Viaje y Cabeceo. La ecuación (21) representa la estructura de un controlador de dos grados de libertad. Los parámetros de dicha ecuación se encuentran definidos en la Tabla 11.

$$C2(z) = P(b.r - y) + I.T_s \frac{1}{(z-1)} (r - y) + D \frac{N}{\left(1 + N.T_s \frac{1}{z-1}\right)} (c.r - y) \quad (21)$$

La ecuación (21) es la utilizada en el diagrama de bloques del PID en cascada de dos grado de libertad de la Figura 51.

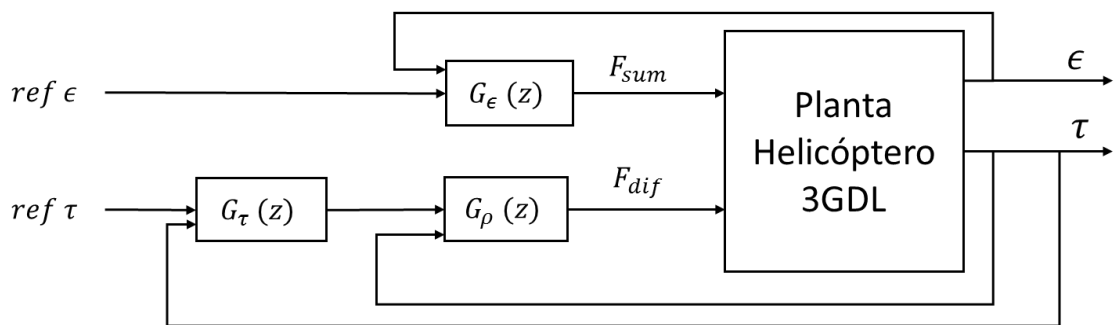


Figura 51. Diagrama de bloques estrategia de control en cascada PID (2GDL).

Tabla 11. Descripción de parámetros controladores en cascada.

PARAMETRO	DESCRIPCION
P	Cte. Proporcional
I	Cte. Integral
D	Cte. Derivativa
N	Coficiente de filtro
b	Peso de punto de referencia
r	Error
y	Salida
c	Peso de punto de referencia
T_s	Periodo de muestreo

2.1.2 Espacio de estados del sistema.

Siguiendo las ecuaciones que gobiernan el sistema mostradas en la sección 1.1.3 y los valores de los parámetros de la Tabla 3, se desarrolla el modelo en espacio de estados. Dado a que el sistema es altamente no lineal el modelo espacio de estados sigue la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x) \end{aligned} \tag{22}$$

Donde x denota el vector de estados, u el vector de entradas y y el vector de salidas. Se selecciona como variable de estados los ángulos y sus correspondientes velocidades angulares:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \\ x_2 &= \dot{\rho} \\ x_3 &= \epsilon \\ x_4 &= \dot{\epsilon} \\ x_5 &= \tau \\ x_6 &= \dot{\tau} \end{aligned} \tag{23}$$

Al elegir las variables de estado de acuerdo con (23) se obtiene el siguiente modelo de espacio de estados:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \dot{\rho} = x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \ddot{\rho} = \frac{F_{dif}L_H - m_H g(d - c) \sin x_1 \cos x_3 - k_{d\rho}x_2}{I_\rho} \\
 \dot{x}_3 &= \dot{\epsilon} = x_4 \\
 \dot{x}_4 &= \ddot{\epsilon} = \frac{F_{sum}L_M \cos x_1 + M_g(x_3) - k_{de}x_4 - (I_\tau - I_\rho)x_6^2 \cos x_3 \sin x_3}{I_\epsilon} \\
 \dot{x}_5 &= \dot{t} = x_6 \\
 \dot{x}_6 &= \ddot{t} = \frac{F_{sum}L_M \sin x_1 \cos x_3 - k_{d\tau}x_6}{I_\tau(x_3)}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Donde:

$$F_{sum} = F_F + F_B \tag{25}$$

$$F_{dif} = F_B - F_F \tag{26}$$

Los términos $M_g(x_3)$ y $I_\tau(x_3)$ son los correspondientes a las ecuaciones (10) y (9) reemplazando los puntos de equilibrio de los estados.

2.1.3 Puntos de equilibrio.

Para continuar con la síntesis de control, el modelo de espacio de estados de la ecuación (24) debe ser linealizado alrededor de los puntos de equilibrio. Un punto de equilibrio es un punto que cumple con $f(x_0, u_0) = 0$. Para resolver esto, igualamos $\dot{x} = 0$ y resolvemos para los estados y las entradas (superíndice 0 indica valores en estado estacionario):

$$\begin{aligned}
 0 &= x_2^0 \\
 0 &= \frac{F_{dif}^0 L_H - m_H g(d - c) \sin x_1^0 \cos x_3^0 - k_{d\rho} x_2^0}{I_\rho} \\
 0 &= x_4^0
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$0 = \frac{F_{sum}^0 L_M \cos x_1^0 + M_g(x_3^0) - k_{de} x_4^0 - (I_\tau - I_\rho)(x_6^0)^2 \cos x_3^0 \sin x_3^0}{I_\epsilon}$$

$$0 = x_6^0$$

$$0 = \frac{F_{sum}^0 L_M \sin x_1^0 \cos x_3^0 - k_{d\tau} x_6^0}{I_\tau(x_3^0)}$$

Remplazando los estados $x_2^0 = x_4^0 = x_6^0 = 0$, se obtiene el sistema de ecuaciones (28) a resolver:

$$\begin{cases} 0 = \frac{F_{dif}^0 L_H - m_H g(d - c) \sin x_1^0 \cos x_3^0}{I_\rho} \\ 0 = \frac{F_{sum}^0 L_M \cos x_1^0 + M_g(x_3^0)}{I_\epsilon} \\ 0 = \frac{F_{sum}^0 L_M \sin x_1^0 \cos x_3^0}{I_\tau(x_3^0)} \end{cases} \quad (28)$$

Este es un sistema con tres ecuaciones y cuatro incógnitas lo que implica que existe una cantidad infinita de puntos de equilibrio. Para resolver este sistema, una de las incógnitas debe ser supuesta.

Al analizar la tercera ecuación en el sistema (28) se puede ver que hay tres posibilidades para cumplir la ecuación. Se puede elegir $F_{sum}^0 = 0$, $x_1^0 = 0$ o $x_3^0 = 0$. La única opción de interés es elegir $x_1^0 = 0$. Remplazando en la primera y segunda ecuación en el sistema (28) da:

$$0 = \frac{F_{dif}^0 L_H}{I_\rho} \quad (29)$$

$$0 = \frac{F_{sum}^0 L_M + M_g(x_3^0)}{I_\epsilon} \quad (30)$$

De forma similar al sistema (28), este sistema tiene dos ecuaciones con tres incógnitas con una cantidad infinita de soluciones. Mirando la ecuación (29) da $F_{dif}^0 = 0$.

La ecuación (30) es de gran importancia y responde a la pregunta: ¿Qué empuje se requiere para mantener un ángulo de elevación específico? Resolviendo para F_{sum}^0 da:

$$F_{sum}^0 = \frac{M_g(x_3^0)}{L_M} \quad (31)$$

De la ecuación (31) es sólo cuestión de elegir un ángulo de elevación para la linealización. Seleccionando $x_3^0 = 0$ da:

$$F_{sum}^0 = \frac{M_g(0)}{L_M} \quad (32)$$

Haciendo el cálculo de la fuerza requerida para mantener el ángulo de elevación en cero se obtiene $F_{sum}^0 = 2.2021\text{N}$.

Finalmente, los puntos de equilibrio son $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = x_5^0 = x_6^0 = 0$. Vale la pena señalar que el estado x_5 (ángulo de viaje) no aparece en ninguna parte de las ecuaciones anteriores, lo que significa que su valor no tiene efecto alguno.

2.1.4 Linealización del modelo en espacio de estados.

Siguiendo la identificación y selección de los puntos de equilibrio es posible linealizar el modelo en espacio de estados de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (33)$$

Basado en la aproximación por series de Taylor, se hace la linealización alrededor de los puntos de equilibrio del modelo en espacio de estados, hallando las matrices A, B, C, D .

$$A = \frac{df}{dx}(x^0, u^0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_H g(c-d)}{I_\rho} & -\frac{k_{d\rho}}{I_\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{N}}{I_\epsilon} & -\frac{k_{d\epsilon}}{I_\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{L_M F_{sum}}{I_{\tau\epsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{d\tau}}{I_{\tau\epsilon}} \end{bmatrix}$$

Donde, $\tilde{N} = (m_W g(h + L_{W2} \sin(\theta)) - m_H g(d - h))$.

$$B = \frac{df}{du}(x^0, u^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_H}{I_\rho} \\ 0 & 0 \\ \frac{L_M}{I_\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C = \frac{dy}{dx}(x^0, u^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{dy}{du}(x^0, u^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El modelo en espacio de estados linealizado según (33) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(c-d)m_H g}{I_\rho} & -\frac{k_{d\rho}}{I_\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N} & -\frac{k_{d\epsilon}}{I_\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_\epsilon} & -\frac{k_{d\epsilon}}{I_\epsilon} & 0 & 0 \\ -\frac{L_M F_{sum}}{I_{\tau\epsilon}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{d\tau}}{I_{\tau\epsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_H}{I_\rho} \\ 0 & 0 \\ \frac{L_M}{I_\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{sum} \\ F_{dif} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Donde, $\tilde{N} = (m_W g(h + L_{W2} \sin(\theta)) - m_H g(d - h))$.

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Reemplazando los parámetros de la sección 1.2.2 se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17.16 & -1.106 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.521 & -1.549 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.82 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7177 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3.963 \\ 0 & 0 \\ 0.8945 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Modelo lineal en espacio de estados en discreto:

El modelo lineal en espacio de estados en tiempo discreto se hizo definiendo un periodo de muestreo T_m , el cual se seleccionó analizando el diagrama de Bode del sistema, donde la mayor frecuencia fue de 6.62 Hz, dando éste un periodo de

muestreo $T_m = 1/(2 * F) = 0.075 \text{ seg}$, sin embargo, este se fijó a conveniencia en 0.01 seg , dado a que experimentalmente se encontró que los controladores robustos bajo la técnica QFT explicada en el apartado 2.2 requerían un periodo de muestreo más bajo, dejando este valor para ambas estrategias de control.

Teniendo en cuenta lo anterior se analizó la variación de los ángulos teórica dado el sistema de adquisición de datos, el cual tiene un conversor análogo digital de 12 bits dando así $\Delta \text{angulos} = 360/4096 = 0.08 \text{ grados}$, es decir cada 0.01 segundos se tomará una muestra, la cual puede variar 0.08 grados con respecto a la anterior.

El modelo en espacio de estados (37) se pasó al dominio discreto utilizando la herramienta c2d bajo el método 'zoh', dado el periodo de muestreo explicado anteriormente.

$$A = \begin{bmatrix} 0.9991 & 0.009942 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1706 & 0.9882 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.009923 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00517 & 0.9846 & 0 & 0 \\ 9.104e-05 & 3.028e-07 & 0 & 0 & 1 & 0.009964 \\ 0.01818 & 9.071e-05 & 0 & 0 & 0 & 0.9928 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.0001974 \\ 0 & 0.0394 \\ 4.449e-05 & 0 \\ 0.008876 & 0 \\ 0 & 3.003e-09 \\ 0 & 1.2e-06 \end{bmatrix}$$

De los polos de la matriz de estados se observa que el sistema es estable, no presenta polos con magnitud mayor a 1 en el plano z.

$$\text{Polos} = \begin{cases} 1.0000 + 0.0000i \\ 0.9928 + 0.0000i \\ 0.9951 + 0.0000i \\ 0.9895 - 0.0000i \\ 0.9936 + 0.0408i \\ 0.9936 - 0.0408i \end{cases}$$

2.1.6 Comparación modelo lineal y no lineal.

En las figuras 52, 53 y 54 se muestran las gráficas correspondientes a la comparación del modelo no lineal y el modelo linealizado, donde se observa una similitud entre ambos modelos; sin embargo, en el modelo lineal correspondiente al ángulo de viaje se ve una desviación, donde se analiza según la ecuación (6), que el término de inercia $It(e)$ está en función del ángulo de elevación, términos que se eliminan a la hora de la linealización, introduciendo así un error entre ambos modelos.

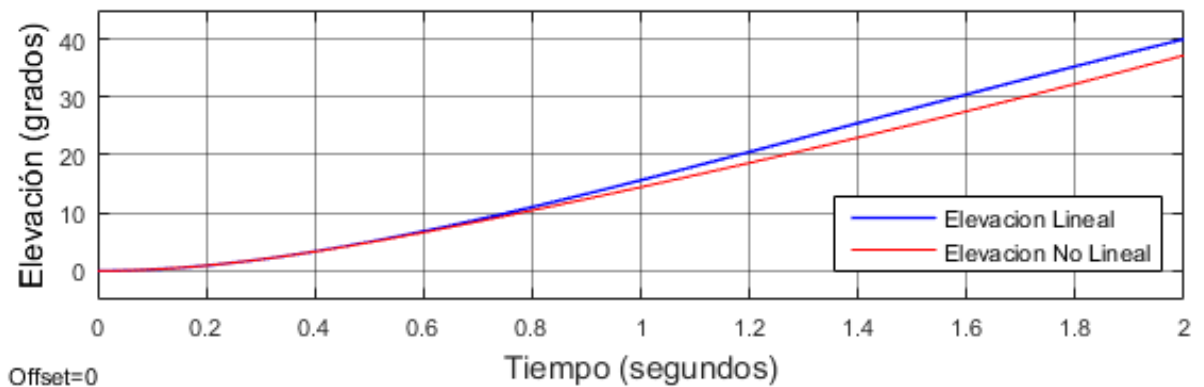


Figura 52. Comparación ángulo de elevación.

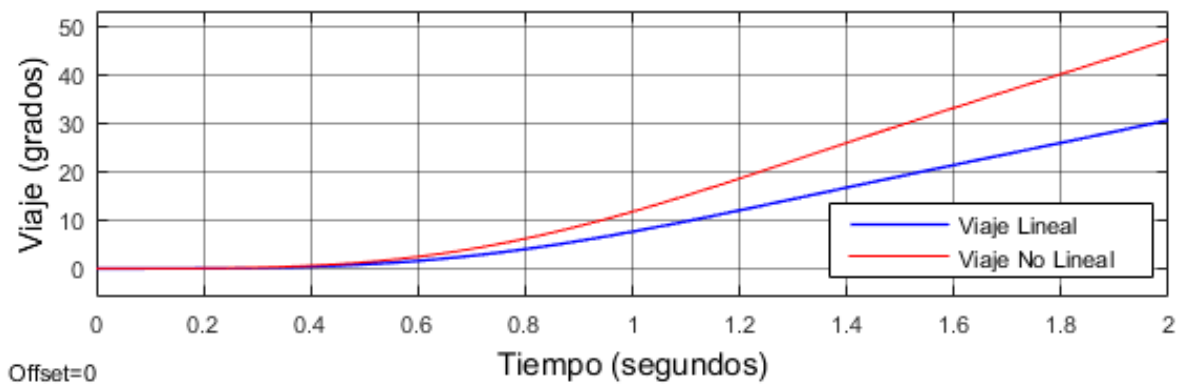


Figura 53. Comparación ángulo de viaje (Travel).

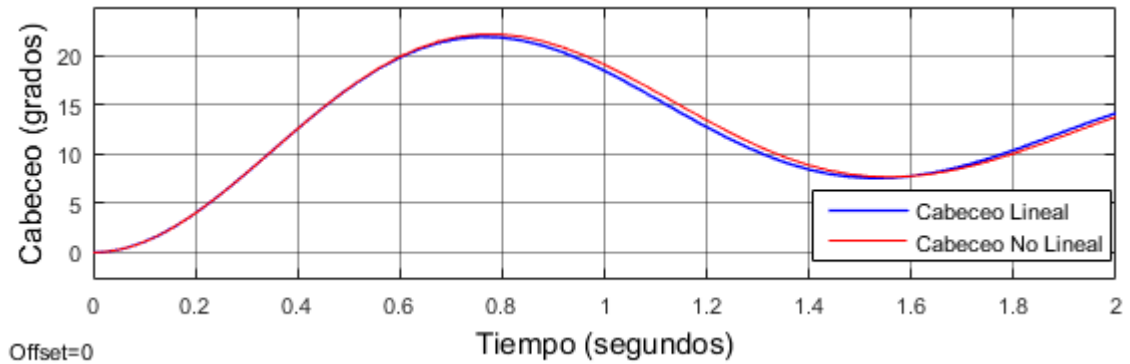


Figura 54. Comparación ángulo Cabeceo.

