

# Modelado dinámico no lineal del movimiento de un Quadrotor

## Investigación en curso

Gilmar Hernando Tuta Navajas  
Facultad Ingenierías Fisicomecánicas,  
Ingeniería Mecatrónica  
[gtuta@unab.edu.co](mailto:gtuta@unab.edu.co)

## Universidad Autónoma de Bucaramanga

### RESUMEN

Durante los últimos años los vehículos aéreos no tripulados se están convirtiendo cada vez más populares, debido a su gran cantidad de aplicaciones que posee. Uno de estos vehículos que ha tomado gran importancia es el quadrotor, debido a su maniobrabilidad y tamaño, convirtiéndose en objeto de estudio. Por esta razón se plantea el modelo no lineal de un quadrotor por medio de la formulación Newton- Euler, para esta manera poder simular su dinámica, y poner a prueba técnicas de control lineales sobre el modelo no lineal que se asemeja más a la realidad.

### ABSTRACT

In recent years, unmanned aerial vehicles are becoming increasingly popular due to its many applications it has. One of these vehicles that has become very important is the quadrotor. Because of its maneuverability and size, taking great importance in many research areas. For this reason, this articles presents the nonlinear model of a quadrotor applying Newton-Euler formulation, with the goals of simulate its dynamic , and testing linear control techniques on the nonlinear model that is closer to real system.

Área de Conocimiento

Ingenierías.

Palabras Clave

Quadrotor,Newton-Euler,modelado.

### INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años se han alcanzado grandes avances en la industria de los vehículos aéreos no tripulados(UAV) que gracias a su configuración y función, nos permite realizar distintas tareas de gran utilidad para el hombre.

Uno de los UAV más conocido es el quadrotor, el cual es un aeronave que es muy similar a un helicóptero, pero a diferencia de este, está conformado por cuatro motores que permiten una mayor maniobrabilidad, que funcionan por pares, dos giran en sentido horario y el otro par en sentido anti-horario.

Teniendo en cuenta la importancia de estas aeronaves y la relación con los sistemas mecatrónicos se propone un estudio dinámico de esta aeronave para comprender su comportamiento físico y además, usar este modelo para probar algunas técnicas de control lineales, para obtener una respuesta más aproximada del modelo real debido a que el modelo lineal no posee toda la riqueza del comportamiento dinámico del sistema.

### OBJETIVOS

Objetivo General

Realizar el análisis dinámico de un quadrotor.

Objetivos Específicos

- Formular el modelo matemático que describa la dinámica de un quadrotor.
- Realizar una simulación del prototipo del quadrotor en donde se pueda detallar su dinámica.
- Interpretar los resultados obtenidos en la simulación y hacer una interpretación física.

Este material es presentado al VI Encuentro Institucional de Semilleros de Investigación UNAB, una actividad carácter formativo. La Universidad Autónoma de Bucaramanga se reserva los derechos de divulgación con fines académicos, respetando en todo caso los derechos morales de los autores y bajo discrecionalidad del grupo de investigación que respalda cada trabajo para definir los derechos de autor. Conserve esta información

### METODOLOGÍA

Para el planteamiento del modelo matemático, se utilizó la formulación de Newton-Euler, para el caso de tres dimensiones. Para el cual se determinó primero, la orientación del vehículo y posteriormente se procedió a aplicar la ecuación de Euler para el caso 3D, que consiste en sumatoria de momentos efectivos es igual a la sumatoria de momentos de fuerzas externas.

Por último se aplicó la segunda ley de Newton.

### RESULTADOS

El diagrama de cuerpo libre del quadrotor se presenta en la figura 1, el cual me indica las fuerzas que actúan sobre la aeronave, estas son: el empuje generado por cada motor y el peso del vehículo.

También se indican los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada, que son los que resultan al rotar con respecto a los ejes X, Y y Z respectivamente.

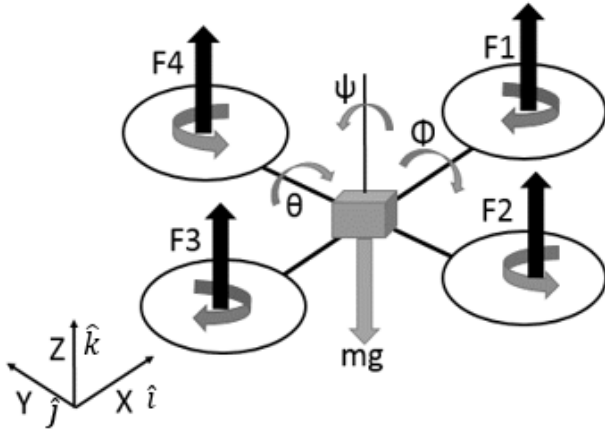


Figura1. Diagrama de cuerpo libre del quadrotor.

Para simplificar el modelo dinámico se tomaron en cuenta algunas suposiciones, se asumirá todo el quadrotor como un cuerpo rígido, su centro de gravedad se encuentra ubicado en todo el centro y simétrico con respecto a todos los ejes.

