Algoritmo estocástico para solución de un problema de control.

Alina Fedossova,
Kafarov V.
Mahecha Bohórquez

Algoritmo estocástico para solución de un problema de control.

Fedossova, Alina, Ph.D., email: afedosova@unab.edu.co
Kafarov V., email: kafarov@uis.edu.co
Mahecha Bohórquez D.P.

Resumen.
En este trabajo se desarrolla un algoritmo estocástico de aproximaciones externas para resolver un problema de minimizar los costos ocurridos controlando el nivel de la contaminación de aire en una cierta región de dimensión dos que es un problema de optimización semi-infinita.

Abstract
This work presents a mathematical model that reached compliance with air quality standards for the every ground level point of the mining area, while minimizing the control costs which thereby occur. These air quality standards give rise to an infinite number of constraints and this is a semi-infinite programming problems. Semi-infinite programming is a next level of extension of elementary finite linear programming where now finitely many variables occur in infinitely many constraints.

Palabras claves: optimización semi-infinita, problema de contaminación de aire, métodos de aproximaciones externas.

Introducción.
Muchas países del mundo han establecido las leyes y regulaciones para la calidad de aire y han implementado los estándares de emisión.

La norma de calidad del aire es un dispositivo legal que establece un límite máximo permisible de concentración de un contaminante del aire (dióxido de azufre (SO2), monóxido de carbono (CO), dióxido de nitrógeno (NO2), ozono (O3), plomo (Pb) y material particulado en suspensión PM (polvo, cenizas, partículas metálicas, cemento o polen) dentro de un tiempo promedio de muestreo determinado, definido con el propósito de proteger la salud y el ambiente

Las normas de la calidad aérea llevan [1] al conjunto infinito de restricciones llamado "conjunto de restricciones de la calidad aérea" en una región, es decir, indican que la concentración en cada punto de la tierra debe ser menor o igual que los estándares promedios.

El objetivo general de esta investigación es la construcción del algoritmo estocástico de las aproximaciones externas y el software para solucionar el problema de minimización de los costos de control de contaminación del aire. Los experimentos numéricos se realizan para diferentes problemas de optimización semi-infinita lineal y no lineal.

Definición del problema y algoritmo principal.
En una región de control bidimensional dada S, tiene que ser garantizada cierta calidad del aire (2,3). Al mismo tiempo, el promedio de la concentración anual de un contaminante (por ejemplo, dióxido de azufre o monóxido de carbono) tiene ser guardado debajo de una norma prescrita que se describe por una función real φ en S. Se asume que la concentración existente en S viene de dos tipos de fuentes: plantas químicas - fuentes que pueden ser controlados y entonces regulados y fuentes que no pueden ser controlados, en primer lugar transporte.

Para minimizar los costos del control de contaminación del aire podemos formular este problema utilizando función lineal de costos y conjunto infinito de restricciones, así llegamos a siguiente problema de optimización semi-infinita:

$$P(S)\quad \textit{Minimizar} \qquad c(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a las restricciones

$$g(x,s)=\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)u_j(s)+u_0(s)\le \varphi(s) \quad \forall s\in S,$$

donde $x_1,\dots,x_n \in [0,1]$ son los factores de reducción de la contaminación (porcentajes de la cantidad de reducción de la contaminación en cada fuente) con sus costos respectivos $c_1,\dots,c_n$; u_0 - contribución a la contaminación de fuente no controlable; $u_1,\dots,u_n$ son plantas químicas contaminantes (fuentes de contaminación) y S es el área de control. La función de costos muchas veces es difícil de determinar en la forma explicita.

Muchos problemas de ingeniería, física, robótica, matemáticas se llevan a los problemas de optimización semi-infinita apenas aparece alguna dependencia de las coordinadas o del tiempo (1,3,4). Son problemas de programación matemática donde optimizamos función objetiva sujeta a conjunto infinito de restricciones. Actualmente, en el mercado se encuentra bastante software para la solución de problemas clásicos de optimización. Los problemas de programación semi-infinita son muy complicados y no existe software para resolverlos. Por eso en el área de investigación de operaciones el problema de desarrollo de los algoritmos numéricos para los problemas restringidos con el numero infinito de restricciones es muy actual.