2.1.6.1 Limitaciones a la salida de los controladores.

Los motores tienen un rango de operación entre 0-4 N, el cual se determinó en la caracterización sección 1.3.2.1. Los controladores usan la suma y la diferencia de las fuerzas como señal de entrada cuando controlan el sistema. La relación entre la señal de entrada y la fuerza de cada motor se representa en las ecuaciones (39) y (40).

$$F_F = \frac{1}{2}(F_{sum} - F_{dif}) \quad (39)$$

$$F_B = \frac{1}{2}(F_{sum} + F_{dif}) \quad (40)$$

Dado a que los motores no producen fuerza negativa, las ecuaciones (39) y (40) arrojan las siguientes desigualdades:

$$0 \leq \frac{1}{2}(F_{sum} - F_{dif}) \leq 4N \quad (41)$$

$$0 \leq \frac{1}{2}(F_{sum} + F_{dif}) \leq 4N \quad (42)$$

Tomando como base el rango de 0-4N, se dejó el límite máximo en 3.5N equivalente a 357g aproximadamente, rango suficiente para contrarrestar los 145g correspondientes a la diferencia entre el peso del helicóptero y el contrapeso. La disminución de este rango también ayuda a que el control sea más suave.

2.1.7 Controladores PID (1GDL) en tiempo discreto.

De acuerdo al diagrama de bloques de la Figura 50 se implementó en Simulink el control en cascada en lazo cerrado de los controladores PID, ver Figura 55.

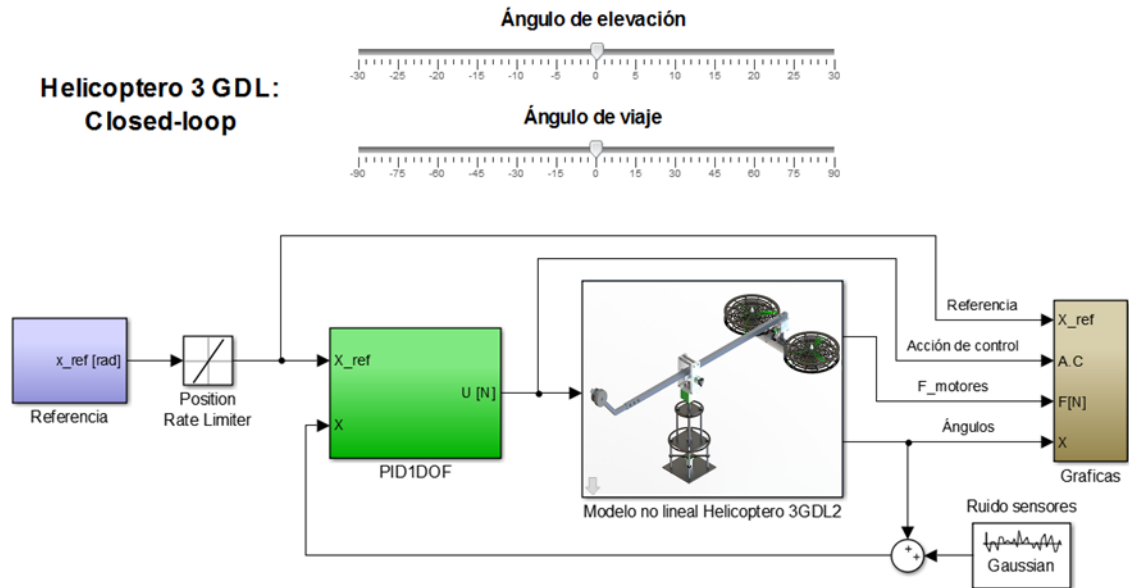


Figura 55. Diagrama en lazo cerrado helicóptero 3 GDL.

El bloque controlador, contiene los tres controladores en cascada, donde entra la señal de referencia y la señal de sensores (retroalimentación) y se obtiene las acciones de control F_{sum} y F_{diff} .

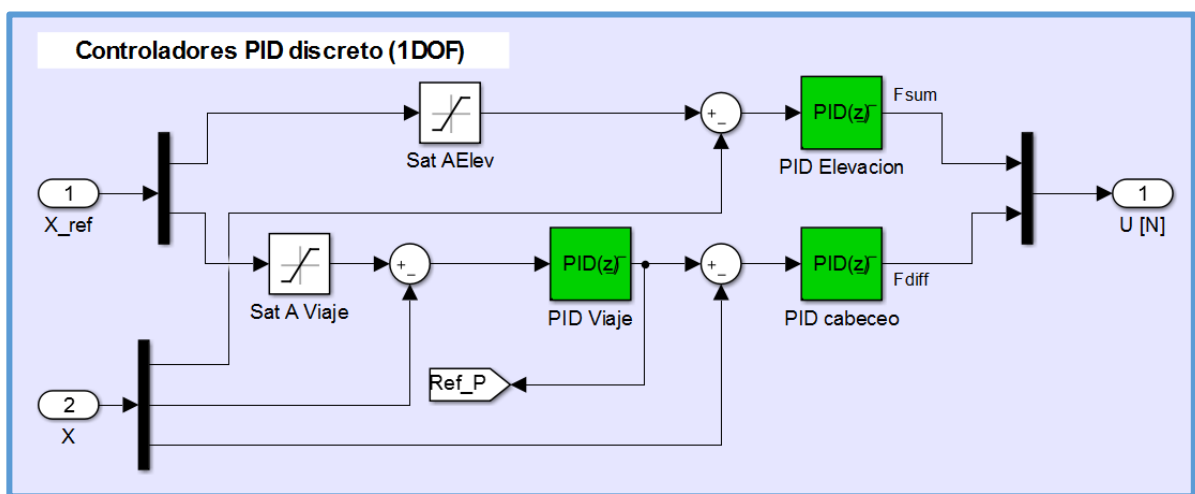


Figura 56. Diagrama de controladores PID en cascada.

Mediante la herramienta *Tunning* de Simulink para el bloque PID (1GDL) discreto dado el periodo de muestreo explicado en la sección 2.1.5 y teniendo en cuenta la expresión del PID discreto de un grado de libertad mostrada en la sección 2.1.1.1, se sintonizaron los controladores PID (1GDL) para los tres ángulos, dejando tiempos de establecimiento y sobrepasos acorde a la dinámica del sistema y teniendo en cuenta el esfuerzo de los actuadores (acción del control). También, en este bloque se define la ganancia *antiwindup* (Kb), bajo el método de *back-calculation*. En la Tabla 12 se definen las características de los controladores PID discretos (1GDL).

Tabla 12. Características controlador PID discreto (1GDL).

Parámetros del controlador	Ángulos		
	Elevación	Cabeceo	Viaje
P	0.076207	0.00087	0.3198
I	0.02585	0.02915	0.0017599
D	-0.053038	0	0.76413
N	15.5596	100	5.57
Kb	5	5	5
Características del controlador	Valor		
Tiempo de levantamiento (<i>seg</i>)	0.72	4.8	1.68
Tiempo de estabilización (<i>seg</i>)	1.74	8.52	14
Sobrepaso (%)	0.16	0	27

En la Figura 57 se muestra la respuesta transitoria de los tres ángulos dado un punto de referencia variable en el tiempo. En ésta se observa que el sistema llega al punto de consigna, teniendo en cuenta que la respuesta transitoria del ángulo cabeceo va a tender a su punto de equilibrio (0°) al alcanzar un punto de referencia dado en el ángulo Viaje. Estos controladores son implementados con el modelo no lineal con el fin de tener una simulación más cercana a lo que ocurre en el prototipo real.

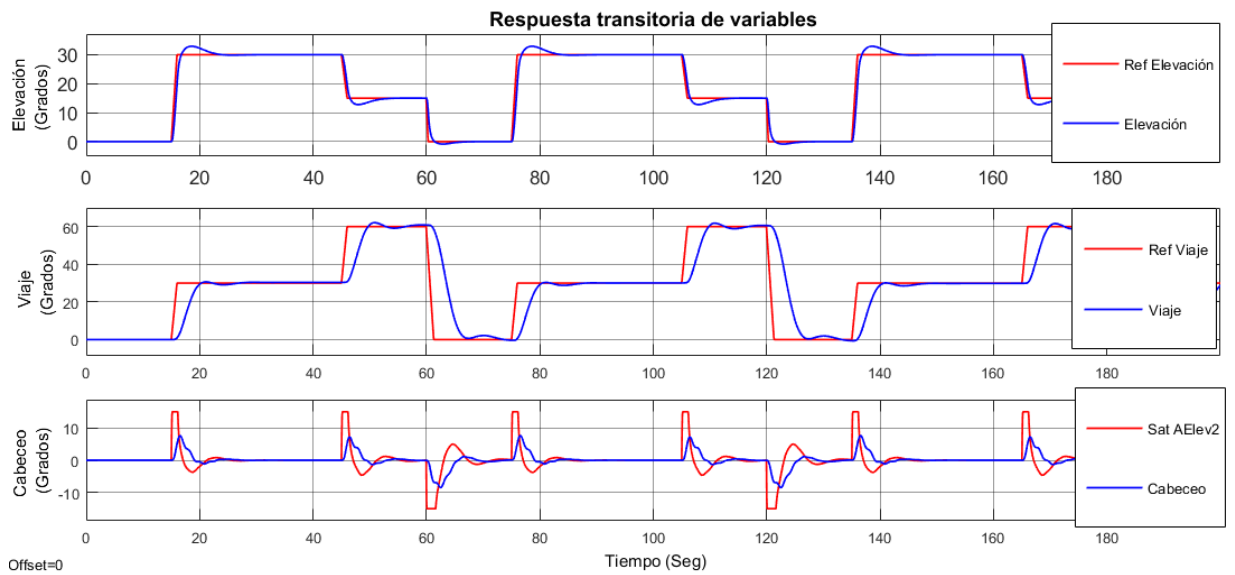


Figura 57. Respuesta transitoria ante diferentes entradas con controlador PID discreto (1GDL).

En la Figura 58 se muestra la acción de control para las salidas del sistema F_{sum} y F_{diff} . Para la simulación dio una saturación de acuerdo con la fuerza máxima que pueden entregar los motores.

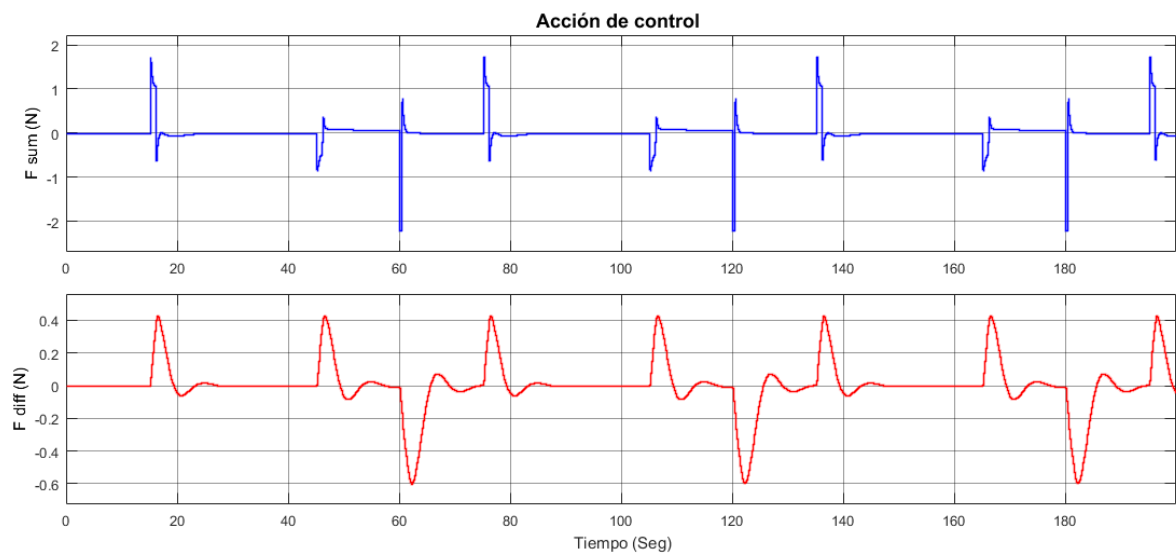


Figura 58. Acción de control para diferentes entradas de fuerzas.

En la Figura 59 se muestra la fuerza requerida en el motor 1 y motor 2, esto como resultado de resolver el sistema de ecuaciones (25) y (26).

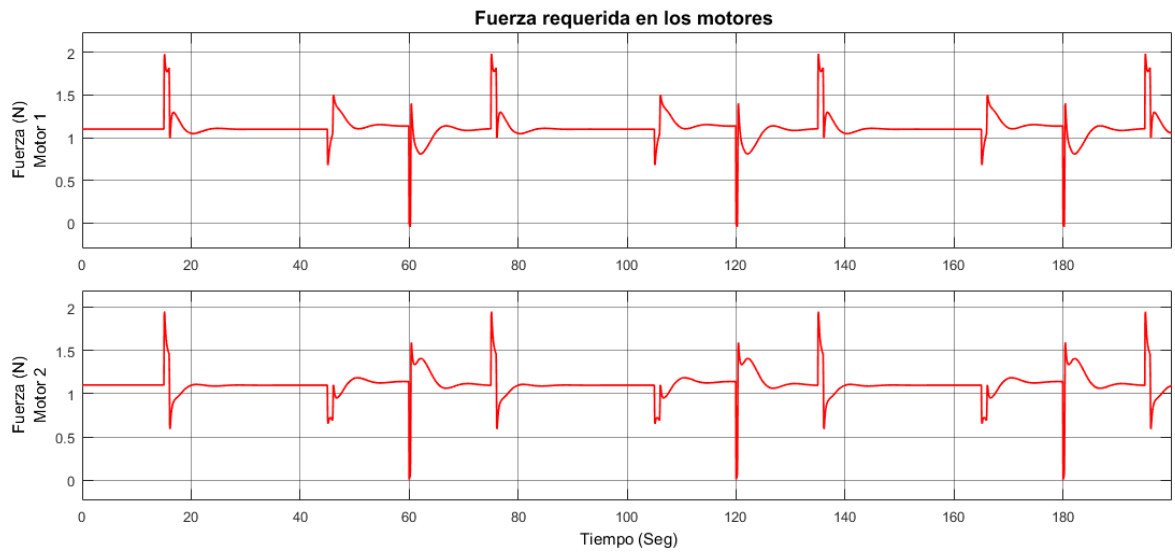


Figura 59. Fuerza necesaria en los motores para diferentes entradas.

2.1.8 Controladores PID (2GDL) en tiempo discreto.

De acuerdo al diagrama de bloques de la Figura 51 se implementó en Simulink el control en cascada en lazo cerrado de los controladores PID, ver Figura 60.

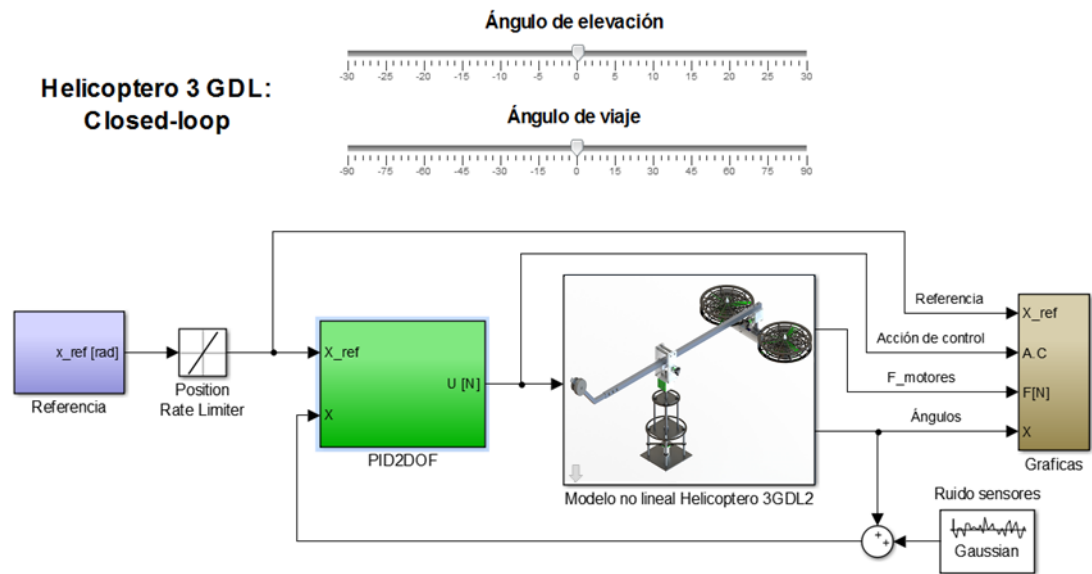


Figura 60. Diagrama en lazo cerrado helicóptero 3 GDL.

El bloque controlador, contiene los tres controladores en cascada, donde entra la señal de referencia y la señal de sensores (retroalimentación) y se obtienen las acciones de control F_{sum} y F_{diff} .

