6. Conclusiones

Se ha presentado una experiencia demostrativa que permite cuantificar el corrimiento Doppler de la frecuencia de una señal sonora emitida por una fuente que se mueve con una oscilación armónica.

La coincidencia entre el modelo teórico y los datos obtenidos de un espectograma permite validar la experiencia.

En trabajos futuros podría considerarse tanto el tratamiento de rangos con velocidades cercanas a la velocidad del sonido, como el cambio en la posición del receptor.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería de la Universidad Autónoma de Bucaramanga por el préstamo de sus equipos en el desarrollo de esta experiencia.

Referencias

1. *Catalogue of Physics Experiments Leybold Didactic GmbH. 2001, Germany. p.p 58.*
2. *Saba, Marcelo, Da S. Rosa Rafael. The Doppler effect of a sound source moving in a circle. The Physics Teacher. vol. 41 February 2003 p.p 89-91.*
3. *Saba, Marcelo, Da S. Rosa, Rafael A quantitative demonstration of the Doppler effect. The Physics Teacher. vol 39. Octubre 2001. p.p 431-433.*
4. *Alonso, M. y Finn, E. Física, Pearson Educación. México 1995. p.p 655-656.*

Modelos matemáticos para procesos de mercado

Henry Lamos Díaz, Ph.D., Luis Alfredo Rojas

Modelos matemáticos para procesos de mercado

Henry Lamos Díaz Ph. D., e-mail: hlamos@unab.edu.co
Luis Alfredo Rojas, e-mail: lrojas@unab.edu.co

Resumen

En la actualidad la dinámica de las empresas ha obligado el desarrollo de sistemas organizacionales complejos, al cuyo análisis requiere de modelos conceptuales llamados también diagramas de flujos, modelos estructurales o modelos causales. La construcción de Modelos Matemáticos en Ingeniería de Mercados es de desarrollo reciente. El presente artículo pretende dar cierta orientación sobre el uso e importancia de los Modelos Matemáticos que pueden ser usados como herramienta en los procesos de toma de decisiones; es decir mediante la modelación matemática lograr conocer, entender e interpretar los fenómenos del Mercado. El término de Modelo en el presente trabajo se refiere a un conjunto de ecuaciones que relaciona variables y parámetros en la descripción de un proceso o sistema.

Abstract

At the present time the dynamics of the companies has forced the development of complex organizational systems whose analysis requires of models conceptual calls diagrams of flows, structural models or causal models. The construction of Mathematical Models in Engineering of Markets is of recent development. The present article seeks to give certain orientation about the use and importance of the Mathematical Models that can be used as tool in the processes of taking of decisions; that is to say through the modeling to be able to know, to understand and to interpret the phenomena of the Market. The term model, as used in this work, is understood to refer to the ensemble of equations which describe and interrelate the variables and parameters of process o system. The term modeling in turn refers to the derivation of appropriate equations that are solved for a set of system or process variables and parameters.

1. Introducción

Robert Frost sugirió que un poema es una forma concisa de expresión que por definición, no puede traducirse nunca con suficiente precisión. Eso mismo puede decirse de las matemáticas: la mejor manera de comprender y apreciar la belleza de una ecuación es verla como descripción del "mundo".

Por la complejidad de los problemas de Mercados en la toma de decisiones el Ingeniero de Mercados no sólo debe contentarse con una descripción verbal del objeto o medio (la cual es muy importante), sino que debe ser capaz de dar una formulación matemática del proceso u objeto de estudio, es decir, describir matemáticamente los factores esenciales del proceso y sus interrelaciones. La descripción verbal se realiza en términos de relaciones entre las variables significativas, por ejemplo, el precio, publicidad, tamaño de mercado, ambiente de competencia, demanda o en términos de diagramas de flujo. En el proceso de la formulación del Modelo Matemático para las variables pertinentes se postulan relaciones en forma de leyes ("ley de la conservación de la energía", "ley del momentum"), fórmulas, teorías, todo esto es lo que constituye la idealización del "mundo real" al "mundo matemático".

Un modelo se dice que es satisfactorio, si es satisfactorio para el proceso de toma de decisiones, en caso contrario se dice que no es satisfactorio. Un modelo matemático satisfactorio está sujeto a dos requisitos contradictorios. Debe ser suficientemente detallado para representar la situación del mundo real con relativa exactitud, y aun así debe ser lo suficientemente sencillo para resolver las correspondientes ecuaciones (hacer un análisis matemático). Si el modelo es demasiado detallado en la representación del mundo real, entonces el análisis matemático puede ser demasiado difícil de llevar a cabo. Si el modelo es demasiado simple, los resultados de predicción pueden ser demasiados pobres e imprecisos que sean inútiles; por lo tanto, hay un compromiso ineludible entre lo que es físicamente realista y lo que es matemáticamente posible.