Una de las mejores herramientas para la solución de este clase de problemas es el método estocástico de las aproximaciones externas (1,4). Su idea principal consiste en el reemplazo del problema original *P(S)* con la secuencia de los problemas aproximadas mas sencillas $P(S_n)$, n=1,2,..., donde cada problema $P(S_n)$ depende solo del conjunto finito Y de parámetros:

$$P(S_n)\quad \textit{Minimizar} \qquad c(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeta a las restricciones

$$g(x,s)=\sum_{j=1}^{n}(1-x_j)u_j(s)+u_0(s)\le \varphi(s) \quad \forall s\in S_n,$$

aquí S_n son conjuntos finitos de restricciones activas de cada problema aproximado $P(S_n)$. Para encontrarlos el método utiliza búsqueda activa a partir un punto aleatorio de área factible (procedimiento SPROC.ACTIV.medio).

Como el criterio de optimización utilizamos función cuasi-optima $\Theta(x,S_n)$ para evaluar que tan cerca se encuentra el punto x de la solución del problema aproximado $P(S_n)$. En este algoritmo el criterio no depende de ningún método especial, es decir, para calcular función cuasi-optima no necesitamos resolver adicionalmente algún problema como se hacia anteriormente en otros problemas de optimización semi-infinita (vea 4). Así, para nuestro caso la función cuasi-optima es:

$$\Theta(x,S)=\max\Big(c(x)-\min_{\substack{x\in X:\\ g(x,s)\le\varphi(s)\,\forall s\in S}} c(x),\ \max_{s'\in S} g(x,s')\Big)$$

Algoritmo SMETH.ACTIV.medio

Paso 0. n:=1 $S_1 := \varnothing$.
Paso 1. Encontrar x^n - solución del problema $P(S_n)$.
Paso 2. Llamar procedimiento SPROC.ACTIV.medio con los parámetros x^n y S_n.
Obtener ΔS_n y θ_n.
Paso 3. Formar el conjunto nuevo de restricciones
$$S_{n+1} := \Delta S_n \cup \bigcup_{\substack{j:\theta_j>\delta/n\\ 1\le j\le n-1}} \Delta S_j\ .$$
Paso 4. n:=n+1 y regresar al paso 1.

Procedimiento SPROC.ACTIV.medio

Parámetros de entrada: $x \in X^0$, $S \in \mathrm{M}_f(S^0)$.
Parámetros de salida: $\theta \in \Re^1_+$, $\Delta S \in \mathrm{M}_f(S^0)$.
Parámetro del procedimiento: $\delta>0$.
Paso 0. i:=1.
Paso 1. Aplicar el algoritmo de la búsqueda local para solución del problema $\max_{s \in S^0} g(x,s)$ empezando desde un punto aleatorio s_i para òbtener el punto $s_i^* \in S^0$, tal que:
$s_i^* \in S^{\varepsilon}_{stat}(x)$, $g(x,s_i) \le g(x,s_i^*)$.
Paso 2. $\theta_i = \max(g(x,s_1^*),..., g(x,s_i^*))$.
Paso 3. (Paso de control.) Si $i \cdot \theta_i \le \delta$ entonces i:=i+1 y regresar al paso 1.
Paso 4. $\theta := \theta_i$;
$\Delta Y := \{s_i, s_i^*\}$ y salida.

El algoritmo termina de trabajar cuando no hay ya no encontramos puntos activos que no cumplen restricciones del conjunto factible.

El algoritmo propuesto es una versión del método general SMETH.ACTIV propuesto por Zavriev, Volkov en (4).

Experimentos numéricos y resultados.

El algoritmo propuesto SMETH.ACTIV.medio fue aplicado para los experimentos numéricos para casos lineales y no lineales.