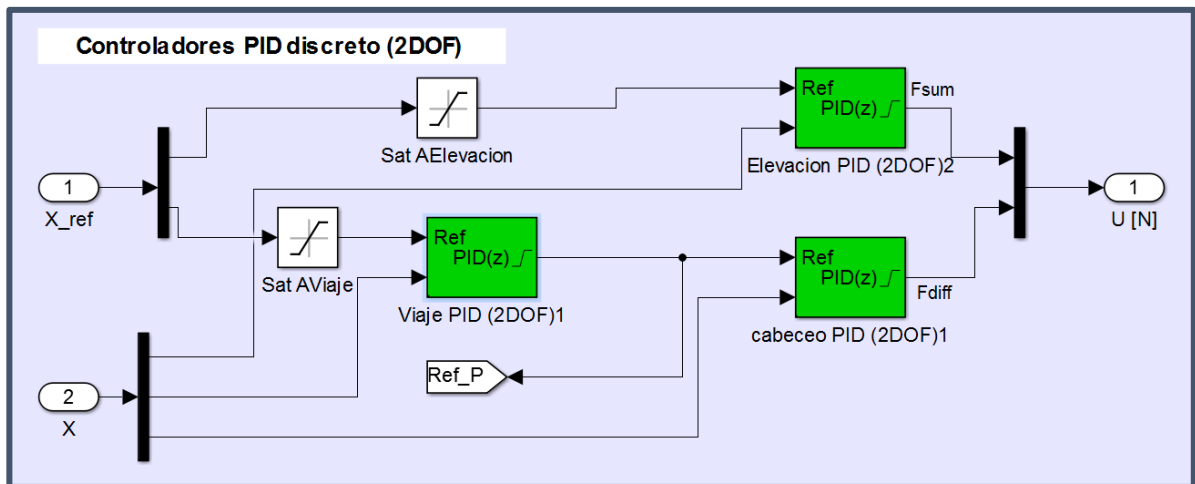


Figura 61. Diagrama de controladores PID en cascada.

Siguiendo la misma metodología que se utilizó para diseñar los controladores PID (1GDL) y teniendo en cuenta la expresión del PID discreto de dos grados de libertad explicada en la sección 2.1.1.2, se hizo la sintonización de los controladores PID (2GDL) utilizando la herramienta *Tunning* de Simulink para el bloque PID (2GDL) discreto dado el periodo de muestreo explicado en la sección 2.1.5. También, en este bloque se define la ganancia *antiwindup* (Kb), bajo el método de *back-calculation*. En la Tabla 13 se definen las características de los controladores PID discretos (2GDL).

Tabla 13. Características controlador PID discreto (2GDL).

Parámetros del controlador	Ángulos		
	Elevación	Cabeceo	Viaje
P	0.02501	0.07976	0.99076
I	0.0102	0.04696	0.12920
D	0.00065	0.03033	1.00235
N	0.8775	32.2746	5.07368
b	0.4965	1.1788	0.7740
c	0.00657	0.4553	0.007436
Kb	5	5	5
Características del controlador	Valor		
Tiempo de levantamiento (<i>seg</i>)	3.15	0.18	2.53
Tiempo de estabilización (<i>seg</i>)	8.85	0.56	4.35
Sobrepaso (%)	0	4.32	0.0895

En la Figura 62 se muestra la respuesta transitoria de los tres ángulos con los controladores PID (2GDL); dado un punto de referencia variable en el tiempo. En ésta se observa que el sistema llega al punto de consigna, las respuestas transitorias de los ángulos presentan un menor sobrepaso que en los PID (1GDL) y hay un mejor seguimiento del ángulo Cabeceo, el cual es fundamental para la estabilidad del helicóptero y el control del ángulo de viaje al ser un control en cascada.

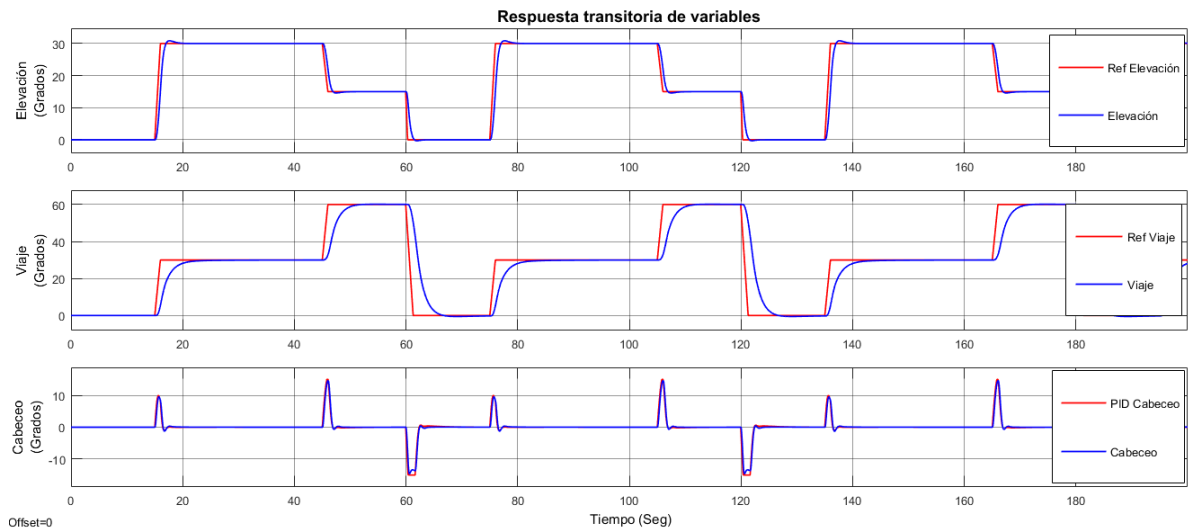


Figura 62. Respuesta transitoria ante diferentes entradas con controlador PID discreto (2GDL).

En la Figura 63 se muestra la acción de control para las salidas del sistema F_{sum} y F_{diff} . Para la simulación dio una saturación de acuerdo con la fuerza máxima que pueden entregar los motores.

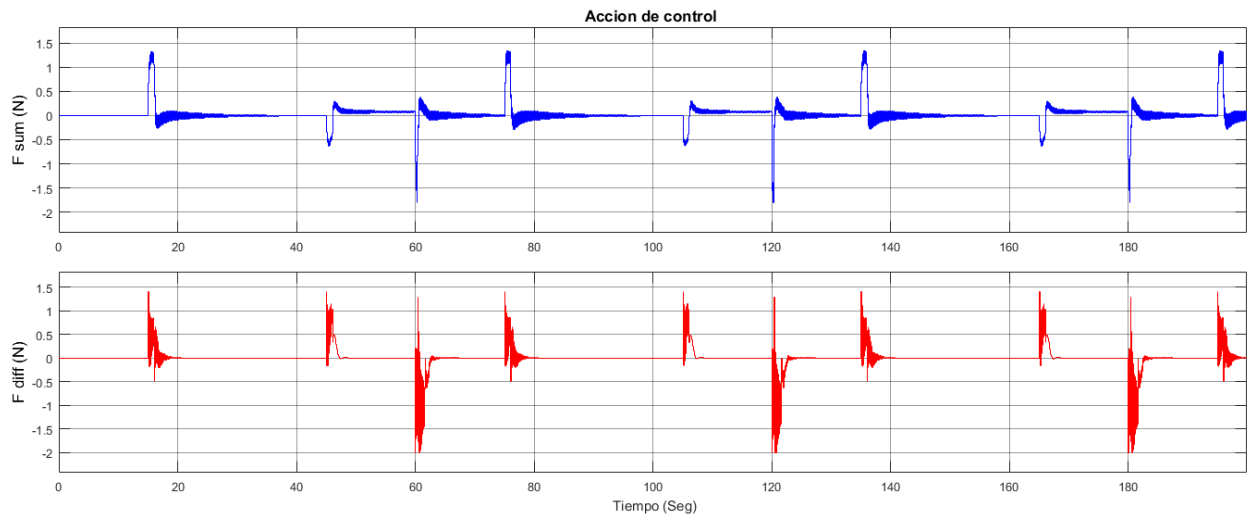


Figura 63. Acción de control para diferentes entradas de fuerzas.

En la Figura 64 se muestra la fuerza requerida en el motor 1 y motor 2, esto como resultado de resolver el sistema de ecuaciones (25) y (26).

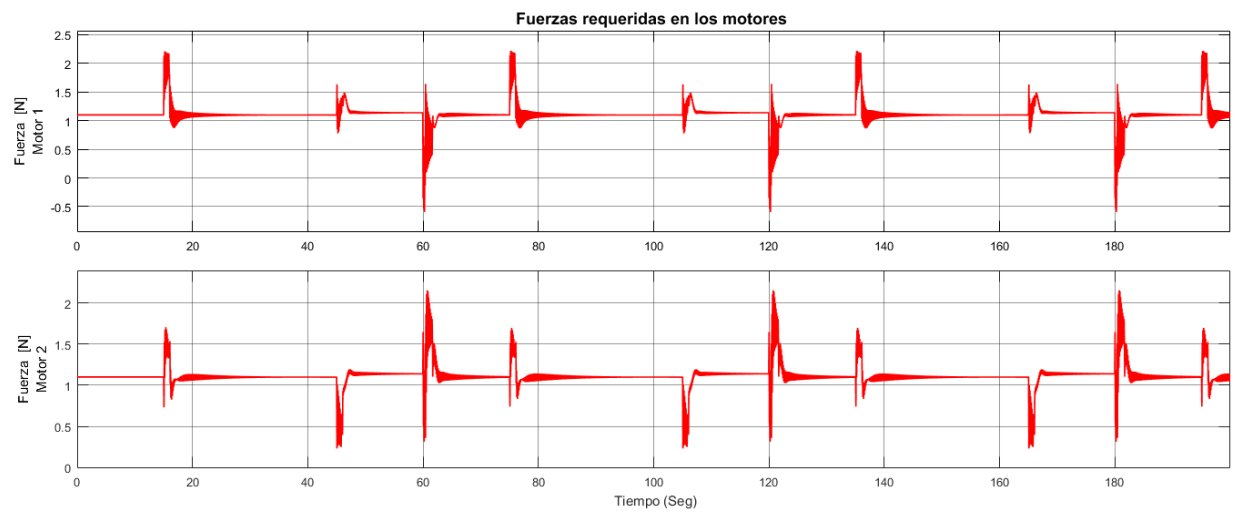


Figura 64. Fuerza necesaria en los motores para diferentes entradas.

2.2 Control robusto QFT (Quantitative-Feedback-Theory).

En la presente sección, se incluyen los fundamentos teóricos del control robusto, seguido por la metodología de diseño según QFT y posteriormente el diseño QFT para la regulación de los ángulos del Helicóptero 3GDL, esto con la Toolbox QFTCT de Matlab® desarrollada por Borghesani et al.

La teoría de control como ciencia aplicada va dirigida al mundo real, por lo cual a la hora de diseñar un sistema de control se requiere que el comportamiento de los procesos reales se tenga que representar o modelar con el fin de facilitar el diseño y evaluación del sistema de control. Sin embargo, a la hora de modelar el comportamiento de sistemas se tiene un elevado grado de complejidad debido a la existencia de una gran variedad de parámetros que influyen sobre el mismo. Por lo tanto, para la elaboración de un modelo que describa el comportamiento de un sistema, por lo general, es imprescindible simplificar dicho sistema de tal manera que sólo se tengan en cuenta los parámetros fundamentales de éste. [8]

Lo anterior redundante en que un modelo matemático no logra representar fielmente, en menor o mayor grado, el comportamiento de un sistema real. Es decir, el proceso de modelado introduce errores en el diseño de un sistema de control, debido a la simplificación aplicada en el proceso de modelado, como por ejemplo; tratar de representar este como un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Con el fin de minimizar estas imprecisiones, a grandes rasgos se tendrían dos opciones: la primera sería aplicar mayor rigurosidad a la hora de modelar un sistema real, con el consecuente incremento de la complejidad en el diseño del sistema de control. La segunda opción sería tener en cuenta las imprecisiones del modelo de un sistema real al diseñar un controlador, es decir que el controlador responda adecuadamente ante las imprecisiones y variaciones de un entorno real.

De acuerdo con lo comentado hasta aquí, en estos casos se requiere de sistemas de control que respondan adecuadamente a estas imprecisiones entre modelos, siendo necesaria la definición del modelado de tales procesos, el análisis de un sistema de este tipo y el respectivo diseño del controlador.

Este es el punto de partida de la disciplina denominada control robusto, que abarca casos caracterizados por considerar imprecisiones en el modelo de la planta tolerables por un controlador fijo lineal e invariante en el tiempo. En cualquier caso, el objetivo es obtener un sistema de control que funcione adecuadamente al implementarse sobre un proceso real.

2.2.1. Concepto de incertidumbre y robustez en el modelo.

El término de 'robustez' hace referencia a la incertidumbre (imprecisiones) del sistema controlado frente a las diferencias existentes entre el sistema real y el modelo de dicho sistema; siendo este último el realmente empleado en el diseño del controlador. Estas diferencias se conocen habitualmente como incertidumbre del modelo, desajustes modelo/planta o simplemente incertidumbre. [9]

Sin embargo, la incertidumbre en el modelo no es el único factor para tener en cuenta cuando se habla de la robustez de un sistema. Otras consideraciones incluyen fallos en sensores y actuadores, restricciones físicas, cambios en los objetivos de control, apertura y cierre de lazos. También los algoritmos numéricos diseñados pueden carecer de robustez. Las perturbaciones habitualmente no suelen ser medibles.

Todas las imprecisiones de modelado se pueden incluir en tres clases:

- **Incertidumbre paramétrica** (o estructurada), cuando la estructura del modelo (incluido el orden) son conocidos, pero algunos parámetros contienen incertidumbre.
- **Incertidumbre no paramétrica** (o no estructurada). Existe un error en el modelo debido a dinámicas no tenidas en cuenta, normalmente en altas frecuencias, bien deliberadamente o por desconocimiento del proceso físico. Cualquier modelado de un sistema real lleva implícita esta incertidumbre, aunque luego no sea tomada en cuenta explícitamente.
- **Incertidumbre mixta** que combina las dos anteriores.

2.2.2 Metodología de diseño según QFT.

La teoría de control robusto QFT se basa en el diseño de controladores en el dominio de la frecuencia, en la que se consigue un balance adecuado entre la cantidad de incertidumbre del modelo y la complejidad del tratamiento matemático, además de reducir la influencia de perturbaciones externas y estabilizar el sistema en caso necesario. Saca provecho de la utilización de un prefiltro en lazo abierto delante del lazo de realimentación para ajustar el comportamiento dentro de las tolerancias de seguimiento de referencia en su caso, diseñándose así un sistema de dos grados de libertad. En la Figura 65 se muestra el proceso de diseño con QFT.

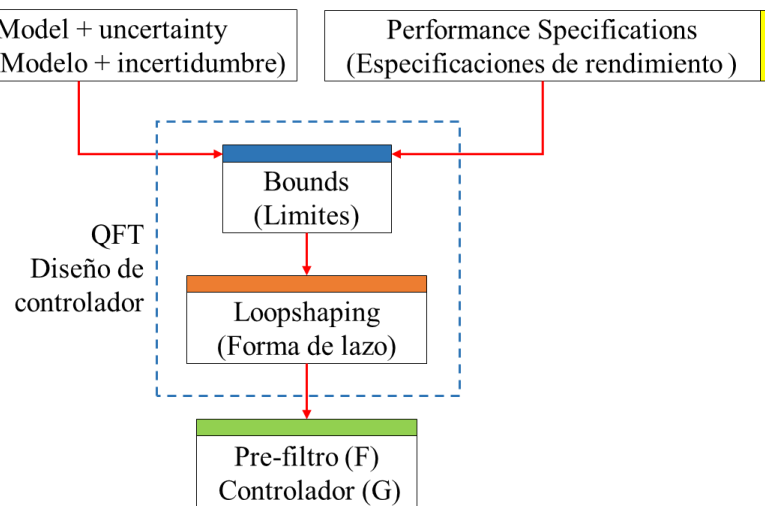


Figura 65. Metodología de diseño QFT.