2. Modelación matemática

La modelación es el proceso de reconstrucción de un proceso natural de su "medio" a una forma llamada modelo, el cual puede analizarse por medio de técnicas que entendemos y en las que confiamos. Un modelo es un dispositivo que ayuda al investigador a predecir o explicar el comportamiento de un fenómeno, experimento o suceso. Por ejemplo, para pronosticar la cantidad total de personas que verán un comercial de publicidad, es claro que sola la intuición no nos alcanza para determinar claramente el alcance del comercial. En la figura 1 se ilustra el uso de modelos para explicar los resultados de una situación observable.

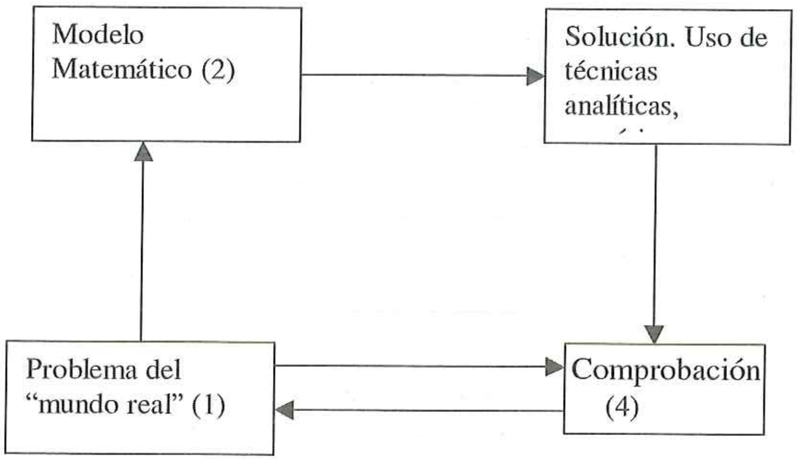


Figura 1

A amplias partes del ambiente natural (el punto 1 de la figura) se les da una expresión matemática mediante un modelo general en el que todos los resultados quedan descritos por algunos principios básicos (el punto 2 de la figura); la traducción del mundo real al mundo matemático por medio de operadores o ecuaciones, luego se resuelve el problema matemático (a menudo con una simulación en la computadora) (punto 3) y el resultado se interpreta en el entorno natural del problema (punto 4).

De manera general el primer paso en la formulación matemática de un problema real es el diseño de la estructura del modelo, esto es, la descripción cualitativa del proceso usando ciertos operadores o ecuaciones. Este procedimiento se llama IDENTIFICACIÓN ESTRUCTURAL. Frecuentemente los Modelos Matemáticos básicos para la descripción de procesos están constituidos por operadores diferenciales.

TIP. Las ecuaciones diferenciales ordinarias suelen surgir en las aplicaciones como resultado de un principio fundamental: si $y(t)$ denota una magnitud de interés en el instante t, entonces la tasa de cambio $y'(t)$puede calcularse como el caudal de entrada menos el de salida "ley de equilibrio". Los modelos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias se denominan modelos con "parámetros concentrados" y los modelos descritos por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se llaman modelos con "parámetros distribuidos".

El segundo paso en la descripción de un problema matemático es la identificación de sus parámetros (reflejos de las propiedades o la composición del sistema). Este paso se conoce como IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA.

La identificación estructural y la identificación paramétrica de los procesos están fuertemente unidas a la solución de problemas inversos para ecuaciones diferenciales.

Cuando dos clases de magnitudes se relacionan en una dependencia unidimensional causa-efecto y el fin es establecer una relación tipo causa-efecto, es decir dada la causa encontrar el efecto, estaremos tratando con un problema directo. Si algunas características causales necesitan ser recuperadas a través de cierta información sobre los campos físicos entonces se tiene un problema inverso.

El no cumplimiento de la relación causa-efecto que tiene lugar en el planteamiento del problema inverso puede llevarnos a un problema matemático mal puesto, frecuentemente a la inestabilidad de la solución; denominada sensibilidad/continua respecto a los datos. Por lo tanto, los problemas inversos representan ejemplos típicos de problemas mal planteados.

TIP. En resumen podemos decir que un Modelo Matemático es una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales del fenómeno o proceso físico en términos matemáticos, estos es:

Var. Dep =f (var .ind, param,func.de fuerzas)

donde, Var.dep es la variable dependiente; es una característica o varias características que generalmente refleja(n) el comportamiento(s) o estado(s) de un sistema; var.ind son las variables independientes, generalmente dimensiones tales como el tiempo, espacio, a través de las cuales el comportamiento será determinado, los parámetros son reflejos de las propiedades o la composición del sistema, suelen ajustarse para "sintonizar" el comportamiento de la respuesta deseada y func.de fuerzas son las funciones de fuerzas las cuales son influencias externas que actúan sobre el sistema.