Consideremos tres plantas químicas P_i las cuales emiten el mismo contaminante. El objetivo es reducir la contaminación del aire hasta los estándares para todo el área de control S. Las funciones exponenciales $u_i(s), i=1,2,3$, son contribuciones de P_i a las concentraciones del contaminante en el punto $s \in S$ y las variables $x_i (i=1,2,3)$ sean los porcentajes necesarias de reducción del contaminante en cada planta a P_i $(0 \le x_i \le 1)$ para cumplir con la concentración máxima permitida (aquí es la constante ½) minimizando el costo total de control *c(x)*.

Ejemplo 1. Caso lineal.

Minimizar la función:
$$c(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$
sujeta a las restricciones
$$z(x,s) = \sum_{i=1}^{3} (1-x_i) u_i(s) - 1/2 \le 0, \quad s \in S = ([-1,4],[-1,4])^T$$
Aquí $u_i(s)$, $i=1,2,3$, dados como
$$u_1(s) = (1/s_1)\exp((-1/s_1)(1+(s_2-1)^2)) \quad \text{para } s_1 > 0$$
$$u_2(s) = (1/s_1)\exp((-1/s_1)(2+(s_2^2/4)) \quad \text{para } s_1 > 0$$
$$u_3(s) = (1/(s_1-2))\exp((-1/(s_1-2))(1+(s_2+1)^2)) \quad \text{para } s_1 > 2$$
$u_{1,2,3}(s) = 0$ en el caso contrario. El sistema de coordinadas y proposiciones se asuman como en (2, 3).

Aplicando el algoritmo SMETH.ACTIV.medio realizamos los experimentos numéricos empezando desde diferentes puntos iniciales, con diferentes parámetros y áreas de control.

En la Tabla 1. podemos observar algunos resultados para este ejemplo. Aquí en la primera columna podemos observar numero de iteraciones que igual al numero de restricciones activas encontradas para solucionar el problema con la exactitud propuesta. Hay que notar que según los cálculos toda la concentración de contaminación de las tres plantas se encuentra aproximado en el punto (2.897737, -0.840293) donde este resultado coincide con (3) que ha solucionado este problema con el método de discretizaciòn.

Tabla 1. Resultados para el ejemplo 1 (caso lineal).

No. de iteraciones y el numero de restr. activas	Coordinadas de punto critico approx. (concentración de la contaminación)	Punto inicial	Punto optimo	Valor de función
3	(2.897737, -0.840293)	(0,0,0)	(0.0,0.0, 0.2729)	0.27298
5	(3.195362, -0.884669)	(0,0,0)	(0.0,0.0, 0.2730)	0.27303
4	(3.035533, -0.922631)	(0.15,0.2,0.05)	(0.0,0.0, 0.2750)	0.27506
3	(3.055767, -0.863967)	(0.15,0.2,0.05)	(0.0,0.0, 0.2752)	0.27526

El punto optimo x_{opt} = (0.0,0.0, 0.2730) indica que para cumplir con los estándares propuestos en el problema y obtener el costo mínimo solamente hay que reducir en 27.52% la emisión de los contaminantes en la tercer planta química.

En la Figura1 podemos observar la ubicación del área critica de color negro (los puntos del área de control que z(x, s)> -0.0001 en el punto optimo), el área donde -0.1 < z(x,s) <= -0.0001 de color gris oscuro y el área donde z(x,s)<=-0.1 de color gris claro. Como podemos ver en el área negro se encuentra el punto critico aproximado (2.897737, -0.840293) que aparece en la Tabla 1, además, el área negro es donde la restricción z(x,s) <= -0.0001 o sea de toda forma en este área estamos cumpliendo que z(x,s)<=0 que propone nuestro conjunto factible del problema planteado.