El diseño QFT se realiza en dos etapas, en la primera se sintoniza el controlador, $G(s)$, que reduce la variación de la planta en lazo cerrado debida la incertidumbre en el modelo (lazo abierto) y las entradas de perturbación. Reducida dicha sensibilidad en lazo cerrado, el prefiltro $Pf(s)$ se diseña en una segunda etapa para asegurar el comportamiento exacto en cada frecuencia en el seguimiento de señales de referencia. [9]

El proceso de diseño con QFT para llevar a cabo estos objetivos se compone de los siguientes pasos:

1. Definición de las especificaciones de estabilidad y comportamiento robusto en lazo cerrado. Estas se trasladarán al dominio frecuencial.
2. Determinación del modelo de la planta con incertidumbre paramétrica, no paramétrica o mixta, donde se tiene una planta nominal dentro del conjunto de plantas definidas de acuerdo con los parámetros que se consideren con incertidumbre. Se selecciona también un conjunto adecuado y finito de frecuencias para realizar el diseño que vendrá determinado por el ancho de banda y por las frecuencias de interés dadas por las especificaciones de comportamiento requeridas. A partir de este punto, se calcula para las frecuencias seleccionadas la respuesta para un conjunto significativo de plantas dentro de todas las posibles del espacio de incertidumbre. A cada uno de los conjuntos de plantas se le denomina como plantilla o *template*.
3. La incertidumbre de la planta, implícita en las plantillas, y las especificaciones frecuenciales de lazo cerrado, se transforman en unas curvas de restricción sobre el diagrama de Nichols, denominadas contornos o *bounds*, existiendo una para cada frecuencia y cada tipo de especificación.
4. En la etapa de diseño, denominada síntesis o *loop-shaping* del controlador se aprovechan las propiedades del diagrama de Nichols y se traza el producto de la planta por el controlador. En este punto se añaden elementos al controlador (polos, ceros u otros elementos) y se observa que cada uno de los puntos de dicha representación frecuencial esté sobre la zona permitida por el contorno a su correspondiente frecuencia, considerando satisfactorio el diseño.
5. El diseño se completa con la sintonización de un prefiltro. Para ello se ajusta la respuesta en frecuencia del lazo de realimentación a las tolerancias definidas por las especificaciones de seguimiento. [10]
6. Finalmente, se validan los diseños en el dominio temporal, ya que éstos se han llevado a cabo en el dominio de la frecuencia.

2.2.3 Diseño de la estrategia de control robusto QFT mediante la Toolbox de Matlab® (QFTCT).

Teniendo como base los fundamentos teóricos de control robusto según QFT, se diseña un control de dos grados de libertad (2GDL) necesario en el gobierno estable de sistemas con incertidumbre para asegurar comportamientos adecuados en el seguimiento de señales, y en el rechazo de perturbaciones [9]. Se define un lazo directo para el ángulo de elevación y un lazo en cascada para los ángulos de cabeceo y viaje como se muestra en la Figura 66.

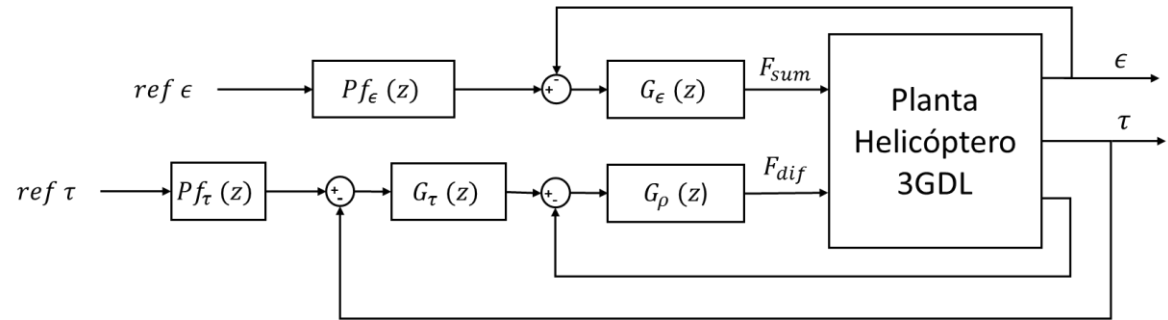


Figura 66. Diagrama de bloques estrategia de control en cascada QFT.

2.2.3.1 Modelo parametrizado.

A partir de las ecuaciones que gobiernan el sistema mostradas en 1.1.2 se desarrolla el modelo lineal basado en el método de aproximación de senos y cosenos para ángulos pequeños, el cual sigue la forma:

$$\begin{aligned} \sin x &= x \\ \cos x &= 1 \end{aligned} \quad (43)$$

Donde x denota el ángulo a linealizar. El término $\dot{\tau}^2$, al estar elevado a una potencia mayor a uno se desprecia al momento de linealizar. De acuerdo con (43) se obtienen las ecuaciones lineales (44), (45) y (46) para los tres ángulos.

Modelo lineal ángulo de elevación.

$$\begin{aligned} I_\epsilon \ddot{\epsilon} &= F_{sum} L_M - m_H g((d-h)\epsilon + L_M) + m_W g(L_W + L_{W2} \cos \theta) - m_A g L_A \\ &+ m_W g(L_{W2} \sin \theta + h)\epsilon - k_{d\epsilon} \dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (44)$$

Modelo lineal ángulo de cabeceo.

$$I_\rho \ddot{\rho} = F_{dif} L_H - m_H g (d - c) \rho - k_{d\rho} \dot{\rho} \quad (45)$$

Modelo lineal ángulo de viaje.

$$I_\tau(0) \ddot{\tau} = F_{sum} L_M \rho - k_{d\tau} \dot{\tau} \quad (46)$$

Donde:

$$I_\tau(0) = (m_W (L_W + L_{W2} \cos \theta)^2 + m_H L_M^2) \quad (47)$$

Siguiendo la metodología de diseño de control robusto QFT, es necesario desarrollar un modelo parametrizado en continua para cada grado de libertad donde se establecen los parámetros que contienen incertidumbre, en la Figura 67 se muestra la representación gráfica de las funciones de transferencia parametrizadas.

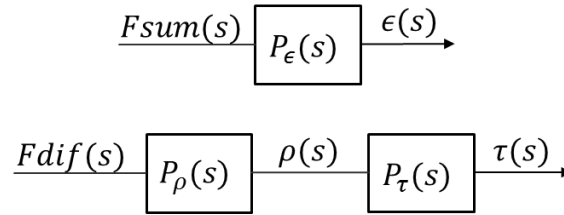


Figura 67. Diagrama de las funciones de transferencia de los sistemas lineales.

Donde $P_\epsilon(s)$, $P_\rho(s)$ y $P_\tau(s)$ representan las plantas de elevación, cabeceo y viaje respectivamente.

De acuerdo con el diagrama de la Figura 67 y basado en la transformada de Laplace, se obtienen las funciones de transferencia (48), (49) y (50).

Función de transferencia ángulo de elevación.

$$\frac{\epsilon(s)}{F_{sum}(s)} = \frac{\frac{F_{sum} L_M - m_A g L_A - m_H g L_M + m_W g (L_W + L_{W2} \cos \theta)}{F_{sum} I_\epsilon}}{s^2 + \frac{k_{d\epsilon}}{F_{sum} I_\epsilon} s + \frac{m_H g (h - d) - m_W g (h + L_{W2} \sin \theta)}{F_{sum} I_\epsilon}} \quad (48)$$

Función de transferencia ángulo de cabeceo.

$$\frac{\rho(s)}{F_{dif}(s)} = \frac{\frac{L_H}{I_\rho}}{s^2 + \frac{k_{d\rho}}{I_\rho} s + \frac{m_H g (d - c)}{I_\rho}} \quad (49)$$

Función de transferencia ángulo de viaje.

$$\frac{\tau(s)}{\rho(s)} = \frac{\frac{L_M F_{sum}}{I_\tau}}{s^2 + \frac{k_{d\tau}}{I_\tau} s} \quad (50)$$

La única objeción que cabe formular respecto al anterior modelo afecta a la ecuación (50) correspondiente al ángulo de viaje, dado que la función de transferencia depende de la variable F_{sum} .

A partir de las funciones de transferencia (48), (49) y (50) y los valores de los parámetros físicos nominales tales como longitudes, masas, inercias y rozamientos de la Tabla 3 se establece el modelo parametrizado (51), (52) y (53) teniendo en cuenta que algunos de los parámetros tienen incertidumbre, a los cuales se les define un valor mínimo y máximo tal como se muestra en la Tabla 14.

Estos se estimaron colocando un porcentaje mínimo y máximo promedio de incertidumbre del valor nominal para cada grupo de parámetros, en el caso de las inercias se estableció $Inercias_{min,prom} = 40\%$, $Inercias_{max,prom} = 123\%$. Para los rozamientos, $Rozamientos_{min,prom} = 40\%$, $Rozamientos_{max,prom} = 210\%$. Para la longitud $L_{W2_{min,prom}} = 83.6\%$, $L_{W2_{max,prom}} = 111.5\%$ y finalmente para la masa $m_{H_{min,prom}} = 99.5\%$, $m_{H_{max,prom}} = 100.86\%$.

Tabla 14. Parámetros del modelo con incertidumbre.

Parámetro	Valor mínimo	Valor nominal	Valor máximo	Unidades SI
I_ϵ	0.3	0.64562	0.8	kgm^2
I_τ	0.2	0.65584	0.8	kgm^2
I_ρ	0.02	0.04794	0.06	kgm^2
$k_{d\epsilon}$	0.4	1	1.78	Nms/rad
$k_{d\rho}$	0.02	0.053	0.08	Nms/rad
$k_{d\tau}$	0.2	0.5	1.5	Nms/rad
L_{W2}	0.09	0.10762	0.12	m
m_H	1.155	1.160	1.170	kg

Función de transferencia con incertidumbre para el ángulo de elevación.

$$\frac{\epsilon(s)}{F_{sum}(s)} = \frac{A_\epsilon}{s^2 + B_\epsilon s + C_\epsilon} \quad (51)$$

Donde,

$$A_\epsilon = \frac{1.0710 - 9.81 * m_H L_M + 9.81 * m_W (0.47 + L_{W2} \cos 40)}{2.2021 * I_\epsilon}$$

$$B_\epsilon = \frac{k_{d\epsilon}}{2.2021 * I_\epsilon}$$

$$C_\epsilon = -\frac{9.81 * m_W (0.0186 + L_{W2} * 0.643) + 9.81 * m_H (0.125 - 0.0186)}{2.2021 * I_\epsilon}$$

Función de transferencia con incertidumbre para el ángulo de cabeceo.

$$\frac{\rho(s)}{F_{dif}(s)} = \frac{A_\rho}{s^2 + B_\rho s + C_\rho} \quad (52)$$

Donde,

$$A_\rho = \frac{0.19}{I_\rho}$$

$$B_\rho = \frac{k_{d\rho}}{I_\rho}$$

$$C_\rho = \frac{-9.81 * m_H (0.05269 - 0.125)}{I_\rho}$$

Función de transferencia con incertidumbre para el ángulo de viaje.

$$\frac{\tau(s)}{\rho(s)} = \frac{A_\tau}{s^2 + B_\tau s} \quad (53)$$

Donde,

$$A_\tau = \frac{0.5775 * F_{sum}}{I_\tau}$$

$$B_\tau = \frac{k_{d\tau}}{I_\tau}$$

2.2.4 Diseño del lazo de elevación.

Con base en la ecuación (51) del ángulo de elevación y los intervalos de incertidumbre para los parámetros de la Tabla 14, se establece el conjunto de plantas evaluadas ante un grupo de frecuencias de interés entre 0.001 Hz y 30 Hz, obteniendo para cada frecuencia una representación en lazo abierto del conjunto de plantas sobre el diagrama de Nichols, tal como se muestra en la Figura 68.

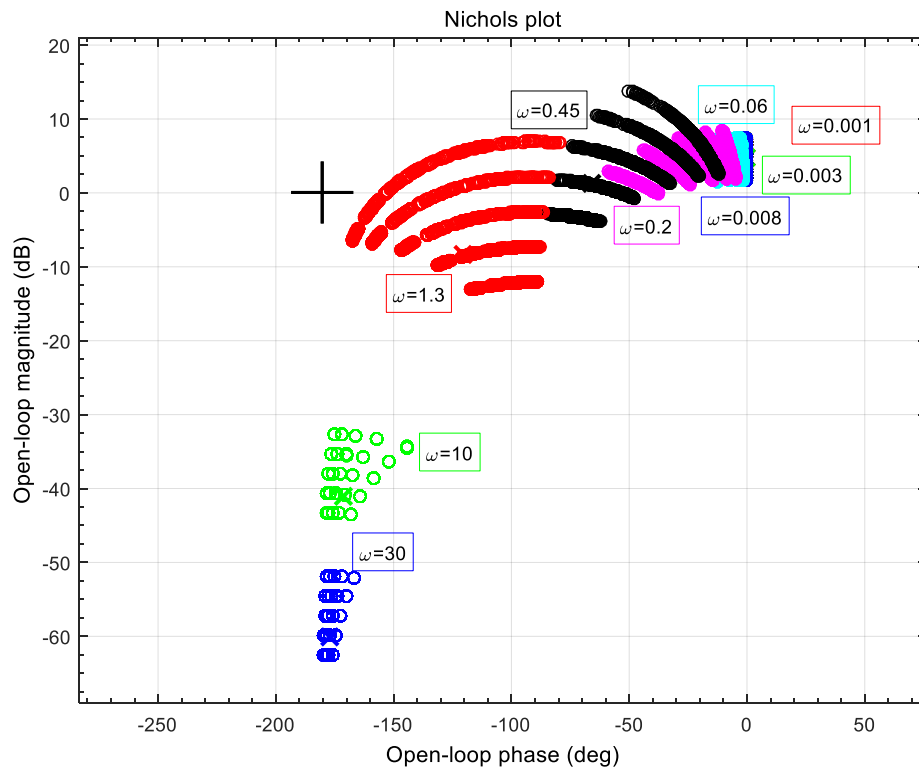


Figura 68. *Templates* de la planta de elevación.

2.2.4.1 Especificaciones de desempeño del controlador.

Dado a que el helicóptero 3GDL se somete a cambios de par de fuerza por la continua variación del empuje en los actuadores, se pretende preservar la estabilidad a pesar de las incertidumbres en el modelo, para esto, se definieron cuatro especificaciones de desempeño basadas en la estabilidad robusta, rechazo de perturbaciones en el helicóptero, límite del esfuerzo de control y un comportamiento adecuado en el seguimiento de referencias. Estas especificaciones se muestran a continuación.

- **Sensibilidad complementaria (estabilidad robusta):** este criterio según QFT se expresa como:

$$\left| \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{1\epsilon}(\omega) \quad (54)$$

Siendo $P(j\omega)$ la planta de elevación, $G(j\omega)$ el controlador y $\delta_{1\epsilon}$ una tolerancia constante para todas las frecuencias definidas ω .

El cumplimiento de la desigualdad (54) impone un máximo sobrepaso en la respuesta del sistema en lazo cerrado, lo que equivale a imponer un valor mínimo en el coeficiente de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado. Al mismo tiempo, garantiza unos márgenes de fase y ganancia mínimos para todas las plantas, índices con los que se mide el grado de estabilidad del sistema. Dichos márgenes se calculan a partir de la tolerancia $\delta_{1\epsilon}$ como sigue:

$$MF \geq 180^\circ - \arccos\left(\frac{0.5}{\delta_{2\epsilon}^2} - 1\right) \quad (55)$$

$$MG \geq 1 + \frac{1}{\delta_{2\epsilon}} \quad (56)$$

Como criterio general de diseño para obtener una estabilidad relativa aceptable, se aconsejan unos márgenes mínimos de fase y ganancia por el orden de 45° y 1.77 (o $5dB$), respectivamente [9]. Aplicando las ecuaciones (55) y (56) resulta un mínimo $\delta_{1\epsilon} = 1.3$ en términos de QFT.

Dicho lo anterior, como criterio para el lazo de elevación se fija un valor de tolerancia $\delta_{1\epsilon} = 1.4$, siendo este el máximo permitido de sensibilidad complementaria.