2.1 Pasos para construcción de modelos matemáticos (mm)

Para la construcción de un modelo matemático se requiere habilidad, imaginación y evaluación objetiva. En la formulación del problema se requiere una comprensión del área del problema, lo mismo que de las matemáticas correspondientes.

Las siguientes preguntas son simplemente lineamientos generales que le permiten al investigador seguir una metodología para la construcción del Modelo que representará su realidad.
¿Cuáles son las hipótesis a usar?
¿Cuáles son las dimensiones físicas de las variables?
¿Es el modelo generado internamente consistente en el sentido de que las ecuaciones no se contradigan entre sí?
¿Qué tan difícil resulta obtener las soluciones?
¿Existen soluciones de las ecuaciones que describen el mundo "físico" que se esta modelando?
¿Proporcionan las soluciones una respuesta del problema en estudio?
Después de haber sido resueltas las cuestiones anteriores, se debe ir refinando el modelo en cada etapa de validación del modelo, lo cual constituye una prueba de que el modelo se puede utilizar para predecir resultados. Es de anotar nuevamente que un modelo no es la descripción total de una realidad, sino sólo una representación (un retrato) en el lenguaje de las matemáticas. Como todos los retratos, el modelo destaca ciertas características del original y distorsiona otras. Modelos más refinados pueden proporcionar una mejor comprensión de los procesos de la naturaleza, pero podrían traer como consecuencia una dificultad mayor para su solución bien sea analítica o numérica.

Ejemplo de una Ley. **Ley de la Gravitación Universal**
1. Manzanas y naranjas. Casi todo el mundo conoce en mayor o menor grado el nombre y la reputación de Isaac Newton (1642-1727), ya que su fama universal como descubridor de la Ley de la Gravitación Universal se ha mantenido incólume a lo largo de los siglos desde su muerte. La ley reza así

$$F = \frac{G \times M \times m}{d^2}$$

donde G es una constante, M,m,d son las masas de los cuerpos y la distancia a la que se encuentran. Pero cuál es el significado de esta ley, simplemente podemos decir que el tirón gravitatorio de la Tierra se debilita cuanto más lejos se esta de la Tierra y se debilita con el cuadrado de la distancia. Por ejemplo, una manzana dos veces más lejos de la Tierra notaría un tirón equivalente a la cuarta parte. (En otras palabras, la fuerza se divide por cuatro, el cuadrado de dos). Una manzana tres veces más lejos de la Tierra notaría un tirón nueve veces menor, y así sucesivamente. En un lugar tan distante como la Luna, el tirón de la Tierra sería desde luego débil pero seguiría existiendo.

TIP. "Newton había desvelado que buena parte de lo que el Universo había sido, era y sería, era el resultado de una infinidad de partículas materiales que tiraban unas de otras simultáneamente. El resultado de la pelea gravitatoria (los cielos de Aristóteles) que les había parecido a los griegos un cosmos era sencillamente porque la ecuación subyacente que describía su comportamiento había resultado ser un auténtico cosmos en sí: ordenada, bella y decorosa." [2]
A continuación daremos una serie de ejemplos sencillos que nos permiten ver la metodología en la construcción de un Modelo Matemático.

1. UN MODELO DE RESPUESTA AL MERCADO MODELO DE VENTAS. En muchas situaciones se modelan tasas de cambio que de hecho son instantáneas. Por ejemplo, el flujo de calor de un cuerpo caliente o frío ocurre continuamente, por lo que hay una tasa (razón) instantánea de cambio de la temperatura. En otros casos, como en los modelos de poblaciones, se aproxima la tasa media de cambio de la población por la tasa instantánea de cambio de la población. Las tasas son una derivada con respecto del tiempo.
Supongamos que N(t) representa el número de individuos en una población bajo la influencia de determinado comercial publicitario en el momento de tiempo t (medido en semanas);

entonces la tasa de cambio neto de individuos de la población que ven el comercial por semana es .

$$\frac{dN}{dt} = N'(t)$$

Según investigaciones de mercados se pronostica que habrá un límite de K personas que verán el anuncio. El propósito es determinar el comportamiento a través del tiempo de las personas que son influenciadas por el comercial.

HIPOTESIS A USAR: ¿Cómo podemos determinar la relación funcional entre N y t.? Una suposición simple es pensar que la tasa con que crece o decrece la cantidad de individuos bajo la influencia del comercial sólo depende del número presente de personas que ven el comercial y no de mecanismos dependientes del tiempo, esto es $N'(t) = f(N)$, donde $N'(t)$ denota la derivada de N respecto al tiempo. Ahora es necesario modelar la forma de la función f(N). Ya que la cantidad de personas que verán el comercial es K entonces de la ecuación diferencial tenemos que f (K)=0; si tomamos a $f(0)=r$; podemos tener varias funciones que satisfacen estas condiciones. La hipótesis más sencilla es que la función f (N) sea lineal; esto es $f(N) = c^1 + c^2N$.