#### Orientación del quadrotor

Debido a que el vehículo puede rotar en los tres ejes, se hace necesario conocer su orientación con respecto a un sistema en tierra. Por lo tanto se debe determinar una matriz de transformación de coordenadas fijas en el cuerpo a coordenadas de un sistema inercial. Esta matriz se calcula realizando rotaciones alrededor de los tres ejes [1]. A continuación se presenta la manera en cómo se obtiene la matriz transformación:

Donde c es coseno y s es el seno.

$$R_I = R_z R_y R_x$$

$$R_I = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

El resultado de esa multiplicación se presenta a continuación:

$$R_I = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

#### Momentos

La ecuación para sumatoria de momentos en tres dimensiones es [1]:

$$\Sigma M = \overline{ros} \times m_s a_s + I^{S/S} \cdot \alpha^{N \rightarrow S} + \omega^{N \rightarrow S} \times \left( I^{S/S} \cdot \omega^{N \rightarrow S} \right) \quad (3)$$

Para simplificar el cálculo se realiza momentos con respecto al centroide del sistema que se asume en el centro de la aeronave.

Para el término  $I^{S/S} \cdot \alpha^{N \rightarrow S}$ , se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{XX} \ddot{\phi} \\ I_{YY} \ddot{\theta} \\ I_{ZZ} \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para el término  $\omega^{N \rightarrow S} \times \left( I^{S/S} \cdot \omega^{N \rightarrow S} \right)$ , se tiene en cuenta las velocidades angulares con respecto a cada dirección y se calcula:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}_X \left( \begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \dot{\theta} I_{YY} + \dot{\psi} \dot{\theta} I_{ZZ} \\ \dot{\psi} \dot{\phi} I_{XX} - \dot{\phi} \dot{\psi} I_{ZZ} \\ -I_{XX} \dot{\theta} \dot{\phi} + \dot{\phi} \dot{\theta} I_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Los términos hallados anteriormente son denominados como efectos giroscópicos propios del cuerpo rígido.

Por otra parte, debido a que los motores se encuentran girando con respecto al centroide, producen efectos giroscópicos, estos se pueden calcular de manera similar a los del cuerpo [2].

$$J_R \left[ \omega^{N \rightarrow S} \right]_X \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Omega$$

$$J_R \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} \Omega = \begin{bmatrix} J_R \dot{\theta} \Omega \\ -J_R \dot{\phi} \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Omega = \omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3$$

Donde  $\Omega$ , representa la suma total de las velocidades angulares de los motores del quadrotor, que según el DCL, dos son en dirección horaria y los otros en antihorario y  $J_R$  es la inercia del motor.

Del otro lado de la igualdad se tienen las fuerzas que producen momentos con respecto a cada uno de los ejes, en este caso esta fuerzas son las fuerzas de empuje  $F_i$ , que generan cada uno de los

motores. Por lo que la fuerza que genera momento en cada dirección es la diferencia de las fuerzas de empuje de los motores, y el brazo de palanca  $l$  es la distancia desde el centro de gravedad del quadrotor hasta el centro del motor donde se genera el empuje.

Después de pasar al otro lado de la igualdad los términos de efectos giroscópicos se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} \cdot \ddot{\phi} + \dot{\psi} \dot{\theta} (I_{zz} - I_{yy}) + J_R \dot{\theta} \dot{\Omega} \\ I_{yy} \cdot \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\phi} (I_{xx} - I_{zz}) - J_R \dot{\phi} \dot{\Omega} \\ I_{zz} \cdot \ddot{\psi} + \dot{\phi} \dot{\theta} (I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(F_4 - F_2) \\ l(F_3 - F_1) \\ l(F_4 + F_2 - F_3 + F_1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Fuerzas

Para el caso de la sumatoria de fuerzas, se aplica la segunda ley de Newton que indica  $m\vec{a}_s = \sum \vec{F}_i$  [1], donde se tienen las aceleraciones en cada una de las direcciones y las fuerzas que actúan en cada dirección, estas se multiplican por la matriz de transformación y se multiplica por  $[0 \ 0 \ 1]^T$  que me indica la dirección donde actúa la fuerza.

$$\begin{bmatrix} m\ddot{X} \\ m\ddot{Y} \\ m\ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \\ \dots \\ R_f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \\ -mg + R_f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Después de realizar las respectivas operaciones se obtiene:

$$\begin{bmatrix} m\ddot{X} \\ m\ddot{Y} \\ m\ddot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \\ -mg + \cos \theta \cos \phi (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) \end{bmatrix} \quad (9)$$

#### IDENTIFICACIÓN DEL PROYECTO

Nombre del Semillero	Modelado y simulación
Tutor del Proyecto	Sebastián Roa Prada
Grupo de Investigación	Control y Mecatrónica
Línea de Investigación	Modelado
Fecha de Presentación	

#### CRONOGRAMA

ACTIVIDAD	DURACIÓN	INICIO
Modelo dinámico	1 mes	Enero 2015
Simulación a lazo abierto	1 mes	Febrero 2015
Diseño del controlador	1 mes	Marzo 2015
Simulación del modelo lineal y no lineal	1 mes	Abril 2015

#### REFERENCIAS

- K. Anderson, *curso Machine Dynamics*, Departamento de ingeniería mecánica aeroespacial y nuclear, Rensselaer Polytechnic Institute
- H. Voos, «Nonlinear State-Dependent Riccati Equation Control,» de *International Conference on Control Applications*, Munich, Germany., 2006