- **Sensibilidad clásica (rechazo de perturbaciones a la salida):** este criterio según QFT se expresa como:

$$\left| \frac{1}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{2\epsilon}(\omega) \quad (57)$$

Para resolver esta inecuación, se debe cuantificar la tolerancia $\delta_{2\epsilon}(\omega)$, para este caso, la tolerancia $\delta_{2\epsilon}$ se define a partir de una función de transferencia que representa la dinámica de la planta, restringiendo la influencia de perturbaciones que se producen en la propia salida de la planta. Para definir la función de transferencia, se aplicó el método de asignación de polos y ceros [11], verificando que la ganancia estática de la función de transferencia sea menor a uno, en la ecuación (58) se muestra la función resultante.

$$\delta_{2\epsilon} = \left| \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 4s + 1.5} \right| \quad (58)$$

- **Esfuerzo de control:** En el diseño de controladores habitualmente se vigilan los picos de control solicitados al momento de producirse el evento a controlar, ya sea una perturbación o un cambio en la consigna, dado a que un elevado esfuerzo de control puede desestabilizar el sistema y/o saturar los actuadores de la planta. Evidentemente, un comportamiento dinámico más agresivo, conlleva a una mayor inyección de tensión de control. Es por esto que se debe cuantificar el esfuerzo de control máximo permitido por los actuadores, fundamentalmente en términos de ancho de banda o 'coste de la realimentación'. Este criterio según QFT se expresa como:

$$\left| \frac{G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{3\epsilon}(\omega) \quad (59)$$

Para resolver esta inecuación, se debe cuantificar la tolerancia $\delta_{3\epsilon}(\omega)$ como la especificación de la limitación del esfuerzo de control, es decir el pico de tensión soportado por los actuadores y el máximo error para la planta. Para el ángulo de elevación el cálculo se hace teniendo la máxima fuerza aplicable al sistema tal como se explicó en la sección 2.1.6.1, la cual es de $3.5N$ para todo el ancho de banda de la planta con un máximo error de elevación de 35° (0.625 rad), en (60) se muestra la tolerancia resultante.

$$\delta_{3\epsilon} = \left| \frac{3.5}{0.625} \right| = 5.6 \quad (60)$$

- **Especificación de seguimiento:** El sistema de seguimiento de referencias se resuelve en QFT planteando como especificación de diseño un modelo superior $\delta_{5\epsilon, sup}(\omega)$ y otro inferior $\delta_{4\epsilon, inf}(\omega)$, los cuales a través del pre-filtro Pf_ϵ , ajustan la dinámica del sistema en lazo cerrado. Ambos modelos, han de satisfacerse de acuerdo con la especificación robusta (61).

$$\delta_{4\epsilon, inf}(\omega) \leq \left| Pf_\epsilon(j\omega) \frac{P(j\omega)G(j\omega)}{1 + P(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq \delta_{5\epsilon, sup}(\omega) \quad (61)$$

A menudo, los modelos frecuenciales $\delta_{4\epsilon, inf}(\omega)$ y $\delta_{5\epsilon, sup}(\omega)$ se determinan a partir de modelos temporales, en los que se manejan índices de comportamiento típicos ante entradas escalón. El modelo superior temporal $\delta_{5\epsilon, sup}(s)$ se diseña con respuesta subamortiguada con un sobrepaso de 15.7% y un tiempo de establecimiento $ts_{5\epsilon} = 1.35 \text{ seg}$. Para el modelo inferior $\delta_{4\epsilon, inf}(s)$ se opta por una dinámica sobreamortiguada con un sobrepaso nulo y un tiempo de establecimiento $ts_{4\epsilon} = 7.82 \text{ seg}$. A partir de estos parámetros de diseño y utilizando la técnica de ubicación de polos y ceros se construyen las funciones de transferencia que representen las dinámicas deseadas para ambos modelos (62) y (63). La Figura 69 muestra la respuesta transitoria de los modelos diseñados.

$$\delta_{4\epsilon, inf}(s) = \frac{35}{s^2 + 6s + 35} \quad (62)$$

$$\delta_{5\epsilon, sup}(s) = \frac{0.5}{s + 0.5} \quad (63)$$

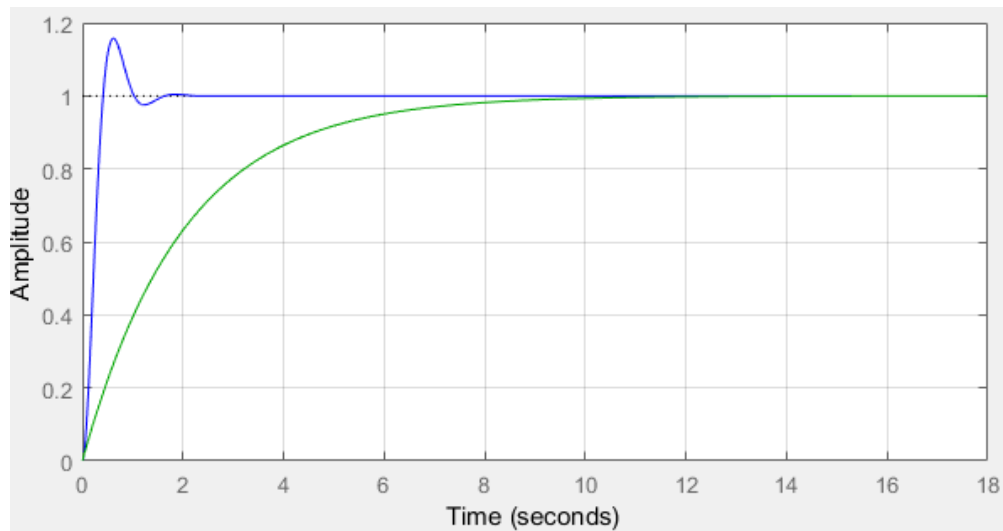


Figura 69. Respuesta transitoria a escalón de $\delta_{5\epsilon, sup}(s)$ (azul) y $\delta_{4\epsilon, inf}(s)$ (verde).

2.2.4.2 Diseño del controlador para elevación.

El diseño del controlador QFT, $G_\epsilon(s)$, se lleva a cabo sobre el Diagrama de Nichols en el que se representan los contornos para cada frecuencia ω_i y la planta nominal $P_\epsilon(j\omega_i)$. Los contornos expresan la mínima posición a alcanzar por la planta nominal de lazo abierto para cumplir las especificaciones de lazo cerrado que ya incluyen la incertidumbre. De este modo, con la técnica de síntesis o *loop-shaping* se añaden elementos ganancia, polos y ceros tal que la planta nominal de cada frecuencia satisfaga su correspondiente contorno (se sitúe por encima o por debajo, según especificaciones) [9], tal como se muestra en la Figura 70, garantizando así que ninguna planta P_ϵ de las previstas en el modelado viole las especificaciones de desempeño planteadas. La función de transferencia del controlador diseñado para elevación se muestra en (64), la cual está conformado por una ganancia, el integrador, un polo real y dos ceros reales.

$$G_\epsilon(s) = \frac{4.54 s^2 + 7.234 s + 1.99}{s^2 + 27.37 s} \quad (64)$$

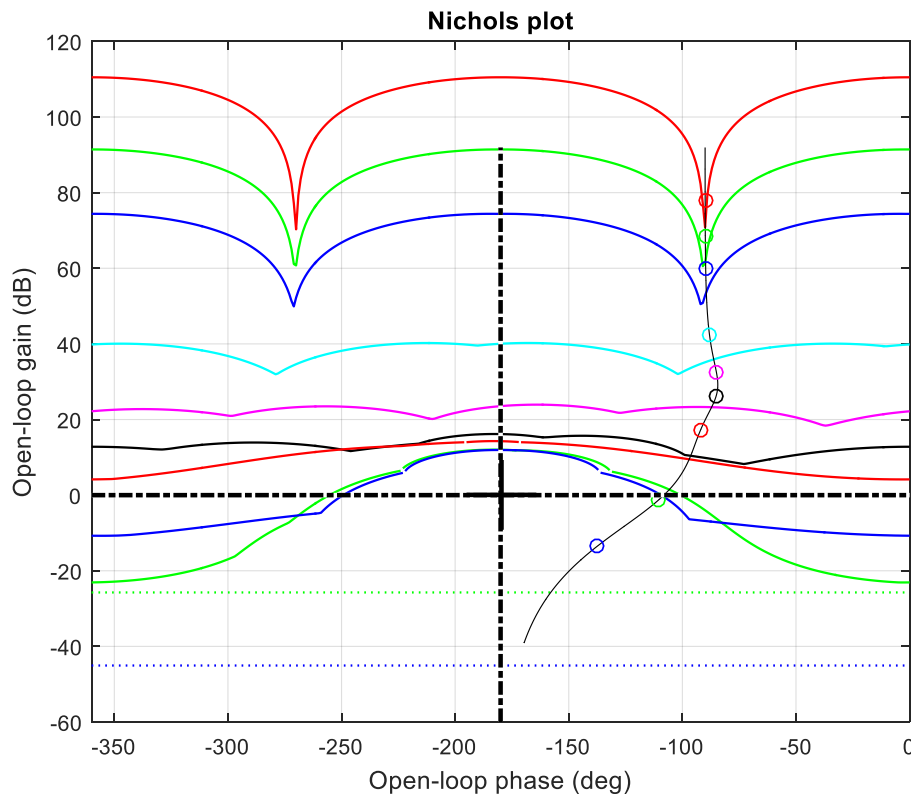


Figura 70. Síntesis (*Loop-shaping*) del controlador de elevación.

2.2.4.3 Diseño del pre-filtro para elevación.

Dado que se propuso una estructura de dos gados de libertad capaz de hacer seguimiento de señales de referencia, se diseña el prefiltro Pf con ganancia unitaria, con el que se busca ubicar la respuesta en frecuencia de la planta nominal entre los límites superior e inferior de las funciones (62) y (63) establecidos dentro de las especificaciones de desempeño del controlador. En la ecuación (65) se muestra el prefiltro para elevación $Pf_{\epsilon}(s)$ el cual se hizo mediante la técnica de síntesis o *loop-shapping* donde se añade una ganancia y dos ceros permitiendo que la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema se ajustara a los límites impuestos. La respuesta de la planta nominal en el dominio de la frecuencia se presenta en la Figura 71.

$$Pf_{\epsilon} = \frac{21.88}{s^2 + 9.393s + 21.88} \quad (65)$$

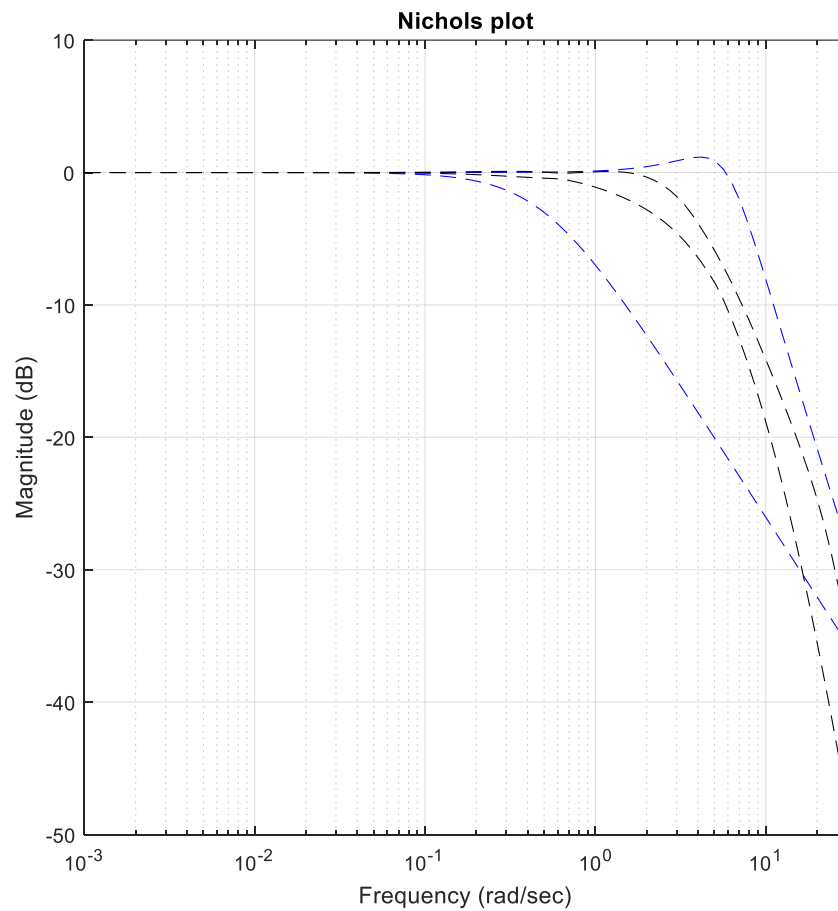


Figura 71. Respuesta en frecuencia de la planta nominal con prefiltro.

La respuesta del ángulo de elevación en el dominio del tiempo se muestra en la Figura 72, donde se observa que la respuesta en lazo cerrado del conjunto de plantas de elevación del espacio de incertidumbre está dentro de la zona delimitada por las funciones de transferencia $\delta_{4\epsilon,inf}(s)$ y $\delta_{5\epsilon,sup}(s)$, de (62) y (63).

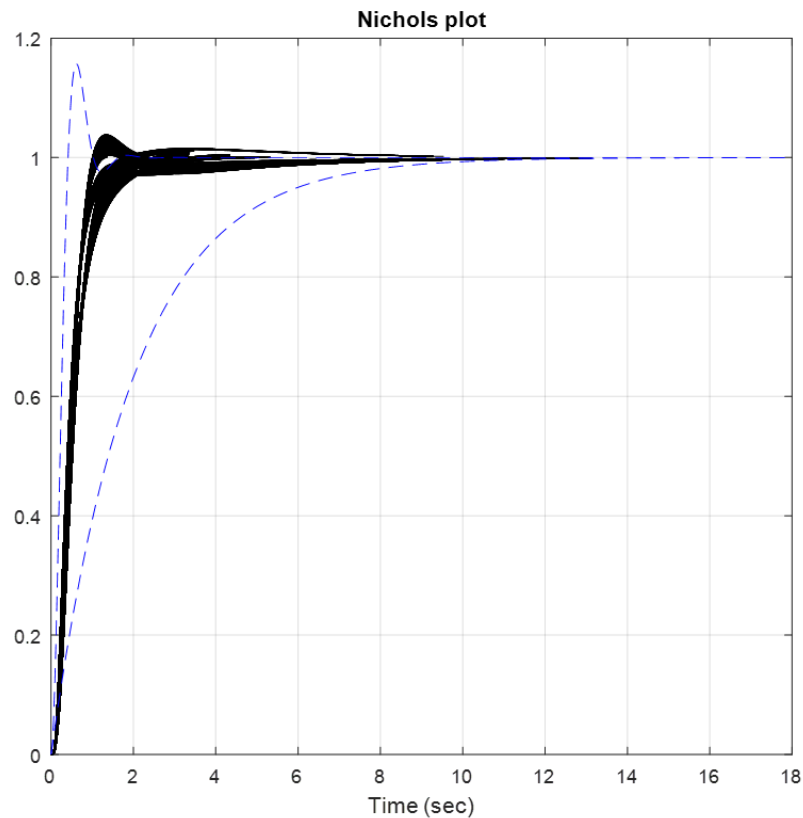


Figura 72. Respuesta en lazo cerrado del conjunto de plantas de elevación.

2.2.5 Diseño del lazo de cabeceo.

El diseño QFT para el ángulo de cabeceo se hace siguiendo la misma secuencia con el que se diseñó el QFT para elevación. De acuerdo con lo anterior se establece el conjunto de plantas con base en la función de transferencia parametrizada (52) y los intervalos de incertidumbre para los parámetros de la Tabla 14. Estableciendo un rango de frecuencias entre 0.001 Hz y 30 Hz , se obtiene la representación en lazo abierto del conjunto de plantas sobre el diagrama de Nichols, tal como se muestra en la Figura 73.

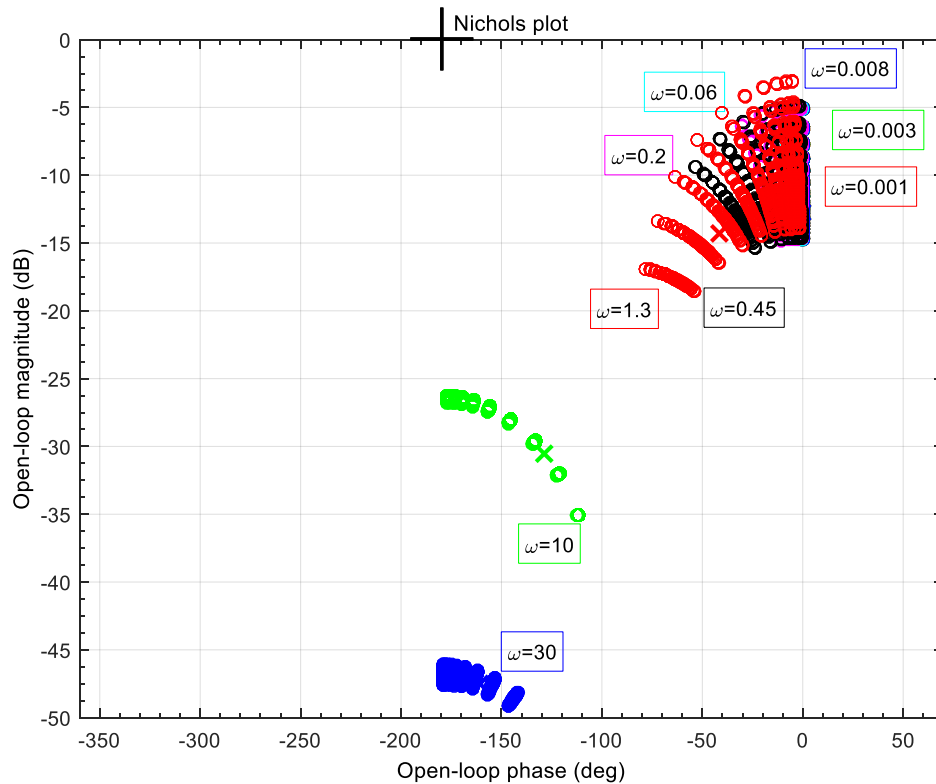


Figura 73. *Templates* de la planta de cabeceo.

2.2.5.1 Especificaciones de desempeño del controlador de cabeceo.

Tal como en el diseño de elevación se establecen las especificaciones de sensibilidad, esfuerzo de control y seguimiento de referencias siguiendo la misma forma de diseño para cada una.