O bien podríamos asumir que la función f (N) es un polinomio de grado 2 o más. ¿Cuál es el polinomio más adecuado? Generalmente se empieza con un modelo más bien sencillo (tomamos a $f(N)$ como una función lineal), si el modelo no resulta satisfactorio para los fines de predicción, podemos entonces tomar la función como un polinomio de mayor grado, por ejemplo, una función cuadrática, obteniendo en este caso la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = N(r - \frac{r}{K}N); \qquad (1)$$
$$N(0) = N_o$$

La solución del problema esta dada por la fórmula

$$N(t) = \frac{aN_o}{bN_o + (a - bN_o)e^{-at}}, \quad N(0) = N_o, a = r, b = \frac{r}{K}. \qquad (2)$$

Está fórmula nos indica el comportamiento del sistema dinámico que estamos modelando, esto es la dependencia de N con respecto al tiempo t ; al variar los parámetros r, K, N_0 podemos observar la dependencia de N(t) respecto a los parámetros.

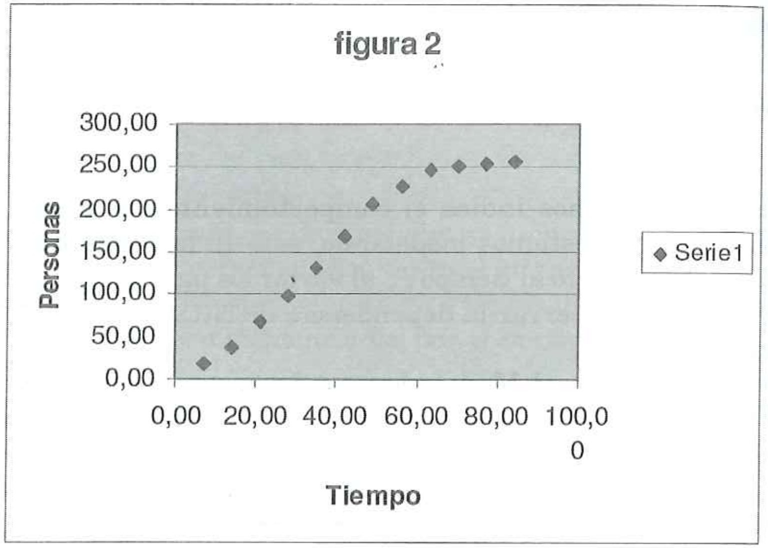
A continuación el Modelador puede preguntarse si esta formulación "es satisfactoria para la descripción del mundo real"; si este es el caso puede usar su Modelo bien sea para fines predictivos o para la toma de decisiones. A continuación presentamos un experimento numérico.

Experimento numérico.

Supóngase que tenemos el siguiente conjunto de datos obtenidos de comerciales similares para nuestro producto

Tiempo (dias)	Número de personas que ven el comercial (Unidades de 1000)
7	17.93
14	36.36
21	67.76
28	98.10
35	131.00
42	169.50
49	205.50
56	228.30
63	247.10
70	250.50
77	253.80
84	254.50

Este conjunto de datos se grafica en la figura (diagrama de dispersión de las variables versus)



Queremos determinar si el modelo propuesto anteriormente se ajusta al conjunto de datos. Nótese que existen tres constantes desconocidas en la solución: N_o, a, b . Usando algún software adecuado determinamos las constantes y remplazando en la ecuación (2) tenemos.

$$N(t) = \frac{12.94}{e^{-0.087t} + 0.0498}$$

Ahora evaluemos la función para los diferentes tiempos que se muestran en la tabla de arriba, esto es $N(t_i)$; los resultados después de la evaluación son: 21.796, 37.44, 61.416, 94.239,132.86, 170.97, 202.57 225.21, 239.78, 248.53, 253.57, 256.39. Como se puede observar son bastante similares a los datos reales.

Ahora si nuestro modelo no fuera satisfactorio para la predicción (o los objetivos que se persiguen), entonces sería necesario refinar el modelo propuesto. Refinar un modelo

significa tener en cuenta hechos anteriores que no fueron capturados en el MM inicial; por ejemplo, la función *f(N)* depende no solo explícitamente de N sino también de t o puede existir alguna fuente que hace que se debilite el anuncio del mensaje.

2. Oferta y demanda.

Supóngase que se tiene un bien tal como café o petróleo. Sea p el precio de este bien por alguna unidad especificada (por ejemplo, barril de petróleo) en cualquier instante t. Entonces podemos pensar que p es una función del tiempo t; esto es p(t).

El numero de unidades del bien que desean los consumidores por unidad de tiempo en cualquier tiempo t la denotaremos como D(t). Esta función no sólo depende de p(t) sino también de la dirección en la cual los consumidores creen que tomarán los precios, esto es, la tasa de cambio del precio o derivada p'(t).

