Los modelos de valoración de derivados: una construcción de destacados científicos

JAIME ÁNGEL RICO ARIAS
MARÍA EUGENIA SERRANO ACEVEDO

"Si pudieras ver en las semillas del tiempo,
y vaticinar cuál semilla crecerá y cuál no,
háblame entonces ..."
Shakespeare,Macbeth, Acto I, Escena II

Los mercados de derivados han venido tomando una gran importancia en el campo de las finanzas y la inversión, los modelos de valoración diseñados han resultado ser innovaciones de gran éxito; desde décadas recientes estos modelos han revolucionado la teoría financiera moderna. En estos mercados se realizan operaciones diarias por más de dos billones de dólares y son frecuentes los productos derivados financieros y estructurados que están diseñados o construidos para alcanzar objetivos específicos de financiación o inversión tales como futuros, opciones, y su combinación deseada de características de riesgo y rendimiento.

El análisis práctico de una amplia gama de transacciones bursátiles ha convertido a muchos en manipuladores de diferentes modelos matemáticos tales como árboles binomiales iterados, duplicación de carteras y arbitraje, modelos continuos, fórmula de *Black- Scholes* y sus extensiones.

Los modelos de valoración de derivados, como se conocen actualmente, han sido construidos a partir de la Física, la Estadística y el Cálculo Estocástico.
De la Física se tomaron fenómenos como la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty, \tau > 0$$

con la condición de frontera

$$u(x,0) = u_0(x)$$

desarrollada por Joseph Fourier en su publicación "La Théorie Analitique de la Chaleur" (1822), Esta ecuación es muy útil en finanzas, en la solución del problema de valoración de derivados que en muchos casos puede reducirse a resolver esta ecuación que tiene soluciones explícitas.

En 1827 un botánico Inglés llamado Charles Brown observó el movimiento de partículas en un fluido, las cuales seguían una trayectoria aleatoria que no pudo ser explicada por la física determinista de Newton y aunque varios físicos trataron de explicarlo no llegaron a una solución satisfactoria.

Pasaron más de 70 años hasta que Albert Einstein en 1905 pudo explicarlo a partir de la teoría cinética de los gases y lo llamó por primera vez movimiento browniano en honor a quien lo observó por primera vez; además, comprobó que el desplazamiento de la partícula entre dos instantes de tiempo no depende de las posiciones anteriores y además demostró que la distribución de probabilidad que rige el movimiento de la partícula sólo depende del tiempo, verificándose la ecuación de difusión.

Casi en el mismo tiempo un físico-matemático francés llamado Luis Bachelier hace contribuciones a la teoría financiera y ha sido llamado el "Padre de las matemáticas financieras modernas" ; en su trabajo; posiciona las finanzas como una ciencia sujeta a rigor matemático, introduciendo los conceptos de movimiento browniano, procesos de Markov, esperanza condicional y Martingala, conceptos que fueron redescubiertos años después por eminentes matemáticos (los procesos markovianos en 1906, la noción formal de esperanza condicional por Kolmogorov en 1933 y el concepto de Martingala por Lévy en 1937).

También se le debe a Bachelier el modelo de dinámica de los precios de las acciones usando el movimiento browniano, la primera representación gráfica del precio de una opción, la formulación de los mercados eficientes, la primera formula de valoración de una opción y la primera definición cuantitativa del riesgo de mercado.

En su tesis doctoral llamada "Teoría de la especulación[2]", abordó la explicación del movimiento del precio de los activos como una variable aleatoria que se distribuye normalmente, teoría que presentó el problema de mostrar precios negativos en los activos. Esto fue superado posteriormente por el economista Paul Samuelson en 1965[3], quien en un viaje a París tuvo la oportunidad de leer la tesis de Bachelier que le aportó los elementos necesarios para desarrollar un modelo de valoración de opciones en el cual el precio de un activo subyacente es conducido por un movimiento browniano geométrico, modelo que toma sólo valores positivos de los precios corrigiendo así el problema presentado en el trabajo de Bachelier, asumiendo que los rendimientos se distribuyen normalmente y, por tanto, los precios de los activos siguen una distribución lognormal representada por la siguiente ecuación:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

Donde $S(t)$ es el precio de la acción en el tiempo t, μ, σ constantes y B es el movimiento browniano.

Todos estos conocimientos fueron usados posteriormente por Black, Scholes (1973) quienes desarrollaron el modelo de valoración que lleva sus nombres (Modelo Black-Scholes[4]). Este modelo se usa para valorar una opción de compra, bajo condiciones de equilibrio sobre una acción cuya dinámica es conducida por el movimiento browniano geométrico, corrigiendo así el problema de dos parámetros desconocidos que aparecían en el modelo de Paul Samuelson. El primer parámetro es el rendimiento medio esperado del subyacente, relacionado con las preferencias al riesgo de los agentes; el segundo es el rendimiento que pagan las opciones que se

2Bachelier, L. "Théorie de la speculation", Industrial Management. Review, 6 (1965), pp 13-39.
3 Samuelson, PA. "Racional Theory of Warran Prices", Industrial Management. Review, 6 (1965), pp 13-31.
4 Black, f., y Scholes M. "The pricing of options and corporate Liabilities", Journal of Politic Economy, 1973.

utiliza para traer a valor presente el pago esperado de la opción al vencimiento.