- **Sensibilidad complementaria (estabilidad robusta):** con base en la expresión (54), se fija un valor máximo permitido de sensibilidad complementaria constante para todas las frecuencias definidas ω como:

$$\delta_{1\rho} = 1.4 \quad (66)$$

- **Sensibilidad clásica (rechazo de perturbaciones a la salida):** según la inecuación (57) para este criterio, se diseña una función de transferencia con el método de asignación de polos y ceros [11], verificando que la ganancia

estática de la función de transferencia sea menor a uno y mayor que la ganancia del error, en (67) se muestra la función resultante.

$$\delta_{2\rho} = \left| \frac{s^2 + 0.6s + 0.09}{s^2 + 1.2s + 0.36} \right| \quad (67)$$

- **Esfuerzo de control:** Con la expresión (59) para este criterio, se cuantifica la tolerancia $\delta_{3\rho}(\omega)$ tal como se especificó para el diseño de elevación. Sin embargo, en este caso al ser un lazo en cascada el máximo error está dado por el ángulo de viaje siendo este 130° (2.2689 rad) para la misma fuerza máxima entregada por los actuadores $3.5N$. En (68) se muestra la tolerancia resultante.

$$\delta_{3\rho} = \left| \frac{3.5}{2.2689} \right| = 1.5 \quad (68)$$

- **Especificación de seguimiento:** Con base en la inecuación (61) se establecen los dos modelos de seguimiento de referencias. El modelo superior temporal $\delta_{5\rho,sup}(s)$ se diseña con sobrepaso nulo y un tiempo de establecimiento $ts_{5\rho} = 1.17 \text{ seg}$. El modelo inferior $\delta_{4\rho,inf}(s)$ se diseña con sobrepaso nulo y un tiempo de establecimiento $ts_{4\rho} = 7.52 \text{ seg}$. A partir de estos parámetros de diseño se obtienen las funciones de transferencia (69) y (70).

$$\delta_{4\rho,inf}(s) = \frac{5}{s^2 + 10s + 5} \quad (69)$$

$$\delta_{5\rho,sup}(s) = \frac{25}{s^2 + 10s + 25} \quad (70)$$

2.2.5.2 Diseño del controlador para cabeceo.

El diseño del controlador QFT, $G_\rho(s)$, se sintetizó siguiendo la misma metodología explicada que en el de elevación. La función de transferencia del controlador se muestra en (71), el cual tiene la ganancia, el integrador, un polo real y dos ceros reales. En la Figura 74 se muestra el *loop-shaping* del controlador de cabeceo.

$$G_\rho(s) = \frac{3.979 s^2 + 15.73 s + 6.817}{s^2 + 69.17 s} \quad (71)$$

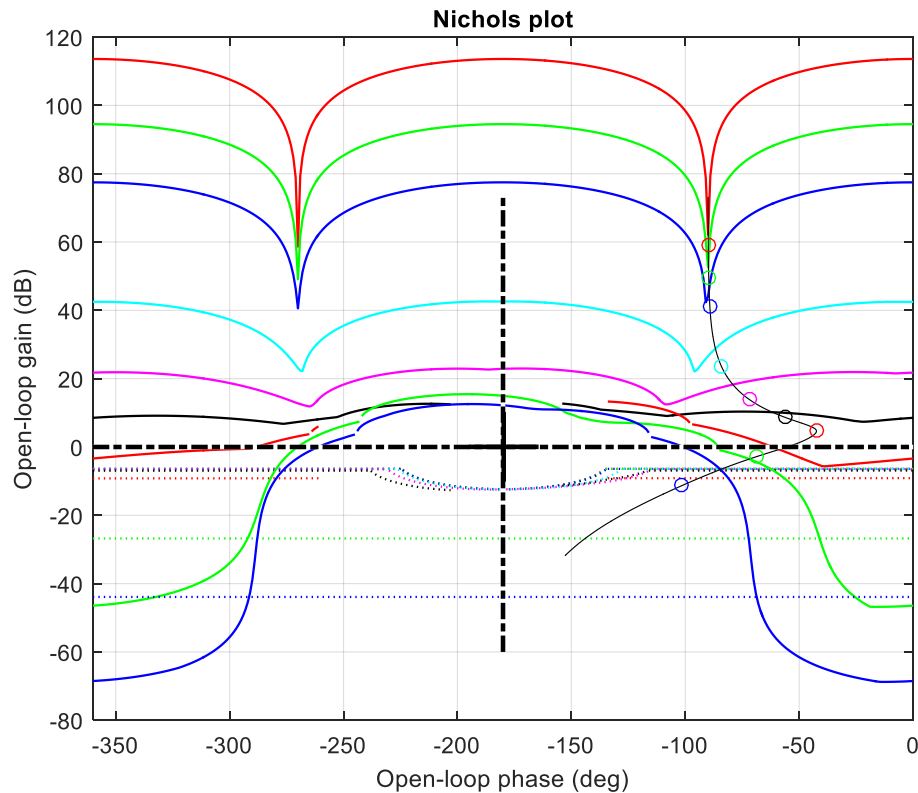


Figura 74. Síntesis (*Loop-shaping*) del controlador de cabeceo.

Dado que este lazo depende del lazo de viaje, no es necesario el ajuste de un prefiltro para el seguimiento de referencias, cualquier dinámica de este tipo quedaría absorbida por el controlador de realimentación de viaje.

2.2.6 Diseño del lazo de viaje.

Siguiendo la misma metodología explicada en el diseño QFT de elevación se hace el diseño QFT para el ángulo de viaje, teniendo en cuenta que, al ser un control en cascada, es necesario obtener la planta generalizada de control de viaje $P_{\tau G}(s)$, es decir, multiplicar el lazo cerrado del control de cabeceo (72) por la función de transferencia parametrizada de viaje (53).

$$Lc_\rho(s) = \frac{P_\rho(s)G_\rho(s)}{1 + P_\rho(s)G_\rho(s)} = \frac{15.77 s^2 + 62.35 s + 27.02}{s^4 + 70.27 s^3 + 109.4 s^2 + 1250 s + 27.02} \quad (72)$$

En la ecuación (73) se muestra la planta generalizada $P_{\tau G}(s)$ para el ángulo de viaje.

$$P_{\tau G}(s) = Lc_{\rho}(s) * \frac{\tau(s)}{\rho(s)}$$

$$P_{\tau G}(s) = \frac{15.77 s^2 + 62.35 s + 27.02}{s^4 + 70.27 s^3 + 109.4 s^2 + 1250 s + 27.02} * \frac{A_{\tau}}{s^2 + B_{\tau} s} \quad (73)$$

$$P_{\tau G}(s) = \frac{A_{\tau} (15.77 s^2 + 62.35 s + 27.02)}{(s^2 + B_{\tau} s)(s^4 + 70.27 s^3 + 109.4 s^2 + 1250 s + 27.02)}$$

De acuerdo con lo anterior se establece el conjunto de plantas con base en la planta generalizada de viaje (73) y los intervalos de incertidumbre para los parámetros de la Tabla 14. Estableciendo un rango de frecuencias entre 0.001 Hz y 10 Hz , se obtiene la representación en lazo abierto del conjunto de plantas sobre el diagrama de Nichols, tal como se muestra en la Figura 75.

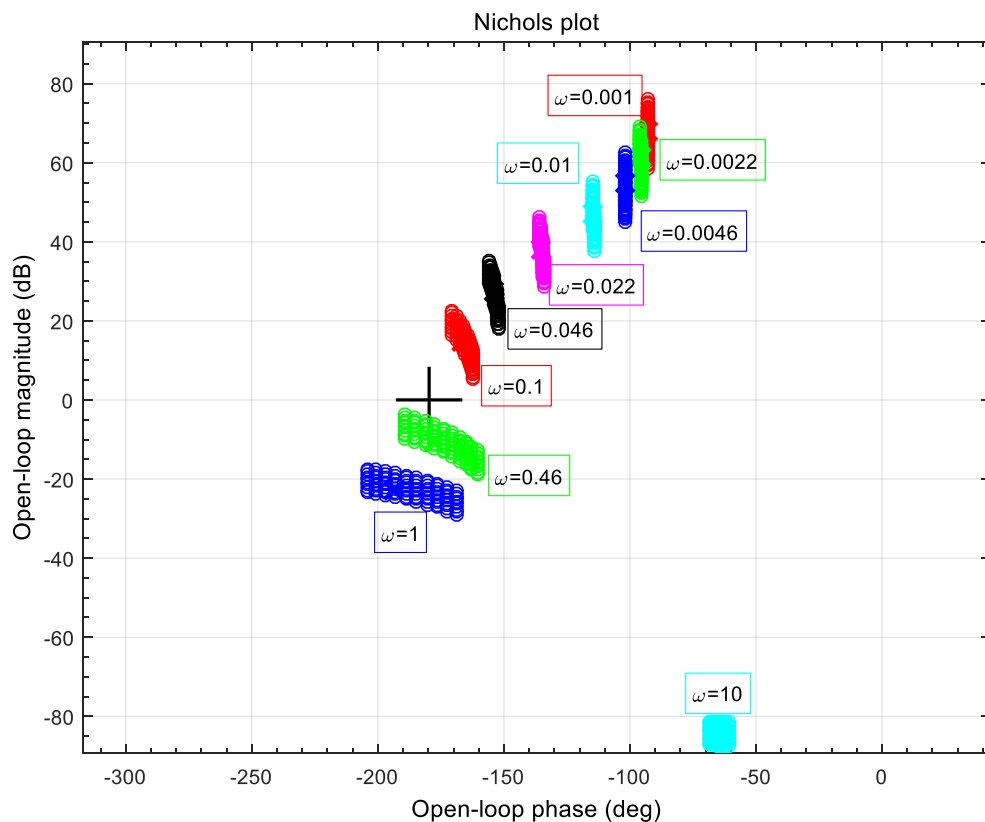


Figura 75. *Templates* de la planta de viaje

2.2.6.1 Especificaciones de desempeño del controlador de viaje.

Tal como en el diseño de elevación se establecen las especificaciones de sensibilidad y seguimiento de referencias siguiendo la misma forma de diseño para cada una.

- **Sensibilidad complementaria (estabilidad robusta):** con base en la expresión (54), se fija un valor máximo permitido de sensibilidad complementaria contante para todas las frecuencias definidas ω como:

$$\delta_{1\tau} = 1.3 \quad (74)$$

- **Sensibilidad clásica (rechazo de perturbaciones a la salida):** según la inecuación (57) para este criterio, se diseña una función de transferencia con el método de asignación de polos y ceros [11], verificando que la ganancia estática de la función de transferencia sea menor a uno y mayor que la ganancia del error, en (75) se muestra la función resultante.

$$\delta_{2\tau} = \left| \frac{s^2 + 0.06s + 0.0009}{s^2 + 0.12s + 0.0036} \right| \quad (75)$$

- **Especificación de seguimiento:** Con base en la inecuación (61) se establecen los dos modelos de seguimiento de referencias. El modelo superior temporal $\delta_{5\tau,sup}(s)$ se diseña con sobrepaso nulo y un tiempo de establecimiento $t_{s_{5\tau}} = 2.93 \text{ seg}$. El modelo inferior $\delta_{4\tau,inf}(s)$ se diseña con sobrepaso nulo y un tiempo de establecimiento $t_{s_{4\tau}} = 9.14 \text{ seg}$. A partir de estos parámetros de diseño se obtienen las funciones de transferencia (76) y (77).

$$\delta_{4\tau,inf}(s) = \frac{5}{s^2 + 12s + 5} \quad (76)$$

$$\delta_{5\tau,sup}(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 12} \quad (77)$$

2.2.6.2 Diseño del controlador para viaje.

El diseño del controlador QFT, $G_\tau(s)$, se sintetizo siguiendo la misma metodología explicada que en elevación. La función de transferencia del controlador se muestra en (78), el cual tiene la ganancia, el integrador, un polo real y dos ceros reales. En la Figura 76 se muestra el *loop-shaping* del controlador de cabeceo.

$$G_\rho(s) = \frac{5.287 s^2 + 5.137 s + 1.233}{s^2 + 3.91 s + 1.727} \quad (78)$$

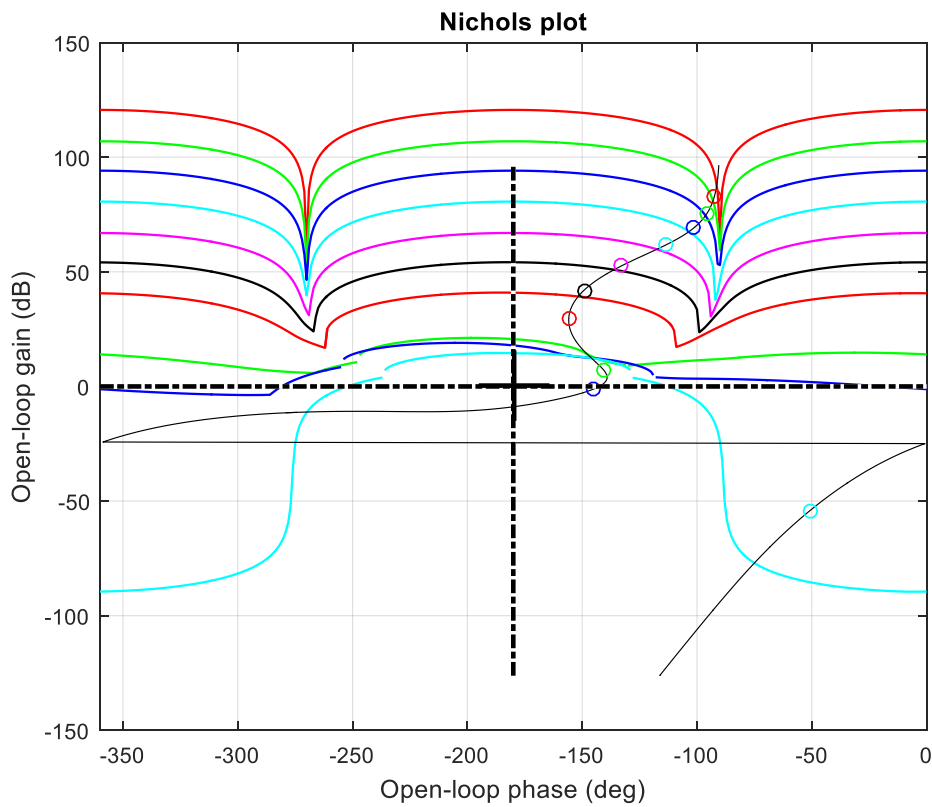


Figura 76. Síntesis (*Loop-shaping*) del controlador de viaje.

2.2.6.3 Diseño del prefiltro para viaje.

El diseño del prefiltro con ganancia unitaria para viaje $Pf_\tau(s)$ se muestra en (79). Este se hizo mediante la técnica de síntesis o *loop-shapping* donde se añade una ganancia y dos ceros permitiendo que la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema se ajustara a los límites impuestos (76) y (77).

$$Pf_\tau = \frac{3.162}{s^2 + 6.261 s + 3.162} \quad (79)$$

2.2.6 Discretización de los controladores y prefiltros.

Los controladores de las tres plantas y sus prefiltros se pasaron al dominio discreto dado el periodo de muestreo $T_m = 0.01 \text{ seg}$ definido en la sección 2.1.5, esto mediante la herramienta `c2d` de Matlab® bajo el método de emparejamiento de ceros y polos *'matched'*. En la Tabla 15 se muestran los controladores y prefiltros en tiempo discreto de las tres plantas, elevación, cabeceo y viaje.

Tabla 15. Controladores y prefiltros en tiempo discreto.

Elevación	Controlador	$G_\epsilon(z) = \frac{4.004 z^2 - 7.944 z + 3.941}{z^2 - 1.761 z + 0.7606}$
	Prefiltro	$Pf_\epsilon(z) = \frac{0.001044 z + 0.001044}{z^2 - 1.908 z + 0.9103}$
Cabeceo	Controlador	$G_\rho(z) = \frac{2.929 z^2 - 5.745 z + 2.816}{z^2 - 1.501 z + 0.5007}$
Viaje	Controlador	$G_\tau(z) = \frac{5.21 z^2 - 10.37 z + 5.159}{z^2 - 1.961 z + 0.9617}$
	Prefiltro	$Pf_\tau(z) = \frac{0.0001532 z + 0.0001532}{z^2 - 1.939 z + 0.9393}$

CAPITULO 3: VALIDACIÓN DE LOS CONTROLADORES.

En este capítulo se muestra el resultado de la implementación de los controladores PID y QFT realizados en el capítulo 2, donde se evidencia el control de posición del helicóptero en sus tres grados de libertad, elevación, cabeceo y viaje, ante variaciones en los puntos de consigna y perturbaciones. Para la validación de dichos controladores se diseñó una interfaz gráfica donde se pueden observar las variables del proceso en tiempo real y variar los puntos de consigna. En la Figura 77 se observa la interfaz desarrollada en *Simulink* de *Matlab*®. Las instrucciones de uso de esta interfaz se encuentran en el anexo E: Guía de usuario Helicóptero 3GDL.