Por lo tanto podemos decir que la demanda es una función de la función precio y de su derivada

$$D = f(\,p(t), p'(t)\,)$$

Llamamos f la función de demanda.

Similarmente la oferta la denotaremos como S(t) y las escribiremos mediante

$$S = g(\,p(t), p'(t)\,)$$

Llamamos a g la función de oferta.

HIPÓTESIS PARA UTILIZAR:

1. Una economía libre
2. No hay demora en el suministro
3. No se considera los precios de otros bienes o el ingreso
4 Los precios, demanda, y oferta son continuos.

TIP. Principio económico de la oferta y la demanda:

f (p (t), p'(t)) = g (p (t) , p'(t)). (3)

La ecuación anterior es una ecuación diferencial de primer orden para determinar a p (t) si se conocen las formas de las ecuaciones f y g.

Naturalmente surge la pregunta sobre las formas funcionales de f y g; como lo hicimos para el modelo de respuesta el Modelador asume la forma más conveniente y de acuerdo con esto tendríamos varios Modelos para describir nuestra realidad.

Por ejemplo,

$$D = f(p(t), p'(t)) = a_1 p(t) + a_2 p'(t) + a_3,$$
$$S = g(p(t), p'(t)) = b_1 p(t) + b_2 p'(t) + b_3$$

Donde son constantes. Al remplazar en el principio económico de la oferta y la demanda obtenemos el siguiente MM

$$p'(t) + \left(\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}\right) p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2}$$

que representa una ecuación diferencial. Al resolver el MM tenemos

$$p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} + \left(p_o - \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1}\right) e^{-(a_1 - b_2)t/(a_2 - b_2)}$$

Observemos que nuestra solución depende de los parámetros y de la condición inicial, esto es de suma importancia porque nos permite realizar lo que se conoce como "análisis de sensibilidad", el modelador puede variar sus parámetros para obtener conclusiones acerca de su mundo real bajo diferentes circunstancias. Por ejemplo, si $p_o = \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1}$

en este caso vemos de la expresión para *p(t)* que los precios permanecen constantes en todo el tiempo; $p(t)=p_0$. Otro caso es cuando

$$\frac{a_1 - b_1}{a - b_2} < 0.$$

En este caso vemos que *p(t)* crece indefinidamente a medida que t crece, asumiendo que,

$$p_o > \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1}$$

esto es, tenemos una inflación continua o una inestabilidad de precio. Es posible por supuesto que las constantes a_i, b_i cambien de tal manera que sobre un intervalo de tiempo tengamos un conjunto de constantes, sobre otro intervalo un conjunto diferente. Más general, los parámetros a_i, b_i podrían ser funciones del tiempo.

3. Modelos compartimentales (comportamentales). Una técnica poderosa para analizar procesos del Mercado es el análisis de compartimientos que permite estudiar y entender un proceso complejo y separarlo en secciones o compartimientos de tal forma que en cada compartimiento el proceso sea más fácil de estudiar. Un modelo de compartimiento consta de un número finito de componentes (o cajas) unidos por flechas. Cada flecha indica que la "sustancia" de la que se lleva un registro sale de la caja final de la flecha y entra en la caja adonde llega la punta de la flecha. Matemáticamente se describe:

$x'(t)=Ax + Bu + f,$
$x(t_0) = x_0$

donde $x(t)=,x(_1(t),x_2(t),\ldots x_n(t))$es la función de salida o solución; las componentes $x_i(t)$ se denominan variables de estado, *A* es una matriz de orden n llamada matriz de transformación, los coeficientes de la matriz representan tasa de cambio, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots u_k(t))$es una función de entrada (control) , B es una matriz nk que representa cómo están distribuidas las entradas entre los compartimientos del sistema y f es una fuente.

TIP. La matriz A puede depender del tiempo e incluso de la variable de estado $x_i(t)$.

3.1 El problema depredador - presa

Hay muchas situaciones en la naturaleza donde una especie animal se alimenta de otra especie animal, la cual a su vez se alimenta de otras cosas. Teóricamente el depredador puede destruir toda la presa de modo que esta última llegue a extinguirse. Sin embargo, si esto sucede el depredador también se extinguirá puesto que, como se asume, depende de la presa para su existencia. Esta aplicación no se limita sólo a la ecología o a la ciencia de la vida sino también a otros campos.

En marketing, por ejemplo, los productores compiten entre si por los consumidores, y aún los consumidores pueden competir entre si por los productos.

Un MM muy conocido es el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = x(-a + by)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-d + cx)$$

donde, x es la población de depredadores y y la de presas, y las constantes de tasa de cambio a,b,c,d son positivas.