Black y Scholes obtienen una ecuación diferencial parcial de segundo orden parabólica lineal, que representa un avance importante en el pensamiento financiero

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

cuya solución es el precio de una opción europea cuando la condición final es el valor intrínseco de la opción de compra y de la opción de venta respectivamente:

$$V_c = S_0 N(d_1) - Xe^{-r\tau} N(d_2),$$

$$V_p = -SN(-d_1) + e^{-r\tau} XN(-d_2)$$

Ellos usaron una conocida fórmula del cálculo estocástico llamada el Lema de Ito y y a partir de ella valoraron una opción europea construyendo un portafolio que elimina la aleatoriedad del movimiento browniano teniendo en cuenta que el derivado y el subyacente comparten el mismo nivel de riesgo.

También en 1973 Merton[5] generalizó la fórmula de Black-Scholes, extendiéndola en varias direcciones, flexibilizando el supuesto de tasa de interés, asumiendo que fuera de carácter estocástico, con pago continuo de dividendos, también desarrolla un modelo de opciones americanas, generaliza la fórmula de Samuelson para opciones perpetuas, valuación de opciones con barreras (opciones exóticas o de segunda generación) y un modelo de tasa corta, en 1977 desarrolla el concepto de opciones sintéticas mediante un activo subyacente y un bono libre de riesgo.

La ecuación de Black-Scholes- Merton es muy destacada en el sector financiero y representa la base para valuar diversos productos derivados, combinando cada vez las condiciones de frontera, encontrándose soluciones que representan los precios de muchos derivados financieros que están en el mercado.

Por este trabajo Merton y Scholes en 1997 (Black ya había fallecido) recibieron el premio Nóbel en Economía siendo precursores del desarrollo científico de la Ingeniería Financiera que, como queda demostrado, se fundamenta en las Ciencias Naturales, la Economía, la Matemática, la Innovación y la Tecnología.

Estos modelos sentaron las bases para valoraciones económicas y facilitaron el surgimiento de nuevos tipos de instrumentos financieros y una administración más eficiente del riesgo; también han sido usados en otras áreas de la economía como: la teoría del crecimiento neoclásico en un entorno incierto, empresas competitivas con precios inciertos, tasas estocásticas de inflación, crecimiento en ambientes de incertidumbre, valoración de empresas por medio de opciones reales.

La real importancia de estos modelos de valoración está en que han hecho posible una administración científica del riesgo; también se han usado para diseñar estrategias de negociación para protegerse contra los riesgos financieros.

BIBLIOGRAFÍA

- Stampfli Joseph/ Goodman Victor. Matemática para finanzas. Editorial Thomson. 2002.
- Marshall John F. Diccionario de Ingeniería Financiera. Editorial Deusto. 2002
- Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones. John C. Hull. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall. ISBN: 84-205-3386-6 .
- Prosper Lamothe y Miguel Pérez Somalo. Opciones Financieras y Productos Estructurados.. 2ª. Edición. Editorial Mc Graw Hill 2003. ISBN 84-481-3926-7.
- Bennigna, Simon. Financial Modeling. MIT Press. Cambridge, 2ª Edición 2000. ISBN 0-262-02482-9 .

5 MERTON, R. "Theory of Racional Option Pricing", Bell Journal of Economies, Primavera, Págs. 141-183, 1973.

□ Rodríguez de Castro. Introducción al análisis de productos Financieros derivados.. Editorial LIMUSA. 2ª Edición 1998. ISBN 968-185418-7 .

□ Diaz Carmen. Futuros y Opciones Sobre Futuros Financieros. Prentice Hall. México 1998. 1ª Edición. ISBN 970-17-0127-5 .

□ Hull C. John. Options, Futures, and Other Derivatives. 5 Edición. Prentice Hall USA. 2003. ISBN 0-13-009056-5 .

□ Reuters.Curso Sobre Derivados. Ed. Gestión 2000. 1ª Edición 2001. ISBN 84-8088-585-8 .

□ Díaz Tinoco, Hernández Trillo. Futuros y Opciones Financieras. Una Introducción. 3ª Edición 2000. Ed. Limusa. ISBN 968-18-6038-1 .

□ J. Rodríguez de Castro. Introducción al análisis de productos financieros. 2ª Edición 1998. Ed. Limusa. ISBN 968-181418-7 .

□ Merton H. Miller. Los Mercados de Derivados. Gestión 2000. 1ª Edición 1999. ISBN 84-8088-310-3 .

□ Xavier Puig Jordi Viladot. Comprender los Mercados de Futuros. Gestión 2000. 3ª Edición 2001. ISBN 84-8088-582-3 .

□ Robert w. Kolb. Financial Derivatives. New York Institute of Finance. 1ª Edición 1993.

□ Merton H. Miller. Los Mercados de Derivados. Gestión 2000. 1ª Edición 1999. ISBN 0-13-051559-0 .

□ Venegas Martínez, Francisco. Riesgos Financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. 1ª Edición 2006. Editorial Thomson. ISBN 970-686-574-8.

□ Bachelier, L. "Théorie de la speculation", Industrial Management. Review, 6 (1965), pp 13-39.

□ Samuelson, PA. "Racional Theory of Warran Prices", Industrial Management. Review, 6 (1965), pp 13-31.

□ BLACK, F., y SCHOLES M. "The pricing of options and corporate Liabilities", Journal of Politic Economy, 1973.

□ MERTON, R. "Theory of Racional Option Pricing", Bell Journal of Economies, Primavera, pp. 141-183, 1973.

□ Brown,R.(1828). A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General existence of Active Molecules in organic and inorganic bodies. Edinburgh New Philosophical Journal, July September, pp.358-371.