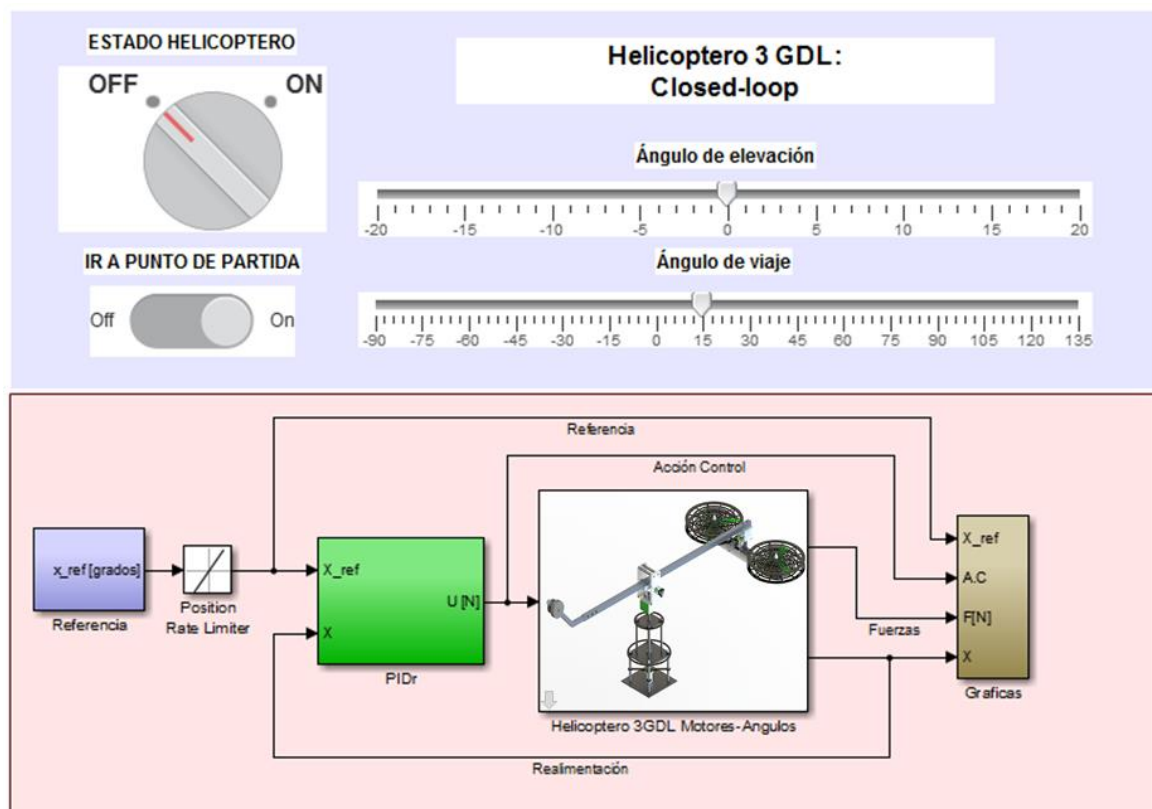


Figura 77. Interfaz gráfica.

La interfaz desarrollada cuenta con dos opciones para el ingreso de puntos de consigna. La primera opción que es determinada por el usuario mediante las barras deslizantes de los ángulos de elevación y viaje. La segunda opción se tiene la posibilidad de ingresar al sistema señales senoidales, cuadradas, rampas y de tipo escalón.

3.1 Controladores PID

La implementación de los controladores PID (2GDL) se muestran en la figura 78, donde se observa la comparación de la respuesta transitoria de los ángulos obtenida en la prueba y la simulación, ante puntos de consigna variables dados por el usuario por medio de las barras deslizantes. Para la prueba se utilizó el controlador QFT para elevación dado a que el PID diseñado desestabilizaba el sistema.

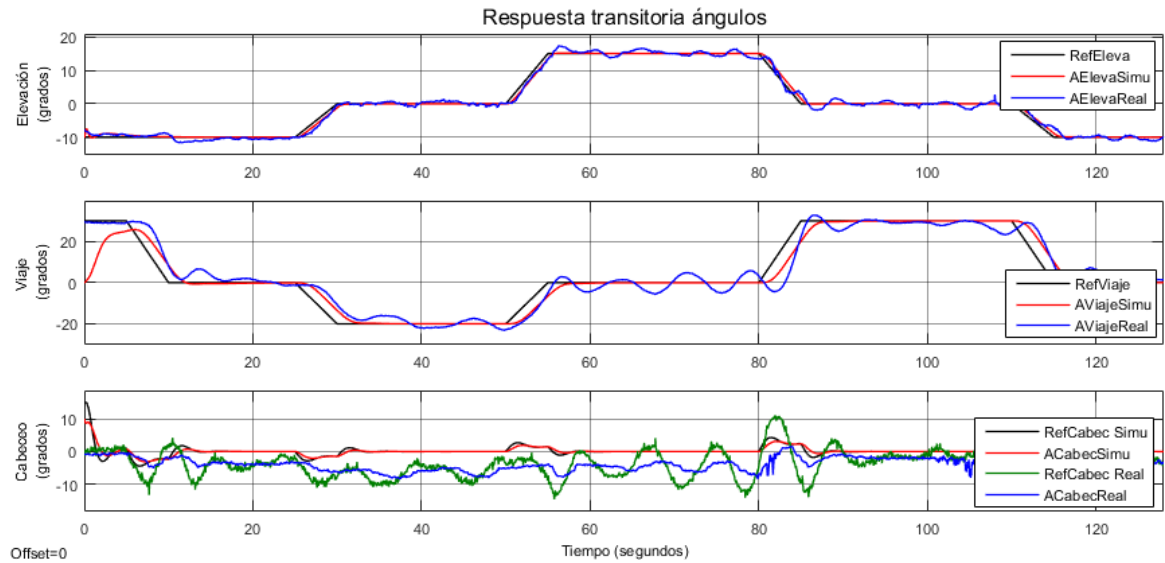


Figura 78. Validación de los controladores PID (2GDL) ante entradas aleatoria.

La segunda prueba se muestra en la Figura 79, donde se dio una señal senoidal para el ángulo de elevación y una señal cuadrada para el ángulo de viaje.

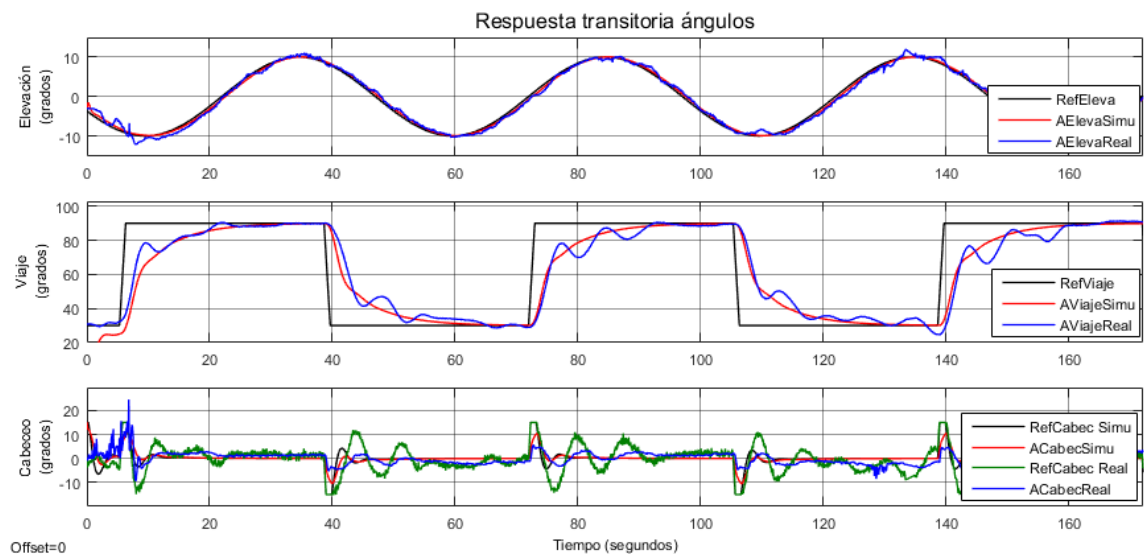


Figura 79. Validación controlador PID (2GDL) ante entrada senoidal y cuadrada.

Las frecuencias utilizadas para las señales implementadas en la Figura 79 se encuentran en la Tabla 16.

Tabla 16. Frecuencia de la señal de referencia.

Frecuencia de la señal de referencia	
Elevación	0.02Hz
Viaje	0.015 Hz

En la Figura 80 se observa la comparación de la acción de control en tiempo real y simulado de los controladores de la Figura 79.

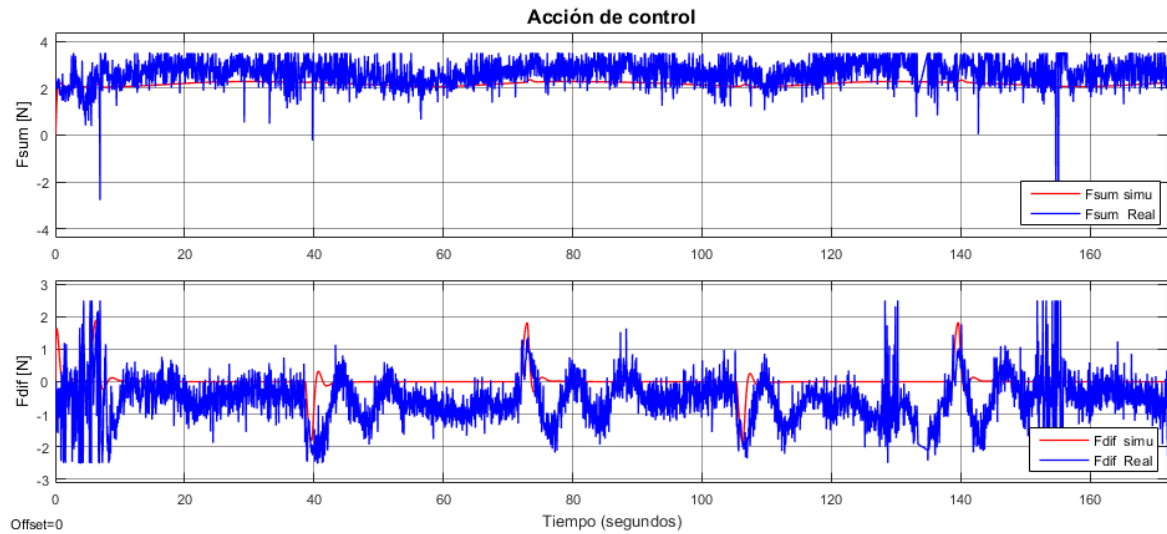


Figura 80. Acción de control PID (2GDL).

3.2 Controlador QFT sin corrección de *OFFSET*.

Para el controlador QFT de viaje se hizo un ajuste de offset descrito en la sección 1.3.1.3, debido al comportamiento observado en la Figura 81 en el que el controlador no logra llegar efectivamente al punto de consigna.



Figura 81. Validación del controlador QFT sin corrección de *offset*.

3.3 Controlador QFT.

La implementación de los controladores QFT diseñados en la sección 2.2 con ajuste de *offset* se muestran en la Figura 82, donde se observa la respuesta transitoria real y la simulada ante variaciones aleatorias en los puntos de consigna para ambas señales de referencia.

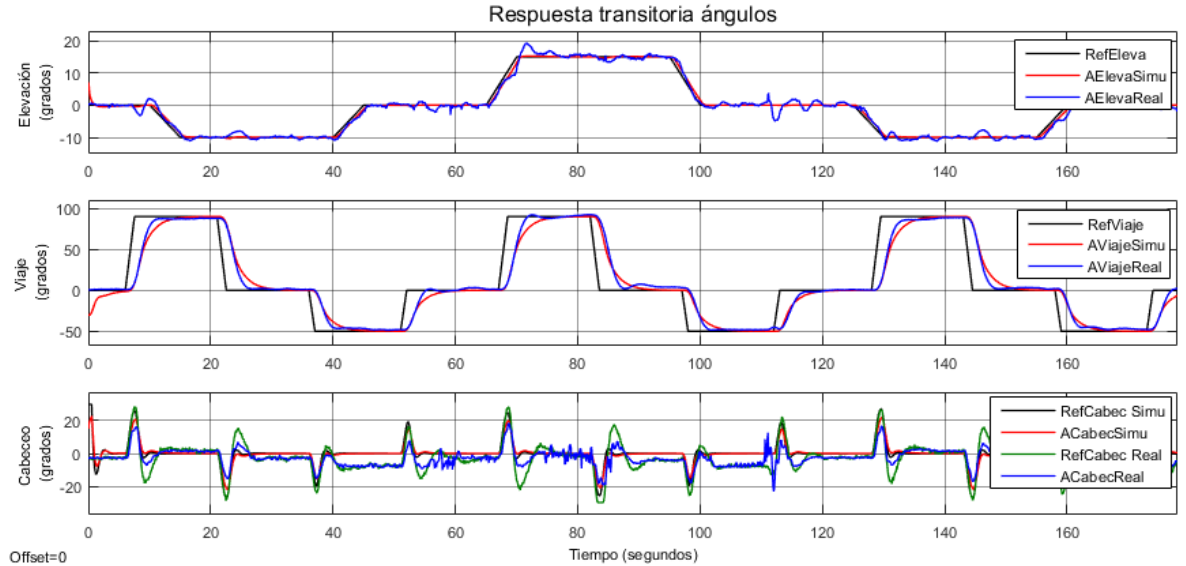


Figura 82. Validación del controlador robusto QFT.

En la Figura 83 se muestra la acción de control real y simulada del controlador QFT.

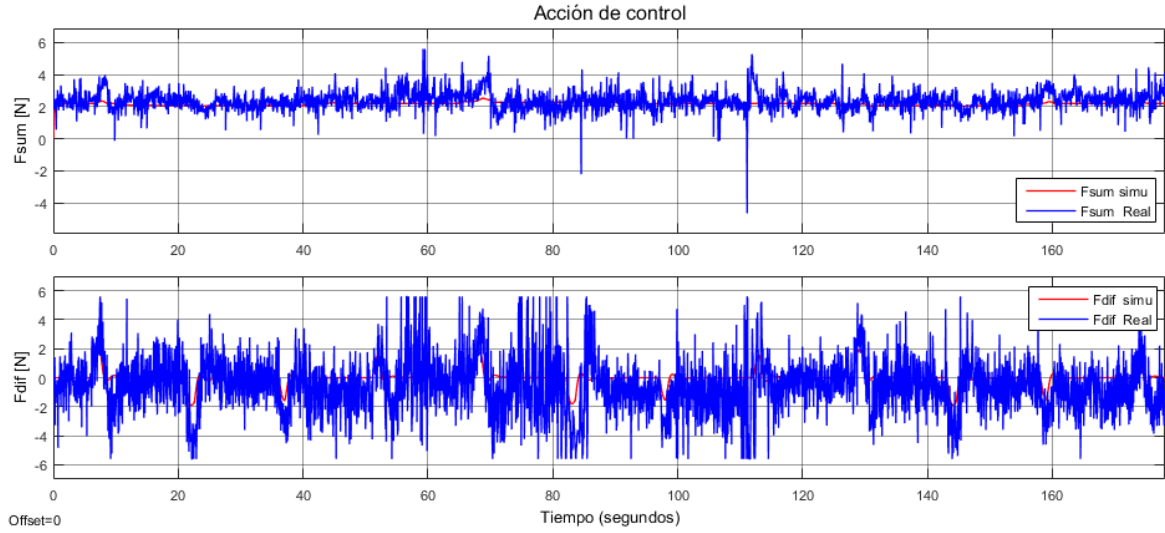


Figura 83. Acción de control robusto QFT.

En la validación de la Figura 84 se muestra la respuesta transitoria de los tres ángulos para una señal senoidal como punto de consigna para el ángulo de elevación y una señal cuadrada para el ángulo de viaje.