3.2 Modelos de competencia

Consideremos que hay dos productores P1 y P2 de cierto producto A que compiten por un mercado potencial de

consumidores. Cuando falta un productor, supongamos que la razón de crecimiento de sus ventas de cada productor es

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$\frac{dy}{dt} = cy,$$

donde x(t), y(t) son las ventas de los productores respectivamente. Pueden darse condiciones iniciales a cada una de las variables de estado, así que tenemos el problema de valor inicial (PVI); las condiciones iniciales las podemos escribir como: $x(t_0)=x_0$, $y(t_0) = y_0$. Al resolver nuestras ecuaciones observamos que las ventas de cada productor crecen de manera exponencial lo que nos indica que el modelo no es adecuado para describir la situación, esto es ventas infinitas (sueño ideal de cualquier productor). En la descripción anterior no tuvimos en cuenta que los productores compiten entre si, por lo tanto las ventas de ambos se ven menguadas por la influencia de cada uno de ellos. Así, un posible modelo para describir la realidad puede ser el siguiente

$$\frac{dx}{dt} = ax - by$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dx$$

aquí a, b, c, d son constantes positivas. Este sistema se conoce como sistema lineal de ecuaciones diferenciales. La solución la podemos obtener usando un software como matlab.

Por otra parte, bien podríamos suponer que el modelo anterior no describe adecuadamente nuestro mundo real, en su lugar asumimos que cada rapidez de crecimiento de las ventas en las ecuaciones anteriores disminuyen a una tasa proporcional a la interacciones de los dos productores, supongamos que estas interacciones son **proporcionales al producto de las ventas**

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - dxy$$

TIP. Lógico que en este momento podemos estar pensando si es real nuestro modelo para describir la interacción entre los competidores, esto es lo que nosotros llamamos "idealización de nuestra realidad".

Podría ser más real si se reemplazan las tasas de crecimiento en las ecuaciones con tasas que reflejen que las ventas de cada productor crece en forma logística, de esta manera nuestro MM tomaría la forma:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2 y - b_2 y^2 - c_2 xy$$

A continuación presentamos un ejemplo hipotético adaptado del libro [3]

3.3 MODELO S-I-R. El siguiente es un modelo simple para la evolución de un anuncio publicitario (por radio, televisión o prensa). Supongamos que tenemos un grupo homogéneo de "N" individuos, que en algún momento "t" se compone de $S(t)$individuos susceptibles a la influencia del anuncio (aun no les a llegado el anuncio), $I(t)$ individuos que ya vieron el anuncio e influyó sobre ellos y $R(t)$ individuos que lo vieron (o escucharon o leyeron) pero que no incidió sobre ellos

(habían comprado el producto, el anuncio no iba dirigido hacia ellos), estos individuos los llamaremos "inmunes". Note que en realidad sólo tenemos dos cantidades desconocidas, ya que $S(t) + I(t) + R(t) = N$.

Si suponemos que la tasa a la cual los individuos susceptibles al anuncio llegan a ver el comercial es proporcional tanto al número de individuos sobre el cual hubo incidencia como al número de individuos susceptibles al anuncio, tendremos la ecuación diferencial

$$S' = -aSI \qquad (4)$$

Aquí tomamos a como una constante positiva, de modo que necesitamos de un signo negativo en esta ecuación, debido a que el número de individuos susceptibles al anuncio debe disminuir.

HIPÓTESIS: Ecuación de la conservación. La tasa de cambio del número de individuos influenciados por el anuncio rige por la ecuación de conservación

$$\frac{dI}{dt} =$$

tasa de individuos susceptibles al anuncio - tasa de individuos "inmunes"

Si suponemos que la tasa de individuos "inmunes" es proporcional al número de individuos sobre los cuales hubo influencia (la constante de proporcionalidad sería la constante positiva), entonces tenemos que

$$I = aSI - bl \qquad (5)$$

Note que debido a $S(t) + I(t) + R(t) = N$, tenemos $0 \leq S\ (t) + (t) = N - R\ (t) < N$

todo el tiempo, y que la tasa de cambio de la categoría eliminada está expresada por

$$R' = -S' - I' = bI \qquad (6)$$

Si suponemos que en el tiempo, un número "n" de personas llegan a ver el anuncio y el resto aún no lo ha visto, nuestras condiciones iniciales son

$$I(0) = n, \qquad S(0) = N - n, \qquad (7)$$

lo que implica que $R(0) = 0$.