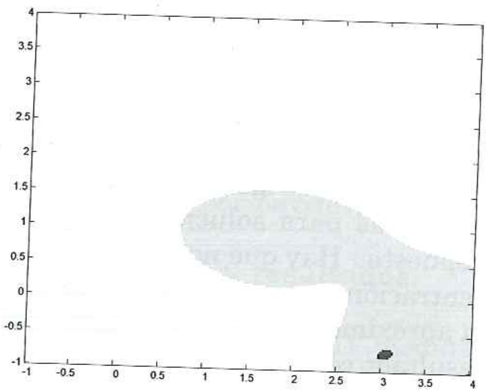

Figura 1. El caso lineal para el punto optimo (0.0,0.0,0.2729).

Ejemplo 2. Caso no lineal

Minimizar la función:

$$c(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 30x_3^2 + 30x_3^3$$

sujeta al mismo conjunto de restricciones y el misma área de control. Aplicando el algoritmo SMETH.ACTIV.medio llegamos a los siguientes resultados (ver Tabla 2).

Tabla 2. Resultados para el ejemplo 2 (caso no lineal).

No. de iteraciones y el número de restr. activas	Coordinadas de punto crítico aprox.	Punto inicial	Punto óptimo	Valor de función
3	(3.054029, -0.840367)	(0,0,0)	(0,0.3552,0.1119)	1.95107
4	(2.991705, -0.857316)	(0,0,0)	(0,0.3542, 0.1122)	1.94966
4	(2.941609, -0.936625)	(0.3,0.2,0.1)	(0,0.3552, 0.1119)	1.95102
5	(3.105584, -0.876363)	(0.0,0.0,0.0)	(0,0.3553,0.1119)	1.95109

En la Figura 2 vemos que la función de restricción se cumple z(x,s)<=0 en todo el área de control.

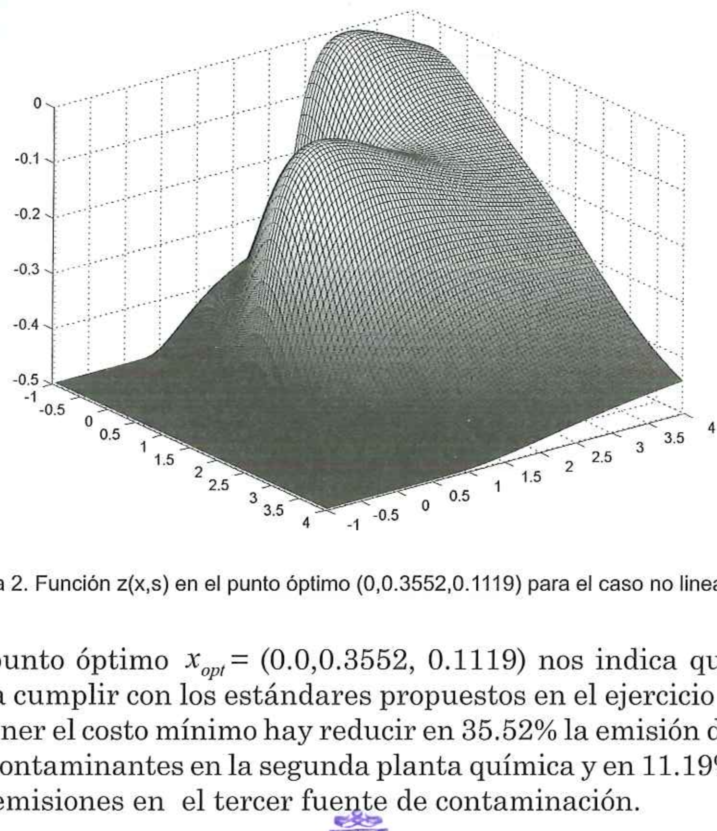

Figura 2. Función z(x,s) en el punto óptimo (0,0.3552,0.1119) para el caso no lineal.

El punto óptimo x_{opt} = (0.0,0.3552, 0.1119) nos indica que para cumplir con los estándares propuestos en el ejercicio y obtener el costo mínimo hay reducir en 35.52% la emisión de los contaminantes en la segunda planta química y en 11.19% las emisiones en el tercer fuente de contaminación.