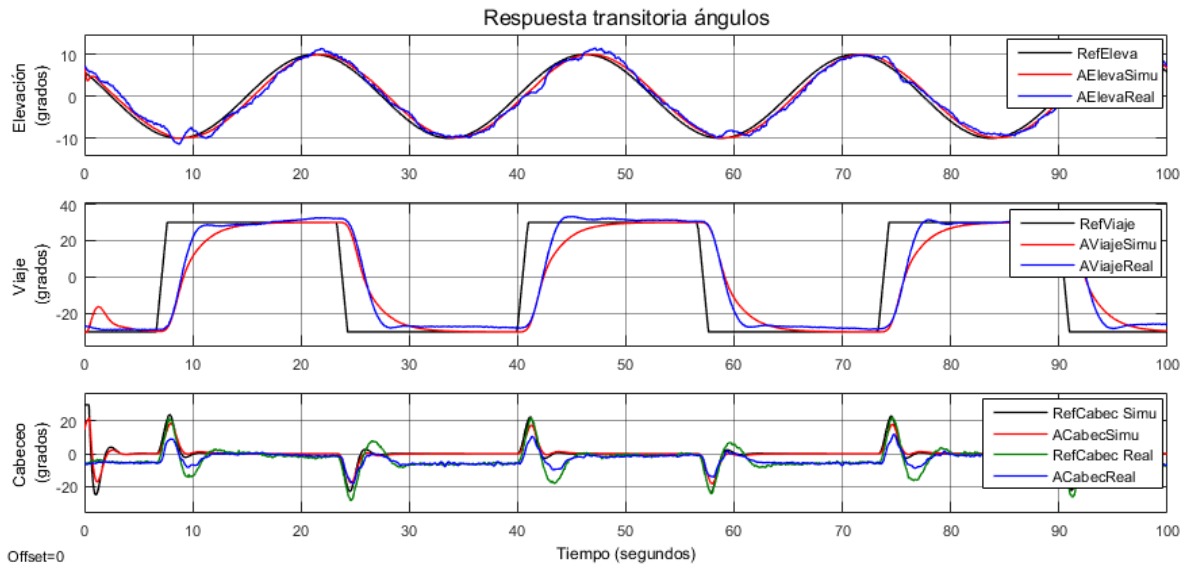


Figura 84. Validación del controlador QFT ante señal senoidal y cuadrada.

Las frecuencias utilizadas para las señales implementadas en la Figura 84 se encuentran en la Tabla 17.

Tabla 17. Frecuencias de las señales de referencia para controlador QFT.

Frecuencia de la señal referencia	
Elevación	0.04Hz
Viaje	0.03 Hz

En la Figura 85 se muestra la respuesta transitoria para una señal tipo rampa como punto de consigna para el ángulo de elevación y una señal senoidal para el ángulo de viaje.

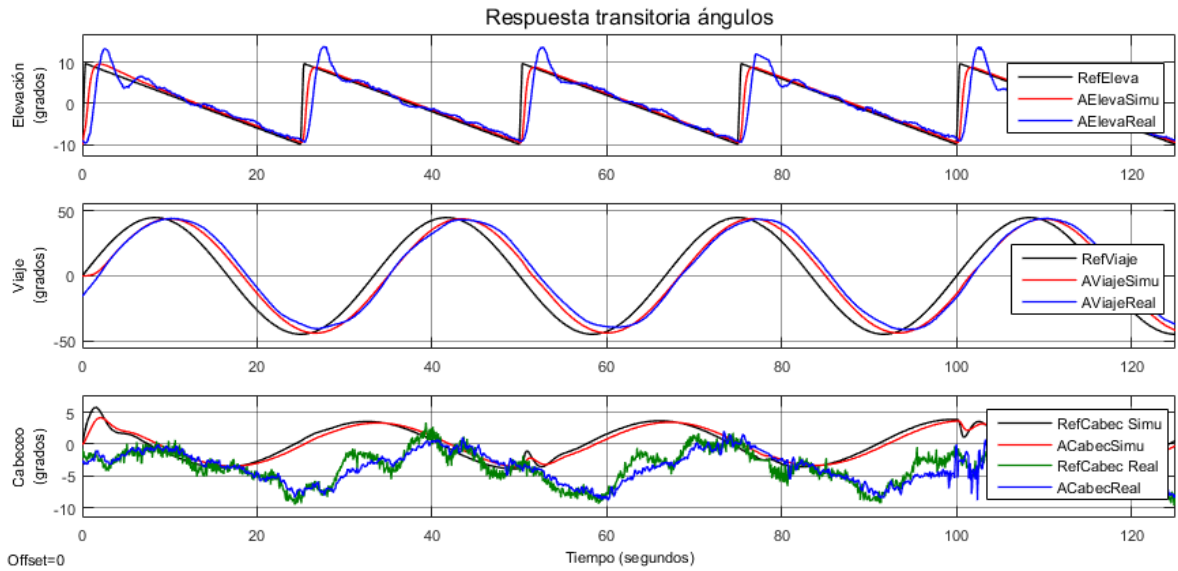


Figura 85. Validación controlador QFT.

Las frecuencias utilizadas para las señales implementadas en la Figura 85 se encuentran en la Tabla 18.

Tabla 18. Frecuencias de las señales de referencia para QFT.

Frecuencia de la señal referencia	
Elevación	0.04Hz
Viaje	0.03 Hz

CONCLUSIONES

- El prototipo de helicóptero 3GDL se hizo partiendo de las tres etapas fundamentales para la construcción de un sistema mecatrónico, diseño mecánico, electrónico y de control, contando con las mismas características de funcionamiento de un prototipo comercial, obteniendo de esta manera el mismo beneficio a un menor costo.
- Con base en el diseño mecánico se determinó la diferencia de masa de 200g entre la estructura motores y el contrapeso, siendo esta equivalente a una fuerza aproximadamente de 2N para mantenerlo en su punto de equilibrio. No obstante, dado a que se requiere elevar el helicóptero por encima de 0 grados en elevación se estima en un 200%, es decir 4N. Por otro lado, en la simulación del sistema de control se determinó que dicha fuerza fue realmente de 2.2N, estando dentro del rango seleccionado. A partir de este valor se hizo la selección de los motores con características de empuje que satisficieran la demanda. Los motores seleccionados tienen un empuje máximo de 780g a 11.1V, que en fuerza corresponde a 7.6N rango suficiente para la aplicación. Teniendo en cuenta que estos motores ejercen cierta fuerza de empuje por voltio de alimentación, en la caracterización, estos se alimentaron a 8.1V, donde se obtuvo una fuerza máxima de 4N, validando que este valor se encontraba dentro del rango del análisis hecho.
- En la comparación de las estrategias de control PID de un grado de libertad y dos grados de libertad, se observó que la estrategia 2GDL tiene mejor respuesta dadas las características de sobrepaso, tiempo de establecimiento y tiempo de levantamiento; fue por esto que solo se hizo la implementación del controlador PID 2GDL en el prototipo.
- La implementación del controlador PID 2GDL se hizo para los tres ángulos, sin embargo, se observó que el lazo de elevación desestabilizaba el helicóptero, por esta razón se utilizó el controlador QFT para este lazo, validando así los controladores PID 2GDL para cabeceo y viaje.

- Fue necesario hacer un ajuste de offset para el control del ángulo de viaje, dado a que se observó en pruebas realizadas que el sistema no llegaba a su punto de consigna al hacer una variación en este. Del análisis de la situación se concluye que esto ocurre por las características del sensor, ya que para la lectura de este ángulo se utilizó un potenciómetro lineal de una vuelta sin tope con una zona muerta de ± 5 grados causando un desfase en la lectura del ángulo.
- Para el diseño de los controladores QFT se establecieron las tres funciones de transferencia parametrizadas correspondientes a los tres grados de libertad del prototipo, elevación, cabeceo y viaje, siendo estas el punto de partida para el diseño de los controladores robustos. Para esto, fue necesario diseñar un control en cascada para la regulación de viaje, dado a que esta estrategia permite controlar sistemas subactuados (más grados de libertad que actuadores).
- El diseño mediante la estrategia de control robusta en frecuencia QFT permite conseguir compensadores manipulados bajo los términos de robustez y rendimiento, obteniendo regulaciones óptimas en términos de tiempos de establecimiento, sobrepasos e incluyendo la posibilidad que el sistema pueda responder adecuadamente ante perturbaciones, como se observó en la implementación este tipo de controladores ofrecen características, de rechazo a perturbaciones, tiempos de establecimientos acorde a la dinámica y sobrepasos mínimos comparados al controlador PID 2GDL.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Stenholm, E. B. (1 de Junio de 2015). Modelling & Control of a 3DOF Helicopter. Linköping, Suecia.
- [2] Diaz, A. B. (2010). Diseño y construcción de un helibot 3 DOF (Helicoptero de 3 GDL) como herramienta de investigación y desarrollo para el laboratorio de sistemas dinamicos e ingenieria del control. Bucaramanga, Santander, Colombia.
- [3] MathWorks. (2017). Diseño y utilización de filtros Kalman en Matlab y simulink. Obtenido de MathWorks: <https://es.mathworks.com/discovery/filtros-kalman.html>
- [4] RC Models Wiz: Essential Guide to Electric Speed Control Systems. Obtenido el día 10-11-2016 de URL: <http://www.rcmodelsfiz.co.uk/electronic-speed-controllers-esc/>
- [5] Circuitcalculator. (2016).Pcb trace width calculator. Obtenido el dia 05-05-2017 de URL: <http://circuitcalculator.com/wordpress/2006/01/31/pcb-trace-width-calculator/>
- [6] Williams A. P. L. (2013) Análisis y comparación de sistemas de control PID y PID difuso en lógica reconfigurable. Universidad de Istmo. México.
- [7] Alfaro, V., Arrieta, O., & Vilanova, R. (2009). Control de Dos-Grados-de-Libertad (2-GdL) aplicados al "Benchmark" de Sistemas para controladores PID. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 59-67.
- [8] F. Rodríguez-Rubio and M.-J. López-Sánchez. (1996) Control Adaptativo y Robusto. Universidad de Sevilla.
- [9] Martínez, M. G. (2008). Síntesis de controladores robustos mediante el análisis de la compatibilidad de especificaciones e incertidumbres. Pamplona: Universidad de La Rioja. Servicio de publicaciones.
- [10] González, F. J. V., Rodríguez, T. M. R., García, E. L., Pérez, E. M., & López, J. L. N. Aplicación del Control QFT Robusto a la Maniobra de Cambio de Rumbo de un Buque.
- [11] C. H. Houpis, S. N. Sheldon, y J. J. D'Azzo, Linear Control System Analysis and Design: Fifth Edition, Revised and Expanded. CRC Press, 2003.

ANEXOS

ANEXO A: Cotización Quanser



INSTRUMENTACION - CONTROL
Y LABORATORIOS
NIT. 830.007.414-9

Cra. 36A No. 57 - 22 Tels.: (571) 221 6664/8239 - 702 6148
Telefax: 221 6669 • www.icl-didactica.com
ventas@icl-didactica.com • info@icl-didactica.com
BOGOTÁ, D.C. - COLOMBIA





COTIZACIÓN No. 10015-0

Señores:
Universidad Autónoma
Atn. Ing. Rocio Paobon Ortega
Bucaramanga



Fecha: 19 de Agosto 2016
Ponente: Steven Martínez Vargas
Tel: 2216664 Cel: 310 2339824
E-mail: smartinez@icl-didactica.com

Muchas gracias por su interés en nuestros productos marca QUANSER. En referencia a nuestras condiciones de venta les ofrecemos:

ITEM	CANT	DESCRIPCIÓN	VALOR UNITARIO	VALOR TOTAL
3DOF Helicopter Workstation (Q8-USB)				
1	1	 3DOF HELI - 3 DOF Helicopter Experiment	\$ 58.814.800	\$ 58.814.800
1.1	1	 VoltPaq-X2 - 2 Channel Power Amplifier	\$ 9.823.431	\$ 9.823.431
1.2	1	 Q8-USB - Q8-USB Data Acquisition Device	\$ 10.805.810	\$ 10.805.810
1.3	1	 QUARC for Windows single-user license - Real-Time Control Software - Quanser's new & professional multi-functional rapid controls development and deployment environment for use with MathWork's software. Please see on-line documentation for full feature list and descriptions and QuaRC Compatibility Table for specific hardware and software version requirements. Stand-alone License only - for networked license, please choose the network license option.	\$ 1.833.711	\$ 1.833.711
SUBTOTAL 3DOF Helicopter Workstation				\$ 81.277.753

ANEXO B: Datasheet potenciómetro lineal

SPECIFICATION

OUR PART NAME: WDJ22A-20S-B5K(G)

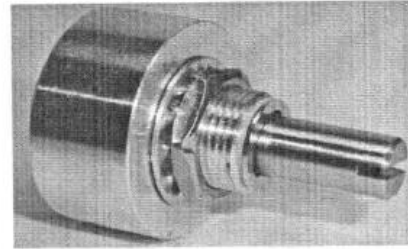
CUSTOMER'S PART NAME: _____

NO: C10A025

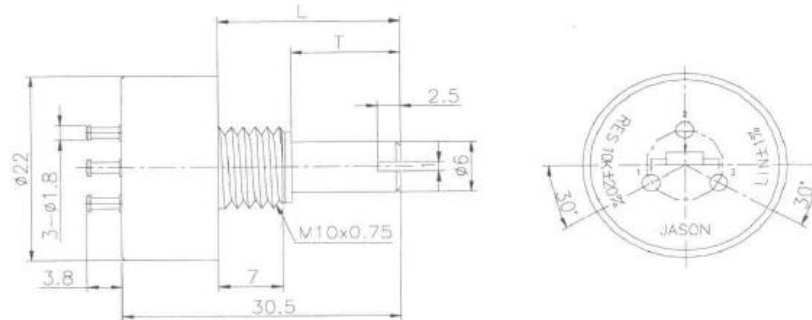
CUSTOMER'S NAME: 贊順企業有限公司

DATE: 2010.11.10

- Plastic housing
- Conductive plastic element with high resolution
- Resistance range 1 kohms to 100 kohms $\pm 20\%$
- Standard linearity tolerance $\pm 1\%$
- Rotational life 1 million shaft revolutions
- Electrical angle 350° ($+0^\circ \sim -5^\circ$)
- Mechanical angle 360° without stop
- Angular sensor
- Special operating torque



Dimensions



ELECTRICAL CHARACTERISTICS

- Technology
- standard resistance value
- Resistance taper
- standard resistance tolerance
- standard linearity tolerance
- Type of linearity
- Power rating
- Maximal recom .wiper current
- Insulation resistance
- Withstand voltage
- Temperature coefficient
- Effective angle

Conductive plastic

□ 1K , ■ 5K , □ 10K(special upto 100k)

□ A , ■ B , □ C

$\pm 20\%$

$\pm 1\%$

Independent linearity

0.5W / 70 °C

1mA ~ 10mA

500M Ω Min at 500V DC

1 Minute at 500V AC

$\pm 500\text{PPM} / ^\circ\text{C}$

350° ($+0^\circ \sim -5^\circ$)

MECHANICAL CHARACTERISTICS

- Mechanical angle
- Rotational life (shaft revolutions)
- Get up
- Operating temperature
- Bushing nut tightening strength

360° without stop

10,000,000 cycles

<0.098N (MAX)

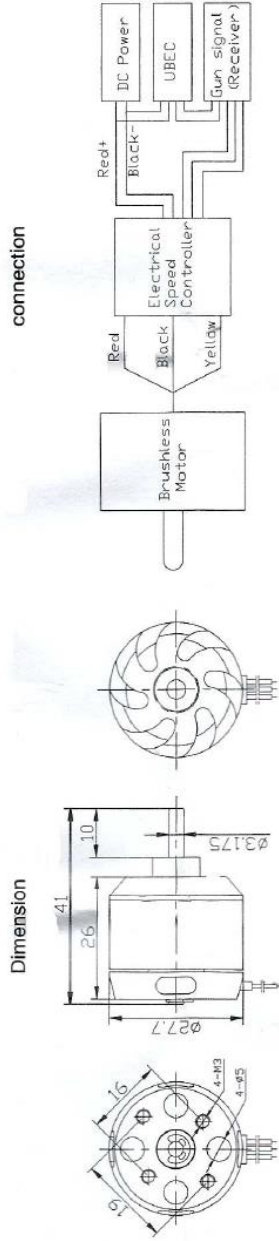
$-40^\circ\text{C} \sim +125^\circ\text{C}$

More than 6 kg

JASON ELECTRONICS INDUSTRY LTD.

ANEXO C: Datasheet del motor

D2826 Out Runner Brushless Motor Instruction



Congratulations for your purchase of high performance brushless outrunner motor series. Our motors are designed to use perfectly with our own electronic speed controllers. But it is also possible to use them with most of other common electronic speed controllers. The motors are designed for running clockwise or counterclockwise. To change the turning direction you just simply exchange the red and yellow connection wire. If you want to use other speed controllers, please refer to your controller instruction manual.

D2826 (2212) SERIES OUTRUNNER BRUSHLESS MOTOR

Model	Volts	KV (rpm/v)	Max pull	Weight	Motor size	Shaft size	Max power	ESC(A)	Battery/prop
D2826-6	7.4-11.1V	2200	960g	50g	Φ 27.7*26mm	Φ 3.175x41mm	342watt	40A	LiPo2/7x3
D2826-10		1400	780g				205watt		LiPo2/9x4.7
D2826-13		1000	660g				150watt		LiPo2/11x7
D2826-15		930	645g				130watt		LiPo2/12x6

Product description

1. Mount your motor with the includes screws tightly on your front cover of model.
2. Our motors provide high efficiency stator design.
3. Small size, lightweight and long life.

ATTENTION:

1. Please make sure your motor has enough cooling while running. Consider to put a whole into your model motor cover to improve the ventilation.
2. Our motors providing best performance with the recommended propeller size. If you consider to change the propeller size be aware that motor can overheat and damaged.
3. Keep motors away from moisture, dust, scrap and small items to avoid damages. We wish you many happy landings with our long life quality equipment.