La ecuación diferencial que gobierna las órbitas en el plano fase SI es:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{aSI - bI}{-aSI} = -1 + \frac{c}{S},$$

donde $c = \dfrac{b}{a}$

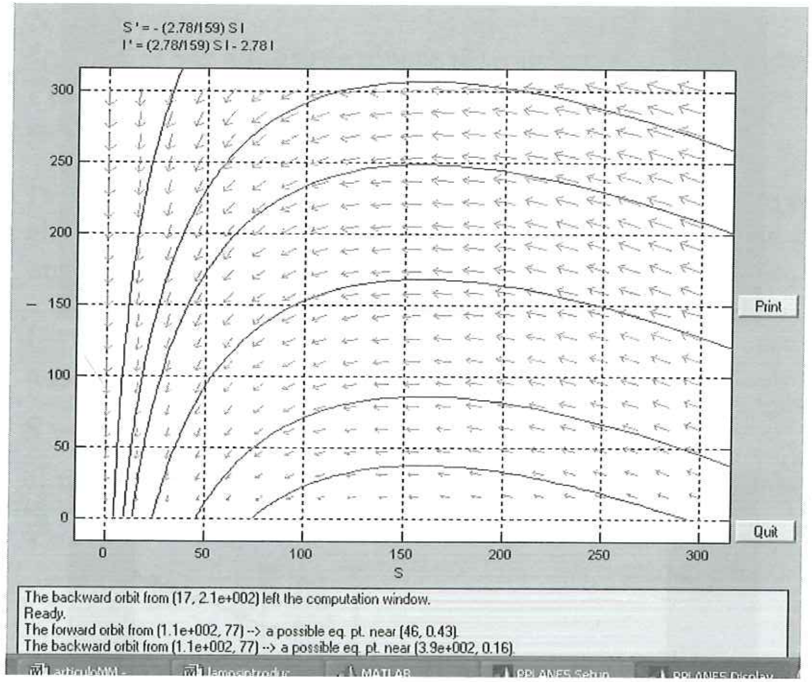
La integración proporciona la función denominada órbitas,

$$I(t) = -S(t) + c\ln S(t) + C \qquad (8)$$

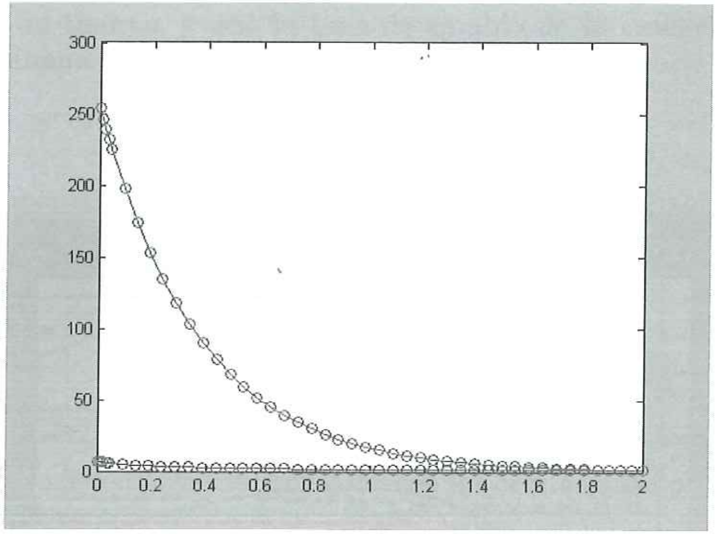
Tomando en cuenta las condiciones iniciales, hallamos que de manera que

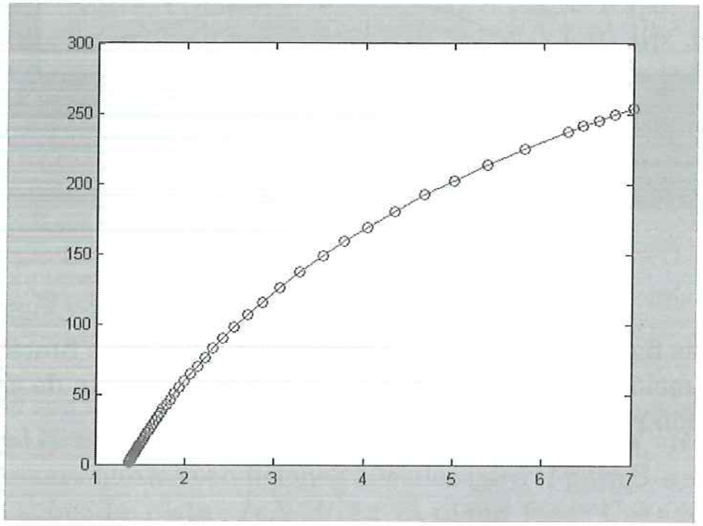
$$I(t) = N - S(t) + c\ln\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] \qquad (9)$$

Estás son las órbitas en el plano fase. En vista del hecho de que al tiempo $t = 0$, $R(0) = 0$, debemos tener $I(0) = N - S(0)$, de manera que las condiciones iniciales para I para S deben caer sobre la recta $I = N - S$ en el plano fase. Usando el software de matlab en las figuras se presenta algunas órbitas.



En las figuras se muestra el comportamiento de la función I en función de S, como también el comportamiento de cada función respecto al tiempo.





EXPERIMENTOS NUMÉRICOS. En la tabla 2 y la figura 3 muestran un conjunto de datos para el número de personas a la cual va dirigido el anuncio (con una población inicial de 261) desde el comienzo del anuncio hasta llegar a su término en intervalos regulares. Los valores para $S(t)$ en la tabla 2 fueron calculados a partir de $S(t)=N-R(t) - I(t)$, donde $N = 261$

Queremos ver cuánto se ajusta (9) a este conjunto de datos. Para hacerlo necesitamos efectuar una aproximación de c, sabiendo que $N = 261$ y $S(0)=254$.

De la figura 3 observamos que todas las órbitas finalizan en el eje Horizontal, de modo que a medida que finaliza el anuncio,

$$I \longrightarrow 0$$

a medida que

$$S \longrightarrow 83,$$

el número de individuos susceptibles al final de la misma. Si sustituimos esto en (9) encontraremos que

$$0 = 261 - 83 + c\ln\left[\frac{83}{254}\right]$$

lo cual nos permite obtener el valor aproximado de c=159

Tiempo			
0.0	0.0	7.0	254.0
0.5	11.5	14.5	235.0
1.0	38.0	22.0	201.0
1.5	78.5	29.0	153.5
2.0	120.0	20.0	121.0
2.5	145.0	8.0	108.0
3.0	156.0	8.0	97.0
3.5	167.5	4.0	89.5
4.0	178.0	0.0	83.0

Tabla 2

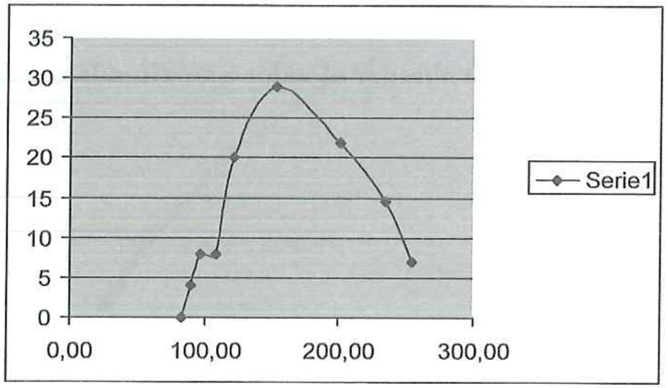


Figura 3

Si nos interesa el número de individuos "inmunes", entonces tenemos que

$$\frac{dS}{dR} = \frac{\frac{dS}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = \frac{-aSI}{dI} = \frac{-a}{b}S,$$

con solución

$$S(t) = A \exp\left[-\frac{a}{b}R(t)\right]$$

Donde A es una constante. Tomando en cuenta la condición inicial hallamos que

$$S(t) = S(0) \exp\left[-\frac{a}{b}R(t)\right] \qquad (10)$$

Por consiguiente de (6), (9) y (10), tenemos entonces que

$$\frac{dR}{dt} = bI = B\left\{N - S(t) + c\ln\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right]\right\} = b\left\{N - S(0)\exp\left[-\frac{a}{b}R(t)\right] - \frac{ac}{b}R(t)\right\},$$

Lo cual como consecuencia de que

$$c = \frac{b}{a},$$

se reduce a

$$\frac{dR}{dt} = b\left\{N - S(0)\exp\left[-\frac{a}{b}R(t)\right] - R(t)\right\}. \qquad (11)$$

No podemos resolver esta ecuación diferencial de primer orden en función de funciones familiares. No obstante, es una ecuación diferencial autónoma, así que podemos analizarla empleando ciertas técnicas que son expuestas en cursos tradicionales de Ecuaciones Diferenciales.

Conclusiones

1. Los modelos de decisión (Modelos Matemáticos) son la herramienta que se usa para la toma de decisiones de Mercado. La modelación matemática en Marketing es el proceso de formular comportamientos de los fenómenos de Marketing en términos matemáticos.
2. El presente artículo trato sobre los modelos de decisión tipo causa-efecto pero en la nueva Ingeniería de Mercados existen una amplia gama de modelos de decisión adaptables e interactivos, entre los que se encuentran modelos de diagrama de flujos, modelos de agrupamiento, modelos de clasificación, modelos de predicción, modelos de interdependencia, modelos de minería de datos y modelos de efecto-causa que se usan para el análisis, la planeación e implementación de estrategias y tácticas del Marketing.
3. La Facultad de Ingeniería de Mercados ha venido trabajando en la tarea de dar al Marketing una configuración rigurosa desde el punto de vista cuantitativo sin olvidar el paradigma cualitativo, así que nuestra intención al escribir este artículo fue aportar un grano en la construcción de este camino.

Referencias bibliográficas

[1] G. L Lilien ; A. Rangaswamy. Marketing Engineering. Addison-Wesley

[2] M. Guillen. Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo. TEMAS DE DEBATE. 1999

[3]D. Lomen; D. Lovelock. Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. CECSA.2000

[4] A. Astous; R. Sanabria; S. Sigue. Investigación de Mercados. Grupo Editorial Norma.2003